Белорусский государственный университет

Факультет прикладной математики и информатики

**Лабораторная работа №4:**

**Кольца, полукольца, мера на полукольце**

Выполнил:

студент 3 курса 3 группы

Наливайко Николай Дмитриевич

Рецензент:

Дайняк Виктор Владимирович

подпись\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Минск

2013г.

**Теоретические основы**

Пусть задано некоторое непустое множество . Непустое семейство  называется кольцом, если оно обладает свойством, что из  и  следует  и .

Пусть  ‑ кольцо. Тогда для любых  выполнено , .

Любое кольцо содержит пустое множество, так как всегда . Система, состоящая только из пустого множества, представляет собой наименьшее возможное кольцо множеств.

Кольцо  называется алгеброй, если .  в этом случае называется единицей кольца.

Пусть непустая система  обладает следующими свойствами:

1) ;

2) .

Тогда  является алгеброй.

Кольцо множеств называется -кольцом, если оно вместе с каждой последовательностью множеств  содержит и их счетное объединение, т.е. . -алгеброй называется -кольцо с единицей.

Для любой непустой системы множеств  существует одно и только одно кольцо , содержащее  и содержащееся в любом кольце , содержащем . Непустая система  подмножеств множества  называется полукольцом, если она содержит пустое множество, замкнута по отношению к образованию пересечений и обладает тем свойством, что если , то найдется конечная система  попарно не пересекающихся множеств из , что .

Отметим, что если  - полукольцо множеств, то для  элементы ,  в общем случае не принадлежат .

Пусть  - полукольцо, тогда минимальное кольцо , порожденное , состоит из непересекающихся конечных объединений множеств из , т.е. .

Пусть на некотором множестве  задано полукольцо множеств . Будем говорить, что на  задана мера, если каждому элементу  поставлено в соответствие вещественное число  таким образом, что выполнены следующие условия:

1)  ;

2) если , то .

Свойства меры на кольце:

1) монотонность меры. Если  и , то ;

2) если  и , то ;

3) если , то ;

4) если , то ;

5) для любых множеств  выполняется ;

6) для любых множеств  имеет место следующее неравенство .

Мера  называется счетно-аддитивной (-аддитивной), если для любых  таких, что , выполнено .

7) счетная полуаддитивность меры. Пусть и , и пусть мера  -аддитивна, тогда .

**Задания**

**1**.Образуют ли кольцо, -кольцо, алгебру, полукольцо все множества на плоскости, инвариантные относительно растяжений и сжатий? 

***Решение***. Обозначим эту систему через . Тогда для любого множества  имеем, что , где  - любое биективное преобразование растяжения или сжатия. Пусть  имеем, если , то  или    или     , поэтому . Если , то  и    и , так как если бы , то взяв обратное преобразование , мы бы получили, учитывая инвариантность , что , т.е., что , противоречие. Отсюда следует, что , поэтому , т.е. . Из того, что  и , получаем, что  - кольцо.

Пусть    имеем, что  , поэтому   , поэтому , т.е. . Отсюда следует, что  - -кольцо.

Так как вся плоскость  будет инвариантна относительно растяжений или сжатий, то  - алгебра.

Так как всякое кольцо является полукольцом, то  - полукольцо.

***Ответ***. Множества на плоскости, инвариантные относительно растяжений и сжатий, образуют кольцо, -кольцо, алгебру, полукольцо.

**2**. Пусть , . Построить, если возможно, меру на  так, чтобы , , .

***Решение***. Зададим меру на  таким образом: если , то положим, что .

Проверим, что эта функция удовлетворяет свойствам меры. Очевидно, что  . Заметим, что если  - дизъюнктное объединение множеств, то  , поэтому  имеем , поэтому функция  действительно задает меру на .

Имеем , , , поэтому мера  удовлетворяет требованиям задачи.

***Ответ***. Мера  удовлетворяет требованиям задачи.

**3**. Пусть ,  - кольцо, состоящее из конечных подмножеств . Задает ли формула  меру на ?

***Решение***. Очевидно, что  . Так как , то функция  корректно задана . Пусть . Тогда . Так как , то  принадлежит ровно одному из  и не принадлежит другим. Поэтому . Отсюда получаем, что функция  задает меру на .

***Ответ***. Формула  задает меру на .

**4**. Пусть ,  - кольцо, состоящее из конечных подмножеств . Задает ли формула  меру на ?

***Решение***. Очевидно, что  . Так как , то функция  корректно задана . Пусть . Тогда . Так как , то  принадлежит ровно одному из  и не принадлежит другим. Поэтому . Отсюда получаем, что функция  задает меру на .

***Ответ***. Формула  задает меру на .