Белорусский государственный университет

Факультет прикладной математики и информатики

**Лабораторная работа №4:**

**Компактные множества**

Выполнил:

студент 3 курса 3 группы

Наливайко Николай Дмитриевич

Рецензент:

Дайняк Виктор Владимирович

подпись\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Минск

2013г.

**Теоретические основы**

Семейство , множеств  называется *покрытием* множества  из банахова пространства , если .

Множество  в банаховом пространстве  называется *компактным*, если из всякого открытого покрытия множества  можно выделить конечное подпокрытие.

Пусть  - банахово пространство,  - множество в нем. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) у любой последовательности точек из  существует сходящаяся в  подпоследовательность;

2) у любого открытого покрытия множества существует конченое открытое подпокрытие.

Компактное множество в банаховом пространстве ограничено, замкнуто, сепарабельно и полно.

Множество  называется -сетью, , для множества , если для любого  найдется  такое, что .

Множество  в банаховом пространстве  называется *вполне ограниченным*, если для любого  в  существует конечная -сеть для множества . Всякое вполне ограниченное множество ограничено.

Пусть  - банахово пространство,  - множество в нем. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1)  компактно;

2)  полно и вполне ограничено;

3) любая бесконечная последовательность в  имеет по крайней мере одну предельную точку в .

Множество  в банаховом пространстве  называется *предкомпактным* (*относительно компактным*), если  компактно, или, что равносильно, если из каждой последовательности  можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Предкомпактное множество в банаховом пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Множество  предкомпактно тогда и только тогда, когда  вполне ограничено.

Множество  называется *равномерно ограниченным*, если существует постоянная  такая, что  для всех . Множество  называется *равностепенно непрерывным*, если для любого  существует  такое, что для любых ,  выполнено  для всех .

Множество  предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

В пространстве  множество  предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.

Множество , , предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) существует константа  такая, что  для всех , т.е. множество  ограничено;

2) для любого  существует номер  такой, что  для всех .

Множество , , предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) существует константа  такая, что  для всех ;

2) для любого  существует  такое, что при   для всех .

Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.

Если функция  непрерывна на компактном множестве , то она достигает своей верхней и нижней грани на этом множестве, т.е. , что , .

Непрерывная на компакте  функция  равномерно непрерывна на нем.

**Задания**

**1**. Являются ли относительно компактными следующие множества функций в пространстве : ? 

***Решение***. Докажем, что множество  равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Отсюда будет следовать, что оно предкомрактно.

Как известно,  , поэтому для всех  мы имеем, что , поэтому множество  равномерно ограничено.

Для арктангенсов верна формула , поэтому для всех  мы имеем для всех  верно . Так как , то для всех  выполняется , поэтому имеем . Отсюда следует, что как только , то и , каковы бы ни были , т.е. множество  равностепенно непрерывно.

Из равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности следует предкомпактность множества .

***Ответ***. В пространстве  множество  является относительно компактным.