|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №15 |
|  |
| (Теория Рисса-Шаудера разрешимости уравнений с компактным оператором) |
|  |

Студента 3 курса 3 группы

Некрашевича Александра Дмитриевича

Вариант: 14

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

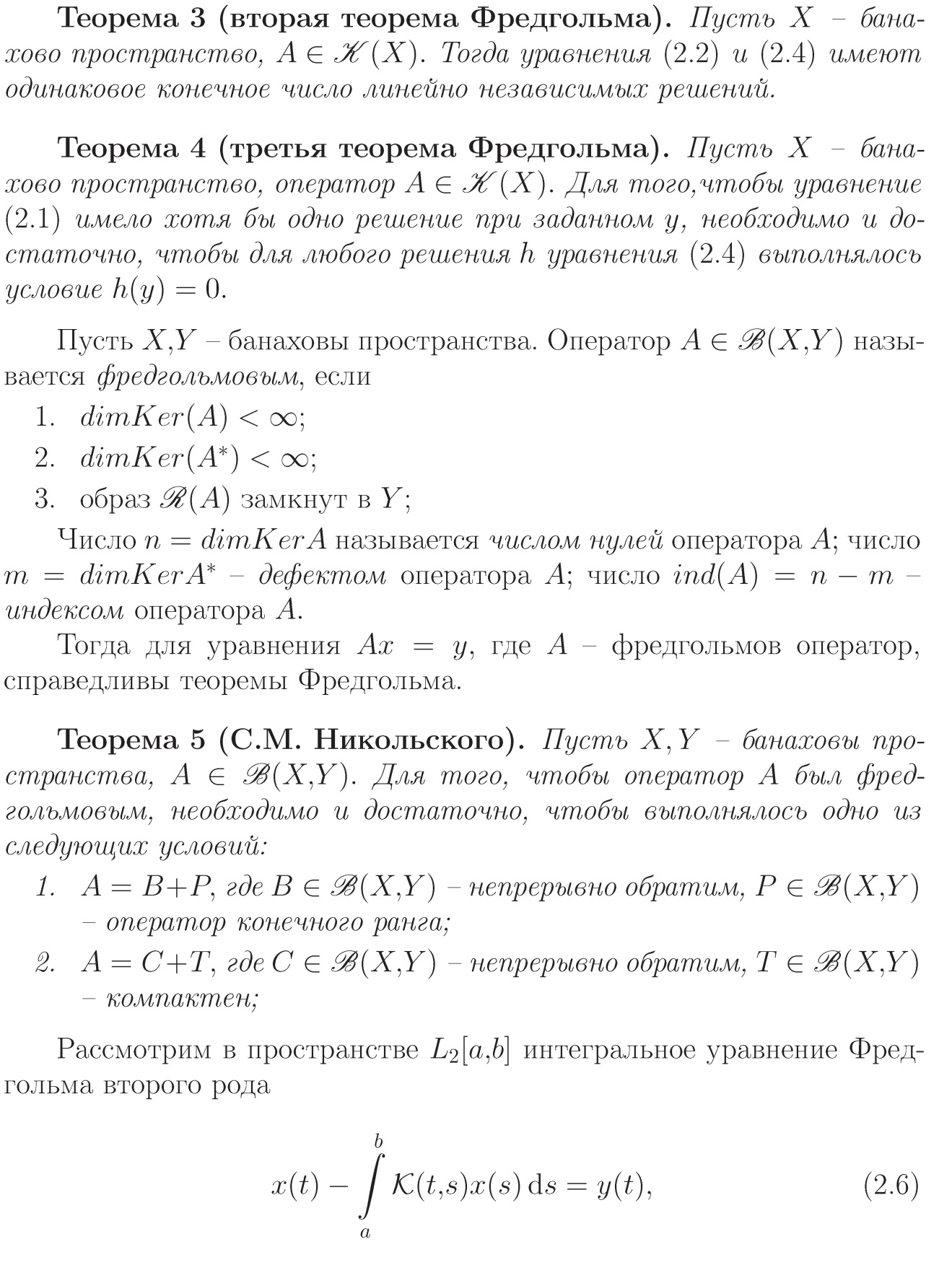
Работа сдана 28.12.2013 г.

