|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №4 |
|  |
| (Отображения в нормированных векторных пространствах) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевича Александра Дмитриевича

Вариант 14

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 20.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Теоретические основы**

Пусть  и  - два нормированных векторных пространства, и  - отображение из  в . Отображение  называется непрерывным в точке , если  , такое, что   выполняется . Если отображение  является непрерывным во всех точках множества , то оно называется непрерывным на .

Пусть ,  и  - нормированные пространства,  и  - непрерывные отображения соответственно из  в  и из  в . Тогда  - непрерывное отображение из  в .

Отображение  называется равномерно непрерывным на , если  , такое, что   выполняется . Всякое равномерно непрерывное отображение является непрерывным.

Если отображение  удовлетворяет условию: существует константа , что  , то говорят, что  удовлетворяет условию Липшица. Отображение, удовлетворяющее условию Липшица, является равномерно непрерывным.

Рассмотрим действующее в банаховом пространстве  отображение . Точка  называется неподвижной точкой отображения , если .

Отображение  является сжимающим, если существует постоянная  такая, что выполняется неравенство  для всех . Число  называется коэффициентом сжатия.

Пусть  отображает замкнутое в банаховом пространстве множество  на себя и является на  сжимающим с коэффициентом сжатия . Тогда в  отображение  имеет единственную неподвижную точку , которая может быть найдена методом последовательных приближений по формуле , , где  и  при . Кроме того, справедлива следующая оценка сходимости

.

Пусть  отображает банахово пространство  на себя и является сжатием. Тогда  имеет в  единственную неподвижную точку.

Пусть  определено на шаре , где  - банахово пространство. Пусть  является на  сжатием с коэффициентом  и при этом выполнено условие . Тогда в шаре  существует единственная неподвижная точка отображения , которая может быть найдена методом последовательных приближений.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

, .

Здесь ,  - заданные функции;  - заданная функция, называемая ядром интегрального уравнения;  - неизвестная функция.

Решение  разыскивается в пространстве различных функций в зависимости от свойств функций  и . Пространство выбирается так, чтобы интеграл в уравнении существовал. Это уравнение называется уравнением Фредгольма. Если , то это уравнение называется уравнением Фредгольма 1-го рода, соответственно при  - 2-го рода и при  - уравнением 3-го рода.

Уравнение вида

,

называется интегральным уравнением Вольтерра. Уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма.

Решением этих уравнений называется функция , при подстановке которой в уравнения выполняются равенство для всех  или почти всех. Линейное однородное уравнение всегда имеет решение .

Рассмотрим линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

.

Пусть  - непрерывная функция на  и , тогда для любого параметра  такого, что , интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет единственное непрерывное решение для любой правой части .

Рассмотрим нелинейное уравнение Фредгольма 2-го рода:

.

Пусть  - непрерывная функция по переменным . Тогда для любой функции  и любого параметра  интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода имеет единственное непрерывное решение.

# Задание 1

## Постановка задачи

Определите, при каких для следующего интегрального уравнения Фредгольма 2-ого рода в простарнстве , можно применить метод сжимающих отображений. При найти приближенное решение методом последовательных приближений с точностью и сравнить его с точным решением.

## Решение

Приведем уравнение к виду , тогда искомое решение является неподвижной точкой отображения . Поскольку оба пространства и являются полными, то нужно показать, что отображение сжимающее на соответствующих прострнствах.

Пусть

### Рассмотрим пространство .

задает отображения пространства на себя, так как состоит из суммы двух непрерывных функций.

Покажем, что – сжимающее, то есть , такая что для всех выполняется .

Таким образом является коэффициентом сжатия, и при к уравнению можно применить принцип сжимающих отображений и оно будет иметь единственное решение.

Рассмотри приближенное решение уравнения при . Оценим количество приближений по формуле:

Пусть . Тогда , , а .

Вычислим приближенные значения до , так как уже является приближенным решением с точностью .

Уже сейчас нашли неподвижную точку. Значит, за две итерации мы пришли к точному решению.

### Рассмотрим пространство .

Оценим ядро :

Таким образом, является отображением на себя и является сжимающим, если , поэтому к данному уравнению, при можно применить принцип сжимающих отображений. В этом случае понадобится число итераций, определяемое соотношением:

# Задание 2

## Постановка задачи

Вычислить приближенное решение следующего уравнения с точностью до .

## Решение

Приведем уравнение к виду и найдем точку и радиус , такие, что шар инвариантен относительно отображения и в этом шаре – сжимающее отображение.

Так как – дифференцируема, то в качестве константы Липшица возьмем .

Число – радиус шара, в котором существует неподвижная точка, выберем из следующих условий:

Где , а тогда .

Выберем одно из решений этой системы. Пусть . Тогда отрезок инвариантен относительно отображения , на нем – сжимающее и . Оценим расстояние до неподвижной точки:

Отсюда b является приближенным решением уравнения с точностью до .

# Задание 3

## Постановка задачи

Определить, является ли отображение нормированного пространства на себя сжимающим. Вычислить , где , и оценить расстояние от до неподвижной точки.

## Решение

Вычислим

Значит , а значит F – сжимающее.

Оценим расстояние до неподвижной точки:

# Задание 4

## Постановка задачи

Выяснить, является ли отображение непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица.

## Решение

Условие поставлено некорректно. Интегрируемая функция не обязана быть непрерывной. Тогда как в результате требуется именно такая функция. Если требовать корректности условия, то . Таким образом, отображение не является ни непрерывным, ни равномерно непрерывным, и не удовлетворяет условию Липшица.

# Задание 5

## Постановка задачи

Привести пример отображения , где - банахово пространство, у которого для любых двух точек , выполняется условие , но неподвижных точек нет.

## Решение

Рассмотрим пространство и отображение . Очевидно, что требуемое неравенство обращается в равенство, тогда как неподвижных точек нет. Что и требовалось.