|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №3 |
|  |
| (Банаховы пространства) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевича Александра Дмитриевич

Вариант 14

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 20.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Теоретические основы**

Пусть  – нормированное векторное пространство. Последовательность  называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если  при .

*Свойства последовательности Коши*:

1). Всякая фундаментальная последовательность ограничена.

2). Пусть последовательность  фундаментальна в , тогда числовая последовательность  также фундаментальна в .

3). Пусть  фундаментальны в , а , тогда последовательности  также фундаментальны в .

4). Если подпоследовательность  фундаментальной последовательности  сходится к , то сама последовательность  сходится к .

Всякая сходящаяся в  последовательность фундаментальна. Обратное выполняется не всегда.

Нормированное векторное пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

Банаховыми относительно их обычных норм являются следующие пространства: , , , , , , .

Банахово пространство  называется *пополнением* пространства , если выполняются следующие условия:

1). ;

2). для любого  выполнено ;

3).  всюду плотно в .

Для любого нормированного векторного пространства  существует пополнение.

В банаховом пространстве  любая последовательность замкнутых вложенных шаров , , радиусы которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку. Справедливо и обратное утверждение.

Пусть  – нормированное векторное пространство и в  двумя способами введены нормы: , .

Говорят, что норма  *подчинена* , если существует постоянная  такая, что для любого  . Две нормы ,  называются *эквивалентными*, если существуют постоянные  такие, что для всех  выполняется неравенство . Таким образом, эквивалентные нормы подчинены друг другу.

Во всяком конечномерном нормированном векторном пространстве все нормы эквивалентны.

# Задание 1

## Постановка задачи

Доказать по определению эквивалентность норм в пространстве .

и

## Решение

Заметим, что Действительно, модуль каждой координаты не превосходит максимум; остаётся только по неравенству раскрыть модуль. В обратную сторону интереснее. Будем доказывать индукцией по размерность. В случае всё тривиально. Пусть для меньших доказано. Рассмотрим два случая. Первый – максимальное значение по модулю наблюдается в . Тогда можно с уверенностью сказать, что по предположению индукции. Иначе максимум в . Тогда два случая. Первый -- , либо же больше. Если больше – то получаем на предпоследней сумме. Иначе – на последней. Доказано.

# Задание 2

## Постановка задачи

Проверить, является ли указанное пространство банаховым по заданной норме. Если пространство не полно, то указать его пополнение.

Пространство финитных функций с нормой .

## Решение

Будем доказывать, что является банаховым. Для этого достаточно доказать, что любая фундаментальная последовательность сходится. Возьмём произвольную . Понятно, что поточечная сходимость имеет место, и даже равномерная сходимость на отрезке . Это следует из того, что множество действительных чисел является компактным.

В неравенстве перейдём к пределу при . Получим . Это неравенство выполняется для всех. Поэтому и максимум тоже меньше . Итого, сходимость по норме имеется. Остаётся заметить, что для всех этих функций носитель компактен.

Ответ: да, является.

# Задание 3

## Постановка задачи

Проверить, сходится ли ряд в нормированном пространстве E. При этом:

## Решение

Будем доказывать, что сходится. Заметим, что мы находимся в банаховом пространстве. Поэтому достаточно показать, что . Заметим, что . Из чего можно оценивать интегралом от куска ряда, который меньше . Поэтому нужная нам штука . Тут мы просто вынесли константу из-под знака интеграла.

Доказано.