|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №8 |
|  |
| (Банаховы пространства) |
|  |

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

Вариант 1

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 13.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Основы теории

Пусть  – нормированное векторное пространство. Последовательность  называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если  при .

*Свойства последовательности Коши*:

1). Всякая фундаментальная последовательность ограничена.

2). Пусть последовательность  фундаментальна в , тогда числовая последовательность  также фундаментальна в .

3). Пусть  фундаментальны в , а , тогда последовательности  также фундаментальны в .

4). Если подпоследовательность  фундаментальной последовательности  сходится к , то сама последовательность  сходится к .

Всякая сходящаяся в  последовательность фундаментальна. Обратное выполняется не всегда.

Нормированное векторное пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

Банаховыми относительно их обычных норм являются следующие пространства: , , , , , , .

Банахово пространство  называется *пополнением* пространства , если выполняются следующие условия:

1). ;

2). для любого  выполнено ;

3).  всюду плотно в .

Для любого нормированного векторного пространства  существует пополнение.

В банаховом пространстве  любая последовательность замкнутых вложенных шаров , , радиусы которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку. Справедливо и обратное утверждение.

Пусть  – нормированное векторное пространство и в  двумя способами введены нормы: , .

Говорят, что норма  *подчинена* , если существует постоянная  такая, что для любого  . Две нормы ,  называются *эквивалентными*, если существуют постоянные  такие, что для всех  выполняется неравенство . Таким образом, эквивалентные нормы подчинены друг другу.

Во всяком конечномерном нормированном векторном пространстве все нормы эквивалентны.

# Задание 1

## Постановка задачи

Определите, являются ли нормы и эквивалентными в нормированом пространстве два раза дифференцируемых на отрезке функций

## Решение

Две нормы являются эквивалентными, если они подчинены друг другу. Норма подчинена, если , такое что для всех .

Очевидно, что , так как, и .

Оценим :

Таким образом, нормы эквивалентны.

# Задание 2

## Постановка задачи

Проверить, является ли пространство банаховым по норме . Если пространство не полно, то указать его поплнение.

## Решение

Пространство является банаховым, если любая последовательность Коши в нем сходится. По определению, последовательность является последовательность Коши, если .

А значит и одновременно.

Так как пространство принадлежит пространств , которое является банаховым по норме , то

Покажем, что норма эквивалентна норме , по которой пространство является банаховым.

# Задание 3

## Постановка задачи

Проверить, сходится ли ряд в нормированном пространстве .

## Решение

Пространство является банаховым. Покажем, что последовательность является фундаментальной, тогда искомый ряд сходится.

Для этого необходимо, чтобы сходился.

А значит исходный ряд сходится.