|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №17 |
|  |
| (Интеграл Лебега-Стилтьеса. Функции с ограниченным изменением) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевича Александра Дмитриевича

Вариант: 14

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 28.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Теоретические основы

**Интеграл Римана — Стилтьеса** — обобщение определённого [интеграла](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB), предложенное в 1894 году [Стилтьесом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B8%D0%BB%D1%82%D1%8C%D0%B5%D1%81,_%D0%A2%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D1%81_%D0%98%D0%BE%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B5%D1%81). Вместо предела обычных интегральных сумм

\sum\limits_{i = 1}^n {f(\xi _i )(x_i  - x_{i - 1}) }

рассматривается предел сумм

\sum\limits_{i = 1}^n {f(\xi _i )(j(x_i)  - j(x_{i - 1})) },

где интегрирующая функция j(x)есть функция с ограниченным [изменением](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%B7%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) (ограниченной вариацией). Если j(x)непрерывно дифференцируема, то он выражается через обычный интеграл:

\int\limits_a^b f(x)\,dj(x) = \int\limits_a^b f(x)j'(x)\,dx(если последний существует).

## Определение.

Пусть f:[a,\;b]\to\R^n. Тогда **вариацией** (также **полной вариацией** или **полным изменением**) функции fна отрезке [a,\;b]называется следующая величина:

V_a^b f\,\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sup\limits_P\sum\limits_{k=0}^m\|f(x_{k+1})-f(x_k)\|,

то есть [точная верхняя грань](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%8C) по всем [разбиениям](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%B1%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0) Pотрезка [a,\;b]длин ломаных в \R^n, концы которых соответствуют значениям fв точках разбиения.

## Свойства функций ограниченной вариации

* Сумма и произведение функций ограниченной вариации тоже будет иметь ограниченную вариацию. Частное двух функций из Vбудет иметь ограниченную вариацию (другими словами, принадлежать классу V), если модуль знаменателя будет больше, чем положительная постоянная на отрезке [a,\;b].
* Если a<x\leqslant y<b, а f\in V[a,\;b], то V_a^x f+V_x^y f=V_a^y f.
* Если функция f[непрерывна](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) в точке aсправа и принадлежит V[a,\;b], то \lim\limits_{x\to a{+}}v(x)=0.
* Функция f(x), заданная на отрезке [a,\;b], является функцией ограниченной вариации тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде суммы возрастающей и убывающей на [a,\;b]функции ([разложение Жордана](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%96%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B0&action=edit&redlink=1)).
* Всякая функция ограниченной вариации ограничена и может иметь не более чем [счётное множество](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%87%D1%91%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) [точек разрыва](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_%D1%80%D0%B0%D0%B7%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%B0), причём все первого рода.
* Функция ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы [абсолютно непрерывной функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D0%BE%D0%BB%D1%8E%D1%82%D0%BD%D0%BE_%D0%BD%D0%B5%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F), [сингулярной функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) и [функции скачков](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%87%D0%BA%D0%BE%D0%B2&action=edit&redlink=1) ([разложение Лебега](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%9B%D0%B5%D0%B1%D0%B5%D0%B3%D0%B0&action=edit&redlink=1)).

## Вычисление вариации

### Вариация непрерывно дифференцируемой функции

Если функция f:[a,\;b]\to\R^nпринадлежит классу C^1, то есть имеет [непрерывную](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) [производную](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) первого порядка на отрезке [a,\;b], то f — функция ограниченной вариации на этом отрезке, а вариация вычисляется по формуле:

\int\limits_a^b\|f^\prime(x)\|\,dx,

то есть равна [интегралу](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB) [нормы](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) производной.

# Задание 1

Пусть на задана мера Лебега-Стилтьеса, порождённая функцией . Проверить, что не убывает и непрерывная слева. Найти:

1. Меру каждого одноточечного множества;
2. Промежутки, на которых эта мера совпадает с мерой Лебега;
3. Промежутки, имеющие нулевую меру.
4. Промежутки, где эта мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега;
5. Найти меру Канторова множества и множества рациональных чисел ;

Для функции вычислить интеграл по мере Лебега – Стилтьеса, если он существует.

## Постановка задачи

## Решение

Монотонность функции очевидна. Далее, непрерывность слева имеется. Действительно, точки разрыва только и , и в них всё хорошо.

1. Мера одноточечного множества . Получаем, что везде ноль, кроме точек 1 и .

Там и соответственно.

1. На промежутке эта мера Лебега-Стилтьеса совпадает с мерой Лебега.
2. Промежутков нулевой меры нет, так как функция строго монотонна.
3. Ясно, что абсолютно непрерывна на каждом из трёх промежутков. Действительно, если мера равна нулю, то концы должны совпадать.
4. Мера равна . Осталось подсчитать меру канторова множества. На промежутках абсолютной непрерывности мера канторова множества нулевая. Точки разрыва принадлежат , поэтому мера будет .

Для вычисления интеграла заменим на эквивалентную функцию. Мера Канторова множества кроме двух точек нулевая, поэтому можно считать:

Итого, мера есть .

# Задание 2

Вычислить интеграл Римана-Стилтьеса.

## Постановка задачи

## Решение

Понятно, что интеграл существует. Действительно, функция дифференцируема всюду за исключением конечного числа точек. Считаем по определению.

+ +

**Ответ**:

# Задание 3

Вычислить, ограничена ли вариация у следующих функций. При положительном ответе вычислить вариацию функций .

## Постановка задачи

и линейна на каждом отрезке.

## Решение

Возьмём в качестве точек разбиения концы отрезков. Тогда получим, что можно сделать

Итого, вариация у функции не ограничена.