|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №10 |
|  |
| (Лебеговское продолжение меры) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевича Александра Дмитриевича

Вариант: 14

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 26.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Теоретические основы

C:\Users\Aliaksandr\Documents\FAN\nekrald\raw_1_2\FA_1_2_Page_1.tiff

# C:\Users\Aliaksandr\Documents\FAN\nekrald\raw_1_2\FA_1_2_Page_2.tiff

C:\Users\Aliaksandr\Documents\FAN\nekrald\raw_1_2\FA_1_2_Page_3.tiff

C:\Users\Aliaksandr\Documents\FAN\nekrald\raw_1_2\FA_1_2_Page_4.tiff

C:\Users\Aliaksandr\Documents\FAN\nekrald\raw_1_2\FA_1_2_Page_5.tiff

# Задание 1

Пусть , . Найти внешнюю и внутреннюю меры множеств и выяснить, измеримы ли они.

## Постановка задачи

## Решение

Найдём внешнюю меру. По определению внешняя мера определяется как

При этом любой элемент полукольца имеет вид , т.е. полностью определяется своей проекцией на ось . Чтобы покрыть множество элементами , необходимо и достаточно покрыть проекцию этого множества на ось полуинтервалами . Поэтому внешняя мера множества в данном случае совпадает с внешней мерой проекции этого множества на ось . Итого, получаем:

Следовательно, множество неизмеримо.

**Ответ**: , не измеримо.

# Задание 2

Описать структуру множества и найти его меру.

## Постановка задачи

Множество точек отрезка , которые допускают двоичное разложение, в котором на чётных местах стоит цифра 0.

## Решение

Это множество строится следующим образом. Сначала делим отрезок [0,1] на четыре равные части, и удаляем вторую и четвёртую. Затем каждый из оставшихся двух полуинтервалов делим на четыре равные части, и выбрасываем в них соответствующие полуинтервалы. Вычислим меру выбрасываемых промежутков:

Поэтому получаем, что мера нашего множества равна 0.

**Ответ:** 0.

# Задание 3

Доказать, что множество измеримо, и найти его меру.

## Постановка задачи

## Решение

Заметим, что раз , то тогда Решим это неравенство. Получим . Это множество открыто и ограничено, а значит измеримо. Ещё можно сказать, что оно измеримо, так как является борелевским. Ясно, что мера есть .

**Ответ**:

# Задание 4

Доказать, что множество измеримо и найти его меру.

## Постановка задачи

4.14. Множество точек единичного квадрата таких, что .

## Решение

Множество открыто в подпространстве, порождённом квадратом, и потому измеримо. Возьмём нижний полуквадрат, это борелевское множество и его мера . Сверху можно покрывать прямоугольниками как в случае интеграла Римана, и в силу непрерывности меры в пределе получим интеграл.

Поэтому в результате получаем ¾, что согласуется с ожидаемой площадью фигуры.

**Ответ**:.