|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №6 |
|  |
| (Компактные множества) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевич Александр Дмитриевич

Вариант: 14

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 20.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Теоретические основы**

Семейство , множеств  называется *покрытием* множества  из банахова пространства , если .

Множество  в банаховом пространстве  называется *компактным*, если из всякого открытого покрытия множества  можно выделить конечное подпокрытие.

Пусть  - банахово пространство,  - множество в нем. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) у любой последовательности точек из  существует сходящаяся в  подпоследовательность;

2) у любого открытого покрытия множества существует конченое открытое подпокрытие.

Компактное множество в банаховом пространстве ограничено, замкнуто, сепарабельно и полно.

Множество  называется -сетью, , для множества , если для любого  найдется  такое, что .

Множество  в банаховом пространстве  называется *вполне ограниченным*, если для любого  в  существует конечная -сеть для множества . Всякое вполне ограниченное множество ограничено.

Пусть  - банахово пространство,  - множество в нем. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1)  компактно;

2)  полно и вполне ограничено;

3) любая бесконечная последовательность в  имеет по крайней мере одну предельную точку в .

Множество  в банаховом пространстве  называется *предкомпактным* (*относительно компактным*), если  компактно, или, что равносильно, если из каждой последовательности  можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Предкомпактное множество в банаховом пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Множество  предкомпактно тогда и только тогда, когда  вполне ограничено.

Множество  называется *равномерно ограниченным*, если существует постоянная  такая, что  для всех . Множество  называется *равностепенно непрерывным*, если для любого  существует  такое, что для любых ,  выполнено  для всех .

Множество  предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

В пространстве  множество  предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.

Множество , , предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) существует константа  такая, что  для всех , т.е. множество  ограничено;

2) для любого  существует номер  такой, что  для всех .

Множество , , предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) существует константа  такая, что  для всех ;

2) для любого  существует  такое, что при   для всех .

Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.

Если функция  непрерывна на компактном множестве , то она достигает своей верхней и нижней грани на этом множестве, т.е. , что , .

Непрерывная на компакте  функция  равномерно непрерывна на нем.

# Задание 1

Являются ли относительно компактными следующие множества функций в пространстве ?

## Постановка задачи

## Решение

По теореме Арцела-Асколи множество является паракомпактным в тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Докажем, что множество является равномерно ограниченным. Каждую функцию из дополним значением в нуле, равным 1. Тогда функция непрерывна на . При , понятно, что функция ограничена единицей. А на отрезке функция непрерывна, а значит ограничена. Мы сделаем замену и будем считать Поэтому по сути , то есть константа не зависит от .

Докажем отсутствие равностепенной непрерывности. Надо показать, что не выполнено . Рассмотрим точки Ясно, что расстояние между ними стремится к нулю, но вместе с тем при получается .

**Ответ**: множество не является относительно паракомпактным.