Белорусский государственный университет

Факультет прикладной математики и информатики

**Лабораторная работа №3:**

**Банаховы пространства**

Выполнил:

студент 3 курса 3 группы

Наливайко Николай Дмитриевич

Рецензент:

Дайняк Виктор Владимирович

подпись\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Минск

2013г.

**Теоретические основы**

Пусть  – нормированное векторное пространство. Последовательность  называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если  при .

*Свойства последовательности Коши*:

1). Всякая фундаментальная последовательность ограничена.

2). Пусть последовательность  фундаментальна в , тогда числовая последовательность  также фундаментальна в .

3). Пусть  фундаментальны в , а , тогда последовательности  также фундаментальны в .

4). Если подпоследовательность  фундаментальной последовательности  сходится к , то сама последовательность  сходится к .

Всякая сходящаяся в  последовательность фундаментальна. Обратное выполняется не всегда.

Нормированное векторное пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

Банаховыми относительно их обычных норм являются следующие пространства: , , , , , , .

Банахово пространство  называется *пополнением* пространства , если выполняются следующие условия:

1). ;

2). для любого  выполнено ;

3).  всюду плотно в .

Для любого нормированного векторного пространства  существует пополнение.

В банаховом пространстве  любая последовательность замкнутых вложенных шаров , , радиусы которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку. Справедливо и обратное утверждение.

Пусть  – нормированное векторное пространство и в  двумя способами введены нормы: , .

Говорят, что норма  *подчинена* , если существует постоянная  такая, что для любого  . Две нормы ,  называются *эквивалентными*, если существуют постоянные  такие, что для всех  выполняется неравенство . Таким образом, эквивалентные нормы подчинены друг другу.

Во всяком конечномерном нормированном векторном пространстве все нормы эквивалентны.

**Задания**

**1**. Доказать по определению эквивалентность норм в пространстве :  и , , .

***Решение***. Нужно показать, что существуют постоянные , такие, что . Имеем, что , поэтому в качестве  можно взять . В свою очередь, также , поэтому в качестве  можно взять . Таким образом, мы показали, что существуют постоянные  с выполнением условия . Поэтому эти две нормы эквивалентны.

**2**. Проверить, является ли заданное пространство банаховым по указанной норме. Если пространство не полно, то указать его пополнение: пространство  столбцов , , с нормой .

***Решение***. Пусть последовательность является последовательностью Коши, т.е.  при , т.е.    выполняется , т.е. , что равносильно тому, что ,  выполняется . Докажем, что отсюда следует покоординатная сходимость последовательностей , . Возьмем  тогда из условия ,  , если , мы при  получим , если . Поэтому последовательность  является последовательностью Коши в пространстве , поэтому она сходится к некоторому числу . Пусть . Тогда, если , то , поэтому последовательность  является последовательностью Коши в пространстве , поэтому она сходится к некоторому числу .

Докажем, что тогда последовательность  сходится к столбцу . Рассмотрим . Зафиксируем, некоторое . Тогда, так как , если , то при  мы имеем, что , поэтому действительно последовательность  сходится по указанной норме к . Мы показали, что любая последовательность Коши является сходящейся в пространстве  по норме . Поэтому пространство  является банаховым по указанной норме.

***Ответ***: пространство  является банаховым по норме .

**3**.

***Решение***.

***Ответ***: