|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №14 |
|  |
| (Интеграл Лебега, теоремы о предельном переходе) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевича Александра Дмитриевича

Вариант: 14

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

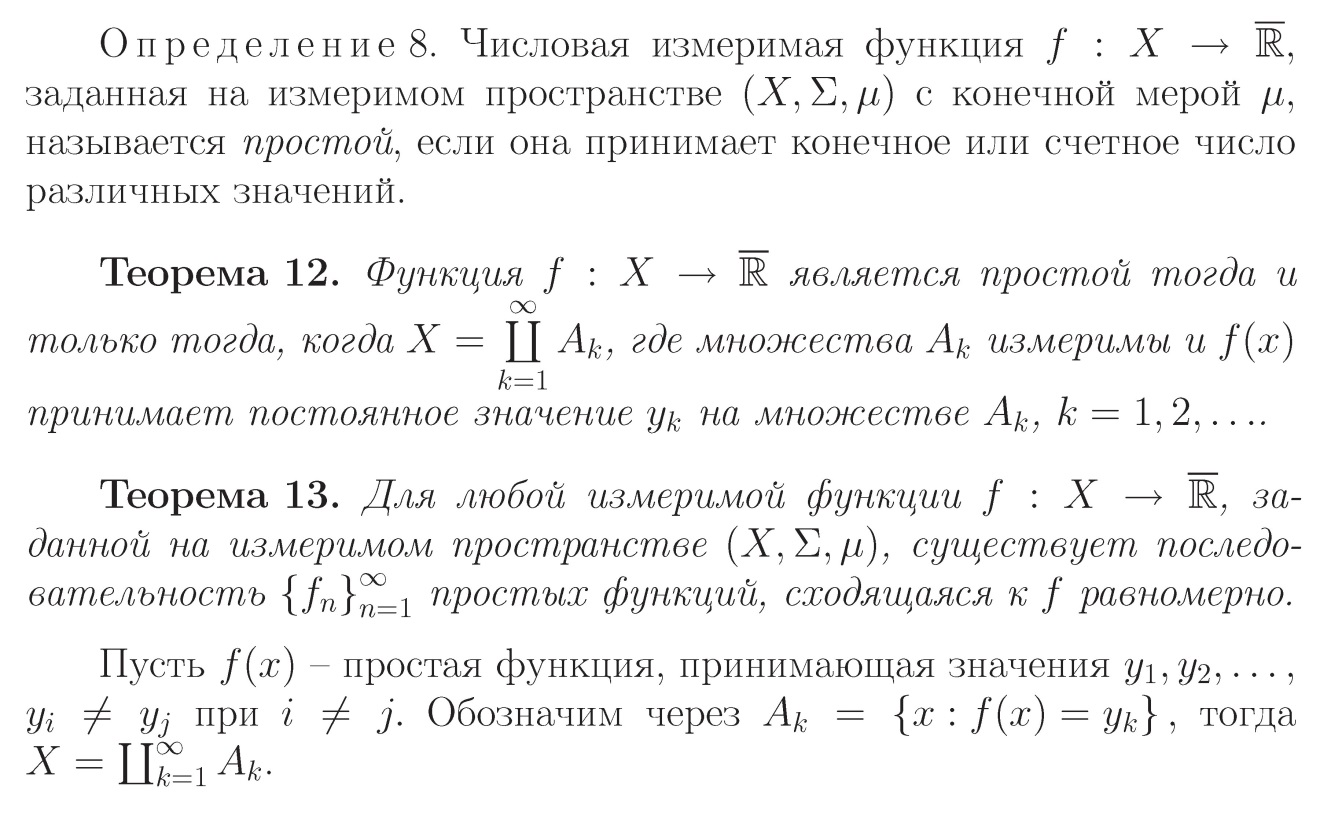
канд. физ.-мат. наук

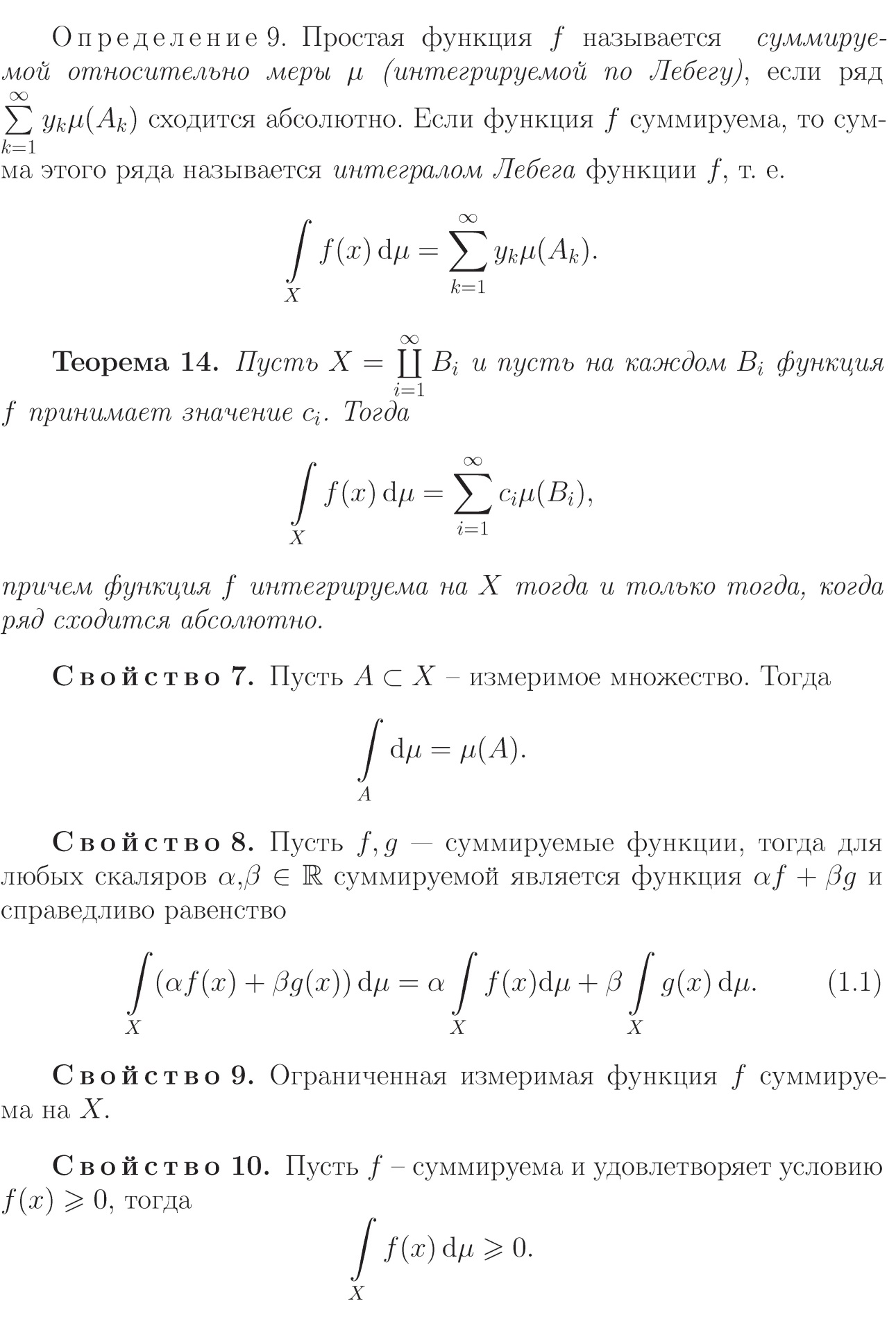
Работа сдана 26.12.2013 г.

