|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа № 1 |
|  |
| (2.1. Нормированные векторные пространства. Сходимость) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевича Александра Дмитриевича

Вариант: 14

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 20.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Теоретические основы**

Непустое множество  называется *векторным (линейным) пространством* над полем , если для любых двух его элементов  и  определена их сумма , и для любого  и для любого  определено произведение , причем эти операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1). ;

2). ;

3). в  существует такой элемент , что для всех  выполняется ;

4). для каждого элемента  существует элемент , что ;

5). ;

6). ;

7). ;

8). .

Векторное пространство  называется нормированным векторным пространством, если каждому  поставлено в соответствие неотрицательное число  таким образом, что выполнены следующие аксиомы:

1). ;  в том и только в том случае, когда ;

2). ;

3). .

*Примеры нормированных векторных пространств*.

1). Пространство  непрерывных на отрезке  функций относительно нормы

.

2). Пространство   раз непрерывно дифференцируемых на отрезке  функций относительно нормы

.

3). На векторном пространстве непрерывных на  функций определим норму следующим образом

.

Это пространство является нормированным и обозначается , .

4). Пространство , , бесконечных числовых последовательностей , , является нормированным пространством относительно нормы

.

Рассмотрим в нормированном пространстве  последовательность элементов . Элемент  называется пределом последовательности , если  при , т.е.  существует такое , что для всех  выполняется неравенство выполняется неравенство . Пишется .

*Свойства сходящихся последовательностей.*

1). В нормированном пространстве сходящаяся последовательность имеет только один предел.

2). Если последовательность  сходится к  в , то и любая ее подпоследовательность также сходится к .

3). Сходящаяся последовательность ограничена.

4). Если ,  при , где  - числовая последовательность, то  при .

5). Если ,  при  в пространстве  , тогда  при .

6). Если последовательность  сходится к , то последовательность  сходится к .

Рассмотрим типы сходимостей в различных пространствах.

1). Пространство .

Если  и , то  существует такое , что для всех  выполняется . Это равномерная сходимость последовательности непрерывных функций.

2). Пространство , .

Условие  равносильно  при . Получаем сходимость в среднем порядка .

3). Пространство . В этом случае  равносильно тому, что  для достаточно больших  выполняется неравенство , поэтому для любого  имеем , т.е. сходимость в  влечет покоординатную сходимость, но не наоборот.

# Задание 1

## Постановка задачи

Определить, задаёт ли пара нормированное векторное пространство.

## Решение

Сначала проверим, что это векторное пространство. Действительно, если , то тогда и . Поэтому является векторным пространством как подпространство векторного пространства. С другой стороны, если норма нулевая, то тогда . Но любая константа тоже подходит. Таким образом, не является нормированным пространством.

Ответ: не является.

# Задание 2

## Постановка задачи

Найти предел последовательности в пространстве , если он существует.

## Решение

Сначала найдём поточечный предел. Ясно, что . Осталось показать, что процесс равномерный. Действительно, правая часть не зависит от аргумента, следовательно, сходимость к нулю равномерная.

Ответ: 0.

# Задание 3

## Постановка задачи

Найти предел последовательности в нормированном пространстве , если он существует.

## Решение

Докажем, что предел существует. Точнее, докажем, что последовательность является требуемым пределом.

Для этого покажем . Имеем, что . Последняя сумма стремится к нулю, так как ряд сходится.

Ответ: