|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №7 |
|  |
| (Открытые и замкнутые множества в нормированном пространстве) |
|  |

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

Вариант 1

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 20.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Основы теории

Рассмотрим нормированное векторное пространство . Множество называется *открытым шаром* с центром в точке и радиуса . Множество называется *замкнутым шаром* с центром в точке и радиуса . Множество называется *сферой* с центром в точке и радиуса .

Множество называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторый открытый шар , с центром в этой точке и радиусом .

Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто в .

*Утверждение:*  Счетное объединение открытых множеств является открытым множеством.

*Утверждение:*  Пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

Множество называется *ограниченным*, если его можно заключить в некоторый шар сколь угодно большого, но конечного радиуса.

Точка называется *внутренней точкой*, если существует некоторый шар , с центром в этой точке и радиусом , такой что . Множество всех внутренних точек называется *внутренностью* множества.

Точка называется *внешней точкой*, если существует некоторый шар , с центром в этой точке и радиусом , такой что . Множество всех внешних точек называется *внешностью* множества.

Точка называется *граничной точкой*, если в любом шаре , с центром в этой точке и радиусом , существую точки принадлежащие и не принадлежащие . *Границей* множества называется множество его граничных точек.

Точка называется *точкой прикосновения*, если в некотором достаточно малом шаре есть хотя бы одна точка, принадлежащая . Точки прикосновения делятся на изолированные и предельные. Точка называется *изолированной точкой*, если в некотором достаточно малом шаре нет точек принадлежащих отличных от . Точка называется *предельной точкой*, если в любом шаре содержится бесконечно много точек, принадлежащих .

Множество точек прикосновения образуют *замыкание* множества .

*Теорема.* Всякое открытое множество на числовой прямой представляет собой сумму конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

*Следствие.* Всякое замкнутое множество на числовой прямой представляет собой числовую прямую без конечного или счетного числа непересекающихся интервалов.

*Расстоянием* от точки до множества назовем функцию . *Расстоянием* между множествами назовем функцию

*Утверждение*. Точка является точкой прикосновения множества тогда и только тогда, когда .

Пусть и – два множества в нормированном пространстве . Множество называется *плотным* в , если . Множество называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством . Множество называется *нигде не плотным*, если оно не плотно ни в одном шаре, принадлежащем множеству .

Нормированное пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное множество.

Примеры сепарабельных множеств: .

# Задание 1

## Постановка задачи

Определите, является ли множество открытым, замкнутым в , .

## Решение

Докажем, что множество M не является открытым. Выберем произвольное , то есть , . Из последнего условия следует, что или . Тогда для , такая, что и . Таким образом функция принадлежит шару но не принадлежит множеству , а значит в множестве нет внутренних точек, и оно не является открытым.

Проверим, является ли множество замкнутым в . Множество замкнуто, если , то есть предел любой сходящейся последовательности из множества тоже принадлежит множеству . То есть и , то и . Так как сходимость в равномерная, то из того что следует что , а значит , а значит множество является замкнутым.

Множество не является открытым в , так как любой открытый шар радиуса пространства содержит шар радиуса пространства . А так как не является открытым в множестве , то не будет таковым и в множестве .

Множество не замкнуто в , так как существуют точки прикосновения множества , которые ему не принадлежат. Рассмотрим функция , , и построим последовательность сходящуюся к .

Действительно, , но .

# Задание 2

## Постановка задачи

Образует ли множество монотонных функций подпространство в пространстве .

## Решение

Пусть – монотонные функции, а . Тогда, не трудно видеть, что – тоже монотонная функция.

Покажем, что множество монотонных функций замкнуто. Пусть есть последовательность монотонных функций . Покажем, что тоже монотонна.

Действительно, если , то , а значит – монотонна.