|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №7 |
|  |
| (Кольцо, полукольцо, мера на полукольце) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевича Александра Дмитриевича

Вариант: 14

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 20.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Теоретические основы**

Пусть задано некоторое непустое множество . Непустое семейство  называется кольцом, если оно обладает свойством, что из  и  следует  и .

Пусть  ‑ кольцо. Тогда для любых  выполнено , .

Любое кольцо содержит пустое множество, так как всегда . Система, состоящая только из пустого множества, представляет собой наименьшее возможное кольцо множеств.

Кольцо  называется алгеброй, если .  в этом случае называется единицей кольца.

Пусть непустая система  обладает следующими свойствами:

1) ;

2) .

Тогда  является алгеброй.

Кольцо множеств называется -кольцом, если оно вместе с каждой последовательностью множеств  содержит и их счетное объединение, т.е. . -алгеброй называется -кольцо с единицей.

Для любой непустой системы множеств  существует одно и только одно кольцо , содержащее  и содержащееся в любом кольце , содержащем . Непустая система  подмножеств множества  называется полукольцом, если она содержит пустое множество, замкнута по отношению к образованию пересечений и обладает тем свойством, что если , то найдется конечная система  попарно не пересекающихся множеств из , что .

Отметим, что если  - полукольцо множеств, то для  элементы ,  в общем случае не принадлежат .

Пусть  - полукольцо, тогда минимальное кольцо , порожденное , состоит из непересекающихся конечных объединений множеств из , т.е. .

Пусть на некотором множестве  задано полукольцо множеств . Будем говорить, что на  задана мера, если каждому элементу  поставлено в соответствие вещественное число  таким образом, что выполнены следующие условия:

1)  ;

2) если , то .

Свойства меры на кольце:

1) монотонность меры. Если  и , то ;

2) если  и , то ;

3) если , то ;

4) если , то ;

5) для любых множеств  выполняется ;

6) для любых множеств  имеет место следующее неравенство .

Мера  называется счетно-аддитивной (-аддитивной), если для любых  таких, что , выполнено .

7) счетная полуаддитивность меры. Пусть и , и пусть мера  -аддитивна, тогда .

# Задание 1

Образуют ли полукольцо, кольцо, кольцо, алгебру, -алгебру следующие системы множеств.

## Постановка задачи

1.14. Все конечные подмножества некоторого множества .

## Решение

1. Пустое множество содержится. Замкнутость к пересечению имеется. Дополнение множества должно быть представимо в виде конечного объединения конечных множеств. Это так, если конечное, и неверно, если бесконечное. Итого, если конечное, то образуют, иначе нет.
2. Ясно, что кольцо является полукольцом, поэтому в случае бесконечного множества ответ отрицательный. С другой стороны, пусть множество конечно. Симметрическая разность и пересечение принадлежат множеству, и поэтому множество будет кольцом.
3. Ситуация полностью покрыта ответом во втором пункте.
4. Ясно, что если множество бесконечное, то ответ нет. Иначе оно само содержится в системе, а значит, система образует алгебру.
5. Ситуация покрыта в предыдущем пункте: в случае конечности -алгебра и алгебра – это одно и то же. В случае бесконечности ясно, что ответ нет.

# Задание 2

Пусть . Построить, если возможно, меру на так, чтобы:

## Постановка задачи

2.14. .

## Решение

Положим . Далее, меру построим генеративно: мера множества есть сумма мер его элементов.

Пусть . Тогда возьмем . Покажем, что задает меру на множестве .

Остаётся заметить, что требуемые условия выполнены.

# Задание 3

Пусть , – кольцо, состоящее из конечных подмножеств множества . Задаёт ли данная формула меру на ?

## Постановка задачи

## Решение

1. , так как является суммой неотрицательных чисел.

Таким образом, задает меру на множестве .

# Задание 4

Пусть , полукольцо , . При каких значениях параметра α эта формула задает меру,-аддитивную меру. Если мера не является -аддитивной, то указать полуинтервал и его разбиение такое, что .

## Постановка задачи

## Решение

## 

1. : .
2. при условии что

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Значит:

Заметим, что в левой верхней клетке наблюдается противоречие. Действительно, в отрицательной полуоси . Поэтому функция не задаёт меру ни при каких значениях параметра.

Ответ: не задаёт меру ни при каких значениях параметра.