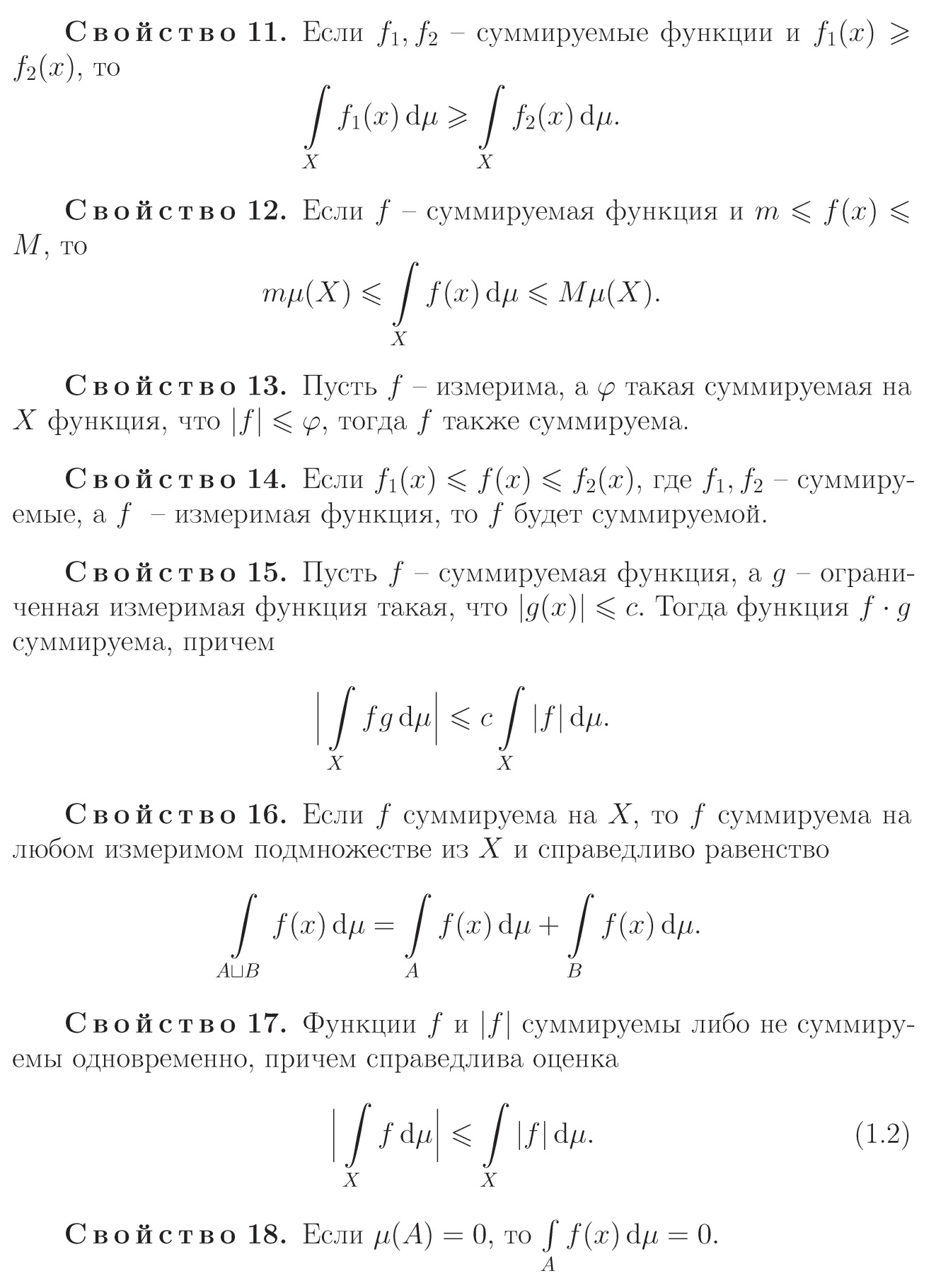
Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

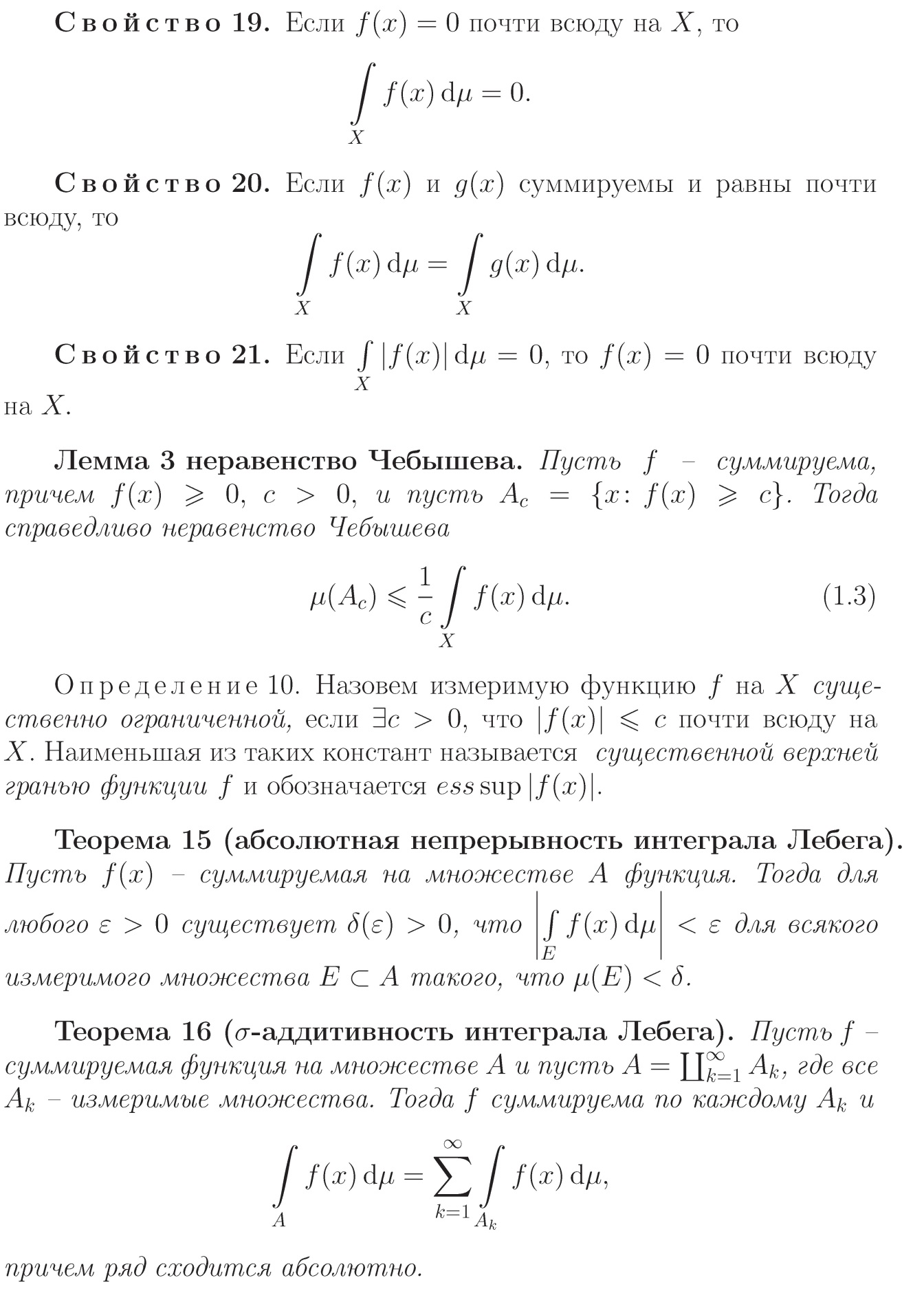
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

