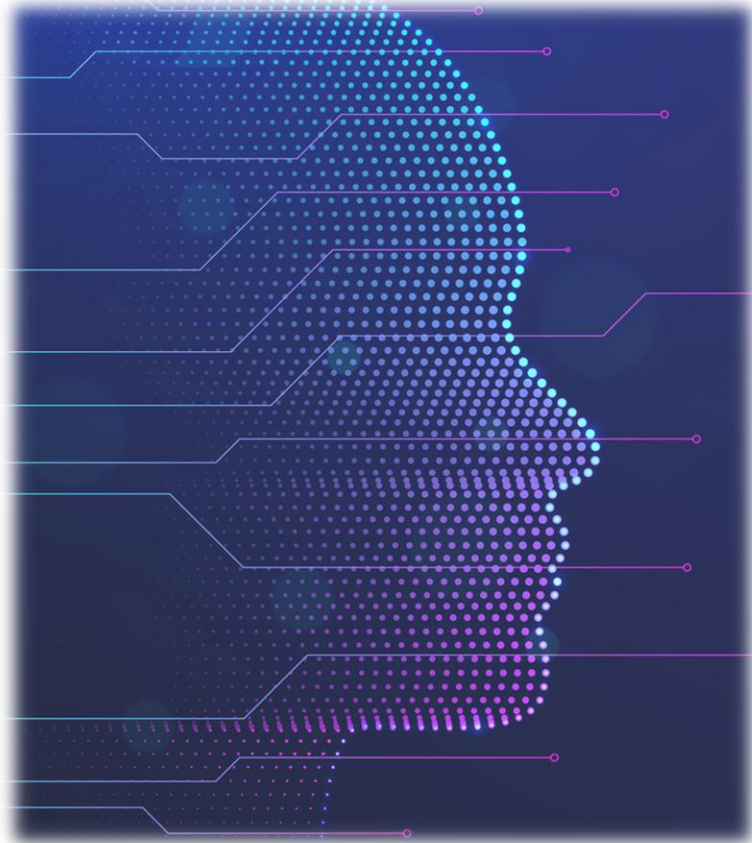


# Inteligencja obliczeniowa w analizie danych



**Logika rozmyta**  
**Wnioskowanie rozmyte**

# Gdzie jesteśmy

## Algorytmy heurystyczne

Algorytmy probabilistyczne  
Algorytmy genetyczne  
Strategie ewolucyjne  
Metody roju cząstek,  
mrówkowe, symulowane  
wyżarzanie...

## Logika rozmyta

Rozmyte systemy wnioskujące  
Systemy eksperckie  
Sterowanie rozmyte

## Sztuczne sieci neuronowe

Sieci neuronowe – teoria  
Sieci neuronowe – typowe  
aplikacje  
Głębokie sieci neuronowe  
Sieci neuronowe – aplikacje  
inżynierskie

**Filary inteligencji  
obliczeniowej**

Algorytmy  
heurystyczne

**Logika  
rozmyta**

Sztuczne  
sieci neuronowe

.....  
Koncepcja komputera kwantowego

# Zbiory ostre

Klasyczna teoria zbiorów (zbiory ostre):

Pewnym obszarem rozważań niech będzie  $X$ .

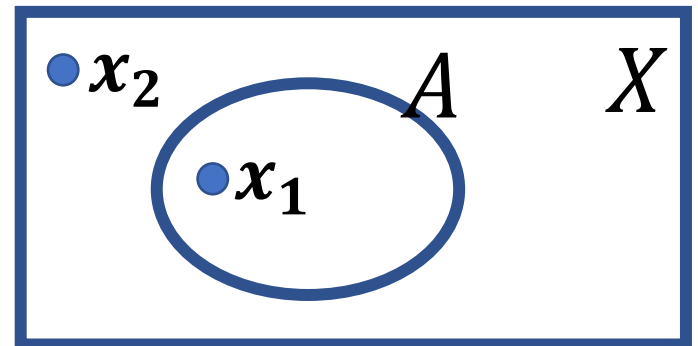
Zbiór dowolnych elementów  $a_i$  należy do zbioru  $A$ , natomiast  $b_i$  nie należy do zbioru  $A$  :  $a_i \in A$ ,  $b_i \notin A$

Zbiory  $a_i$  oraz  $b_i$  zostały utworzone w tej samej przestrzeni  $X$ :  $a_i \in X$ ,  $b_i \notin X$ .

Dla każdego elementu  $x \in X$  jego przynależność do zbioru  $A$  można określić przez funkcję przynależności, która przyjmuje wartość:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin A \\ 1 & \text{dla } x \in A \end{cases}$$

**PRAWDA/FAŁSZ**



# Logika wielowartościowa



**Jan Łukasiewicz** (ur. 21 grudnia 1878 we Lwowie, zm. 13 lutego 1956 w Dublinie) – polski naukowiec i polityk; logik i filozof, rektor Uniwersytetu Warszawskiego, minister.

Jego praca *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa* zapoczątkowała rozwój logiki matematycznej. **Był autorem logiki trójwartościowej**, pierwszego nieklasycznego rachunku logicznego, na bazie którego powstały logika modalna, logika probabilistyczna i logika rozmyta.

Prócz prawdy – „1” oraz fałszu „0” zaproponował dodatkową wartość – „ $\frac{1}{2}$ ”

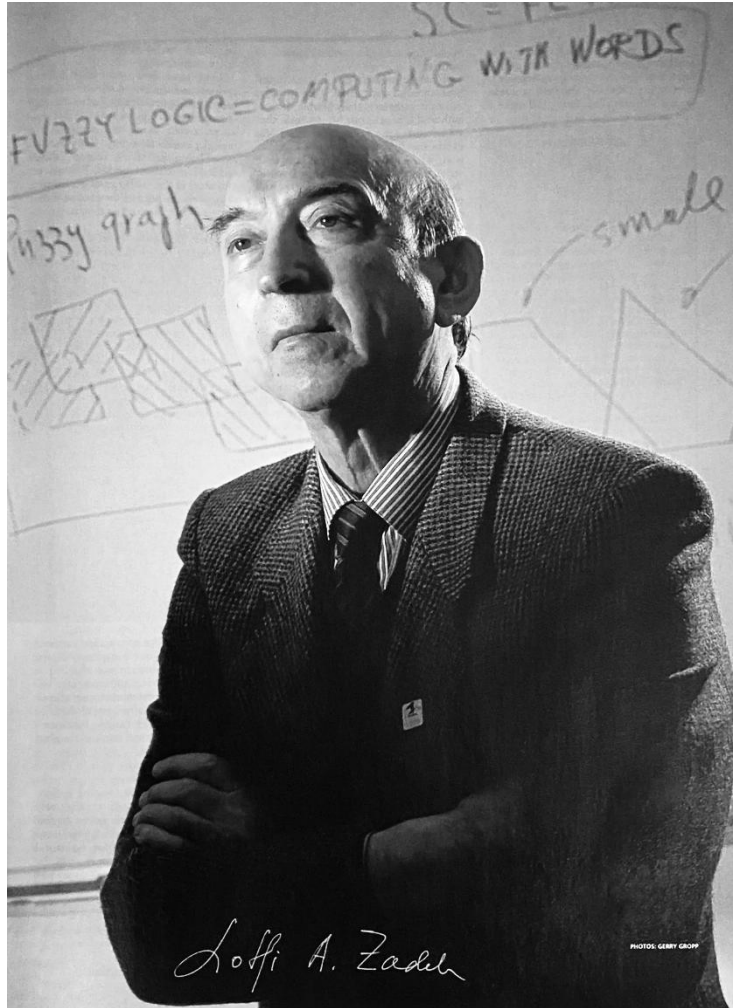
Przykład – na wakacje pojadę na Malediwy – czy to zdanie jest prawdziwe czy fałszywe ? – na chwilę obecną to „prawdopodobnie” - „ $\frac{1}{2}$ ”

Oprócz logiki trójwartościowej powstały także logiko wielowartościowe:

$$0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1$$

# Zbiory rozmyte

Profesor Zadeh, praca pt.:  
"Fuzzy Sets" 1965 w  
*Information and Control*.



INFORMATION AND CONTROL 8, 338-353 (1965)

## Fuzzy Sets\*

L. A. ZADEH

*Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory,  
University of California, Berkeley, California*

A fuzzy set is a class of objects with a continuum of grades of membership. Such a set is characterized by a membership (characteristic) function which assigns to each object a grade of membership ranging between zero and one. The notions of inclusion, union, intersection, complement, relation, convexity, etc., are extended to such sets, and various properties of these notions in the context of fuzzy sets are established. In particular, a separation theorem for convex fuzzy sets is proved without requiring that the fuzzy sets be disjoint.

# Zbiory rozmyte

Pewnym obszarem rozważań niech będzie  $X$ .

Zbiór rozmyty  $A$  został utworzony w tym obszarze  $X$ :  $A \in X$ .

Dla każdego elementu  $x \in X$  jego przynależność do zbioru  $A$  można określić przez funkcję przynależności, która przyjmuje wartość:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\}$$

Tak zdefiniowana funkcja to zbiór romyty

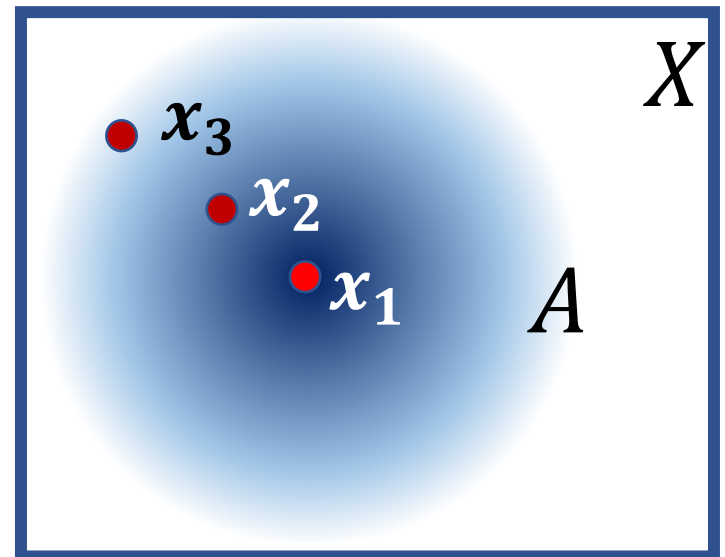
$\mu_A(x)$  - to funkcja  
przynależności określająca  
stopień przynależności  
elementów  $x$  do zbioru  $A$

$$\mu_A(x_3) = 0.2$$

$$\mu_A(x_2) = 0.7$$

$$\mu_A(x_1) = 1$$

Zbiór elementów o  
stopniach przynależności  
większych od zera to  
nośnik zbioru rozmytego.

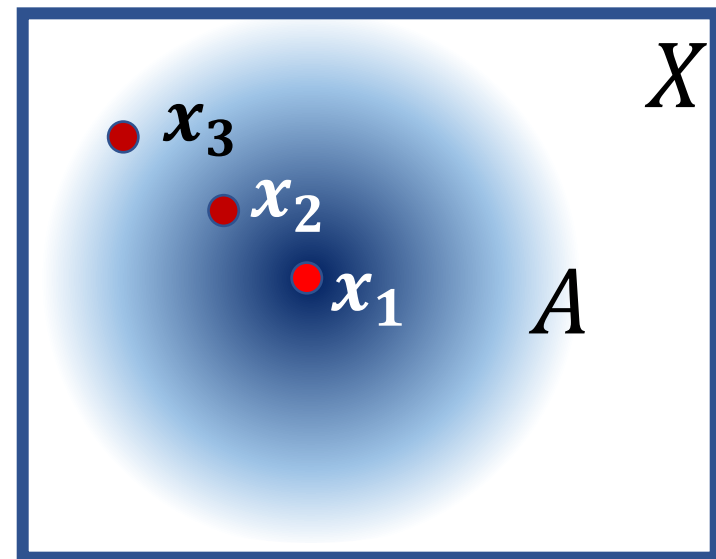




# Zbiory rozmyte

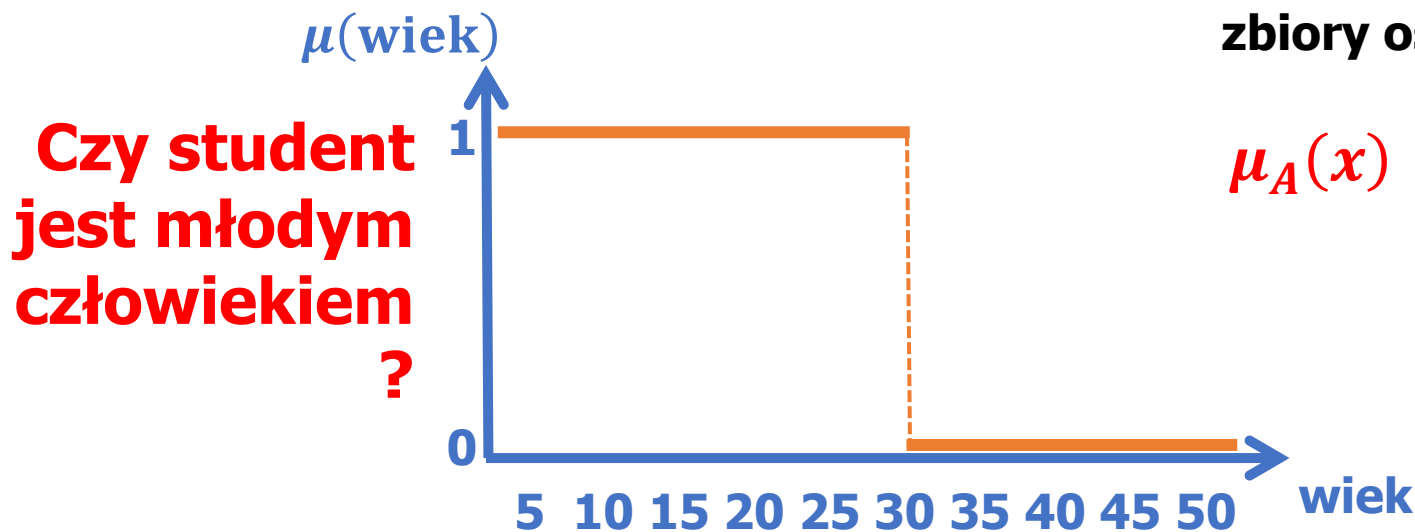
Czy  $x_3$  należy do zbioru  $A$  ?  
... raczej nie .., trochę, mało ..  
Nieprecyzyjne określenie ..  
Tak często robimy w życiu ..

Takie pozornie nieprecyzyjnie  
określenia (mało, szybko, niski)  
nazywamy **zmiennymi  
lingwistycznymi**



funkcja przynależności  
zbiory ostre

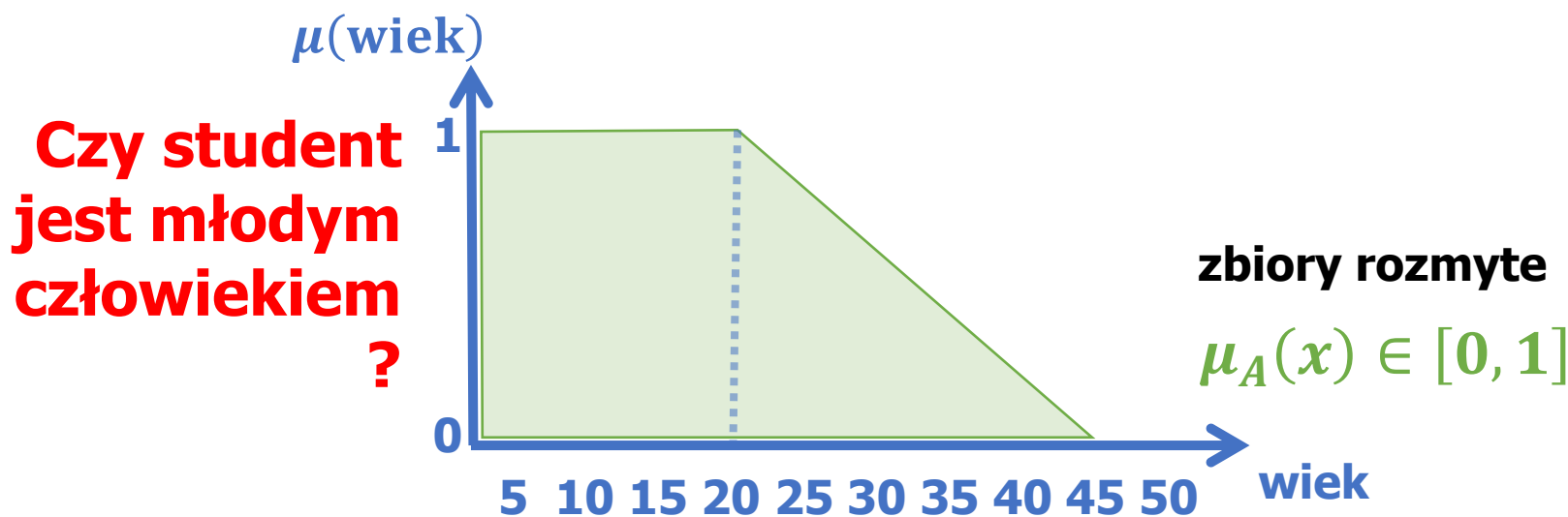
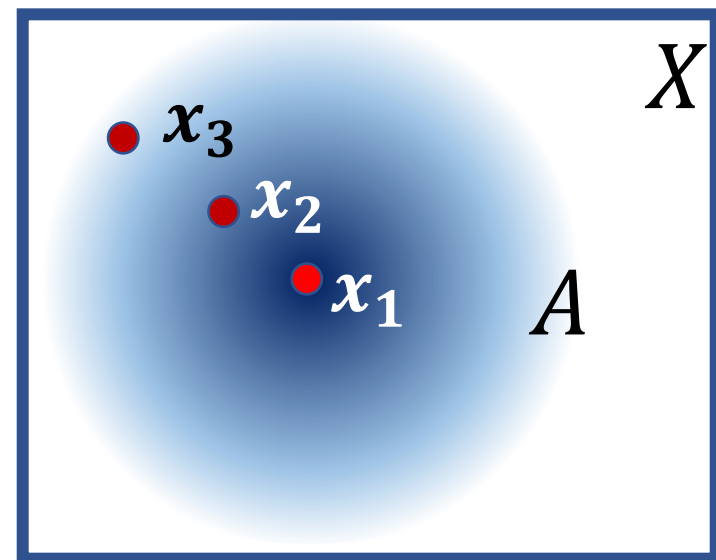
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin A \\ 1 & \text{dla } x \in A \end{cases}$$



# Zbiory rozmyte

Czy  $x_3$  należy do zbioru  $A$  ?  
... raczej nie .., trochę, mało ..  
Nieprecyzyjne określenie ..  
Tak często robimy w życiu ..

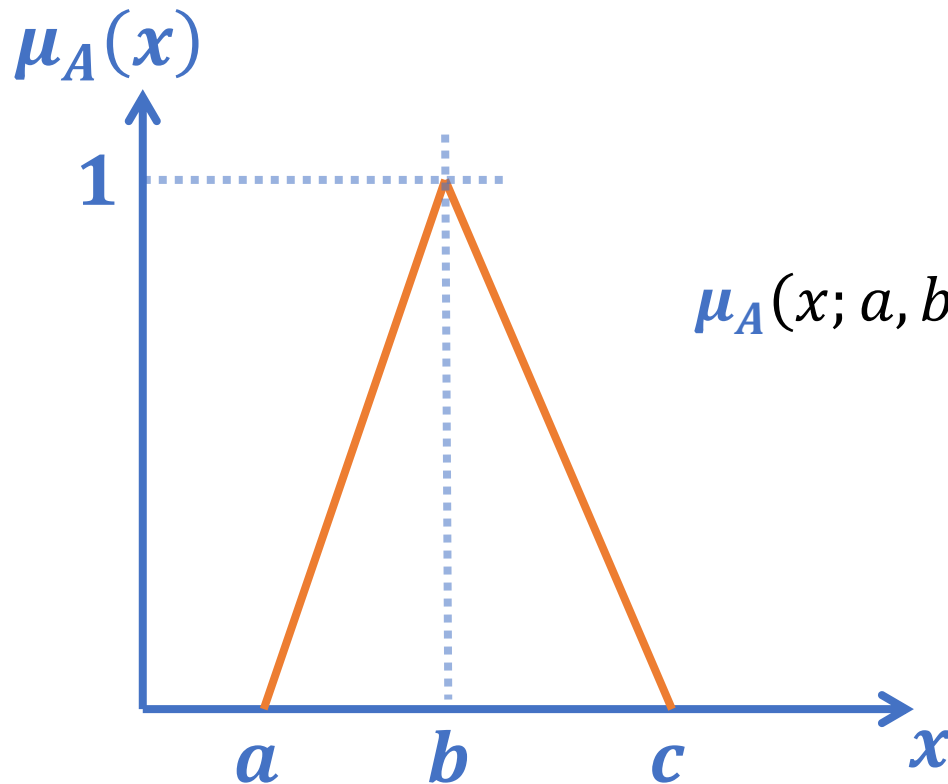
Takie pozornie nieprecyzyjnie  
określenia (mało, szybko, niski)  
nazywamy **zmiennymi  
lingwistycznymi**





# Funkcje przynależności (funkcje definiujące zbiór rozmyty)

## Trójkątna funkcja przynależności



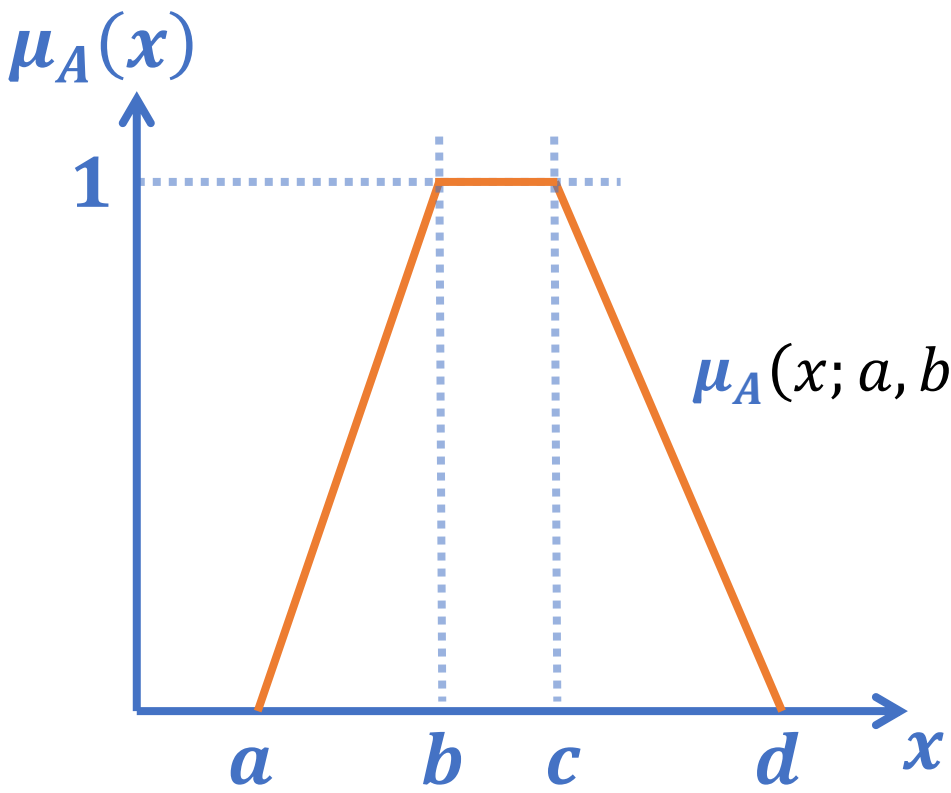
$$\mu_A(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{dla } a < x \leq b \\ \frac{c - x}{c - b} & \text{dla } b < x \leq c \\ 0 & \text{dla } x > c \end{cases}$$

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\}$$

Tak zdefiniowana funkcja to zbiór rozmyty

# Funkcje przynależności

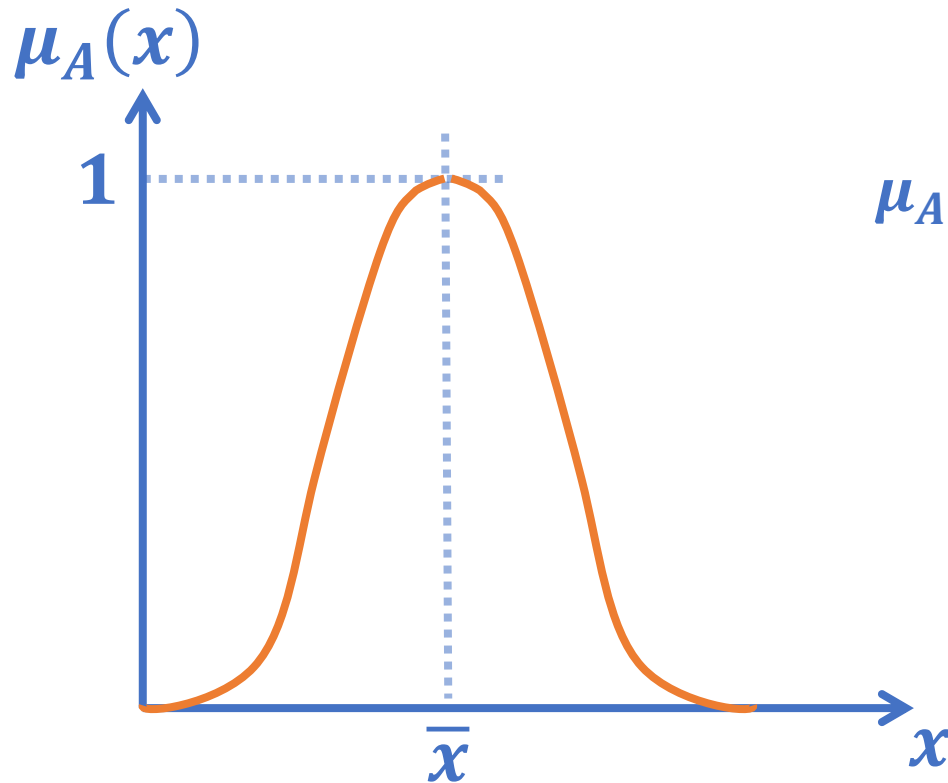
## Trapezowa funkcja przynależności



$$\mu_A(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{dla } a < x \leq b \\ 1 & \text{dla } b < x \leq c \\ \frac{d - x}{d - c} & \text{dla } c < x \leq d \\ 0 & \text{dla } x > d \end{cases}$$

# Funkcje przynależności

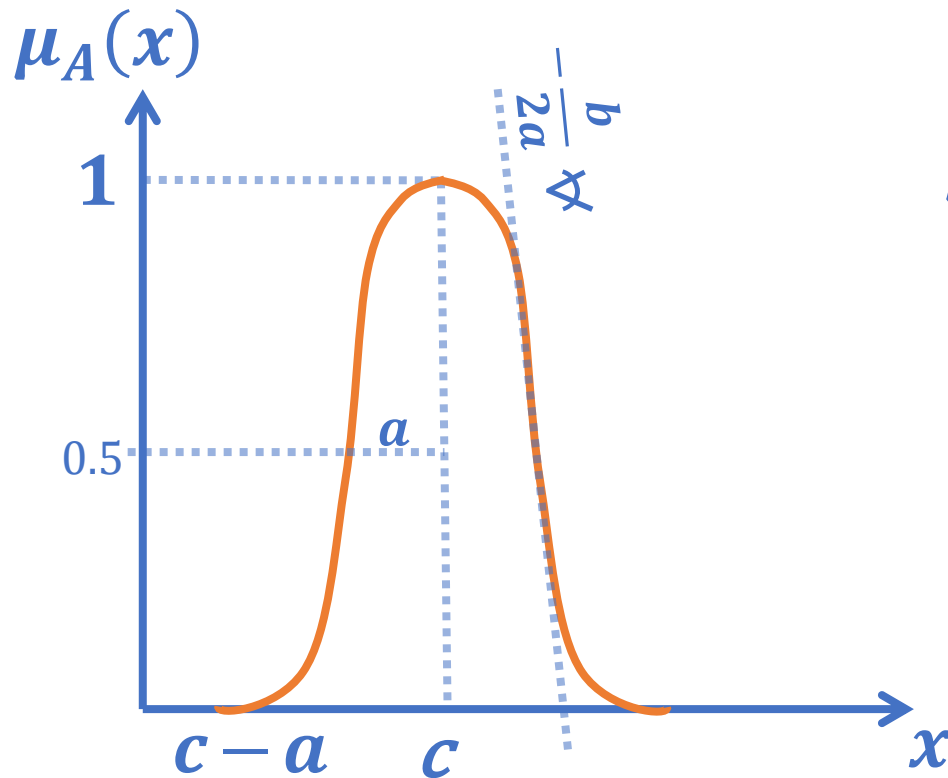
## Gaussowska funkcja przynależności



$$\mu_A(x) = \exp\left(-\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma}\right)^2\right)$$

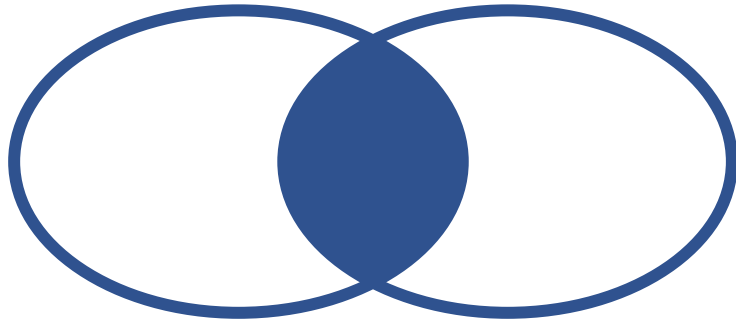
# Funkcje przynależności

## Dzwonowa funkcja przynależności



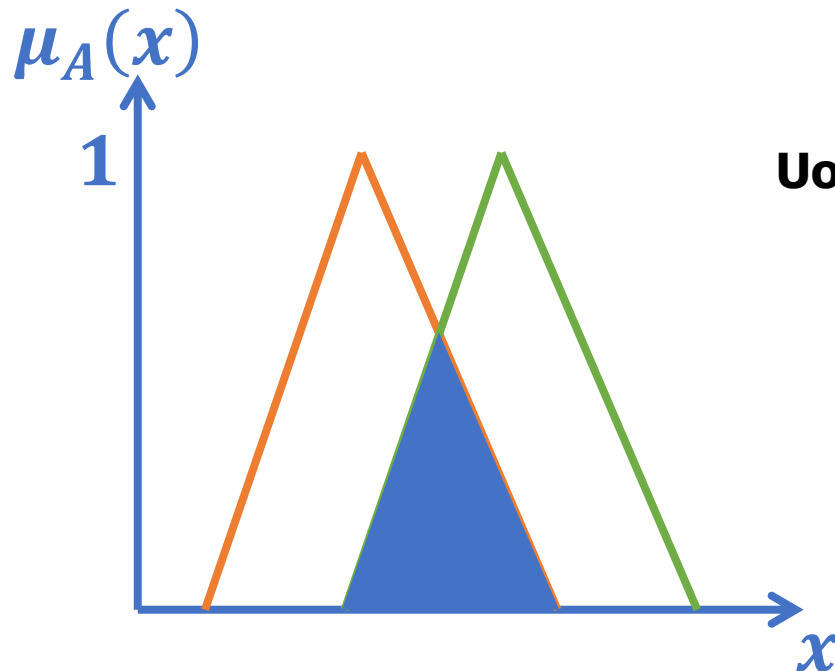
$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}$$

# Logika klasyczna – logika rozmyta - operacje na zbiorach



**Koniunkcja zbiorów ostrych**

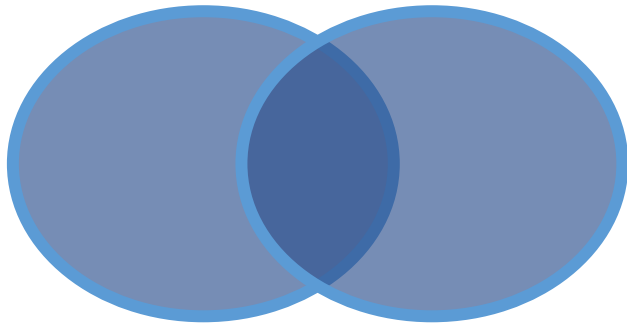
$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$$



**Uogólniona koniunkcja zbiorów rozmytych**

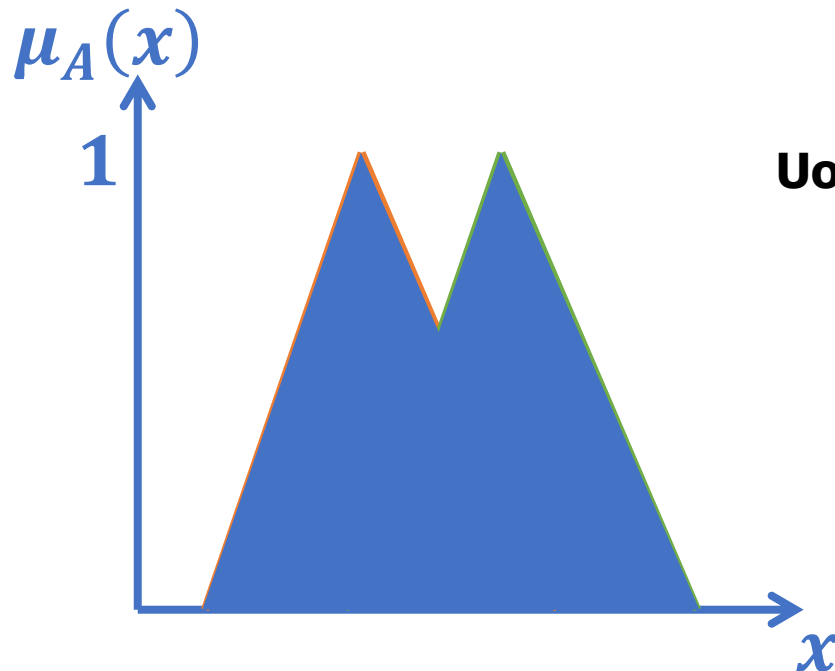
$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}, x \in X$$

# Logika klasyczna – logika rozmyta - operacje na zbiorach



**Alternatywa zbiorów ostrych**

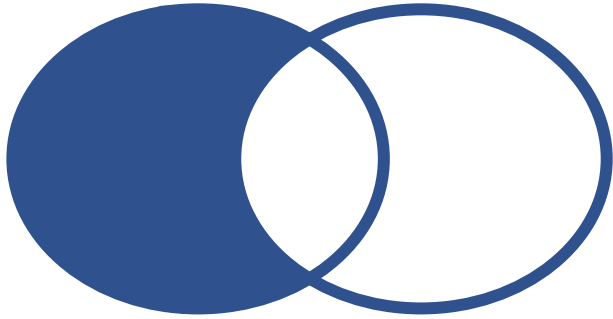
$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$$



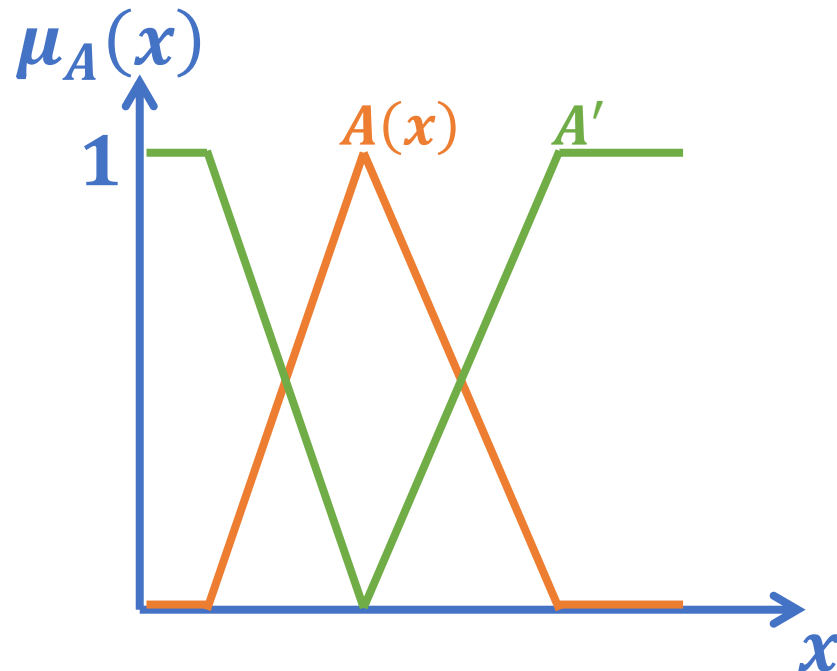
**Uogólniona alternatywa zbiorów rozmytych**

$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, x \in X$$

# Logika klasyczna – logika rozmyta - operacje na zbiorach



$$A' = \{x \in X : x \notin A\}$$



$$(A')(x) = 1 - A(x), x \in X$$



**Logika rozmyte:  
aksjomaty, reguły –  
całość szerokiego  
zagadnienia**

**Zbiór rozmyty – zbiór  
zdefiniowany funkcją  
przynależności**

**zdania logiczne**

**klasyczne**

**rozmyte**

**koniunkcja     $\wedge$**

**uogólniona koniunkcja**

**alternatywa     $\vee$**

**uogólniona alternatywa**

**negacja     $\neg$**

**uogólniona negacja**

**implikacja     $\Rightarrow$**

**uogólniona implikacja**

# Wnioskowanie klasyczne

## Reguła Modus Ponens

**reguła:** JEŻELI  $x$  jest  $A$ , TO  $y$  jest  $B$   
**fakt:**  $x$  jest  $A$

**wniosek:**  $y$  jest  $B$

**reguła:** JEŻELI *dzisiaj* jest *piątek*,  
TO *wieczorem* jest *impreza*  
**fakt:** *dzisiaj* jest *piątek*

**wniosek:** *wieczorem* jest *impreza*

# Wnioskowanie rozmyte – nasze dane są przybliżone

Uogólniona reguła Modus Ponens

**reguła:** JEŻELI *twierdzenie rozmyte pierwsze*,  
TO *twierdzenie rozmyte drugie*  
**fakt:** *twierdzenie rozmyte pierwsze*

**wniosek:** *twierdzenie rozmyte drugie*

przy czym, twierdzenia rozmyte pierwsze, zawierają najczęściej koniunkcje wszystkich kombinacji pojęć lingwistycznych dla danych zmiennych wejściowych

**reguła:** JEŻELI *temperatura jest wysoka*,  
TO *wieczorem wypijemy dużo piwa*  
**fakt:** *temperatura jest wysoka*

**wniosek:** *wieczorem wypijemy dużo piwa*

*wysoka* temperatura, *dużo* piwa to zmienne lingwistyczne, których ilościowe znaczenie możemy opisać zbiorami rozmytymi za pomocą funkcji przynależności

**zbiór reguł określający spektrum możliwości buduje bazę reguł**

# Wnioskowanie rozmyte – nasze dane są przybliżone

**Logika klasyczna: Jeżeli przesłanka jest prawdą  
to i implikacja jest prawdziwa.**

**Logika rozmyta: Jeżeli przesłanka jest w pewnym stopniu prawdziwa,  
to i konsekwencja jest w pewnym stopniu prawdziwa.**

# Wnioskowanie rozmyte – baza reguł

**reguła 1:**      **IF  $A_1(x)$ , THEN  $B_1(y)$**

**reguła 2:**      **IF  $A_2(x)$ , THEN  $B_2(y)$**

**....**      **....**

**reguła 2:**      **IF  $A_n(x)$ , THEN  $B_n(y)$**

**FAKT**       **$A(x)$**

**WNIOSEK**       **$B(y)$**

# Wnioskowanie rozmyte – baza reguł złożonych

## Metoda wnioskowania rozmytego Mamdaniego

**Mamdani, Ebrahim H (1974).**

"Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant". Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. 121 (12): 1585–1588



**Mamdani-Type Fuzzy Inference (MIN-MAX)**

**reguła 1: IF  $A_1(x)$  AND  $B_1(x)$  AND ..., THEN  $Z_1(y)$**

**reguła 2: IF  $A_2(x)$  AND  $B_2(x)$  AND ..., THEN  $Z_2(y)$**

**.... ....**

**reguła 2: IF  $A_n(x)$  AND  $B_n(x)$  AND ..., THEN  $Z_n(y)$**

**FAKT  $A(x), B(x) ..$**

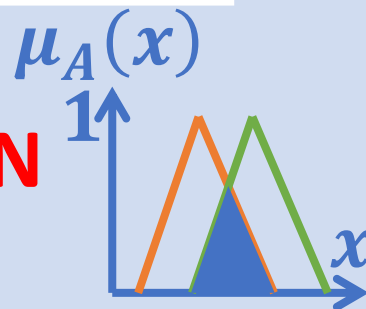
**WNIOSEK  $Z(y)$**

# Wnioskowanie rozmyte – baza reguł złożonych

## Metoda wnioskowania rozmytego Mamdaniego

uogólniona koniunkcja - **MIN**

$$(A \cap B)(x) = \text{min}\{A(x), B(x)\}, x \in X$$



**reguła 1: IF  $A_1(x)$  AND  $B_1(x)$  AND ..., THEN  $Z_1(y)$**

**reguła 2: IF  $A_2(x)$  AND  $B_2(x)$  AND ..., THEN  $Z_2(y)$**

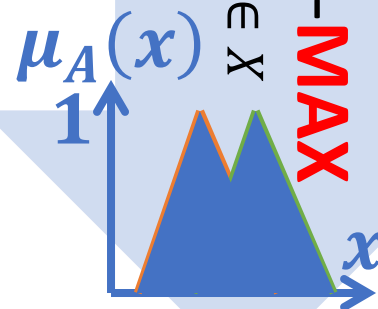
.... ....

**reguła 2: IF  $A_n(x)$  AND  $B_n(x)$  AND ..., THEN  $Z_n(y)$**

**FAKT  $A(x), B(x) ..$**

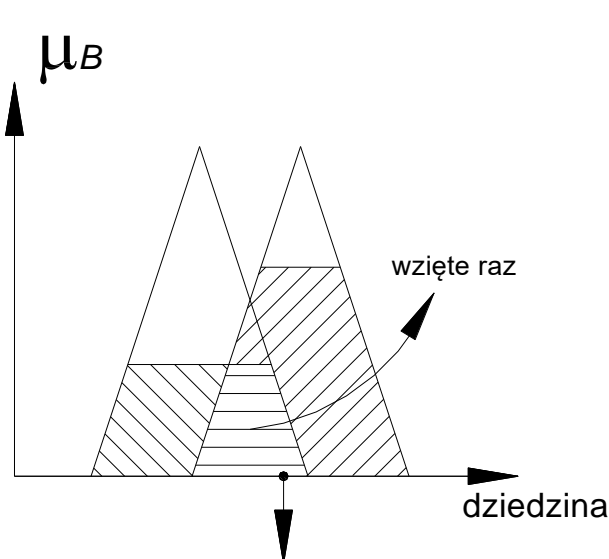
**WNIOSEK  $Z(y)$**

uogólniona alternatywa - **MAX**  
 $(A \cup B)(x) = \text{max}\{A(x), B(x)\}, x \in X$

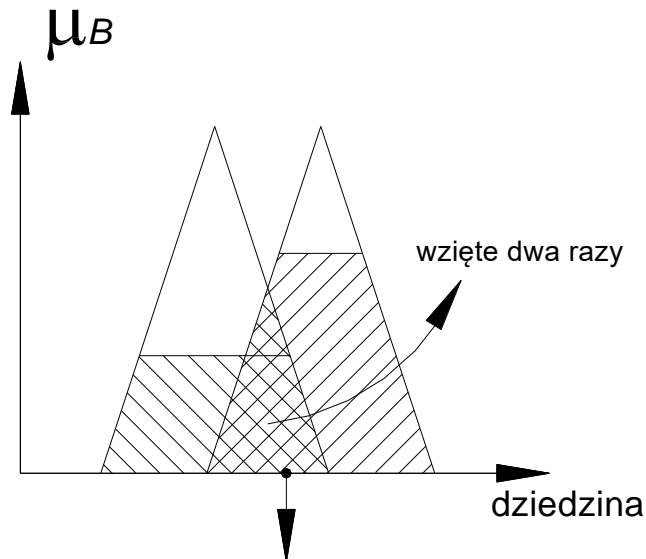




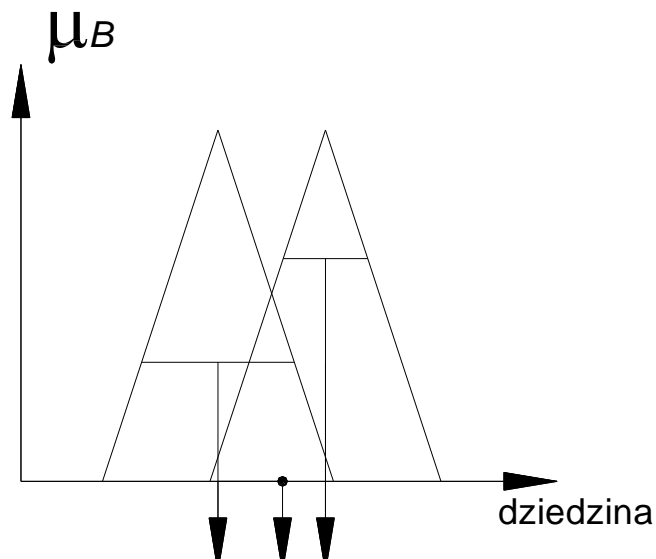
# Co po wnioskowaniu - procedury defuzyfikacji



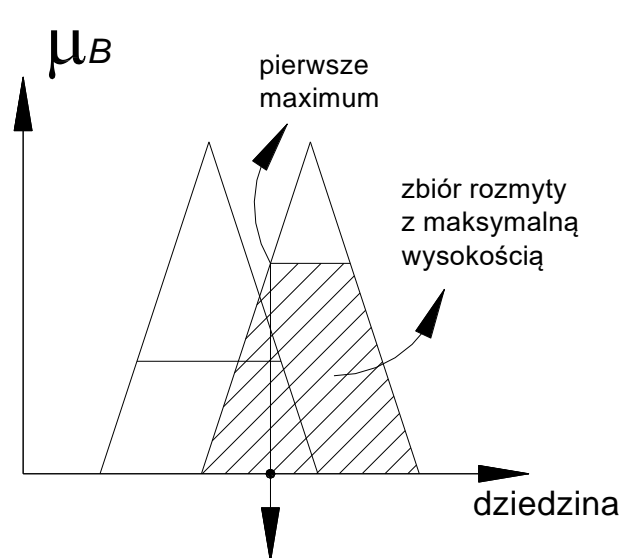
**Metoda środka ciężkości**



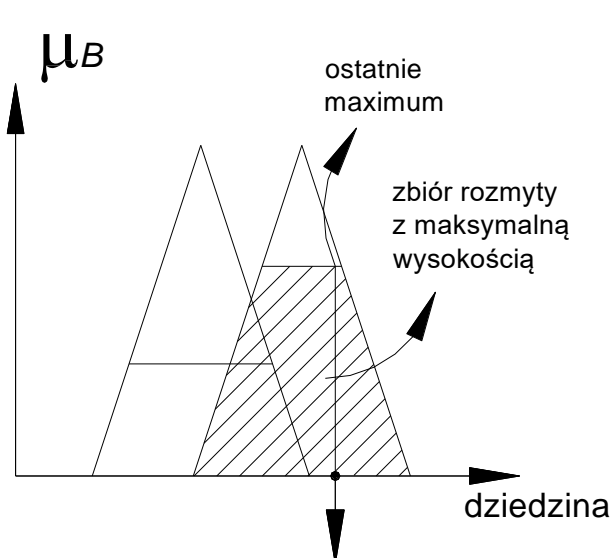
**Metoda środka sum**



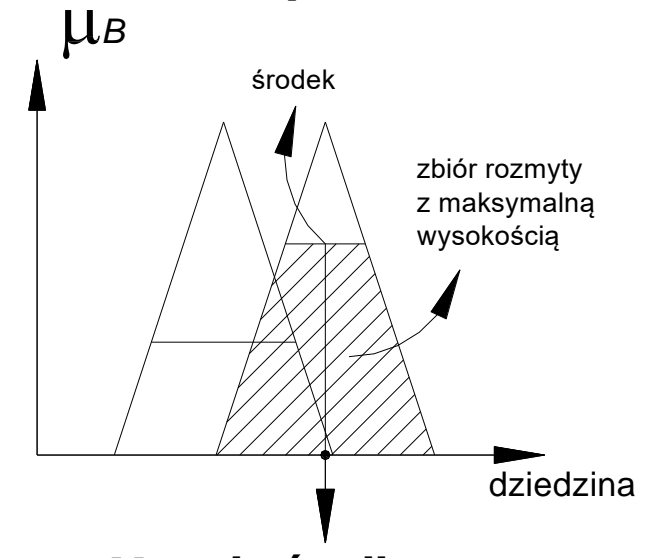
**Metoda wysokości**



**Metoda pierwszy z największych**



**Metoda ostatni z największych**



**Metoda środkowy z największych**

Zademonstrujemy przebieg procesu wnioskowania  
rozmytego na przykładzie ...

Przykład sercu bliski –

ile browarków planujemy spożyć  
podczas długiego weekendu majowego ..

(oczywiście tylko warstwa merytoryczna jest  
wartościowa – nie promujemy spożywania alkoholu 😊 )

# **KROK 1: wybór zmiennych wejściowych i wyjściowych**

Ustalamy, jakie czynniki mają wpływ na proces wnioskowania  
– od czego powinien zależeć wynik ..

... złoźmy, że dla przykładowego problemu najważniejsze są:

**dwie zmienne wejściowe:**

**zasoby nadmiarowej gotówki**

*oraz*

**średnia prognozowana temperatura**

(pragnienie wzrasta wraz z temperaturą,  
czemu sprzyjają imprezy pod gołym niebem,  
jednak braki budżetowe mogą ograniczyć fantazję ..)

a proces wnioskowania dotyczy

**jednej zmiennej wyjściowej:**

**planowanej ilości browarków**

## **KROK 2: określenie fizycznych dziedzin (nośników zbiorów rozmych) dla wybranych zmiennych**

Optymistycznie założmy, że możemy zaszaleć  
i na weekendowy relaks przewidujemy budżet do 1000 PLN... ,  
natomiast wiosna zapowiada się gorąca, z temperaturami sięgającymi 30°C.

### **zmienne wejściowe:**

- ✓ budżet 0-1000 PLN
- ✓ prognozowana temperatura: 0-30 °C

### **zmienna wyjściowa:**

- ✓ planowana ilość browarków 0-10 (dziennie ! Przedział umiarkowany  
- nie promujemy zachowań skrajnych ..)

# **KROK 3: wybór i nazwanie zmiennych lingwistycznych opisujących każdą ze zmiennych wejściowych/wyjściowych**

Uznajmy, że właściwą **liczbą zmiennych lingwistycznych** do opisu parametrów wejściowych jest

**3** dla zmiennej **budżet**

oraz

**4** dla zmiennej **temperatura**.

**Zmienne lingwistyczne** opisujące **budżet** nazwijmy następująco:

**Mały, Średni, Duży.**

**Zmienne lingwistyczne** opisujące **prognozowaną temperaturę** nazwijmy następująco:

**Niska, Średnia, Optymalna, Gorąca.**

**Liczbę zmiennych lingwistycznych dla zmiennej wyjściowej – ilość\_browarków określmy na 5 i nazwijmy je:**

**Bardzo\_Mało, Mało, Średnio, Dużo, Bardzo\_Dużo**

## **KROK 4:** wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych

Dla potrzeb przykładu wybierzmy najprostszy kształt funkcji przynależności – trójkątny.

Każdorazowo oś pionowa określa stopień przynależności w granicach od 0 do 1.

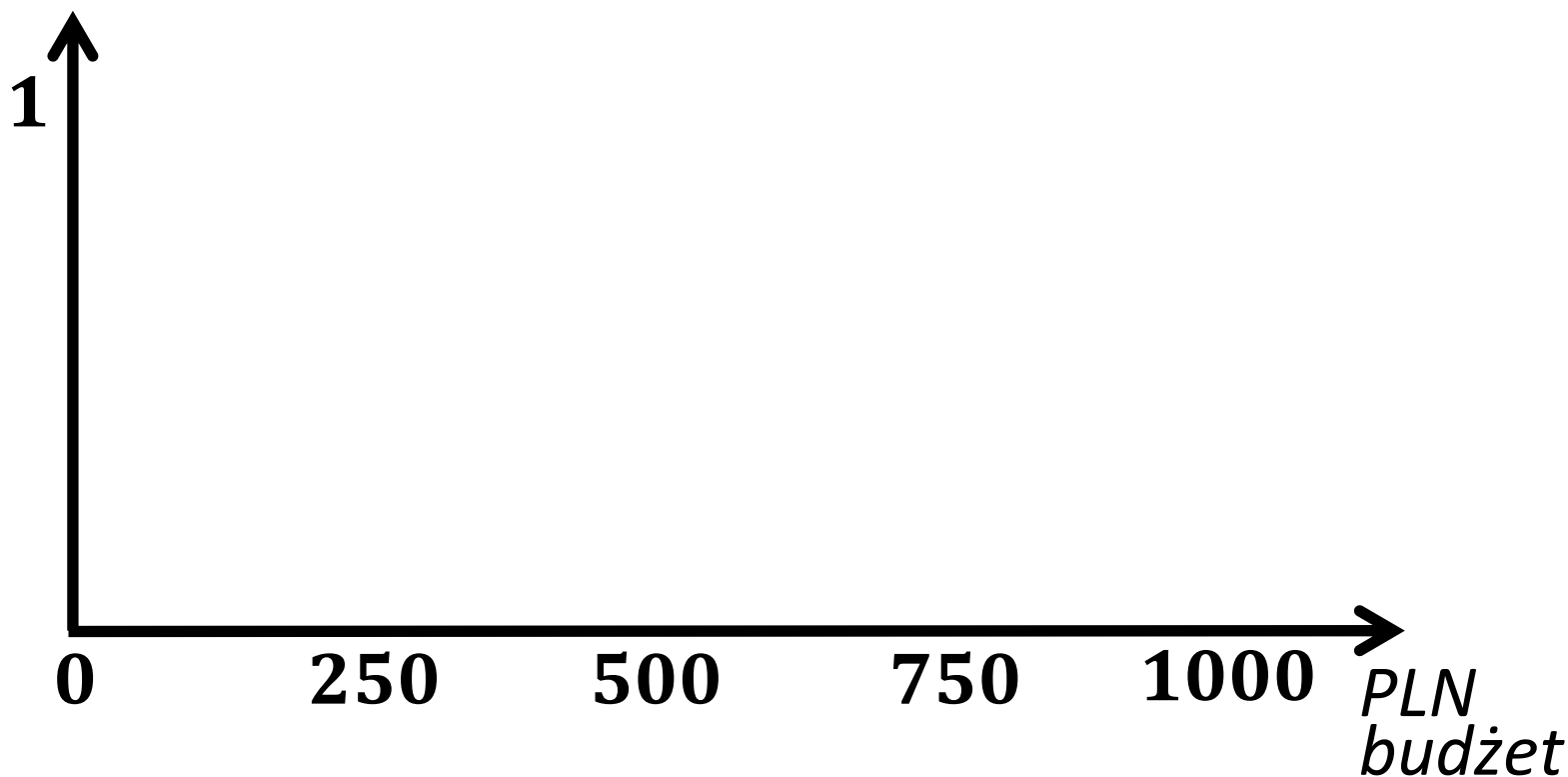
Kreślenie funkcji przynależności polega na skodyfikowaniu subtelnych odczuć naszych, bądź eksperta, związanych z umiejscowieniem w fizycznej dziedzinie zaproponowanych zmiennych lingwistycznych.

## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

**Zmienne lingwistyczne** opisujące **Budżet**:

**Mały**, **Średni**, **Duży**.

Nośnik zbioru rozmytego budżet – [0-1000] PLN



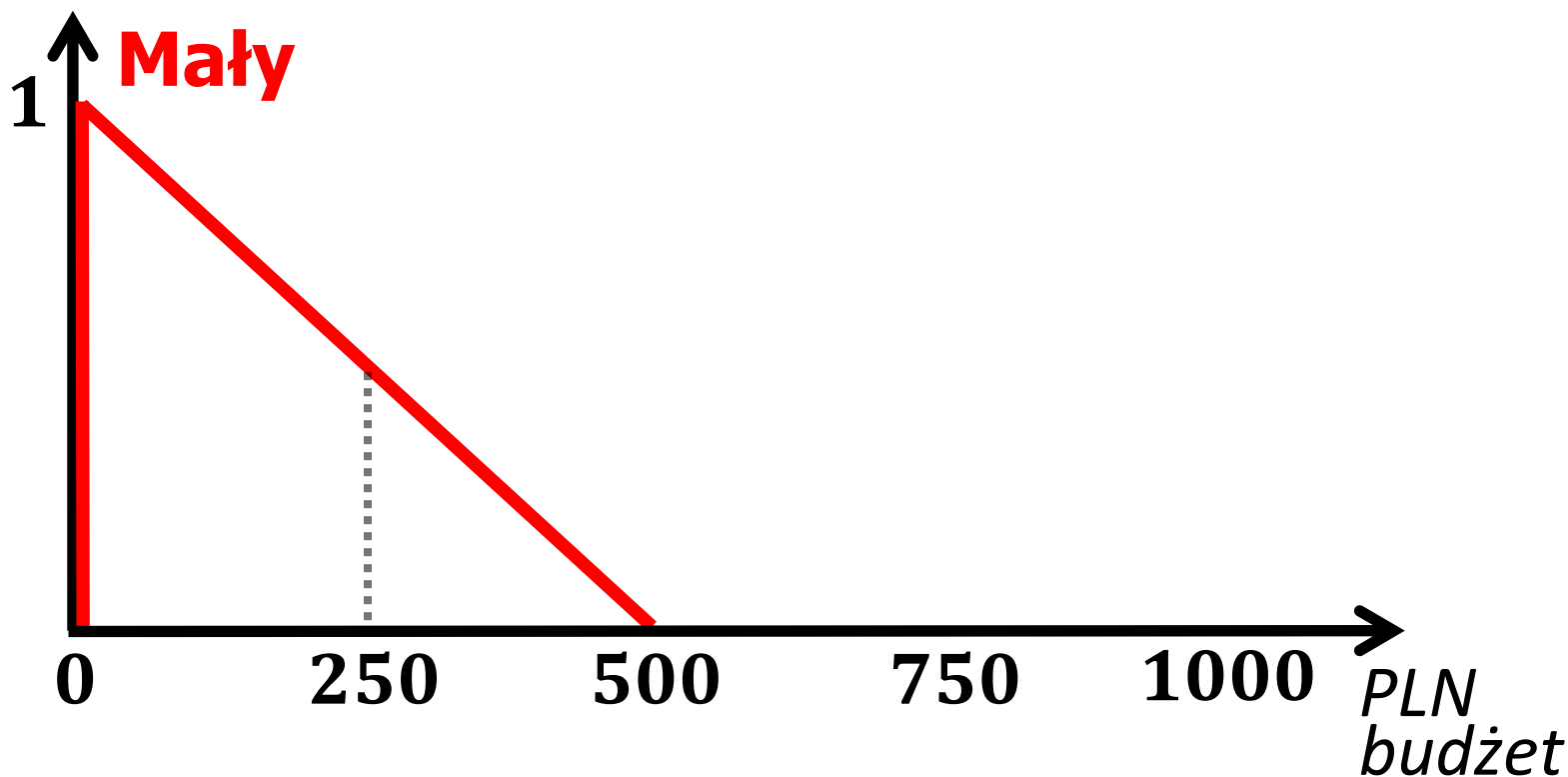


## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące **Budżet**:

**Mały**, **Średni**, **Duży**.

Nośnik zbioru rozmytego budżet – [0-1000] PLN

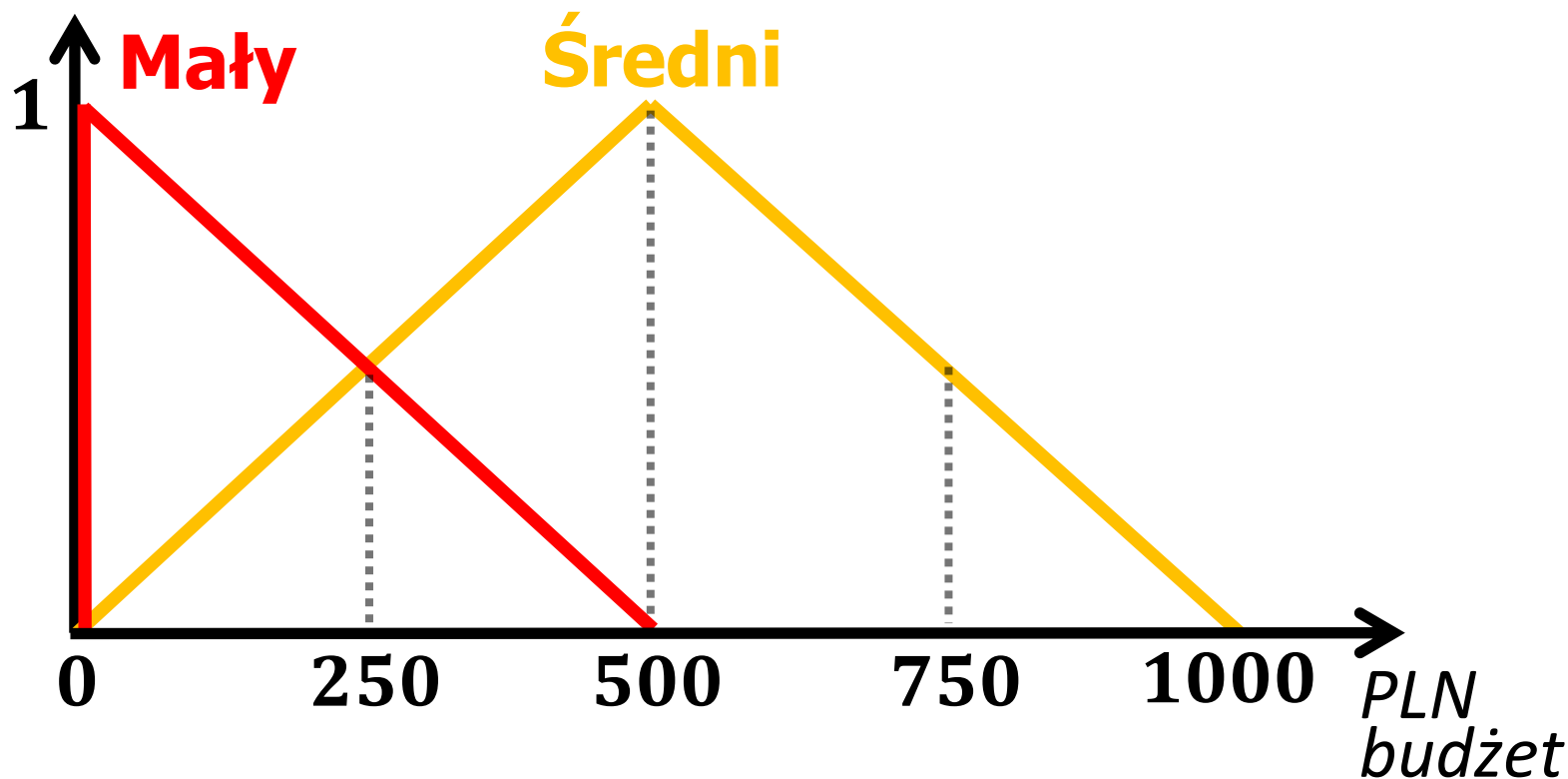


## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące **Budżet**:

**Mały**, **Średni**, **Duży**.

Nośnik zbioru rozmytego budżet – [0-1000] PLN

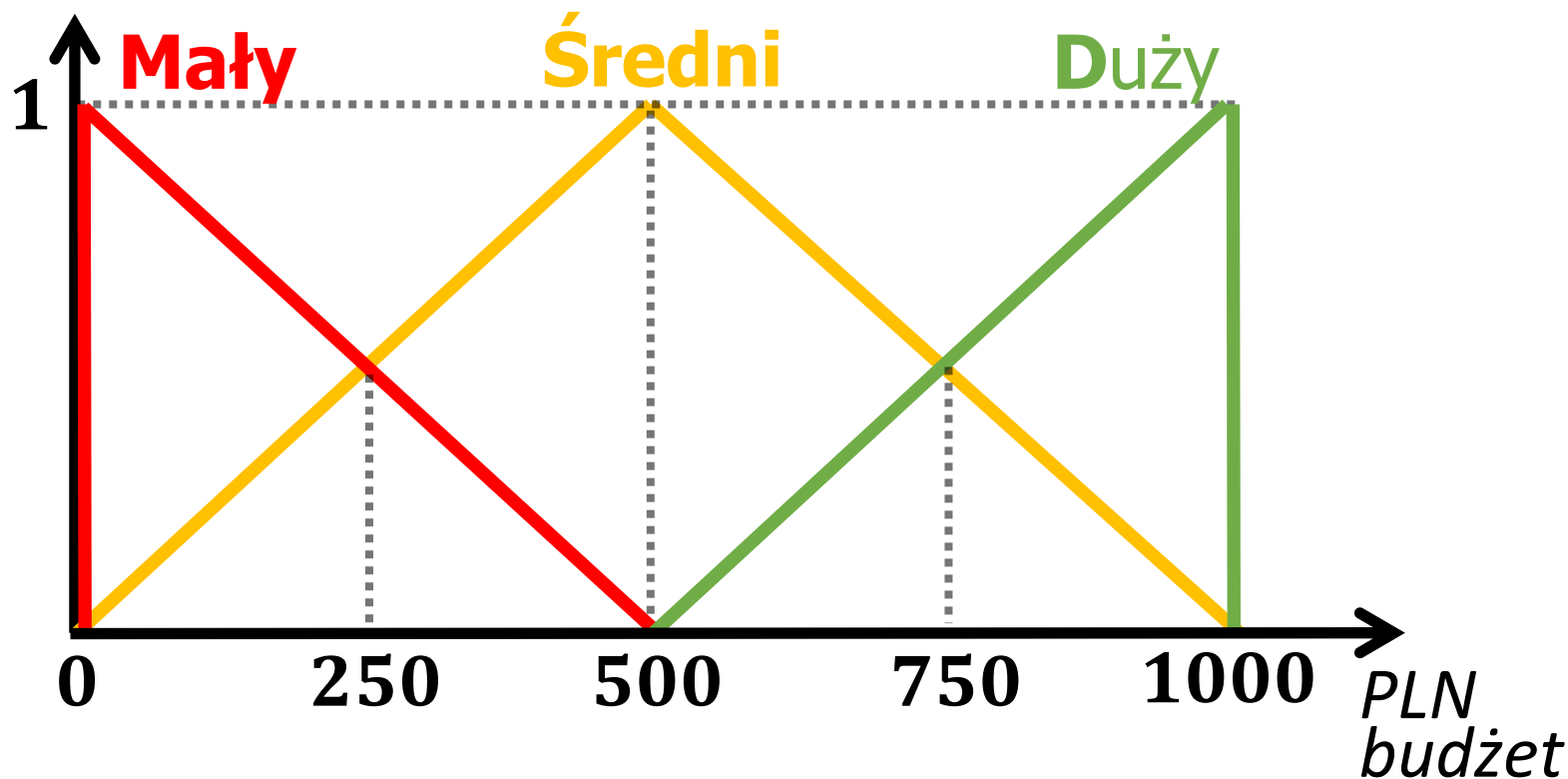


## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące **Budżet**:

**Mały**, **Średni**, **Duży**.

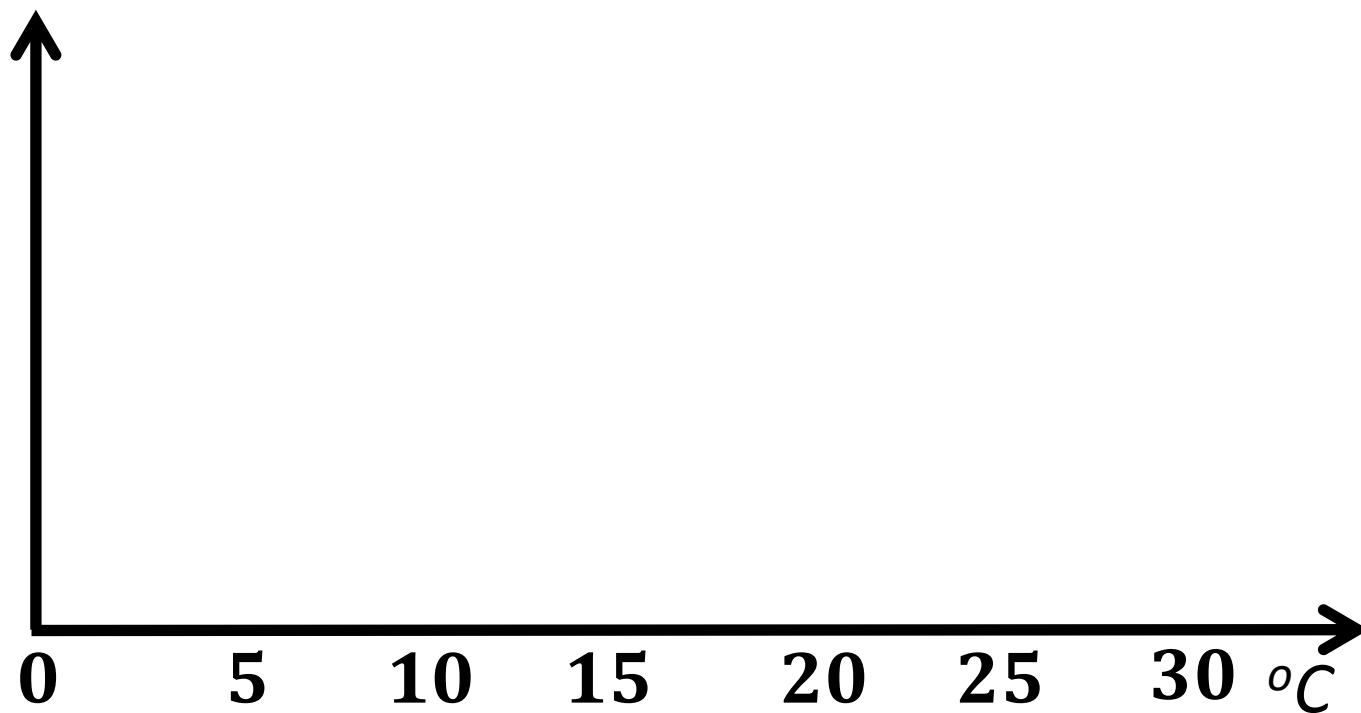
Nośnik zbioru rozmytego budżet – [0-1000] PLN



## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące **Prognozowaną Temperaturę**:  
**Niska**, **Średnia**, **Optymalna**, **Gorąca**.

Nośnik zbioru rozmytego Prognozowana\_Temperatura –  $[0-30] ^\circ\text{C}$

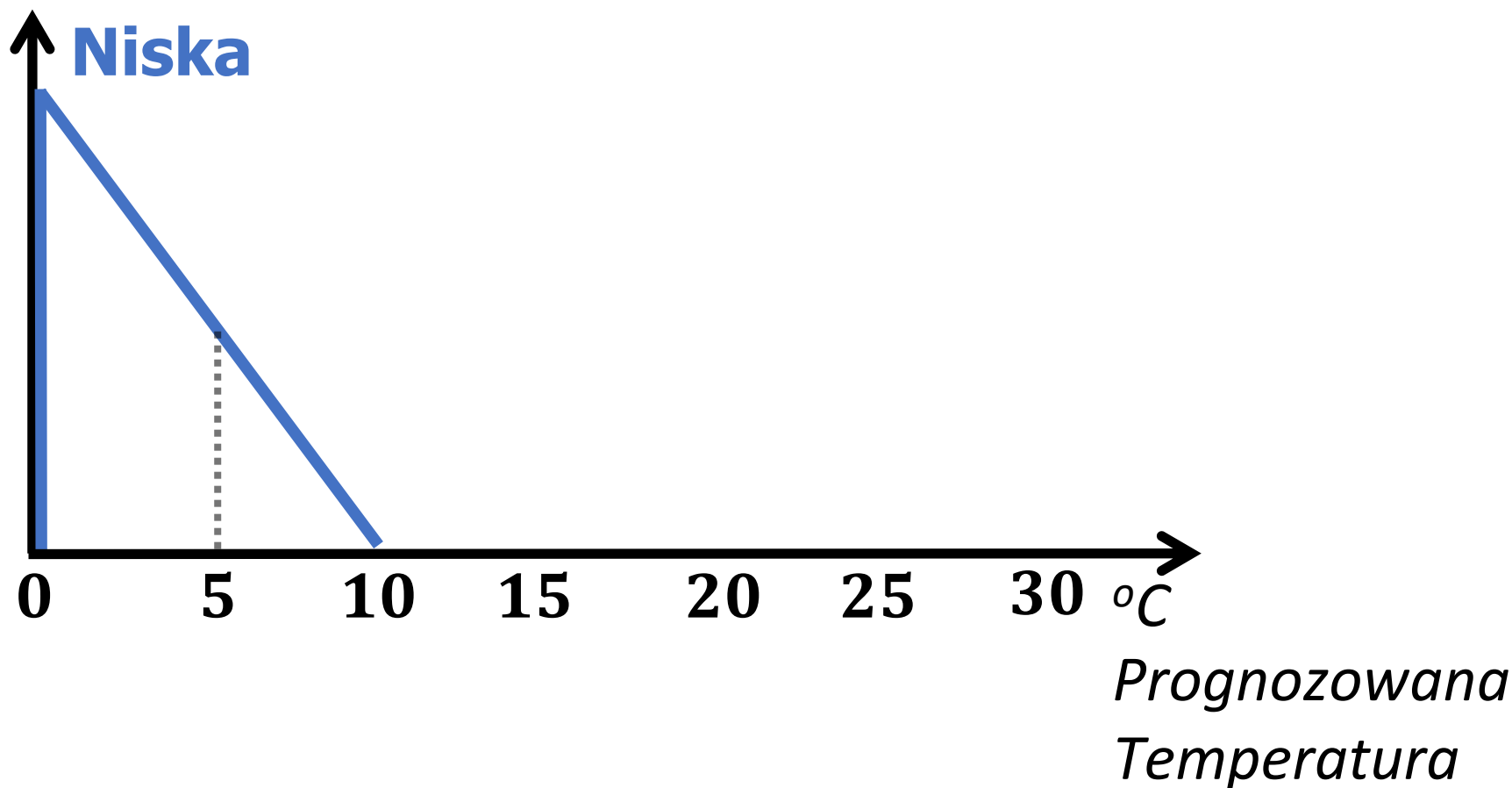


*Prognozowana  
Temperatura*

## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące **Prognozowaną Temperaturę**:  
**Niska**, **Średnia**, **Optymalna**, **Gorąca**.

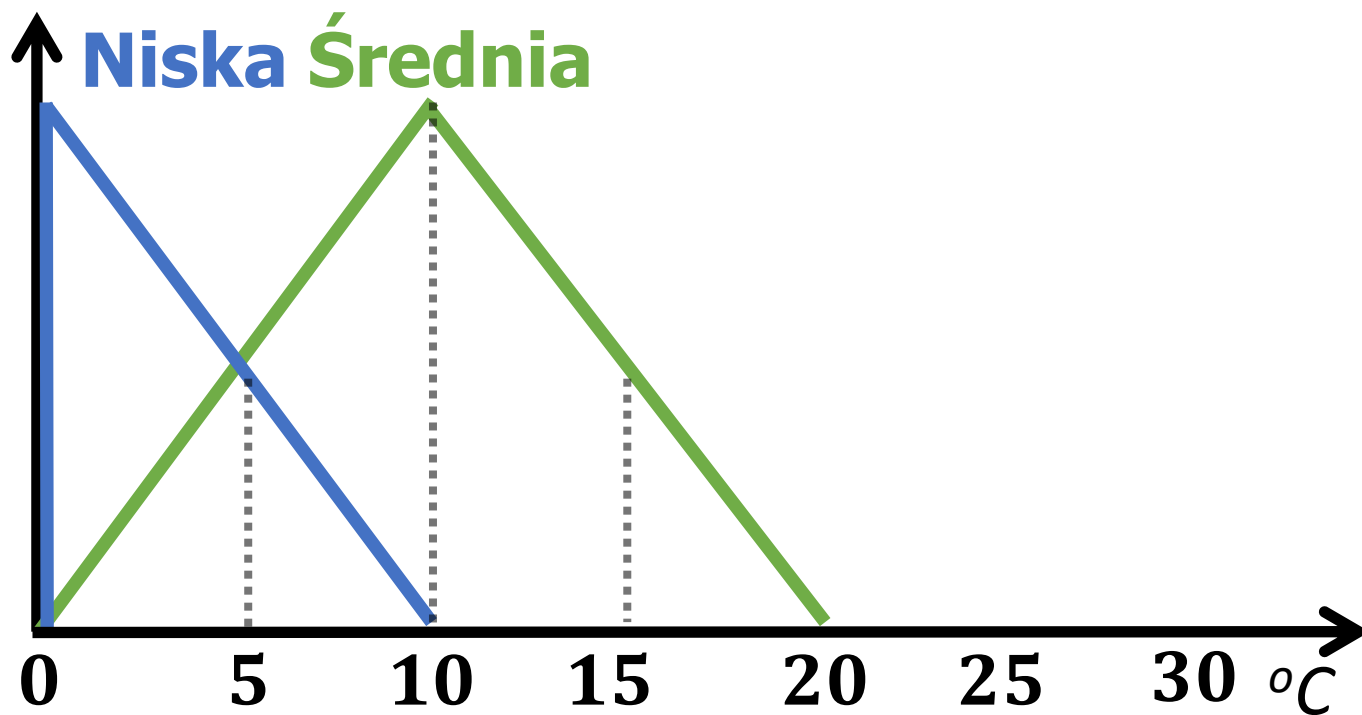
Nośnik zbioru rozmytego Prognozowana\_Temperatura –  $[0-30]$  °C



## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące Prognozowaną Temperaturę:  
**Niska**, **Średnia**, **Optymalna**, **Gorąca**.

Nośnik zbioru rozmytego Prognozowana\_Temperatura –  $[0-30]$  °C

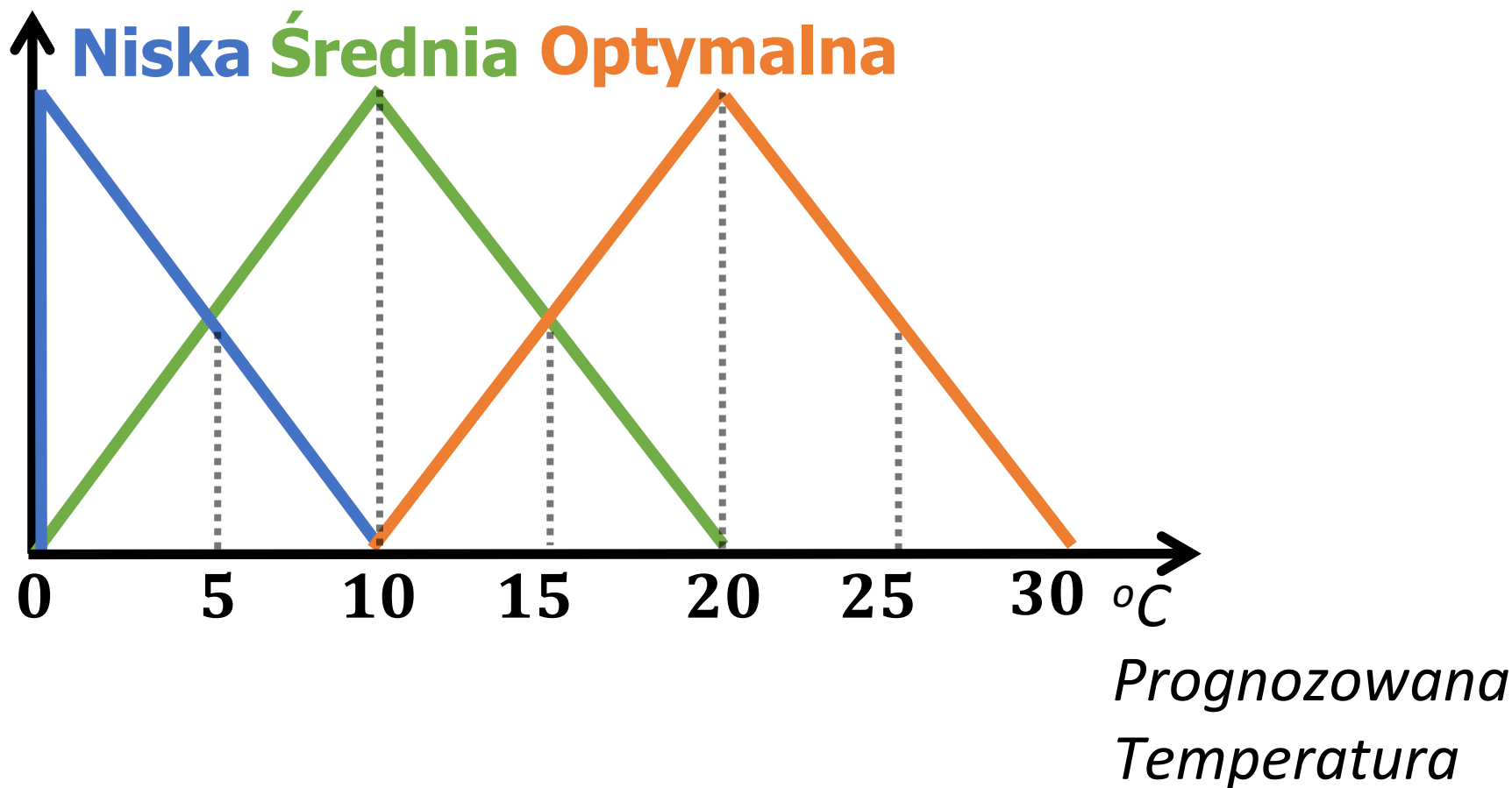


*Prognozowana  
Temperatura*

## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące Prognozowaną Temperaturę:  
**Niska**, **Średnia**, **Optymalna**, **Gorąca**.

Nośnik zbioru rozmytego Prognozowana\_Temperatura –  $[0-30]$  °C

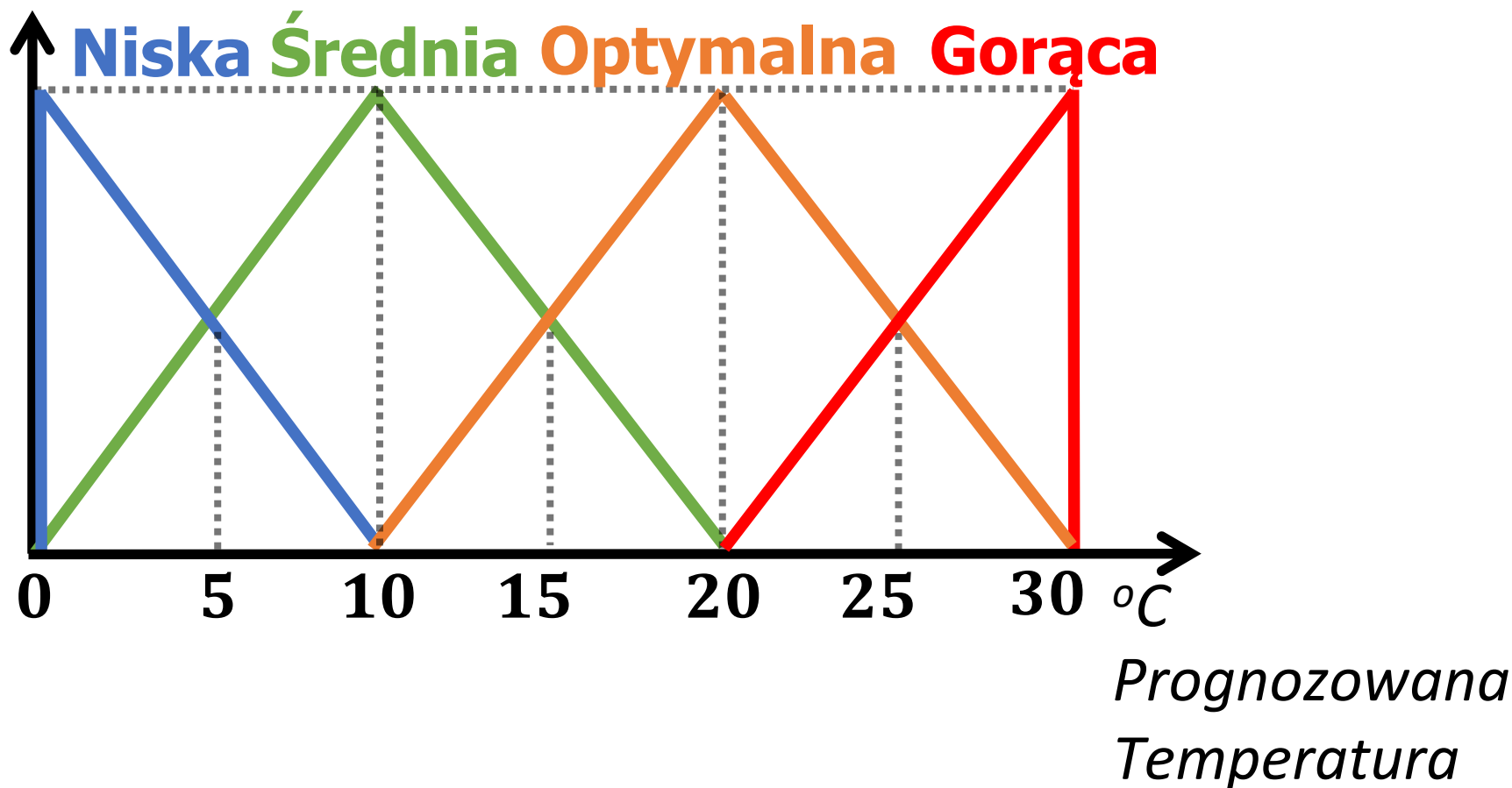




## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące Prognozowaną Temperaturę:  
**Niska**, **Średnia**, **Optymalna**, **Gorąca**.

Nośnik zbioru rozmytego Prognozowana\_Temperatura –  $[0-30]$  °C

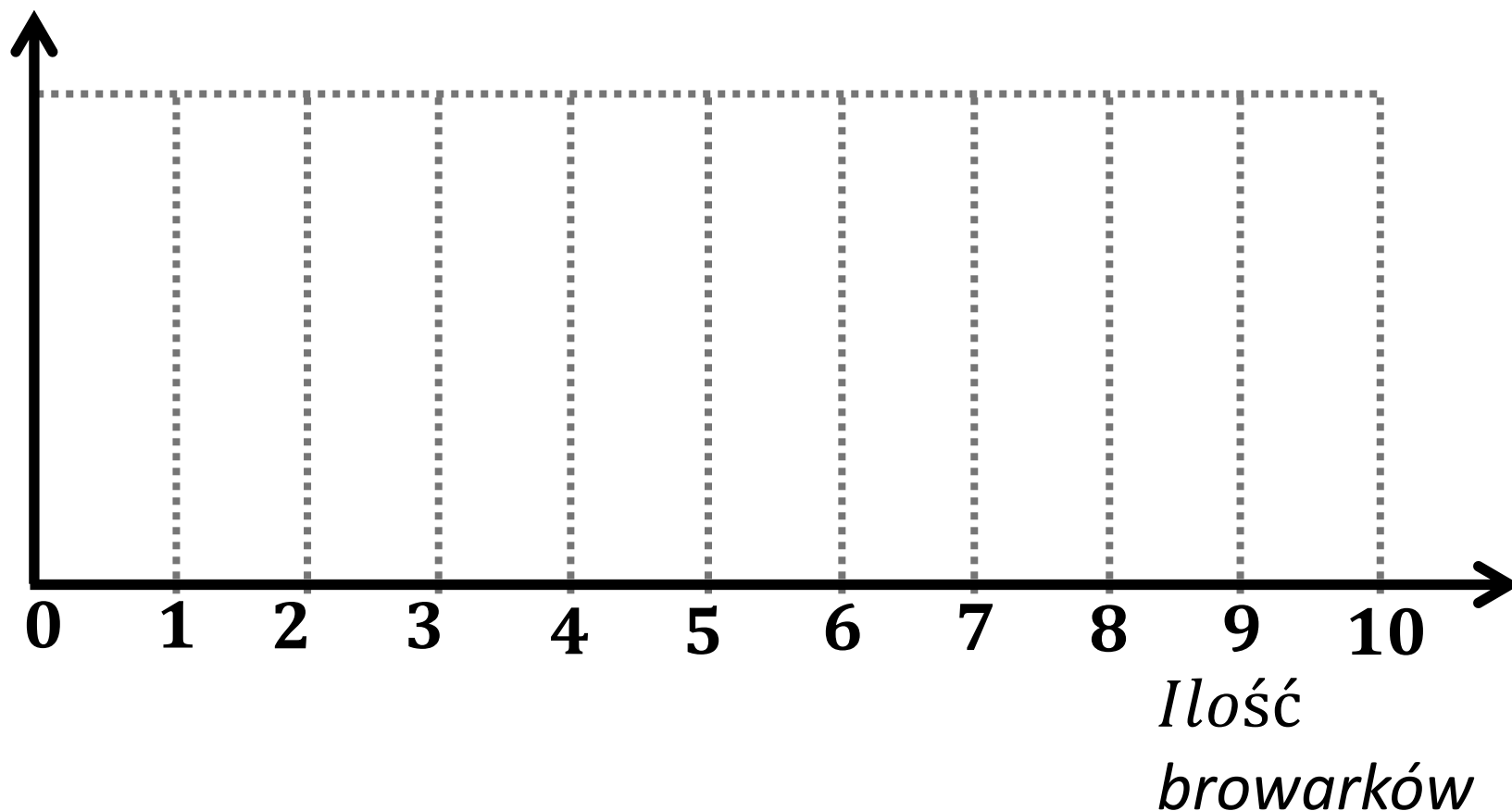


## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

**Zmienne lingwistyczne** opisujące **ilość\_browarków**:

**Bardzo\_Mało**, **Mało**, **Średnio**, **Dużo**, **Bardzo\_Dużo**.

Nośnik zbioru rozmytego **ilość\_browarków**: [0-10]

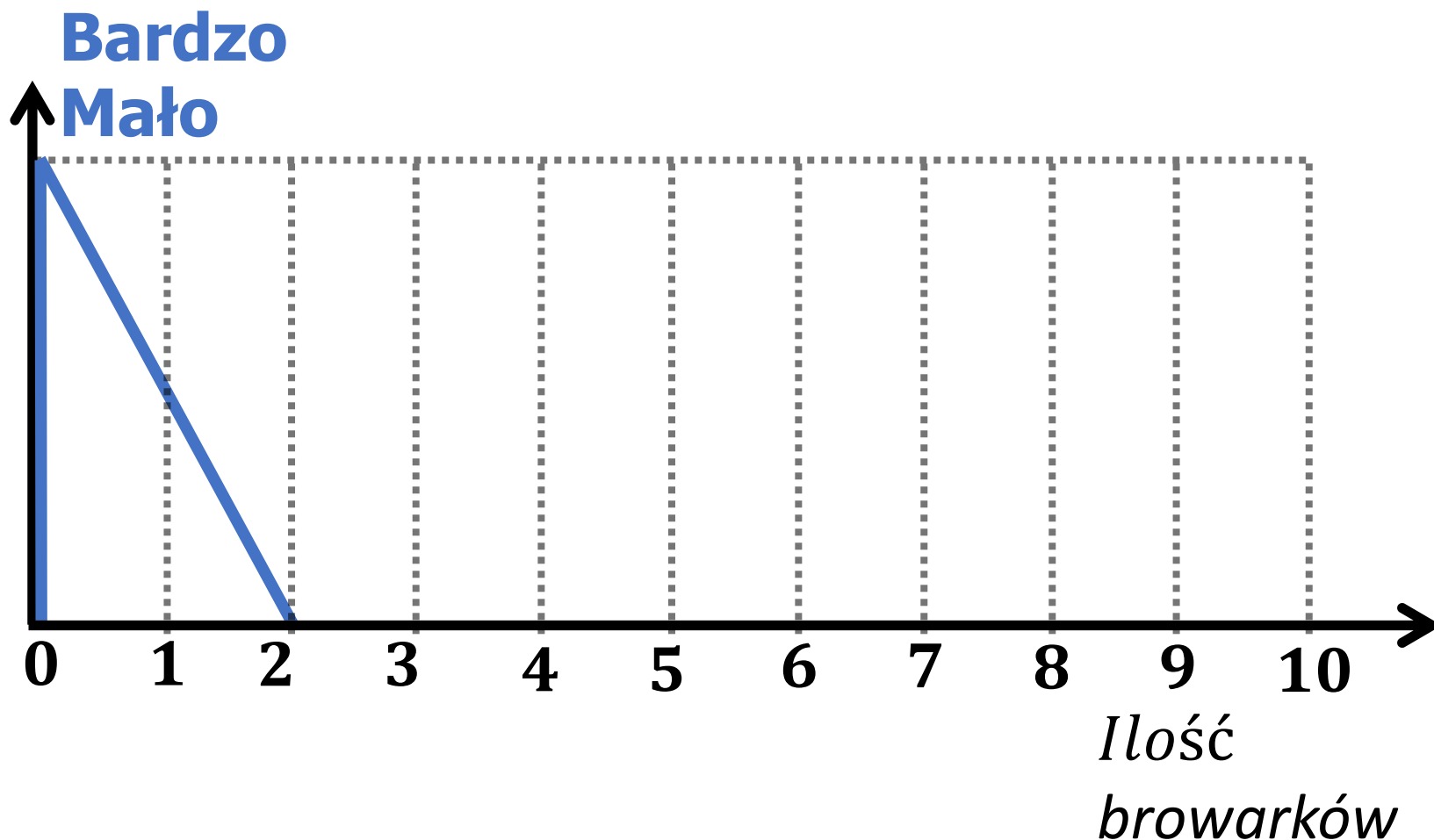


## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące ilość\_browarków:

Bardzo\_Mało, Mało, Średnio, Dużo, Bardzo\_Dużo.

Nośnik zbioru rozmytego ilość\_browarków: [0-10]

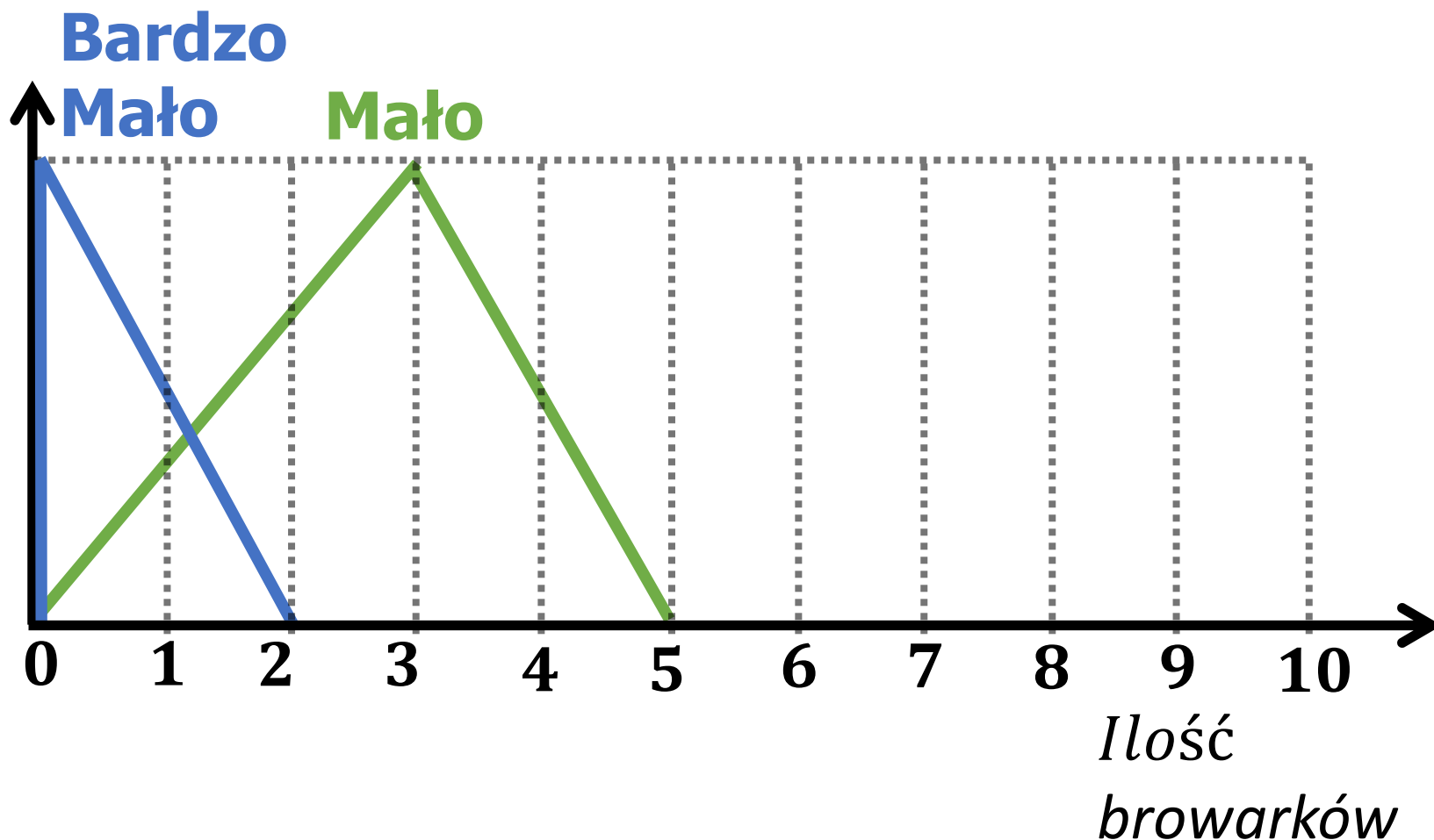


## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące ilość\_browarków:

Bardzo\_Mało, Mało, Średnio, Dużo, Bardzo\_Dużo.

Nośnik zbioru rozmytego ilość\_browarków: [0-10]

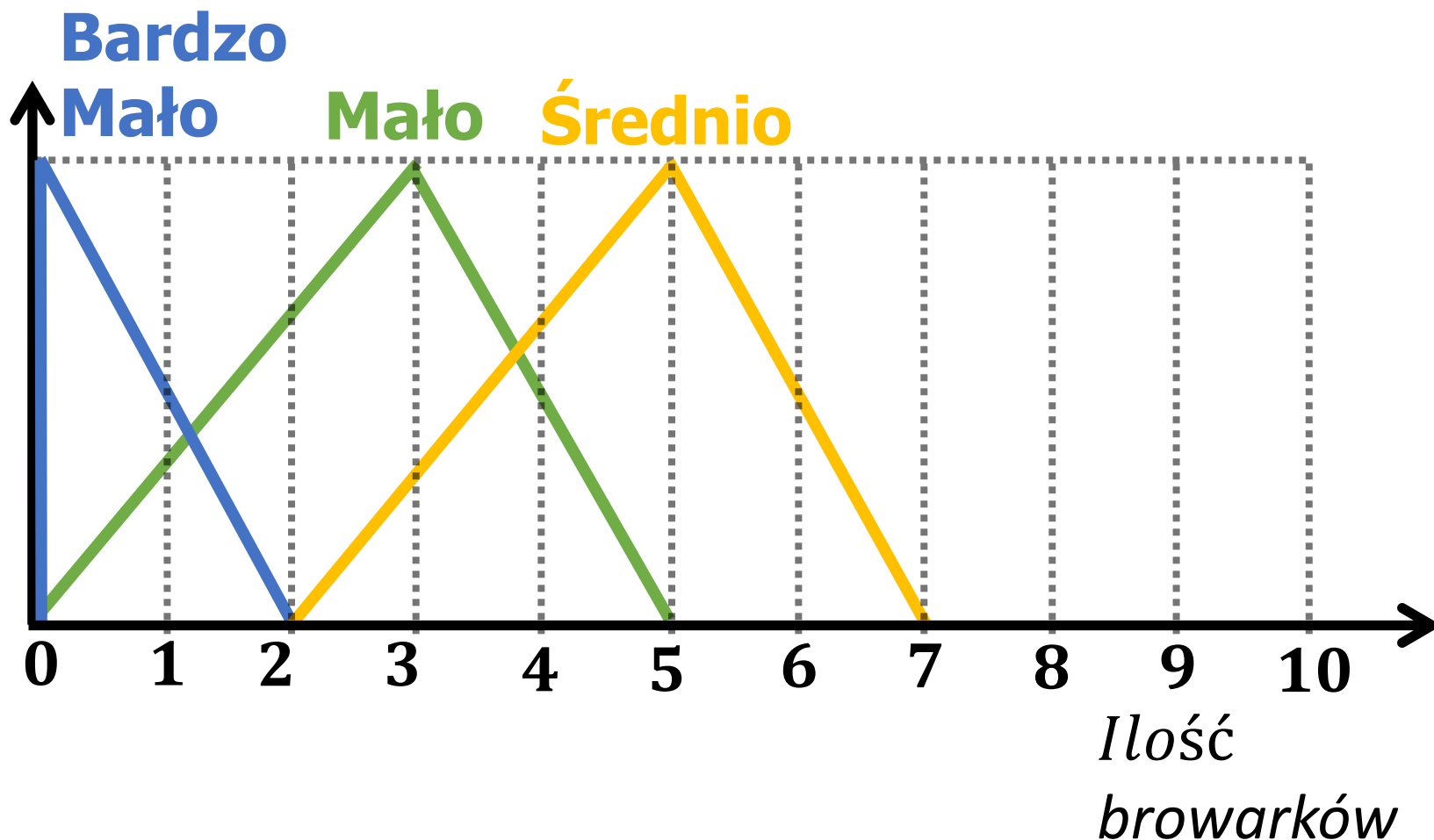


## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące ilość\_browarków:

Bardzo\_Mało, Mało, Średnio, Dużo, Bardzo\_Dużo.

Nośnik zbioru rozmytego ilość\_browarków: [0-10]

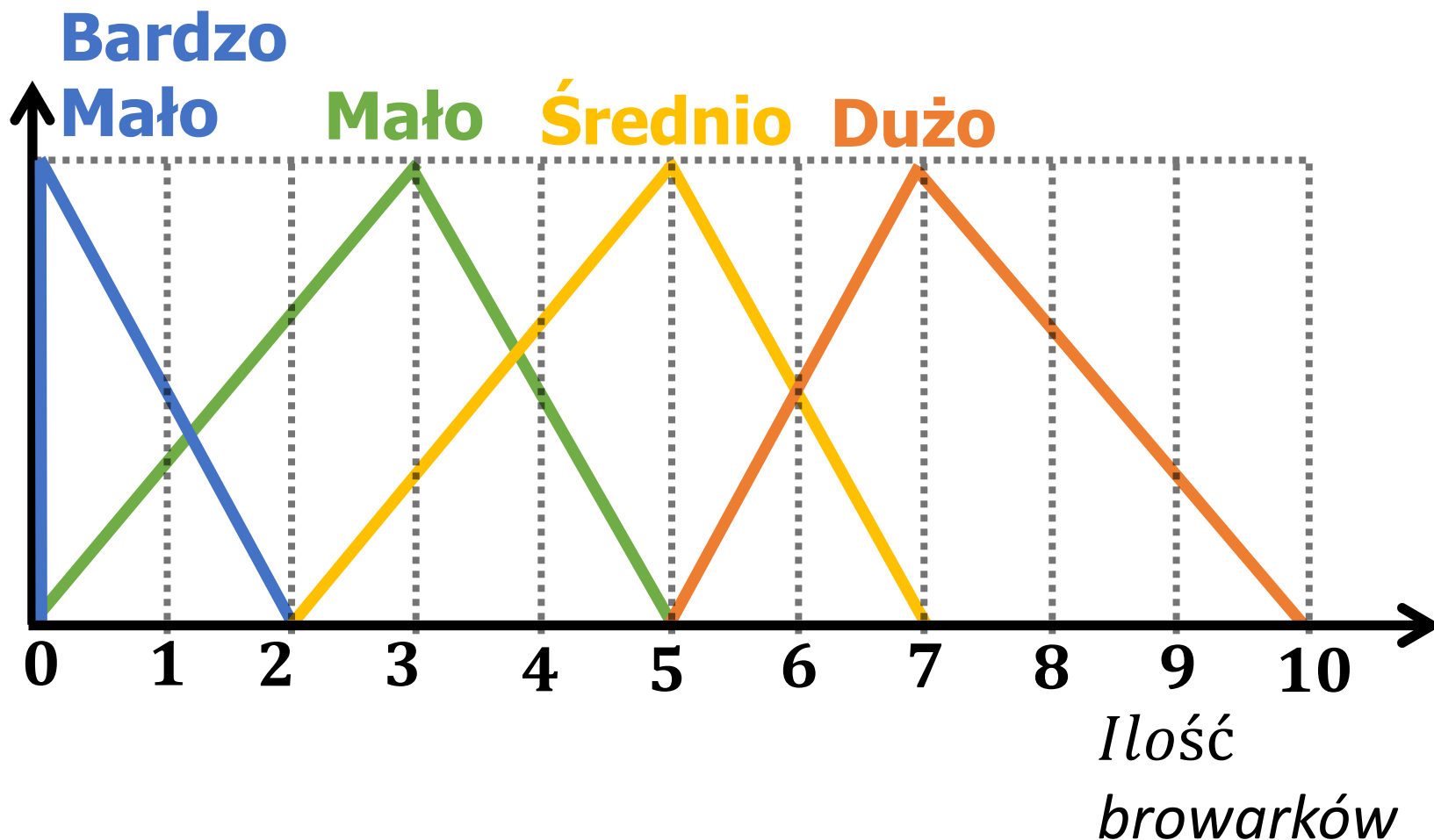


## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące ilość\_browarków:

Bardzo\_Mało, Mało, Średnio, Dużo, Bardzo\_Dużo.

Nośnik zbioru rozmytego ilość\_browarków: [0-10]

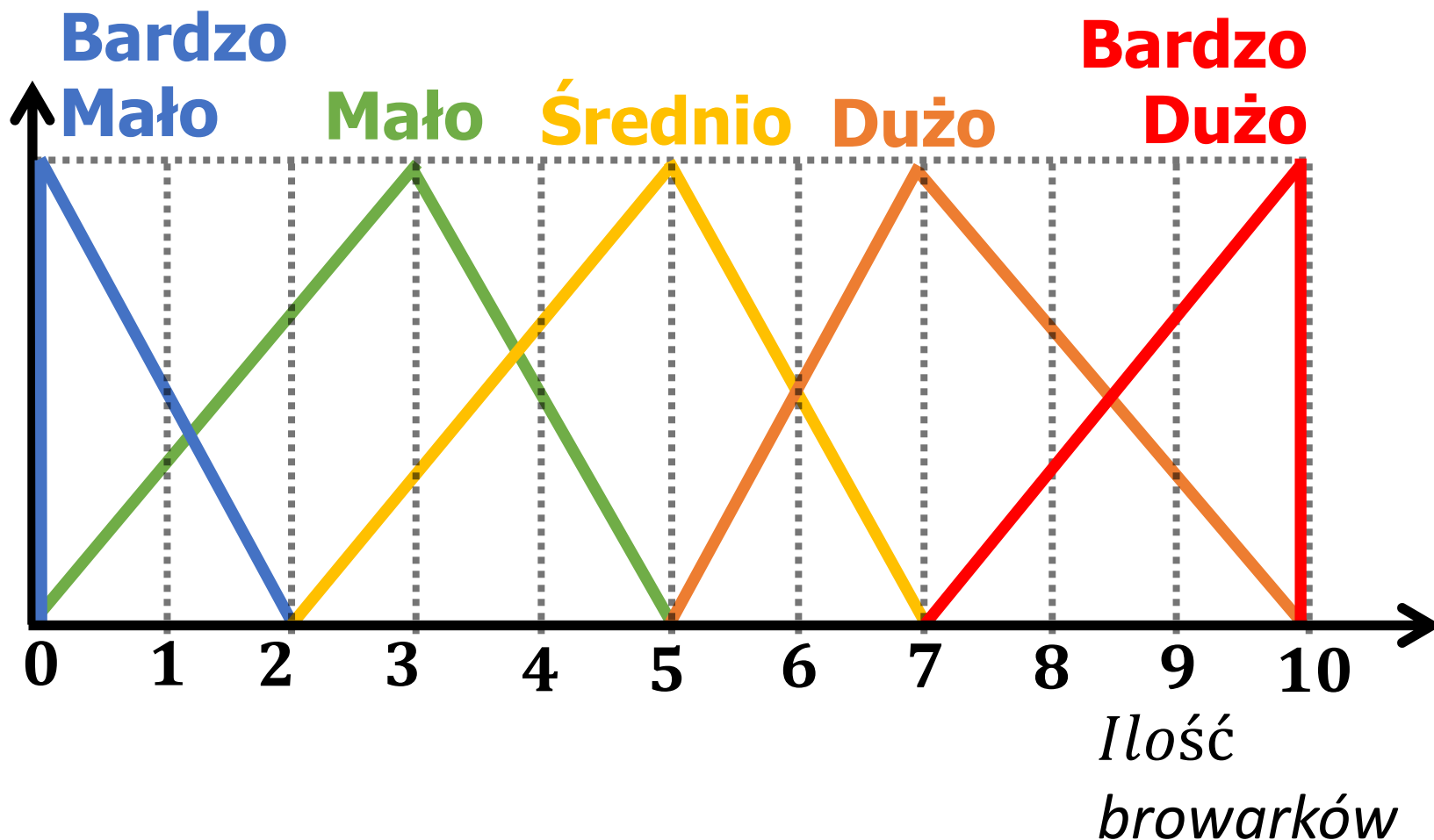


## KROK 4: wyznaczenie funkcji przynależności dla zdefiniowanych zmiennych lingwistycznych ...

Zmienne lingwistyczne opisujące ilość\_browarków:

**Bardzo\_Mało**, **Mało**, **Średnio**, **Dużo**, **Bardzo\_Dużo**.

Nośnik zbioru rozmytego ilość\_browarków: [0-10]



## KROK 5: wyznaczenie bazy reguł ...

Określamy reguły wiążące ze sobą zmienne wejściowe w związki typu: **JESLI** twierdzenie rozmyte pierwsze **WTEDY** twierdzenie rozmyte drugie, przy czym twierdzenia rozmyte pierwsze zawierają najczęściej koniunkcje wszystkich kombinacji pojęć lingwistycznych dla danych zmiennych wejściowych.

przykładowo

JEŻELI Bużet jest *Duży* ORAZ Prognozowana\_Temperatura jest *Gorąca*

WTEDY Ilość\_Browarków jest *Bardzo Duża*

JEŻELI Bużet jest *Mały* ORAZ Prognozowana\_Temperatura jest *Niska*

WTEDY Ilość\_Browarków jest *Bardzo Mała*

.....


KROK 5 c.d...



## KROK 5: wyznaczenie bazy reguł ...

Pełna baza reguł – wszystkie kombinacje zmiennych lingwistycznych wejściowych !

W naszym  
przykładzie :  
 $4 \times 3 = 12$



		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA				M	Mało
	ŚREDNIA				Ś	Średnio
	OPTY- MALNA				D	Dużo
	GORĄCA				BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM			M	Mało
	ŚREDNIA				Ś	Średnio
	OPTY- MALNA				D	Dużo
	GORĄCA				BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM			M	Mało
	ŚREDNIA	BM			Ś	Średnio
	OPTY- MALNA				D	Dużo
	GORĄCA				BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM			M	Mało
	ŚREDNIA	BM			Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M			D	Dużo
	GORĄCA				BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM			M	Mało
	ŚREDNIA	BM			Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M			D	Dużo
	GORĄCA	Ś			BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M		M	Mało
	ŚREDNIA	BM			Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M			D	Dużo
	GORĄCA	Ś			BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M		M	Mało
	ŚREDNIA	BM	M		Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M			D	Dużo
	GORĄCA	Ś			BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M		M	Mało
	ŚREDNIA	BM	M		Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M	Ś		D	Dużo
	GORĄCA	Ś			BD	Bardzo Dużo



**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M		M	Mało
	ŚREDNIA	BM	M		Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M	Ś		D	Dużo
	GORĄCA	Ś	D		BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś	M	Mało
	ŚREDNIA	BM	M		Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M	Ś		D	Dużo
	GORĄCA	Ś	D		BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś	M	Mało
	ŚREDNIA	BM	M	D	Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M	Ś		D	Dużo
	GORĄCA	Ś	D		BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś	M	Mało
	ŚREDNIA	BM	M	D	Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M	Ś	BD	D	Dużo
	GORĄCA	Ś	D		BD	Bardzo Dużo

**KROK 5:** wyznaczenie bazy reguł ...

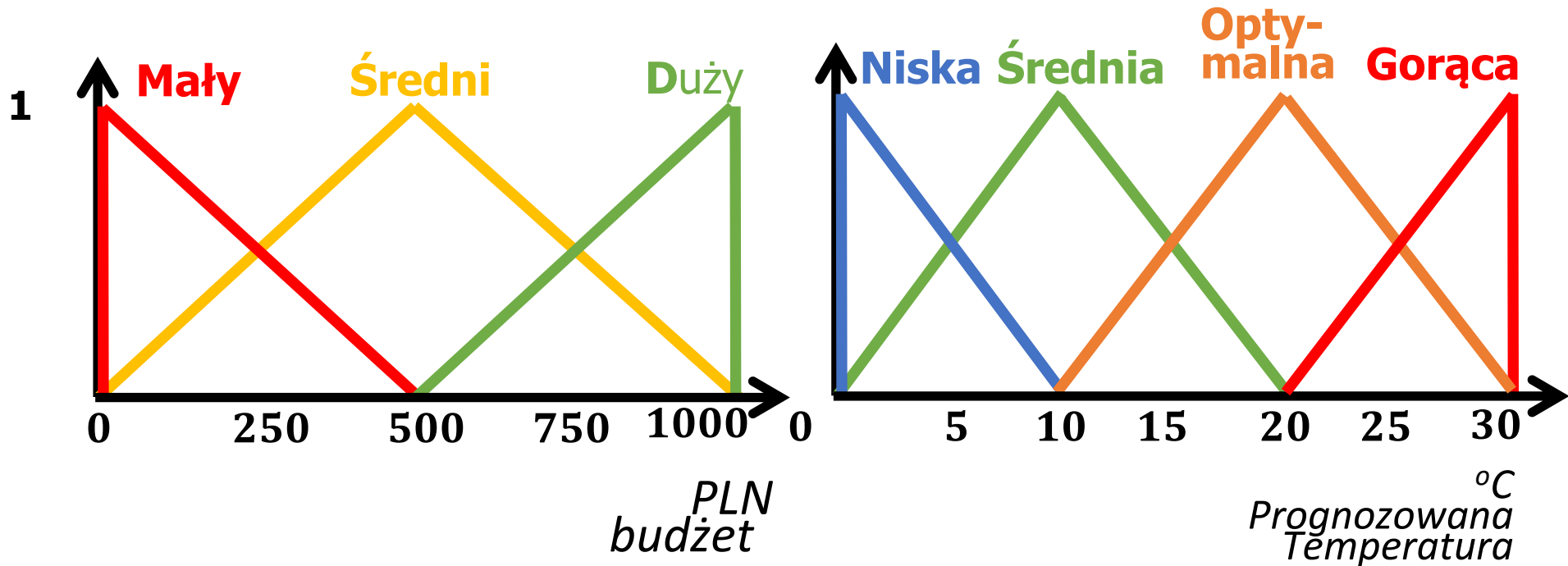
		BUDŻET			Ilość Browarków	
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY	BM	Bardzo Mało
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś	M	Mało
	ŚREDNIA	BM	M	D	Ś	Średnio
	OPTY- MALNA	M	Ś	BD	D	Dużo
	GORĄCA	Ś	D	BD	BD	Bardzo Dużo

# Opis procesu wnioskowania

## dla rozważanego przez nas systemu rozmytego

Założmy, że wartości zmiennych wejściowych to:

- ✓ budżet= 600 PLN,
- ✓ Prognozowana\_Temperatura= 17°C

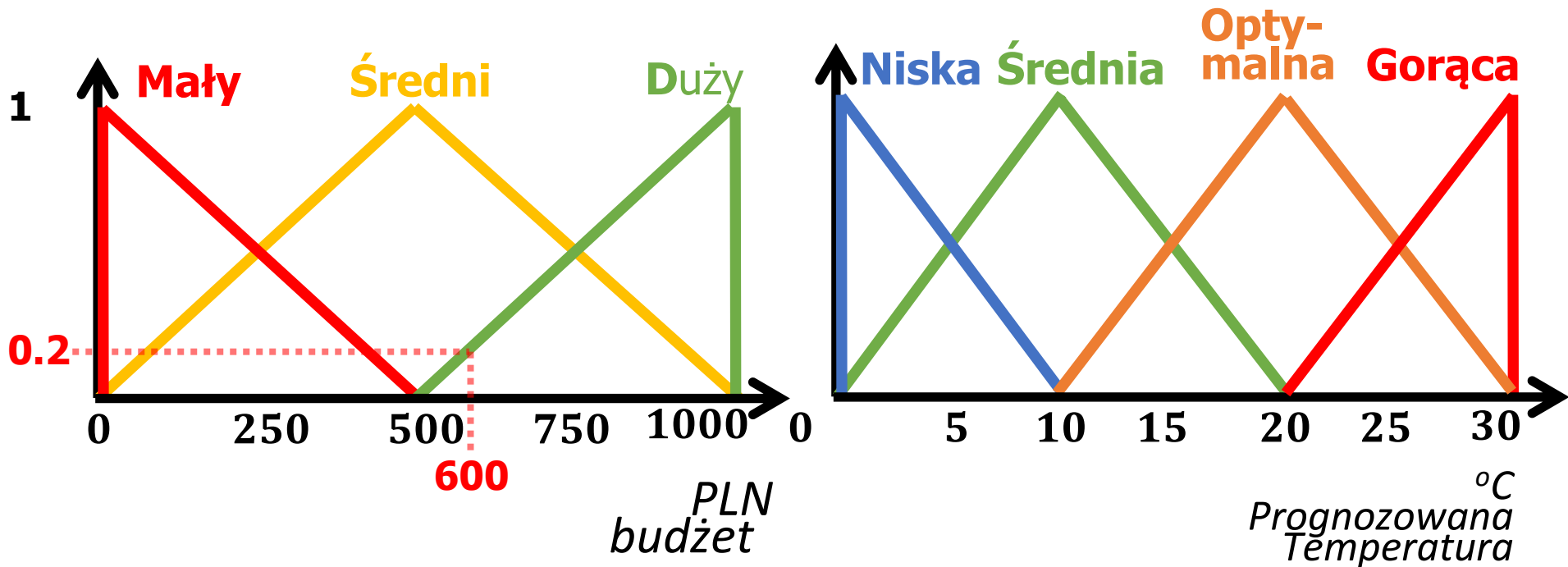


# Opis procesu wnioskowania

## dla rozważanego przez nas systemu rozmytego

Założmy, że wartości zmiennych wejściowych to:

- ✓ budżet= **600 PLN**,
- ✓ Prognozowana\_Temperatura= 17°C

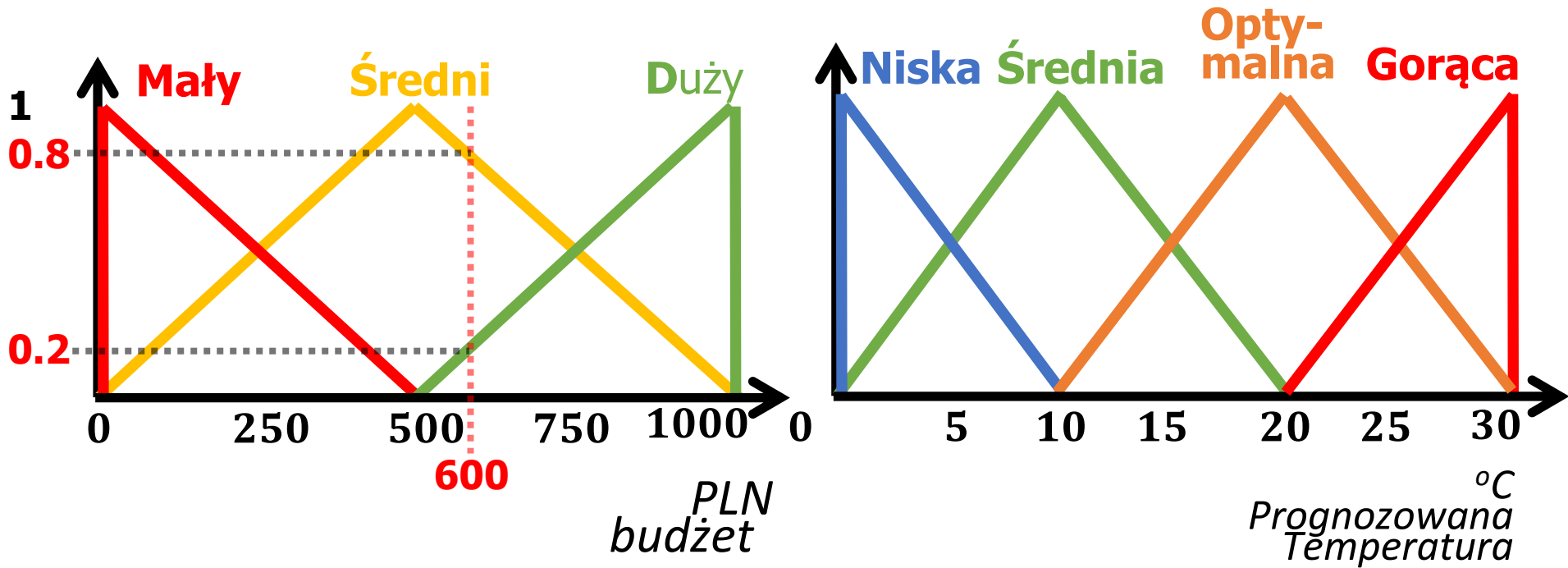


# Opis procesu wnioskowania

## dla rozważanego przez nas systemu rozmytego

Założmy, że wartości zmiennych wejściowych to:

- ✓ budżet= **600 PLN**,
- ✓ Prognozowana\_Temperatura= 17°C



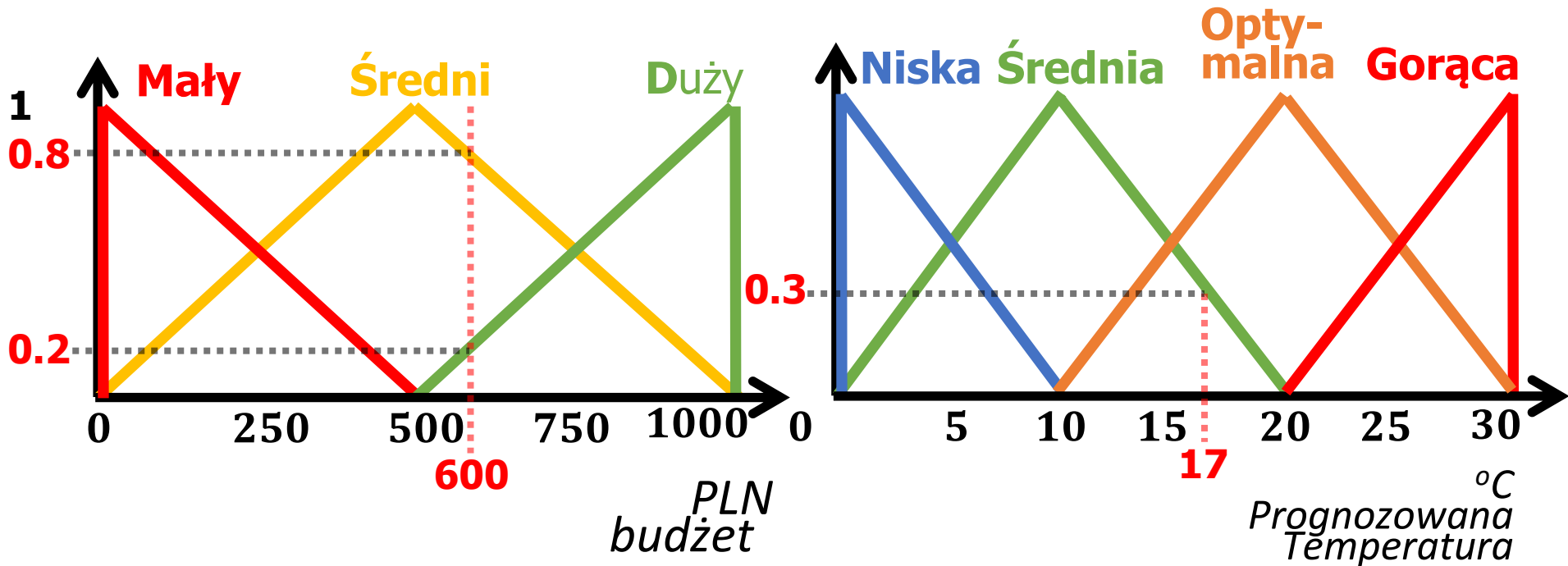


## Opis procesu wnioskowania

### dla rozważanego przez nas systemu rozmytego

Założmy, że wartości zmiennych wejściowych to:

- ✓ budżet= 600 PLN,
- ✓ Prognozowana\_Temperatura= 17°C

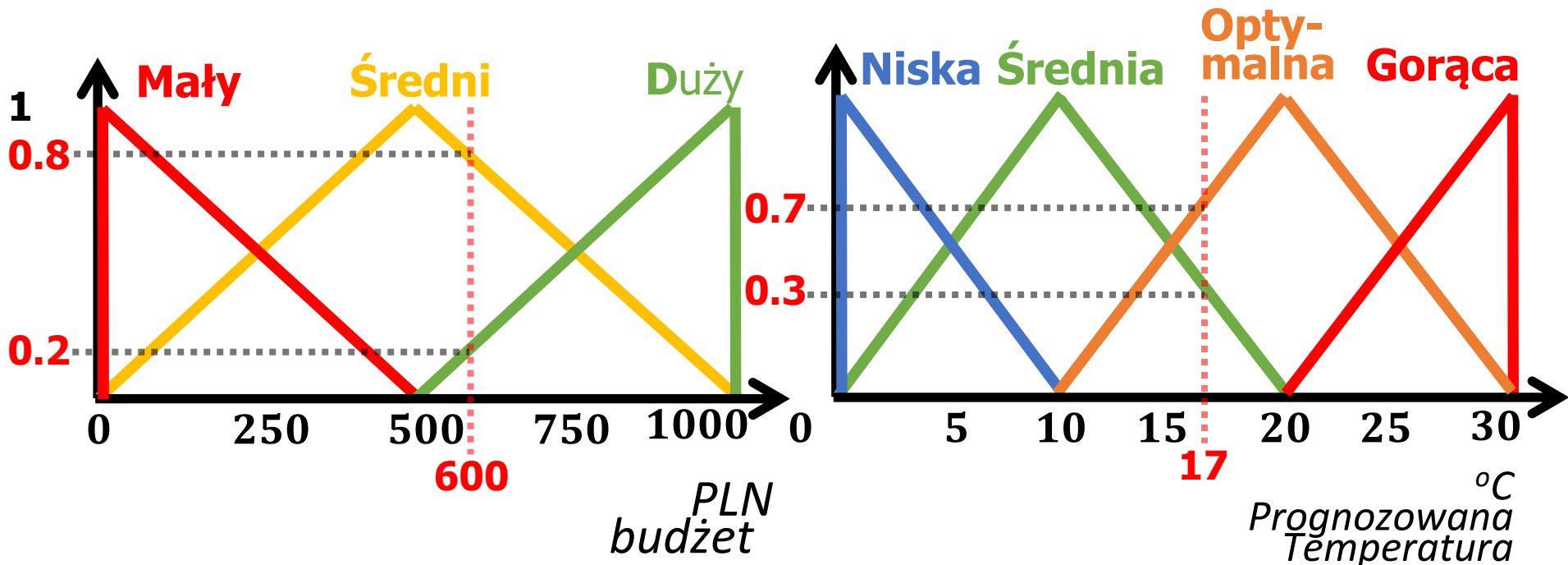


## Opis procesu wnioskowania

### dla rozważanego przez nas systemu rozmytego

Założmy, że wartości zmiennych wejściowych to:

- ✓ budżet= 600 PLN,
- ✓ Prognozowana\_Temperatura= 17°C



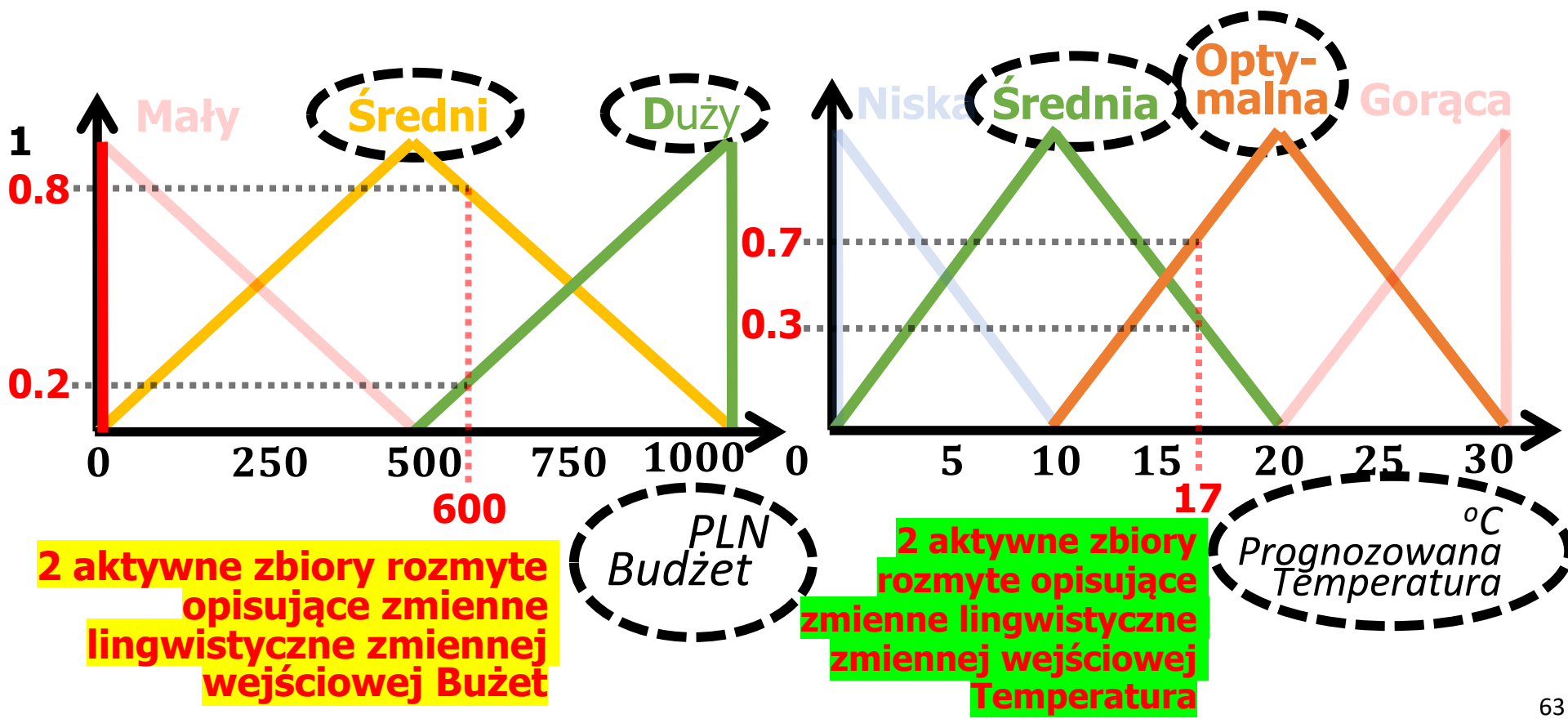
# Opis procesu wnioskowania

## dla rozważanego przez nas systemu rozmytego

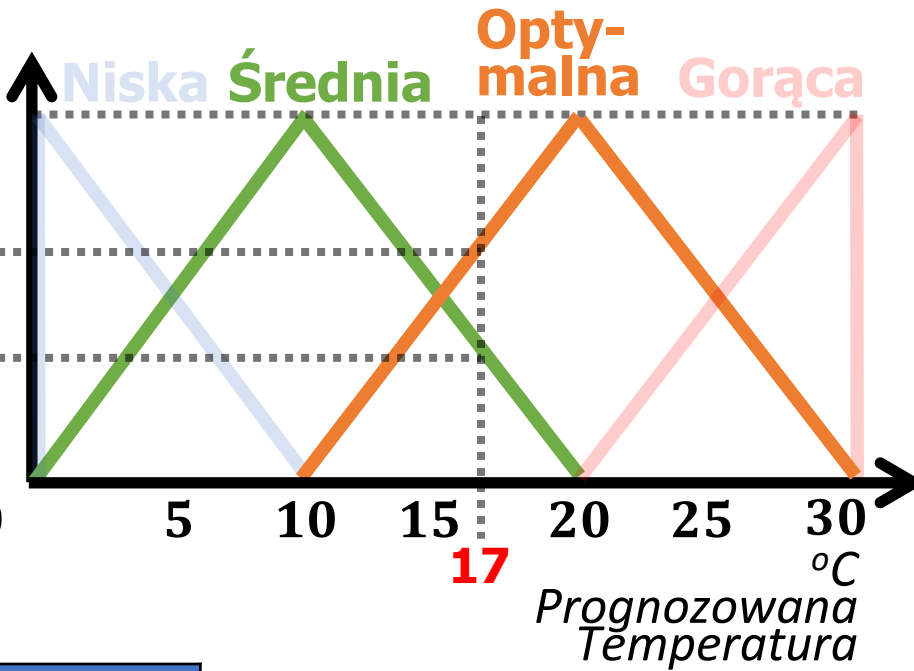
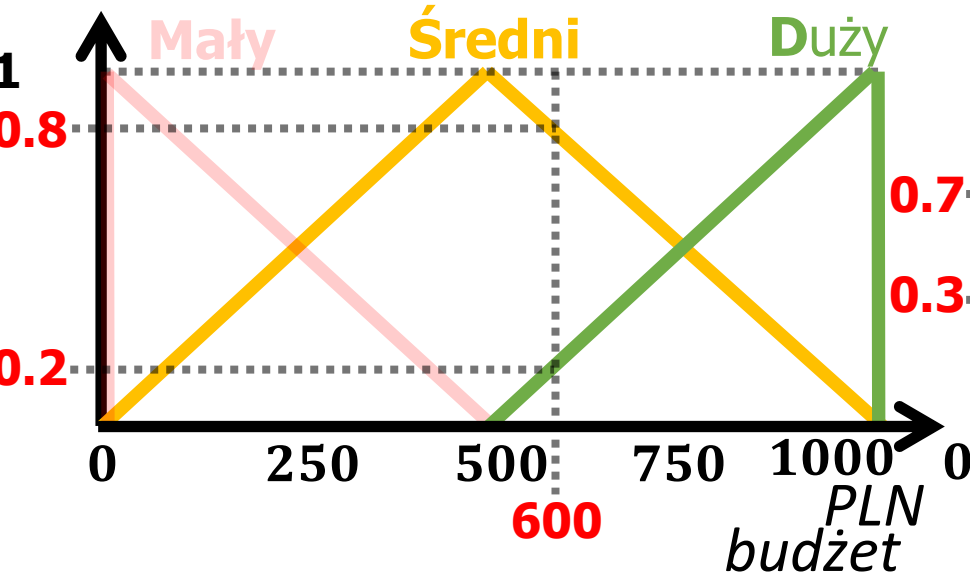
Założmy, że wartości zmiennych wejściowych to:

- ✓ Budżet= 600 PLN,
- ✓ Prognozowana\_Temperatura= 17°C

Razem 4 zbiory rozmyte opisujące zmienne lingwistyczne wejściowe ze stopniem przynależności >0



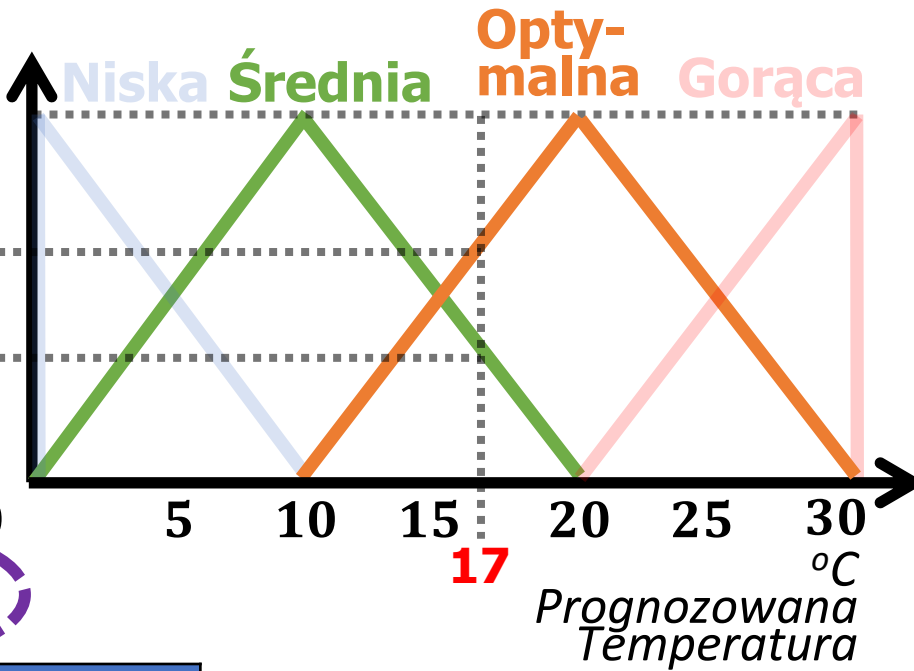
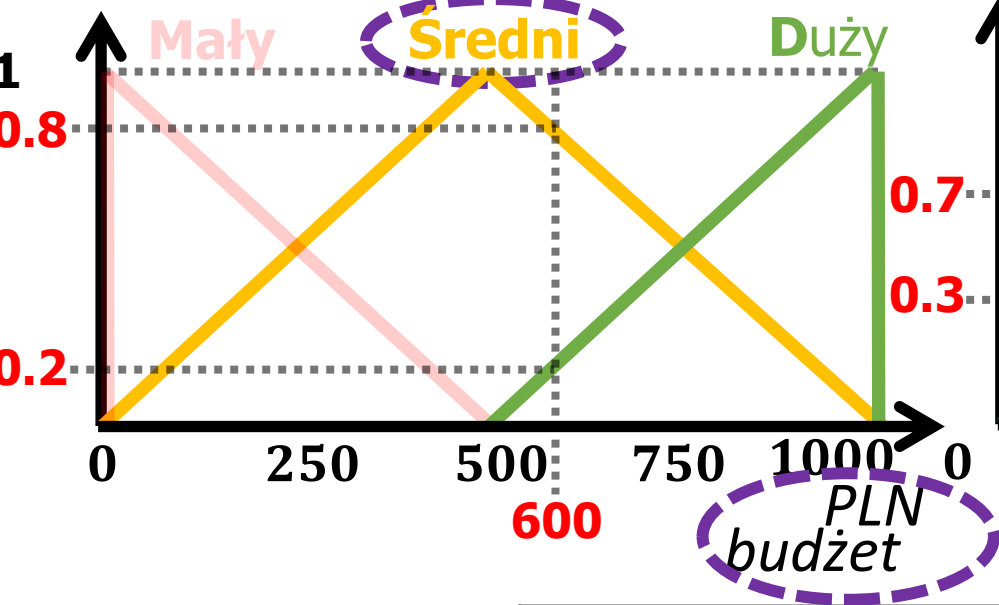
# Opis procesu wnioskowania



		BUDŻET		
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś
	ŚREDNIA	BM	M	D
	OPTY-MALNA	M	Ś	BD
	GORĄCA	Ś	D	BD

Ilość Browarków	
BM	Bardzo Mało
M	Mało
Ś	Średnio
D	Dużo
BD	Bardzo Dużo

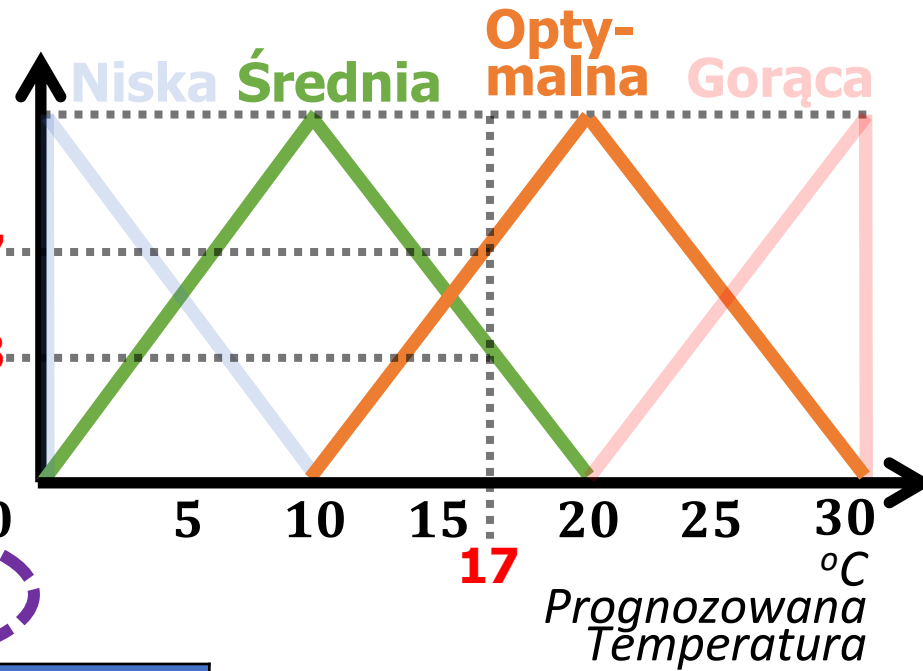
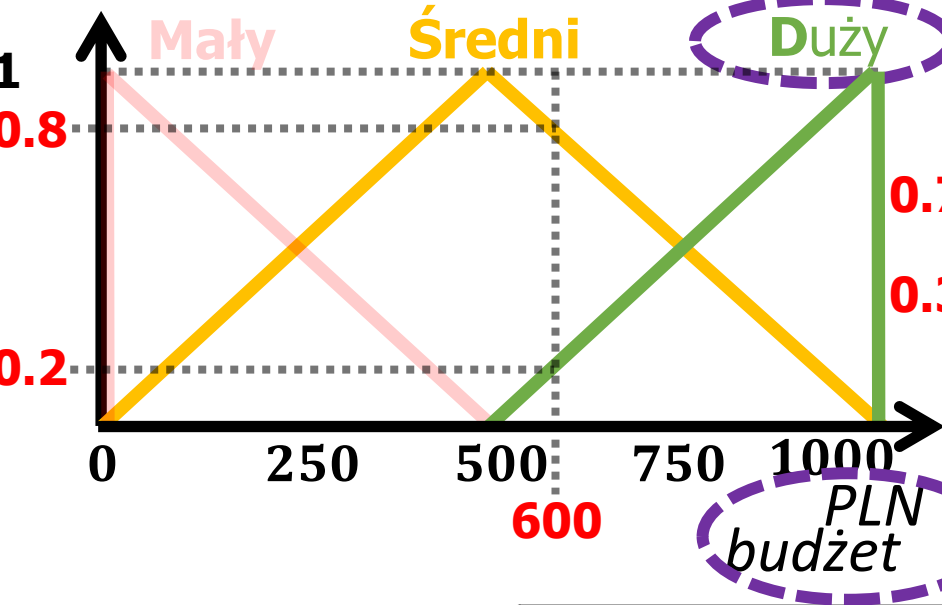
Opis procesu wnioskowania



		BUDŻET		
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś
	ŚREDNIA	BM	M	D
	OPTY-MALNA	M	Ś	BD
	GORĄCA	Ś	D	BD

Ilość Browarków	
BM	Bardzo Mało
M	Mało
Ś	Średnio
D	Dużo
BD	Bardzo Dużo

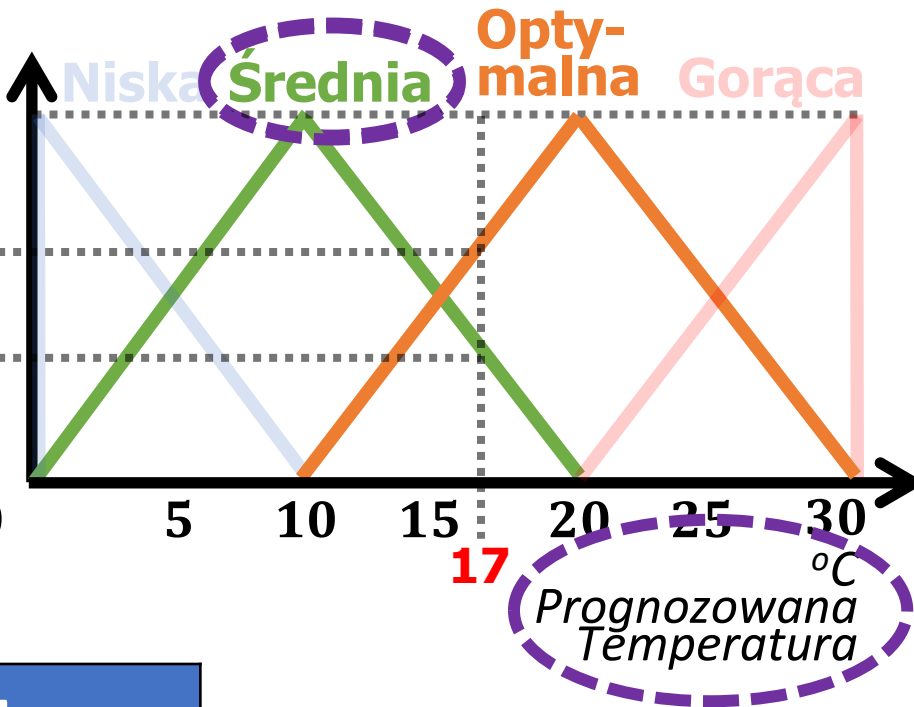
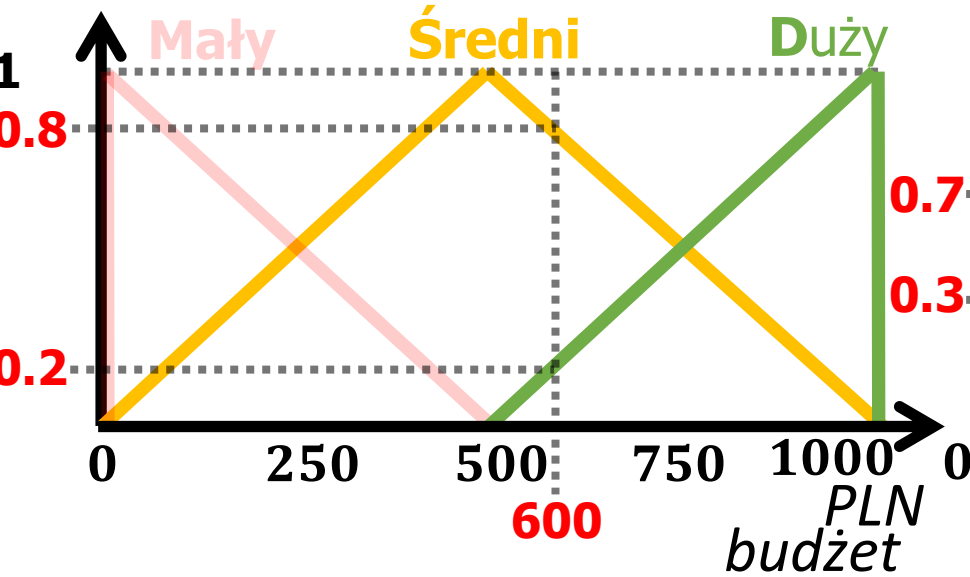
# Opis procesu wnioskowania



		BUDŻET		
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś
	ŚREDNIA	BM	M	D
	OPTY-MALNA	M	Ś	BD
	GORĄCA	Ś	D	BD

Ilość Browarków	
BM	Bardzo Mało
M	Mało
Ś	Średnio
D	Dużo
BD	Bardzo Dużo

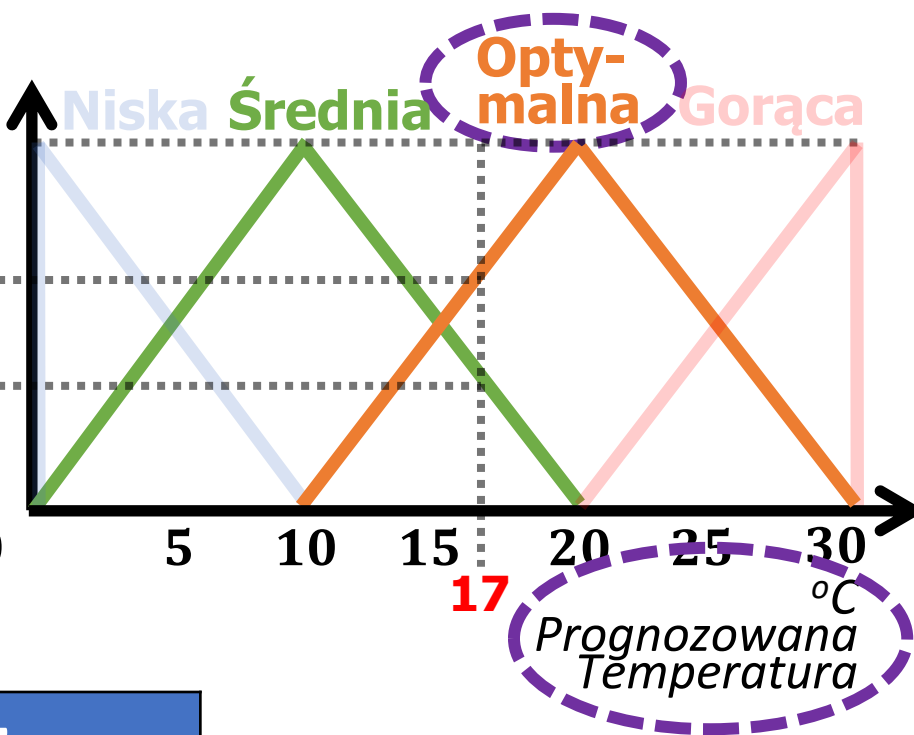
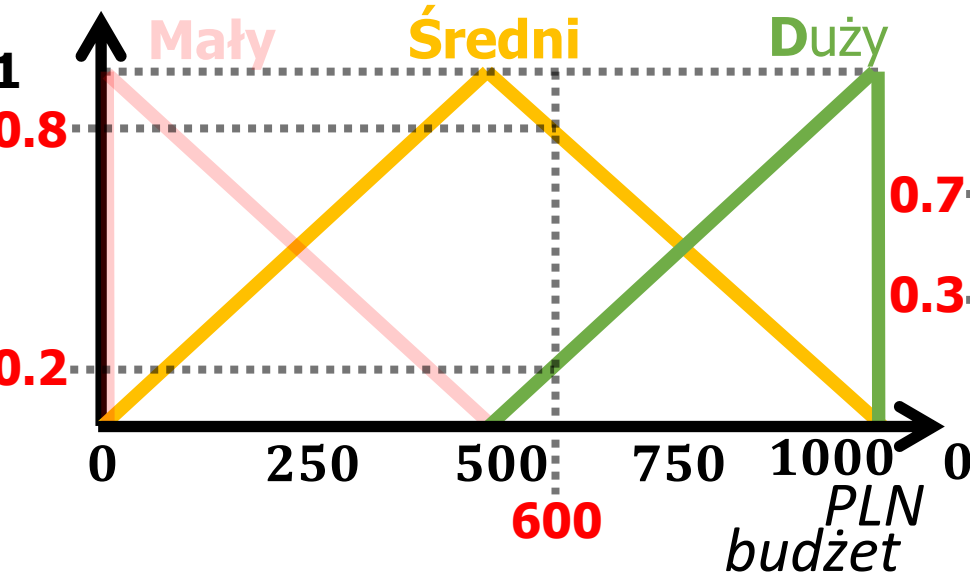
# Opis procesu wnioskowania



		BUDŻET		
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś
	ŚREDNIA	BM	M	D
	OPTY-MALNA	M	Ś	BD
	GORĄCA	Ś	D	BD

Ilość Browarków	
BM	Bardzo Mało
M	Mało
Ś	Średnio
D	Dużo
BD	Bardzo Dużo

# Opis procesu wnioskowania

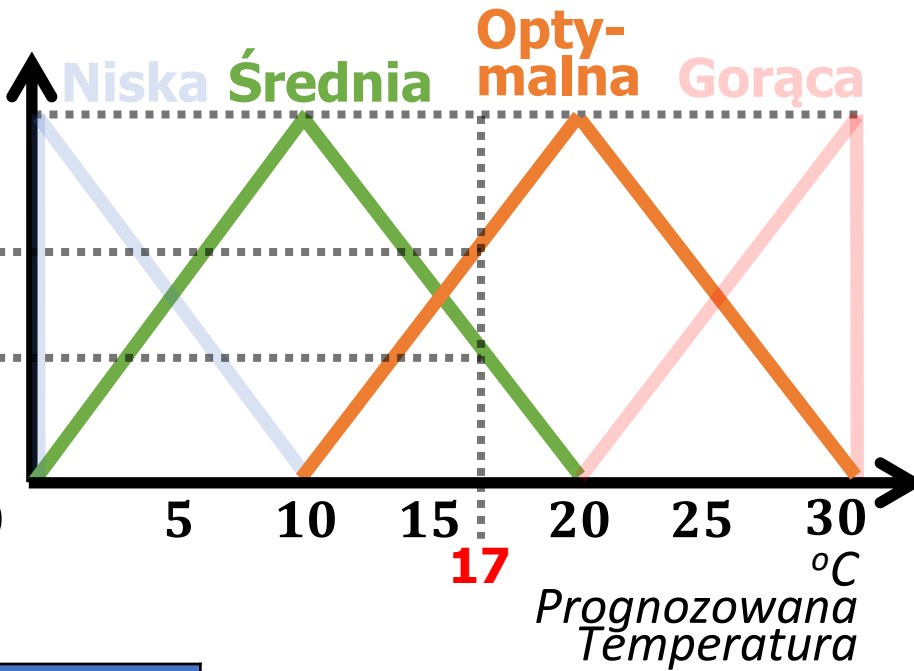
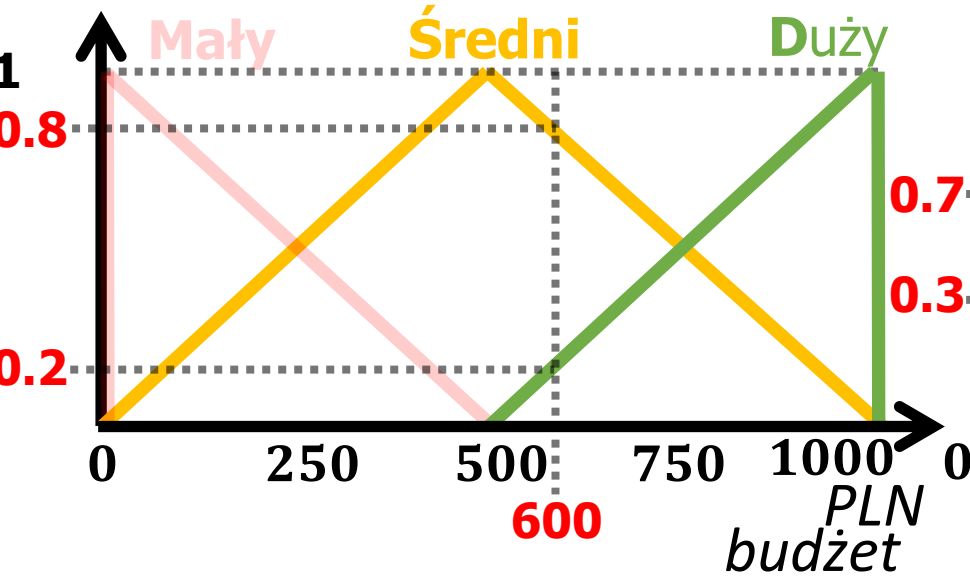


		BUDŻET		
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś
	ŚREDNIA	BM	M	D
	OPTY-MALNA	M	Ś	BD
	GORĄCA	Ś	D	BD

Ilość Browarków	
BM	Bardzo Mało
M	Mało
Ś	Średnio
D	Dużo
BD	Bardzo Dużo



# Opis procesu wnioskowania

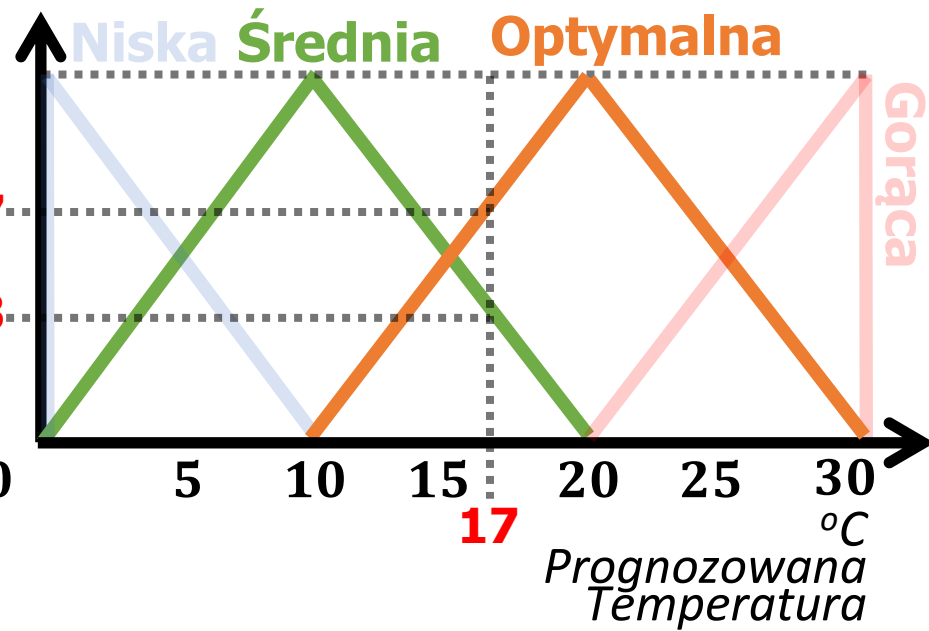
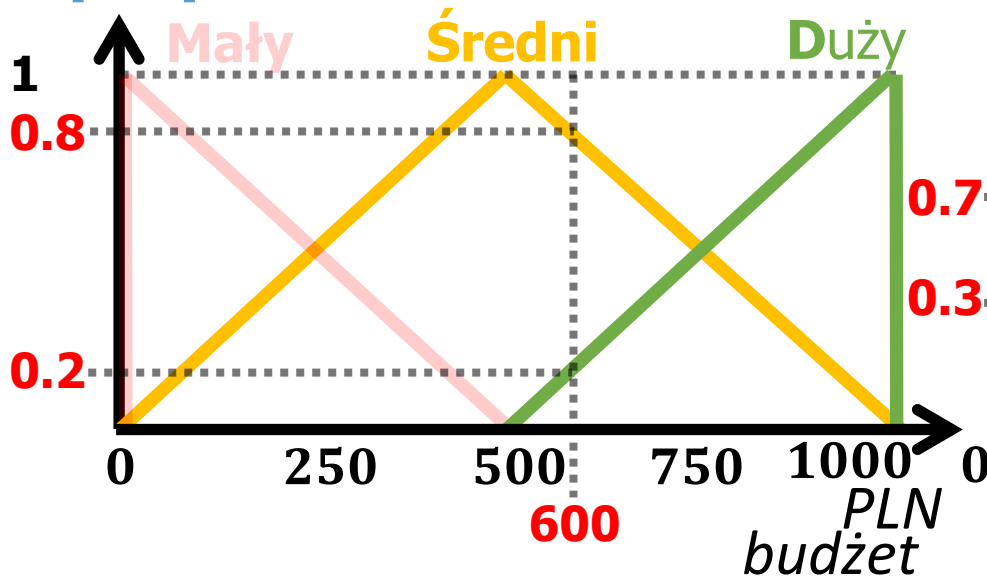


4 reguły aktywowane !		BUDŻET		
		MAŁY	ŚREDNI	DUŻY
PROGNOZOWANA TEMPERATURA	NISKA	BM	M	Ś
	ŚREDNIA	BM	M	D
	OPTY-MALNA	M	Ś	BD
	GORĄCA	Ś	D	BD

Ilość Browarków	
BM	Bardzo Mało
M	Mało
Ś	Średnio
D	Dużo
BD	Bardzo Dużo

$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}, x \in X$$

## Opis procesu wnioskowania



JEŻELI **Bużet** jest <sup>0.8</sup>*Średni* ORAZ **Prognozowana\_Temperatura** jest <sup>0.3</sup>*Średnia*  
 WTEDY **Ilość\_Browarków** jest *Mała*  $\min\{0.8, 0.3\}=0.3$

JEŻELI **Bużet** jest <sup>0.8</sup>*Średni* ORAZ **Prognozowana\_Temperatura** jest <sup>0.7</sup>*Optymalna*  
 WTEDY **Ilość\_Browarków** jest *Średnia*  $\min\{0.8, 0.7\}=0.7$

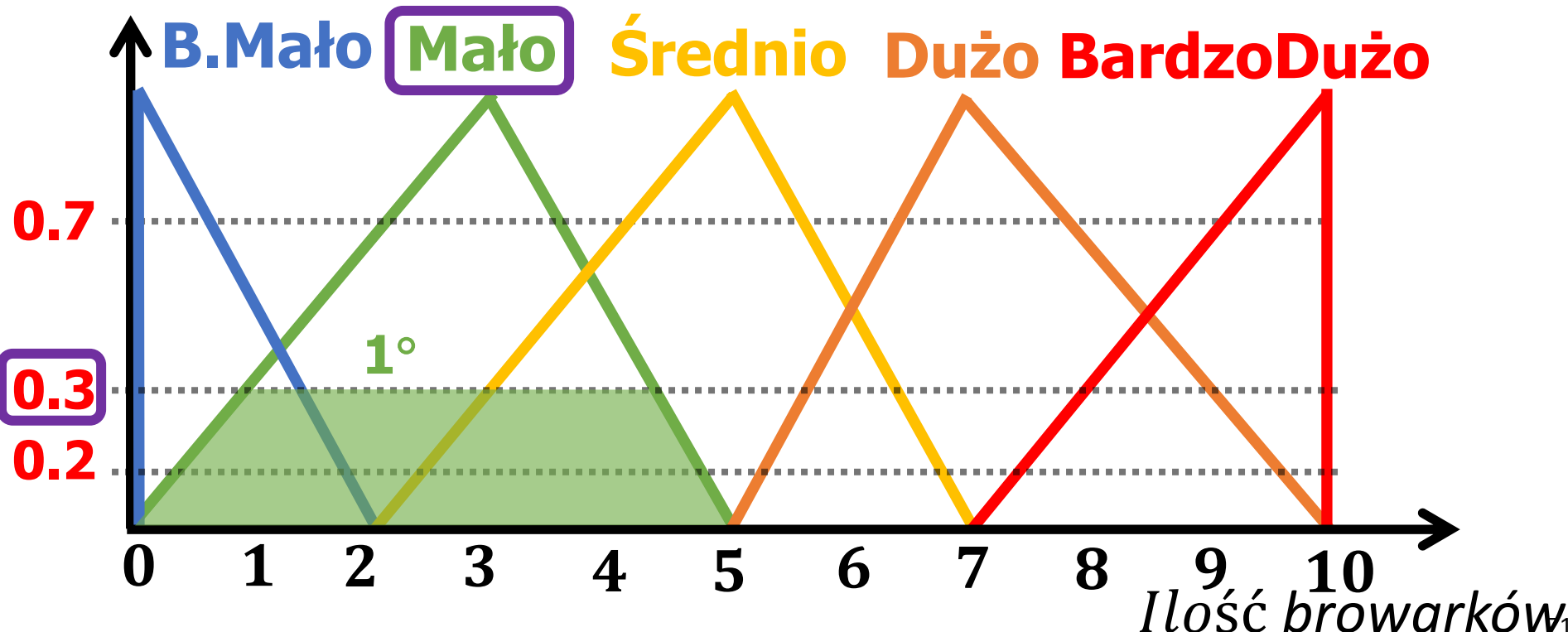
JEŻELI **Bużet** jest <sup>0.2</sup>*Duży* ORAZ **Prognozowana\_Temperatura** jest <sup>0.3</sup>*Średnia*  
 WTEDY **Ilość\_Browarków** jest *Duża*  $\min\{0.2, 0.3\}=0.2$

JEŻELI **Bużet** jest <sup>0.2</sup>*Duży* ORAZ **Prognozowana\_Temperatura** jest <sup>0.7</sup>*Optymalna*  
 WTEDY **Ilość\_Browarków** jest *Bardzo\_Duża*  $\min\{0.2, 0.7\}=0.2$

# Opis procesu wnioskowania

$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, x \in X$$

1° JEŻELI **Bużet** jest *Średni* ORAZ **Prognozowana\_Temperatura** jest *Średnia*  
WTEDY **Ilość\_Browarków** jest *Mała*  $\min\{0.8, 0.3\} = 0.3$



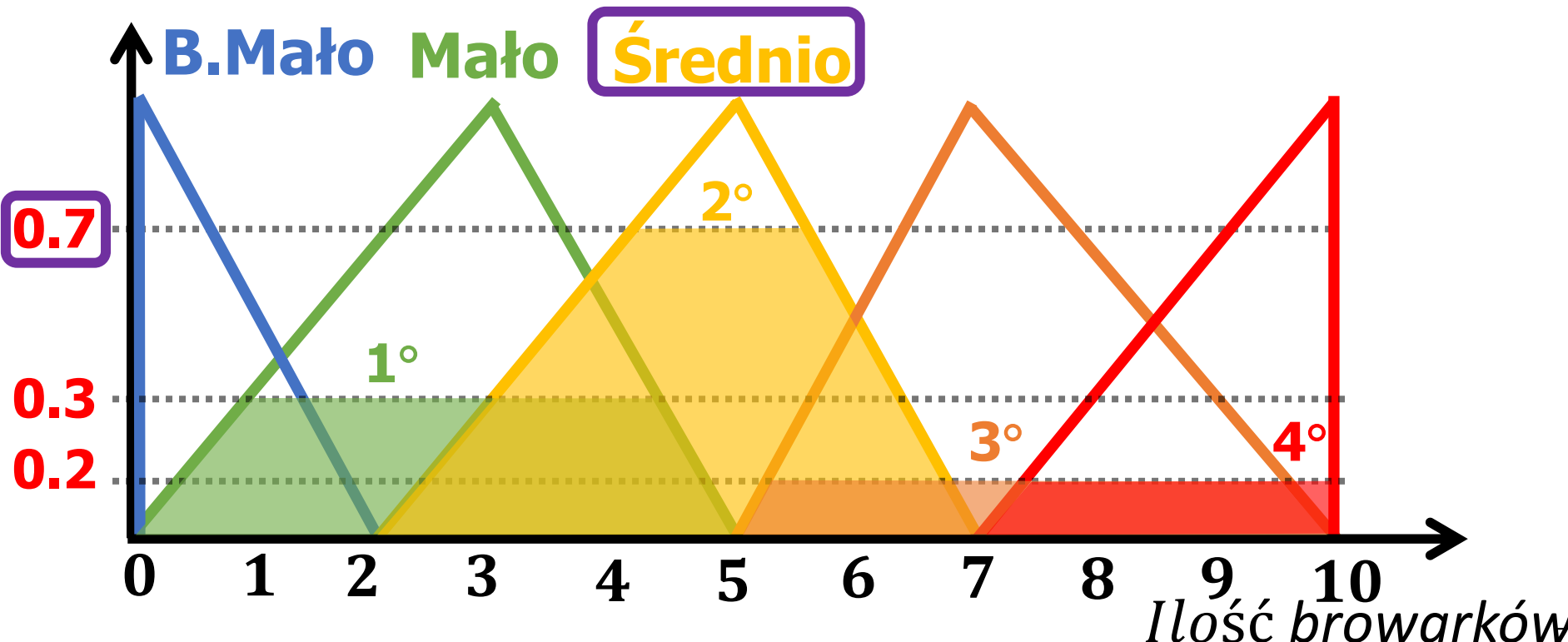
# Opis procesu wnioskowania

$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, x \in X$$

- 1°

JEŻELI **Bużet** jest *Średni* ORAZ **Prognozowana\_Temperatura** jest *Średnia*  
WTEDY **Ilość\_Browarków** jest *Mała*  
 $\min\{0.8, 0.3\}=0.3$
- 2°

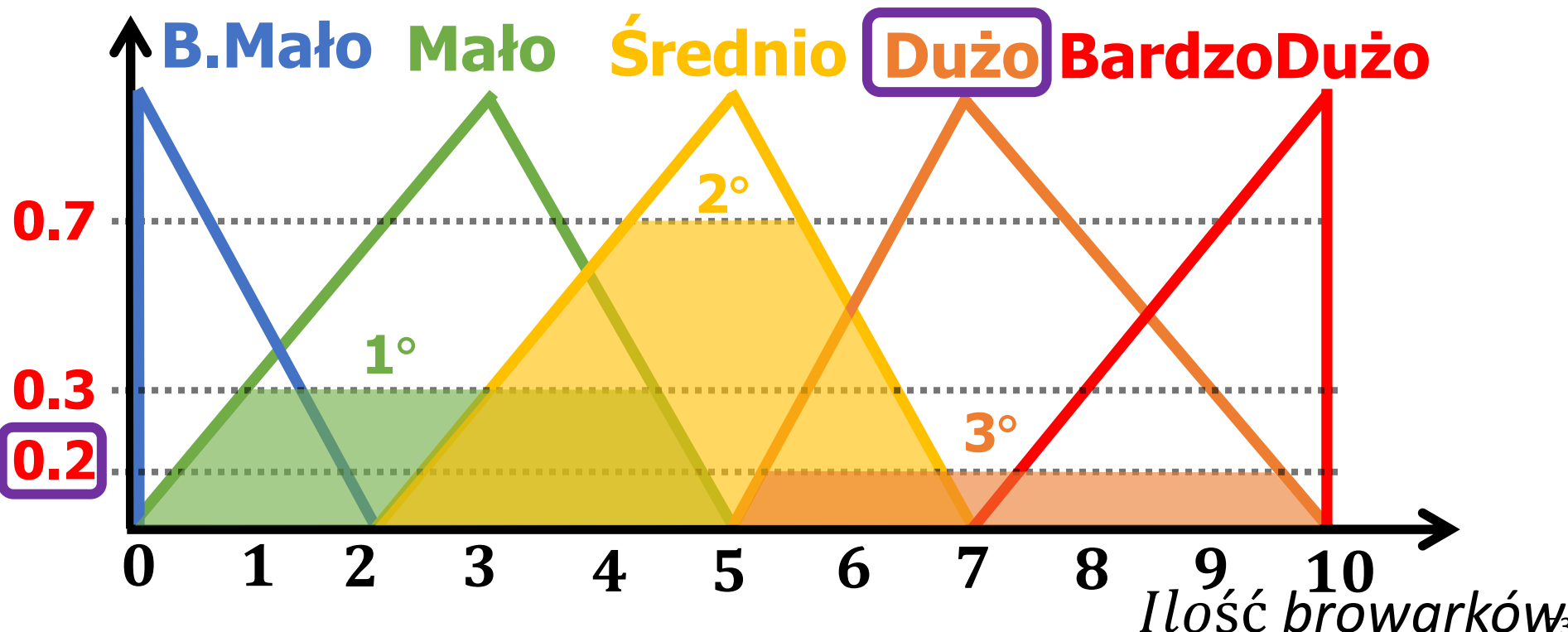
JEŻELI **Bużet** jest *Średni* ORAZ **Prognozowana\_Temperatura** jest *Optymalna*  
WTEDY **Ilość\_Browarków** jest *Średnia*  
 $\min\{0.8, 0.7\}=0.7$



