Белорусский государственный университет

Факультет прикладной математики и информатики

**Лабораторная работа №2:**

**Нормированные векторные пространства. Сходимость.**

Выполнил:

студент 3 курса 3 группы

Наливайко Николай Дмитриевич

Рецензент:

Дайняк Виктор Владимирович

подпись\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Минск

2013г.

**Теоретические основы**

Непустое множество  называется *векторным (линейным) пространством* над полем , если для любых двух его элементов  и  определена их сумма , и для любого  и для любого  определено произведение , причем эти операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1). ;

2). ;

3). в  существует такой элемент , что для всех  выполняется ;

4). для каждого элемента  существует элемент , что ;

5). ;

6). ;

7). ;

8). .

Векторное пространство  называется нормированным векторным пространством, если каждому  поставлено в соответствие неотрицательное число  таким образом, что выполнены следующие аксиомы:

1). ;  в том и только в том случае, когда ;

2). ;

3). .

*Примеры нормированных векторных пространств*.

1). Пространство  непрерывных на отрезке  функций относительно нормы

.

2). Пространство   раз непрерывно дифференцируемых на отрезке  функций относительно нормы

.

3). На векторном пространстве непрерывных на  функций определим норму следующим образом

.

Это пространство является нормированным и обозначается , .

4). Пространство , , бесконечных числовых последовательностей , , является нормированным пространством относительно нормы

.

Рассмотрим в нормированном пространстве  последовательность элементов . Элемент  называется пределом последовательности , если  при , т.е.  существует такое , что для всех  выполняется неравенство выполняется неравенство . Пишется .

*Свойства сходящихся последовательностей.*

1). В нормированном пространстве сходящаяся последовательность имеет только один предел.

2). Если последовательность  сходится к  в , то и любая ее подпоследовательность также сходится к .

3). Сходящаяся последовательность ограничена.

4). Если ,  при , где  - числовая последовательность, то  при .

5). Если ,  при  в пространстве  , тогда  при .

6). Если последовательность  сходится к , то последовательность  сходится к .

Рассмотрим типы сходимостей в различных пространствах.

1). Пространство .

Если  и , то  существует такое , что для всех  выполняется . Это равномерная сходимость последовательности непрерывных функций.

2). Пространство , .

Условие  равносильно  при . Получаем сходимость в среднем порядка .

3). Пространство . В этом случае  равносильно тому, что  для достаточно больших  выполняется неравенство , поэтому для любого  имеем , т.е. сходимость в  влечет покоординатную сходимость, но не наоборот.

**Задания**

**1**. Определить, задает ли пара  нормированное векторное пространство, если , .

***Решение***. Проверим выполнимость аксиом векторного пространства. Пусть . Тогда , так как  и , так как . Очевидно, и . Нулевым элементом будет являться функция , так как в этом случае  и  . Обратным элементом к  будет являться функция , так как ,  и . Свойства , , ,  и  будут очевидно выполняться. Таким образом,  - векторное пространство.

Проверим, задает ли функция  норму. , существование интеграла следует из непрерывности . Если , то отсюда следует, что  и . Так как , то отсюда следует, что , поэтому , где  - константа. Но так как , то , то есть . Первая аксиома нормы выполнена.  , поэтому вторая аксиома нормы выполнена.  имеем , поэтому третья аксиома нормы выполнена. Таким образом,  - нормированное векторное пространство.

***Ответ***: Пара , где , , задает нормированное векторное пространство.

**2**. Найти предел последовательности  в нормированном векторном пространстве , если он существует, если .

***Решение***. Если , то  при , если , то  при . Таким образом, поточечно  при . Имеем . Проверим сходимость в пространстве .  при . Поэтому  в пространстве .

***Ответ***:  при  в пространстве .

**3**. Найти предел последовательности  в нормированном векторном пространстве , если он существует, если , .

***Решение***. Имеем покоординатно . Очевидно, . Проверим сходимость в .  при , поэтому  в пространстве .

***Ответ***:   при  в пространстве .