|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №4 |
|  |
| (Отображения в нормированных векторных пространствах) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевича Александра Дмитриевича

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 13.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Задание 1

## Постановка задачи

Определите, при каких для следующего интегрального уравнения Фредгольма 2-ого рода в простарнстве , можно применить метод сжимающих отображений. При найти приближенное решение методом последовательных приближений с точностью и сравнить его с точным решением.

## Решение

Приведем уравнение к виду , тогда искомое решение является неподвижной точкой отображения . Поскольку оба пространства и являются полными, то нужно показать, что отображение сжимающее на соответствующих прострнствах.

Пусть

### Рассмотрим пространство .

задает отображения пространства на себя, так как состоит из суммы двух непрерывных функций.

Покажем, что – сжимающее, то есть , такая что для всех выполняется .

Таким образом является коэффициентом сжатия, и при к уравнению можно применить принцип сжимающих отображений и оно будет иметь единственное решение.

Рассмотри приближенное решение уравнения при . Оценим количество приближений по формуле:

Пусть . Тогда , , а .

Вычислим приближенные значения до , так как уже является приближенным решением с точностью .

Уже сейчас нашли неподвижную точку. Значит, за две итерации мы пришли к точному решению.

### Рассмотрим пространство .

Оценим ядро :

Таким образом, является отображением на себя и является сжимающим, если , поэтому к данному уравнению, при можно применить принцип сжимающих отображений. В этом случае понадобится число итераций, определяемое соотношением:

# Задание 2

## Постановка задачи

Вычислить приближенное решение следующего уравнения с точностью до .

## Решение

Приведем уравнение к виду и найдем точку и радиус , такие, что шар инвариантен относительно отображения и в этом шаре – сжимающее отображение.

Так как – дифференцируема, то в качестве константы Липшица возьмем .

Число – радиус шара, в котором существует неподвижная точка, выберем из следующих условий:

Где , а тогда .

Выберем одно из решений этой системы. Пусть . Тогда отрезок инвариантен относительно отображения , на нем – сжимающее и . Оценим расстояние до неподвижной точки:

Отсюда b является приближенным решением уравнения с точностью до .

# Задание 3

## Постановка задачи

Определить, является ли отображение нормированного пространства на себя сжимающим. Вычислить , где , и оценить расстояние от до неподвижной точки.

## Решение

Вычислим

Значит , а значит F – сжимающее.

Оценим расстояние до неподвижной точки:

# Задание 4

## Постановка задачи

Выяснить, является ли отображение непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица.

## Решение

Условие поставлено некорректно. Интегрируемая функция не обязана быть непрерывной. Тогда как в результате требуется именно такая функция. Если требовать корректности условия, то . Таким образом, отображение не является ни непрерывным, ни равномерно непрерывным, и не удовлетворяет условию Липшица.

# Задание 5

## Постановка задачи

Привести пример отображения , где - банахово пространство, у которого для любых двух точек , выполняется условие , но неподвижных точек нет.

## Решение

Рассмотрим пространство и отображение . Очевидно, что требуемое неравенство обращается в равенство, тогда как неподвижных точек нет. Что и требовалось.