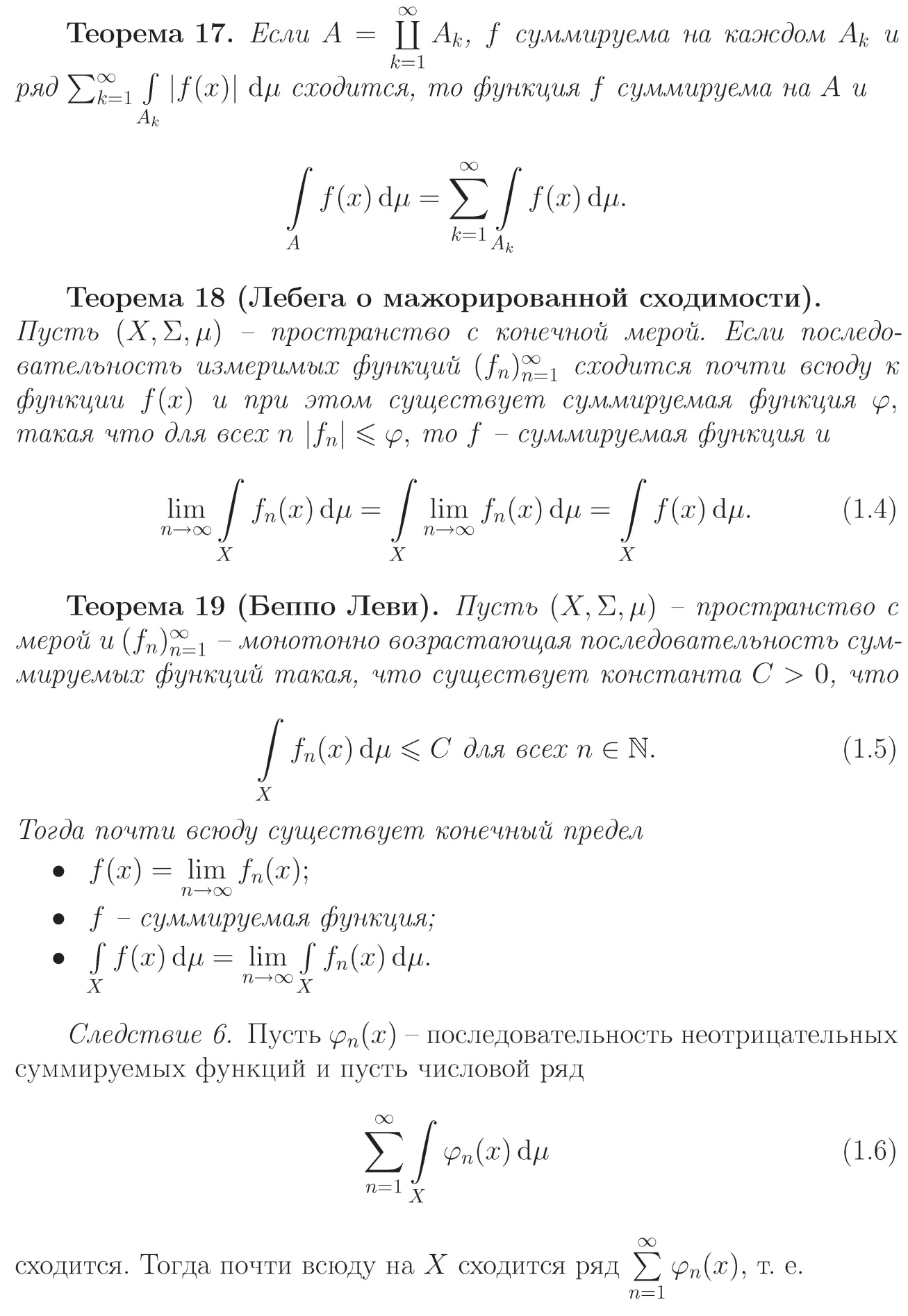
# Теоретические основы

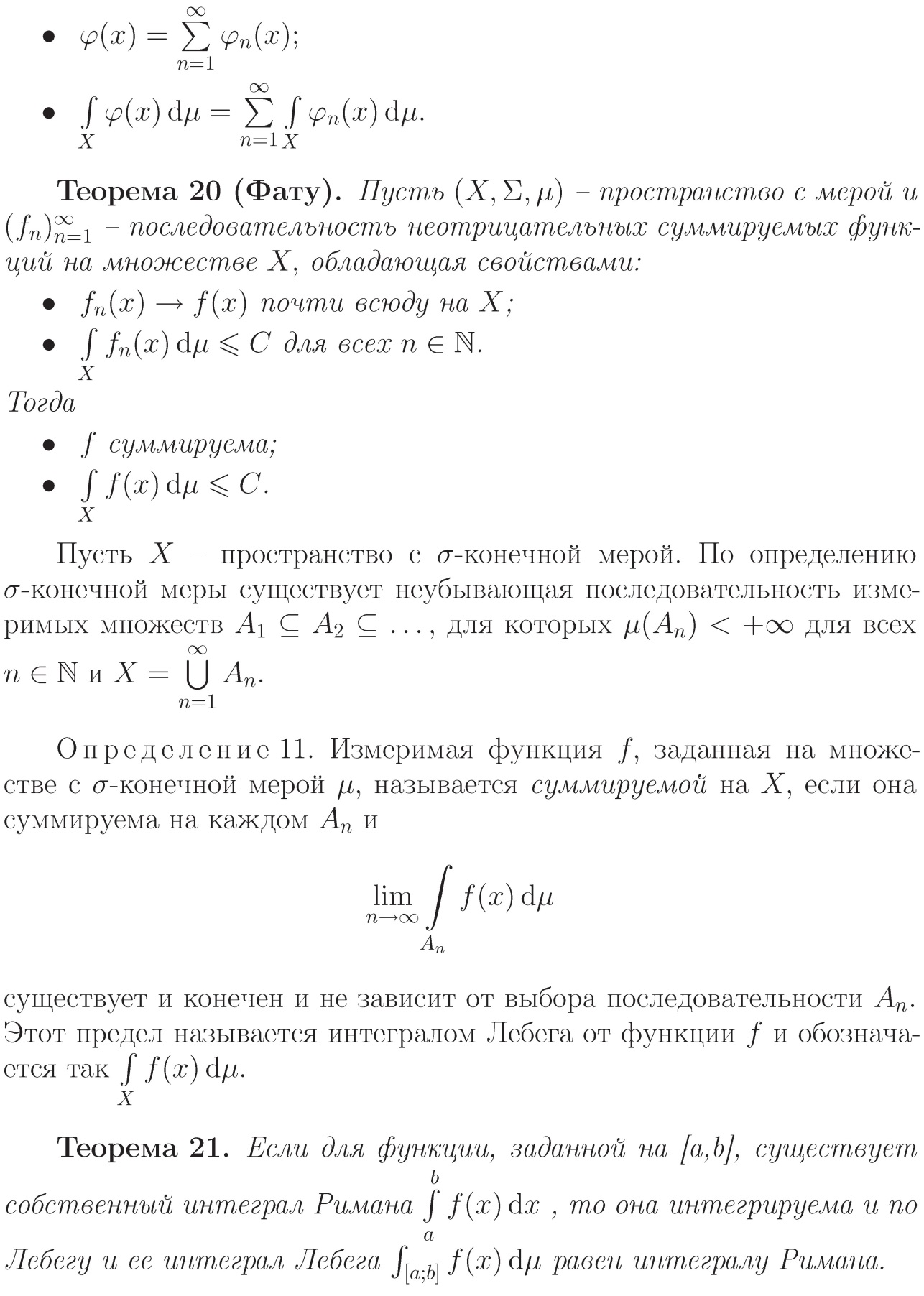


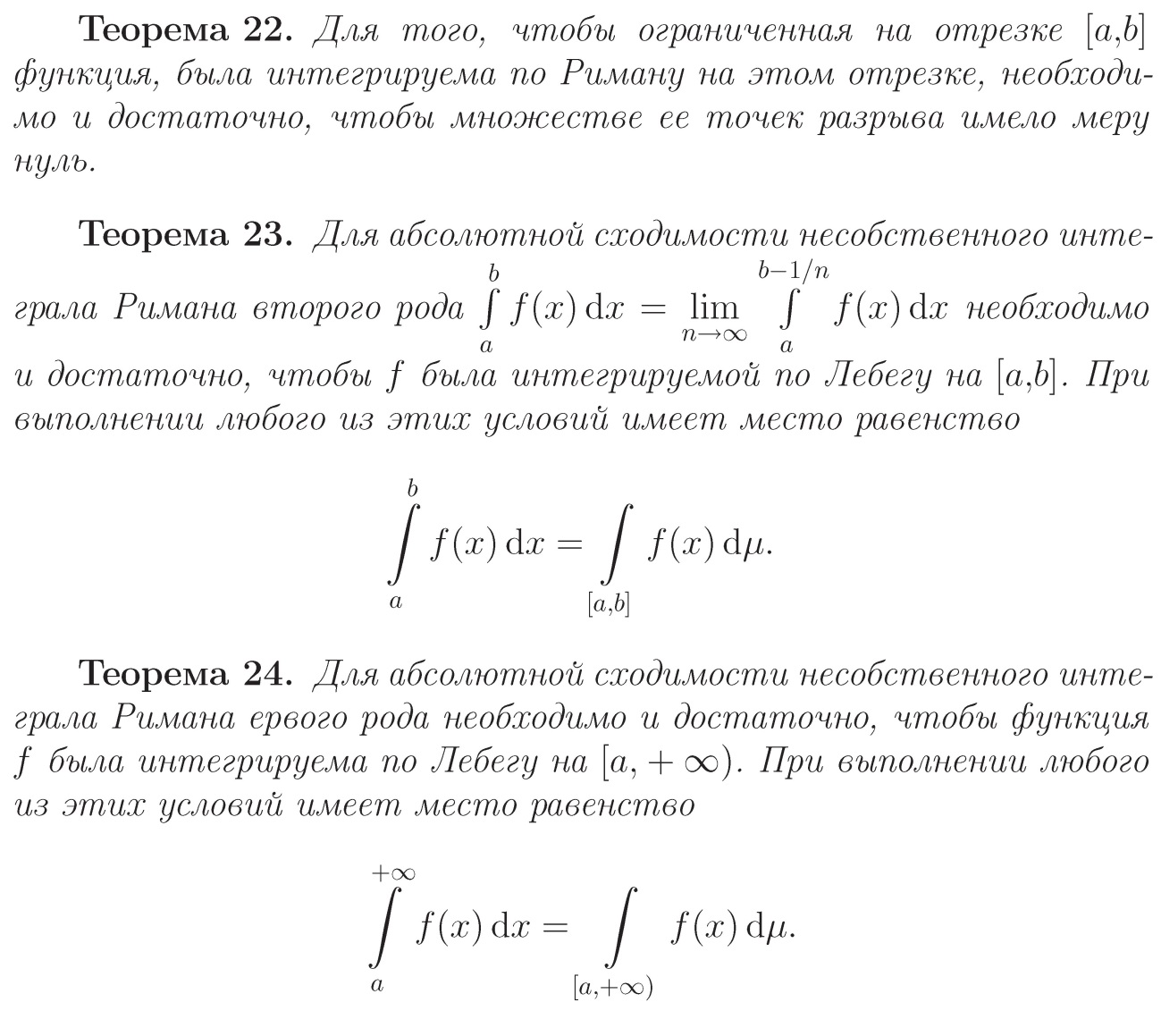












# Задание 1

Выяснить, интегрируема ли по Риману, по Лебегу на отрезке функция . Если да, то вычислить интеграл Лебега.

## Постановка задачи

## Решение

Поскольку мера канторова множества ноль, можно считать, что функция является кусочно-постоянной. Поэтому функция интегрируема.

Тогда требуемое значение будет

Ответ:

# Задание 2

Для заданной функции на отрезке [-1, 2]:

1. Выяснить, является ли она ограниченной;
2. Найти множество точек разрыва;
3. Выяснить, существует ли для неё собственный или несобственный интеграл Римана;