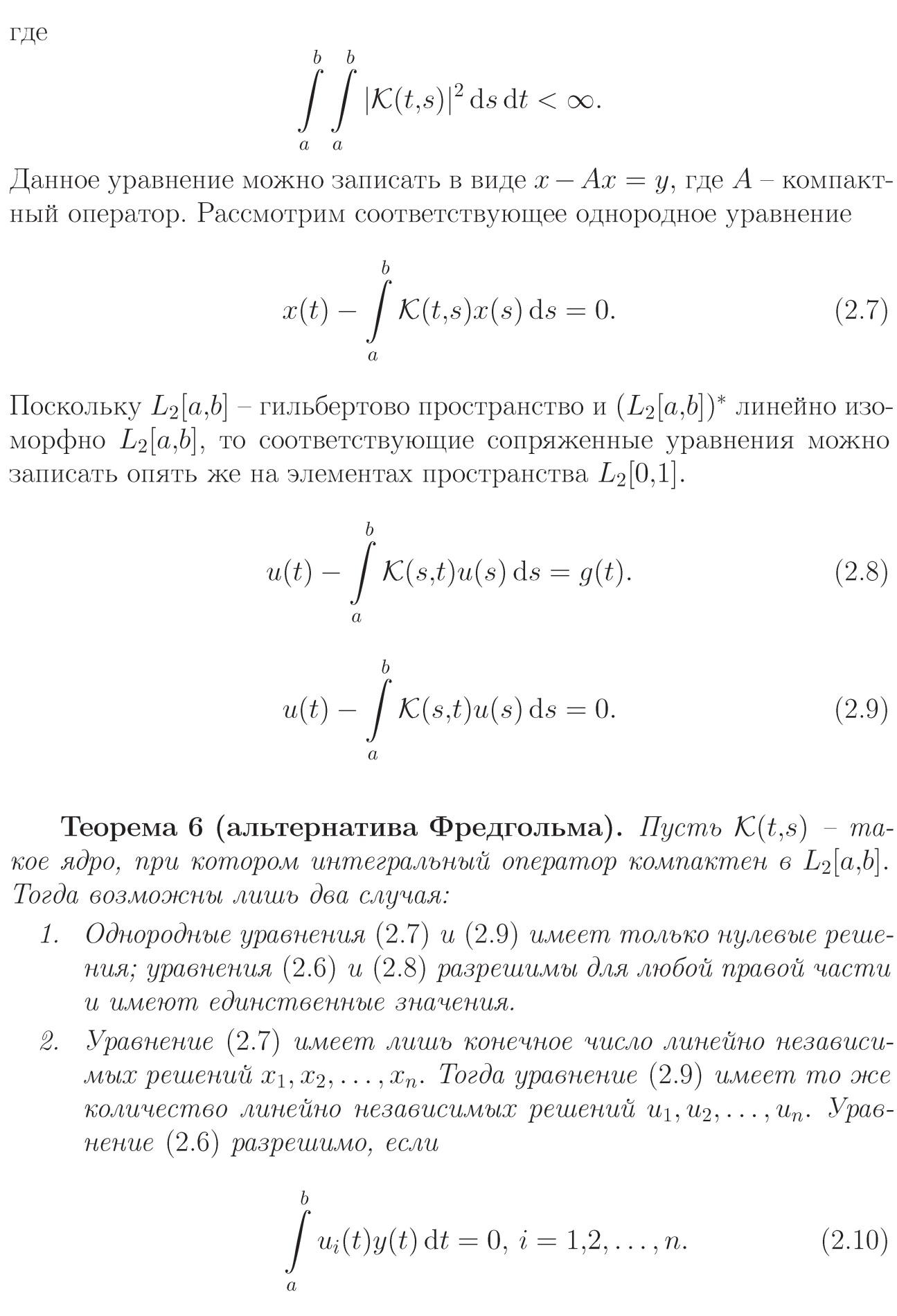
Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

