Белорусский государственный университет

Факультет прикладной математики и информатики

**Лабораторная работа №1:**

**Отображения в нормированных векторных пространствах**

Выполнил:

студент 3 курса 3 группы

Наливайко Николай Дмитриевич

Рецензент:

Дайняк Виктор Владимирович

подпись\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Минск

2013г.

**Теоретические основы**

Пусть  и  - два нормированных векторных пространства, и  - отображение из  в . Отображение  называется непрерывным в точке , если  , такое, что   выполняется . Если отображение  является непрерывным во всех точках множества , то оно называется непрерывным на .

Пусть ,  и  - нормированные пространства,  и  - непрерывные отображения соответственно из  в  и из  в . Тогда  - непрерывное отображение из  в .

Отображение  называется равномерно непрерывным на , если  , такое, что   выполняется . Всякое равномерно непрерывное отображение является непрерывным.

Если отображение  удовлетворяет условию: существует константа , что  , то говорят, что  удовлетворяет условию Липшица. Отображение, удовлетворяющее условию Липшица, является равномерно непрерывным.

Рассмотрим действующее в банаховом пространстве  отображение . Точка  называется неподвижной точкой отображения , если .

Отображение  является сжимающим, если существует постоянная  такая, что выполняется неравенство  для всех . Число  называется коэффициентом сжатия.

Пусть  отображает замкнутое в банаховом пространстве множество  на себя и является на  сжимающим с коэффициентом сжатия . Тогда в  отображение  имеет единственную неподвижную точку , которая может быть найдена методом последовательных приближений по формуле , , где  и  при . Кроме того, справедлива следующая оценка сходимости

.

Пусть  отображает банахово пространство  на себя и является сжатием. Тогда  имеет в  единственную неподвижную точку.

Пусть  определено на шаре , где  - банахово пространство. Пусть  является на  сжатием с коэффициентом  и при этом выполнено условие . Тогда в шаре  существует единственная неподвижная точка отображения , которая может быть найдена методом последовательных приближений.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

, .

Здесь ,  - заданные функции;  - заданная функция, называемая ядром интегрального уравнения;  - неизвестная функция.

Решение  разыскивается в пространстве различных функций в зависимости от свойств функций  и . Пространство выбирается так, чтобы интеграл в уравнении существовал. Это уравнение называется уравнением Фредгольма. Если , то это уравнение называется уравнением Фредгольма 1-го рода, соответственно при  - 2-го рода и при  - уравнением 3-го рода.

Уравнение вида

,

называется интегральным уравнением Вольтерра. Уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма.

Решением этих уравнений называется функция , при подстановке которой в уравнения выполняются равенство для всех  или почти всех. Линейное однородное уравнение всегда имеет решение .

Рассмотрим линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

.

Пусть  - непрерывная функция на  и , тогда для любого параметра  такого, что , интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет единственное непрерывное решение для любой правой части .

Рассмотрим нелинейное уравнение Фредгольма 2-го рода:

.

Пусть  - непрерывная функция по переменным . Тогда для любой функции  и любого параметра  интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода имеет единственное непрерывное решение.

**Задания**

**1**. Определить, при каких  для интегрального уравнения Фредгольма 2 рода  в пространствах ,  можно применить метод сжимающих отображений. При  найти приближенное решение методом последовательных приближений с точностью  и сравнить его с точным решением.

***Решение***. Обозначим за . Тогда имеем уравнение . Так как пространства  и  являются полными, то для того, чтобы применить метод сжимающих отображений, нужно показать, что отображение  является сжимающим.

Отображение  является отображением из  в , так как оно является суммой двух непрерывных функций. Оценим норму

.

Таким образом, отображение  является сжимающим в пространстве  при условии, что  и коэффициент сжатия равен .

Найдем приближенное решение при . Возьмем  и оценим количество приближений по формуле

.

В данном случае . В этом случае . Поэтому, чтобы достигнуть точности , нужно провести  итерации. Имеем

,

,

,

.

Таким образом, приближенное решение имеет вид . Найдем точное решение. Пусть . Тогда . Подставим его в уравнение и получим , откуда , откуда . В этом случае .

Рассмотрим пространство . Оценим ядро  . Таким образом,  отображает  на себя и является сжимающим в случае, если , т.е. . Определим число итераций при :

, откуда .

***Ответ***: Пространство : , , , , ; Пространство : , , , , .

**2**. Вычислить приближенное решение уравнения  с точностью .

***Решение***. Это уравнение равносильно уравнению  или при  . Обозначим . Найдем, при каких условиях  будет сжимающим. , поэтому на отрезке  будем иметь . Условие  будет выполнено, если . Возьмем . Найдем радиус  с условием, чтобы отображение  было инвариантно в шаре  и было сжимающим в этом шаре. Для этого запишем систему

 ,

где . Имеем . При  будет выполняться  и . Оценим погрешность

, откуда . Имеем

,

,

,

,

.

Найдем точное решение , тогда .

***Ответ***: , , .

**3**. Определить, является ли отображение  нормированного пространства  на себя сжимающим. Вычислить , где , , и оценить расстояние от  до неподвижной точки.

***Решение***. Оценим норму . Поэтому отображение  является сжимающим с коэффициентом сжатия . Имеем , , . Оценим расстояние до неподвижной точки по формуле .

***Ответ***:  - сжимающее с коэффициентом , , ,  - неподвижная точка.

**4**. Выяснить, является ли отображение  непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица, если .

***Решение***. Если , то . Поэтому, если  , то , поэтому  - равномерно непрерывное отображение. Так как  - равномерно непрерывно, то оно непрерывно. Из приведенной выше оценки видно, что отображение  является липшицевым с постоянной .

***Ответ***:  - непрерывно, равномерно непрерывно, удовлетворяет условию Липшица с постоянной .