4. Вычислить интеграл Лебега, если он существует, воспользовавшись подходящей заменой на эквивалентную, имеющую меньшее множество точек разрыва.

## Постановка задачи

## Решение

1. Обе функции непрерывны на отрезке, и следовательно ограничены. А значит, ограничена и .
2. Множество точек разрыва – весь отрезок. Действительно, значения обоих функций не совпадают ни в одной точке, и множество всюду плотно в отрезке.
3. Интеграл Римана не сущетсвует. Действительно, так как Q всюду плотно, то можно брать точки по верхней функции, а можно по нижней. По верхней получим , по нижней .
4. Заменим на эквивалентную вторую функцию. Теперь уже непрерывность имеется, а значит интеграл Лебега существует. Поэтому ответ

Ответ:

# Задание 3

Для заданной последовательности функций , определённых на множестве , выяснить, какие из теорем о предельном переходе применимы. Найти и сравнить:

и , если:

## Постановка задачи

## Решение

Рассмотрим интеграл:

Поэтому . C другой стороны, предельное значение функции есть почти всюду. Поэтому второй предел тоже равен .

Теорема Лебега о мажорированной сходимости выполняется, в качестве требуемой функции можно взять . Причём на можно взять .

Теорема Беппо-Леви о монотонной сходимости не выполнена, так как значения большие единицы заменяются на значения меньшие 1 с ростом .

**Ответ**: Теорема Лебега выполнена, теорема Беппо-Леви не выполнена.