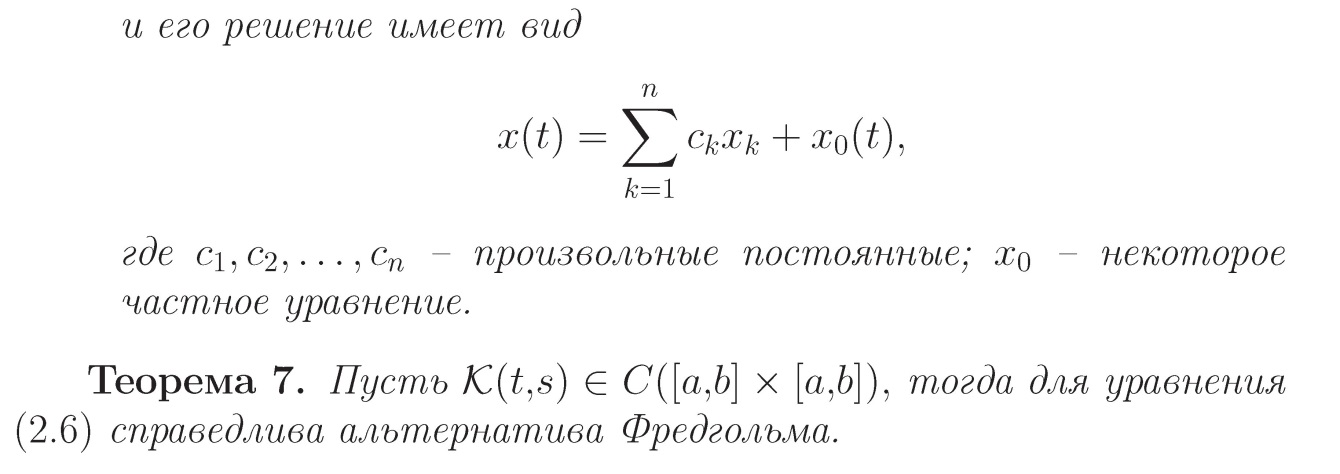
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Теоретические основы

# C:\Users\Aliaksandr\Documents\FAN\nekrald\raw_3_5\FA_3_5_Page_1.jpg







# Задание 1

Найти все решения следующих интегральных уравнений при всех значениях и при всех значениях параметров , входящих в свободный член этих уравнений.

## Постановка задачи

## Решение

Заметим сначала, что ядро оператора Фредгольма симметрично по переменным . Далее, оно непрерывно по обоим переменным в совокупности на . В соответствии с теоремой Фредгольма рассмотрим следующие уравнения:

В альтернативе Фредгольма утверждается, что либо первое уравнение имеет только нулевое решение, и тогда уравнение в условии разрешимо для любой правой части. Либо же последнее уравнение имеет только конечное число линейно независимых решений, и исходное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда:

Ядро оператора является вырожденным, и поэтому оператор имеет вид . Подставляем в второе уравнение, получаем систему:

Определитель не вырожден при , и вырожден иначе. Рассмотрим три случая:

1. Определитель не вырожден. То есть существует единственное решение. Его будем искать в виде

Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты, получаем .

1. . Тогда в силу симметрии ядра только *t* будет независимым решением. Требование теоремы

Фредгольма запишется в виде . Откуда

1. . Тогда в силу симметрии ядра только *1* будет независимым решением. Требование теоремы

Фредгольма запишется в виде . Откуда

# Задание 2

При каждом значении выяснить значения параметров , используя сопряжённый оператор, при которых существует решение интегрального уравнения в пространстве .

## Постановка задачи

## Решение

Случай очевиден, поэтому далее считаем

Поскольку ядро оператора вырождено, решение будем искать в виде .

После подстановки в однородное уравнение получаем систему:

Определитель обращается в ноль лишь при или . Если определитель не нулевой, то по альтернативе Фредгольма всегда существует единственное решение уравнения, поэтому в таком случае параметры любые.

Допустим, что . Тогда базисными решениями являются и . Заметим, что ядро симметричное. Поэтому условие второй части альтернативы Фредгольма даёт .

Пусть теперь . Тогда базисным решением будет . Условие Фредгольма перепишется в виде

**Ответ:** при . При . Иначе коэффициенты любые.