# Opis procesu wnioskowania

$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, x \in X$

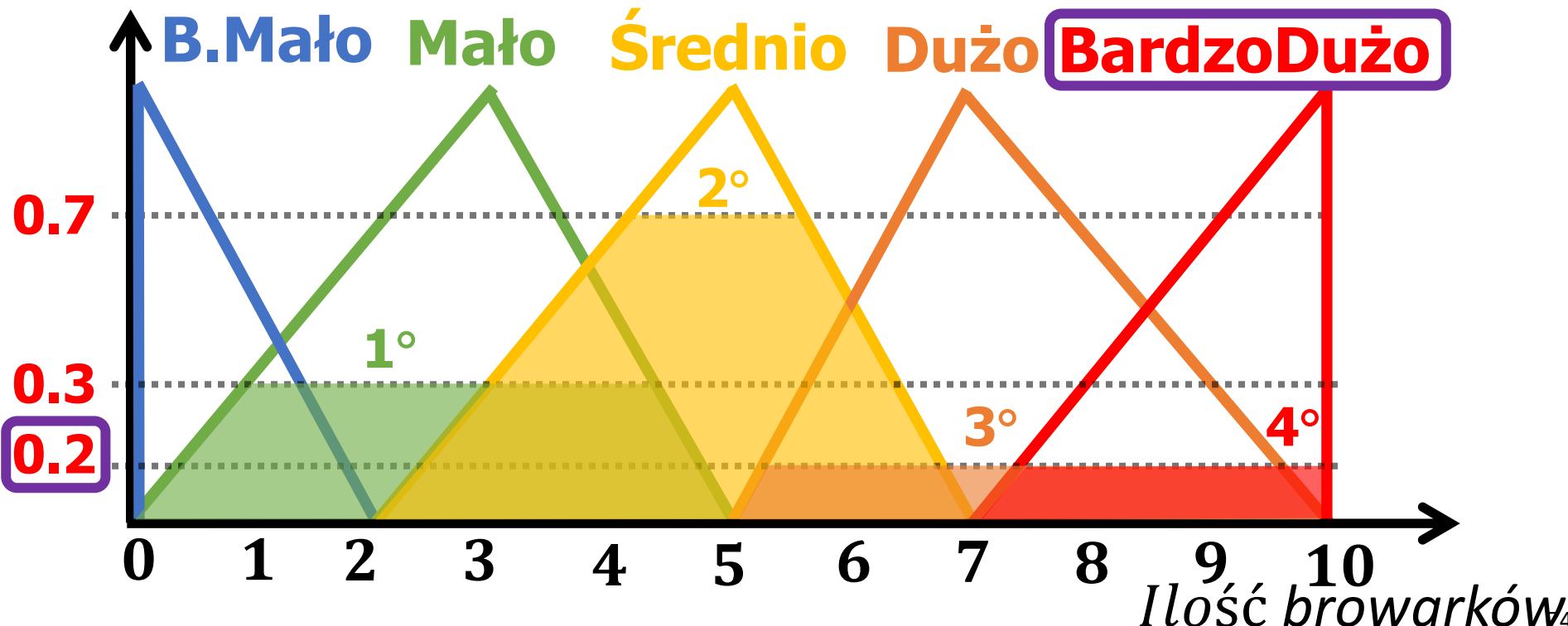
- |    |   |                        |
|----|---|------------------------|
| 1° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Średni</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Średnia</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Mała</i>      | $\min\{0.8, 0.3\}=0.3$ |
| 2° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Średni</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Optymalna</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Średnia</i> | $\min\{0.8, 0.7\}=0.7$ |
| 3° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Duży</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Średnia</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Duża</i>        | $\min\{0.2, 0.3\}=0.2$ |



# Opis procesu wnioskowania

$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, x \in X$

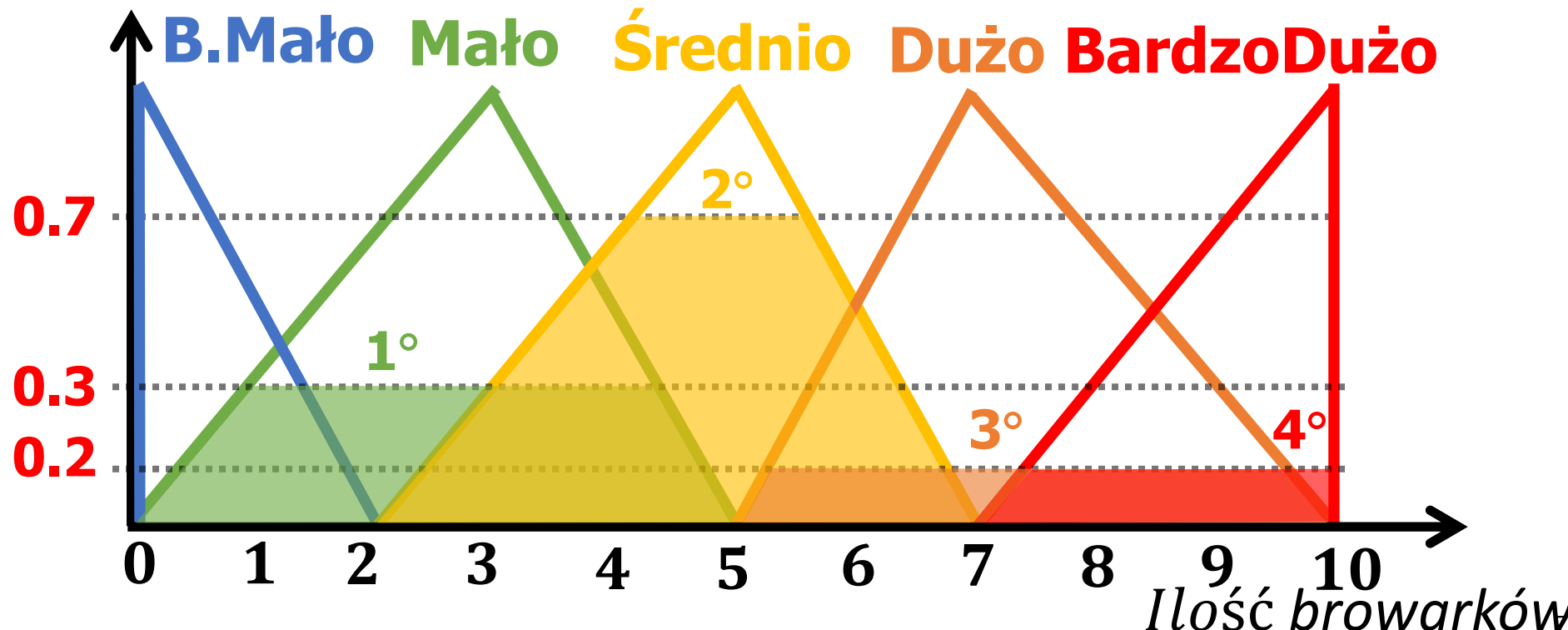
- |    |   |
|----|---|
| 1° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Średni</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Średnia</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Mała</i><br>$\min\{0.8, 0.3\}=0.3$        |
| 2° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Średni</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Optymalna</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Średnia</i><br>$\min\{0.8, 0.7\}=0.7$   |
| 3° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Duży</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Średnia</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Duża</i><br>$\min\{0.2, 0.3\}=0.2$          |
| 4° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Duży</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Optymalna</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Bardzo_Duża</i><br>$\min\{0.2, 0.7\}=0.2$ |



# Opis procesu wnioskowania

$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, x \in X$

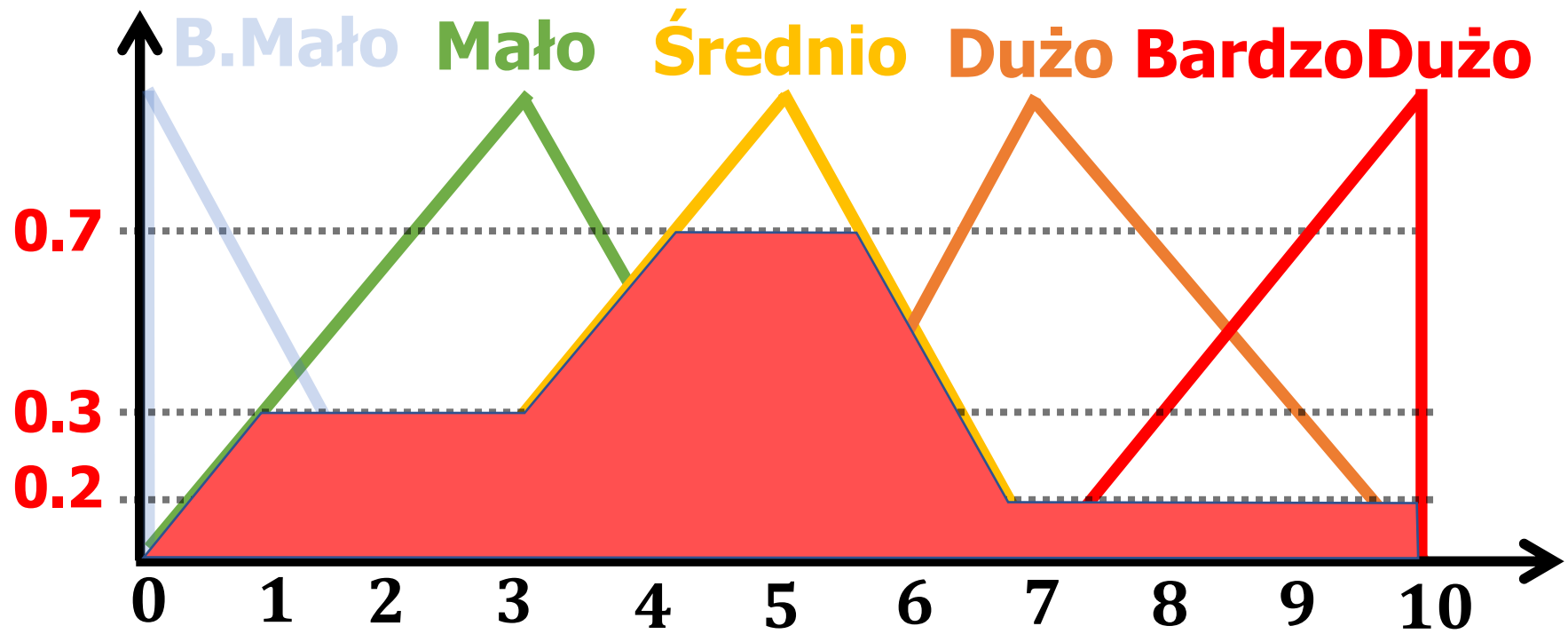
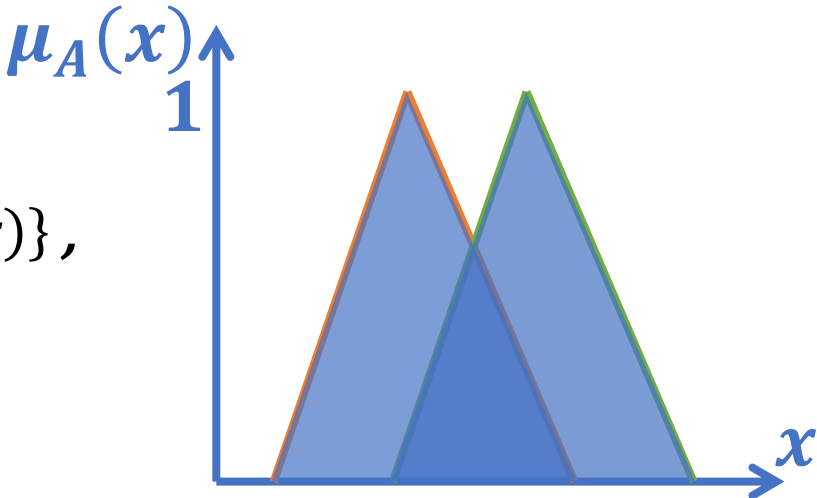
- |    |   |                        |
|----|---|------------------------|
| 1° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Średni</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Średnia</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Mała</i>        | $\min\{0.8, 0.3\}=0.3$ |
| 2° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Średni</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Optymalna</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Średnia</i>   | $\min\{0.8, 0.7\}=0.7$ |
| 3° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Duży</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Średnia</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Duża</i>          | $\min\{0.2, 0.3\}=0.2$ |
| 4° | JEŻELI <b>Bużet</b> jest <i>Duży</i> ORAZ <b>Prognozowana_Temperatura</b> jest <i>Optymalna</i><br>WTEDY <b>Ilość_Browarków</b> jest <i>Bardzo_Duża</i> | $\min\{0.2, 0.7\}=0.2$ |



Opis procesu wnioskowania

$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, x \in X$

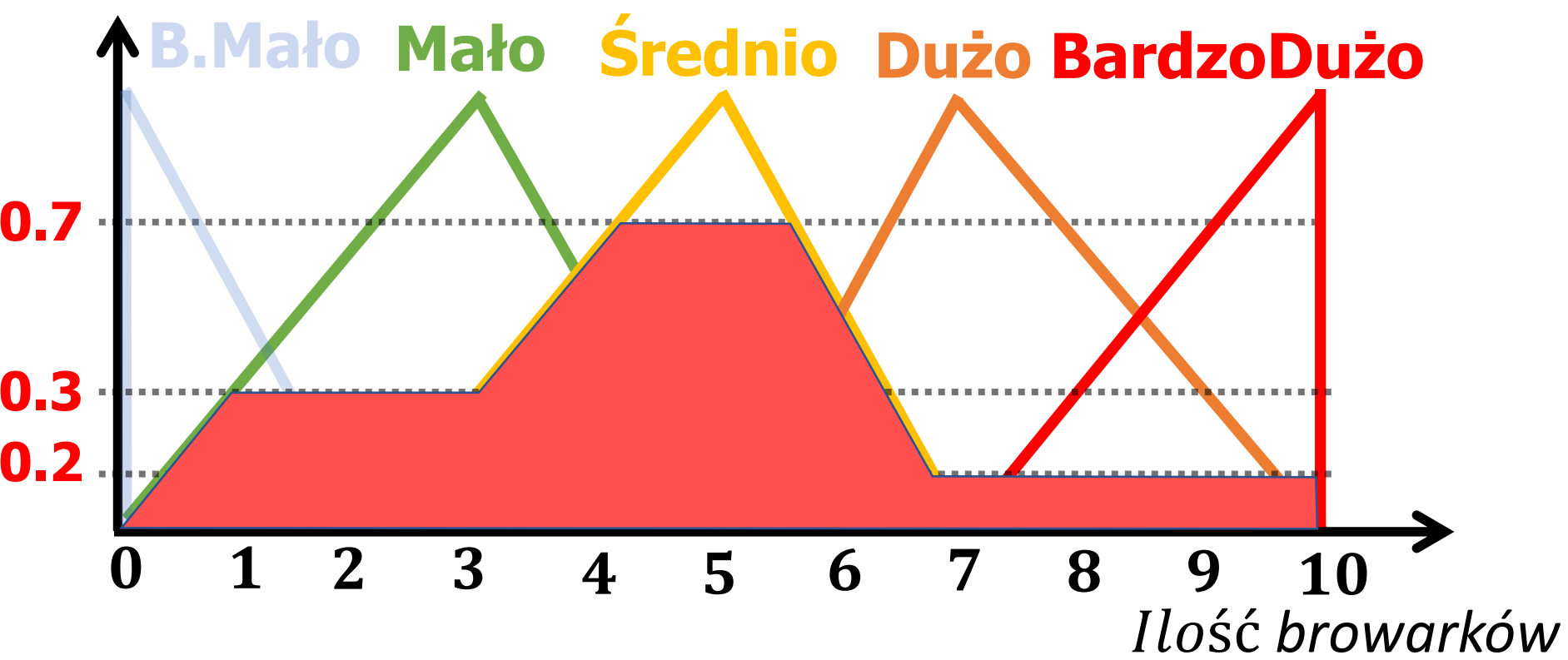
$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, x \in X$





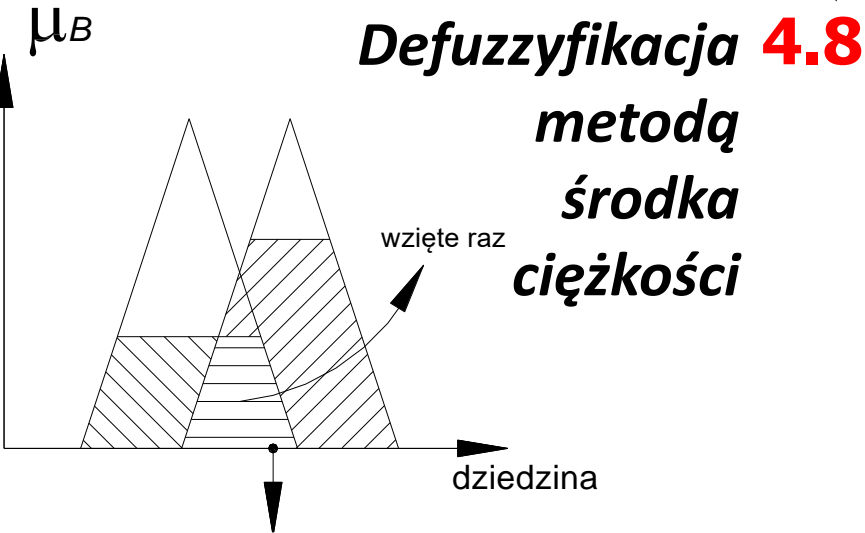
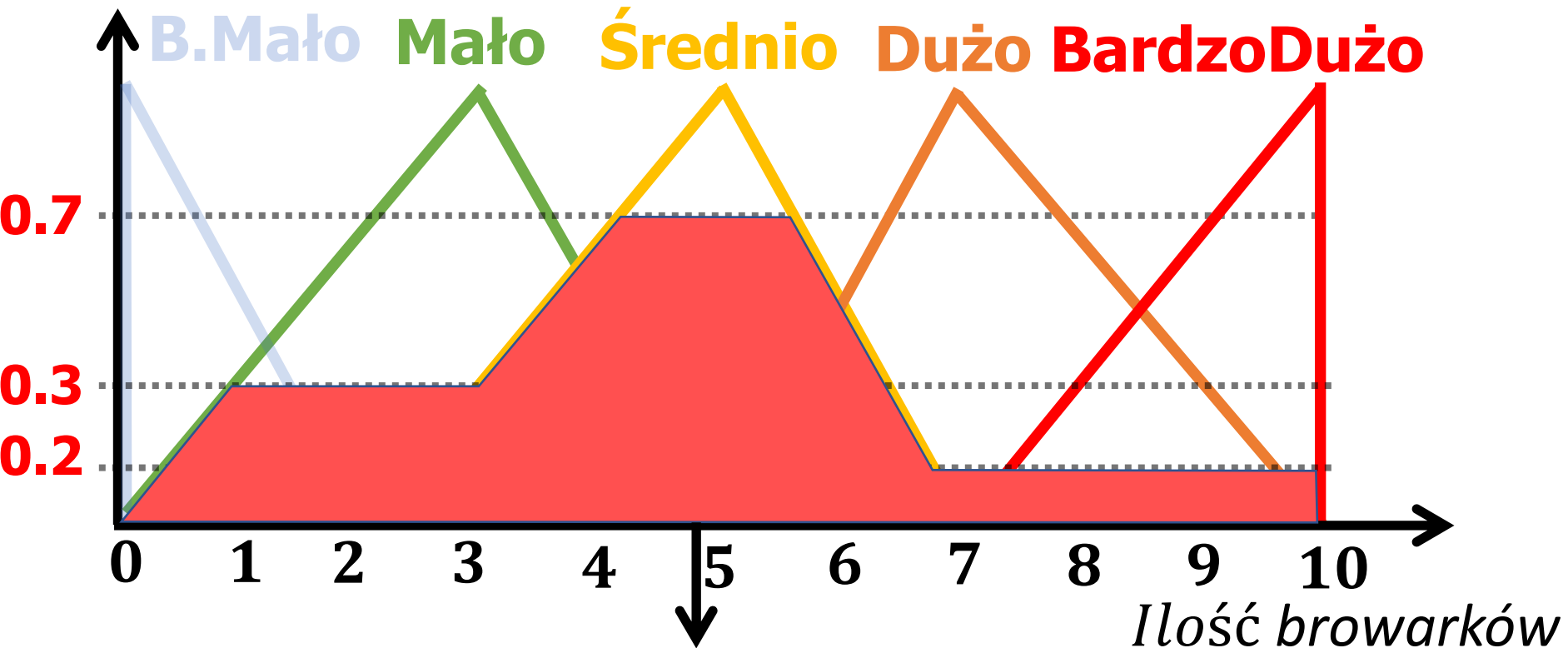
Opis procesu wnioskowania

Defuzzyfikacja



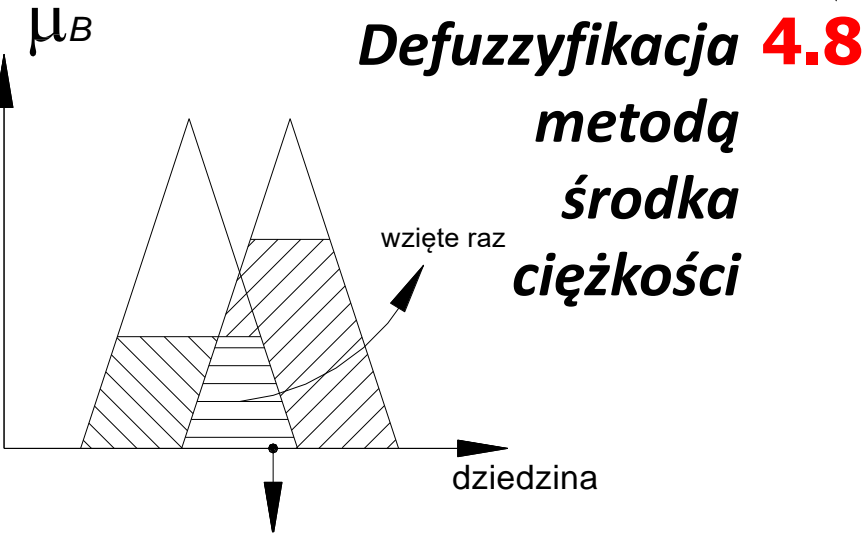
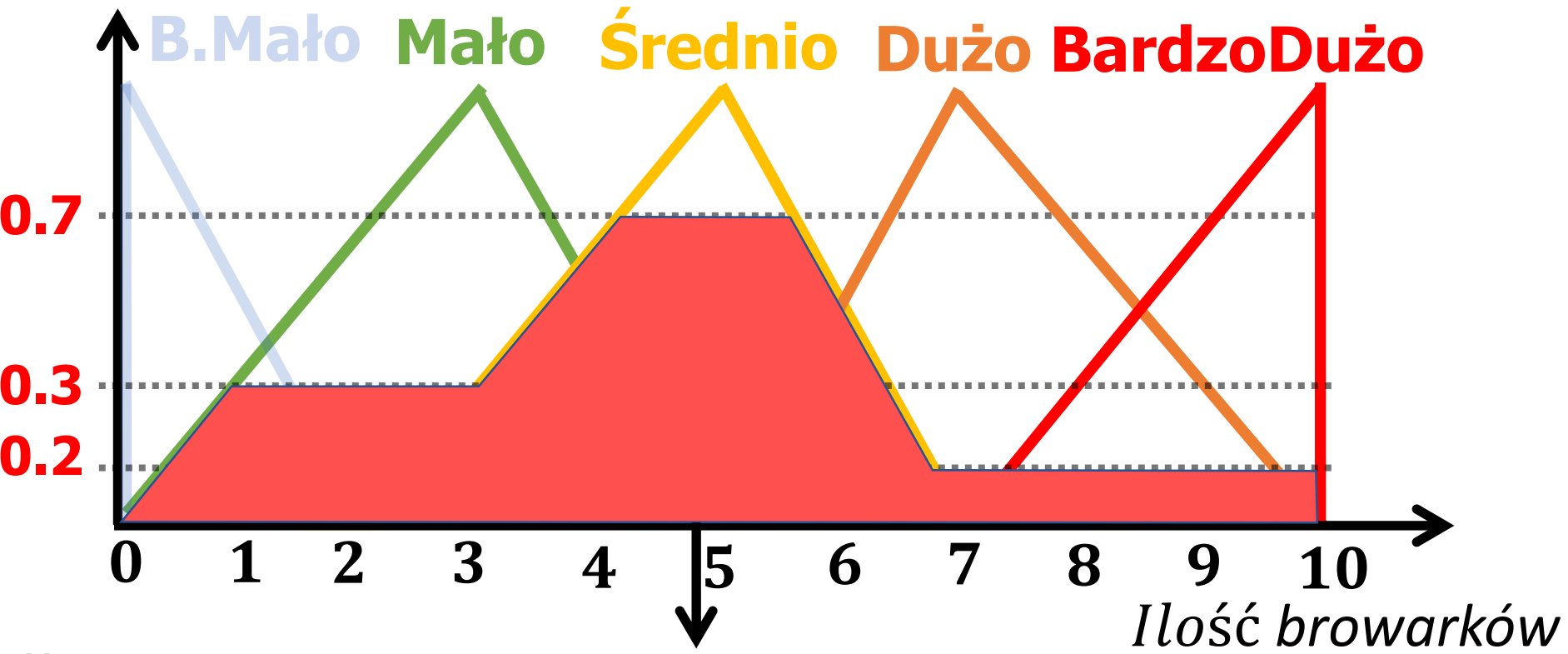
Opis procesu wnioskowania

Defuzyfikacja



# Opis procesu wnioskowania

Defuzzyfikacja

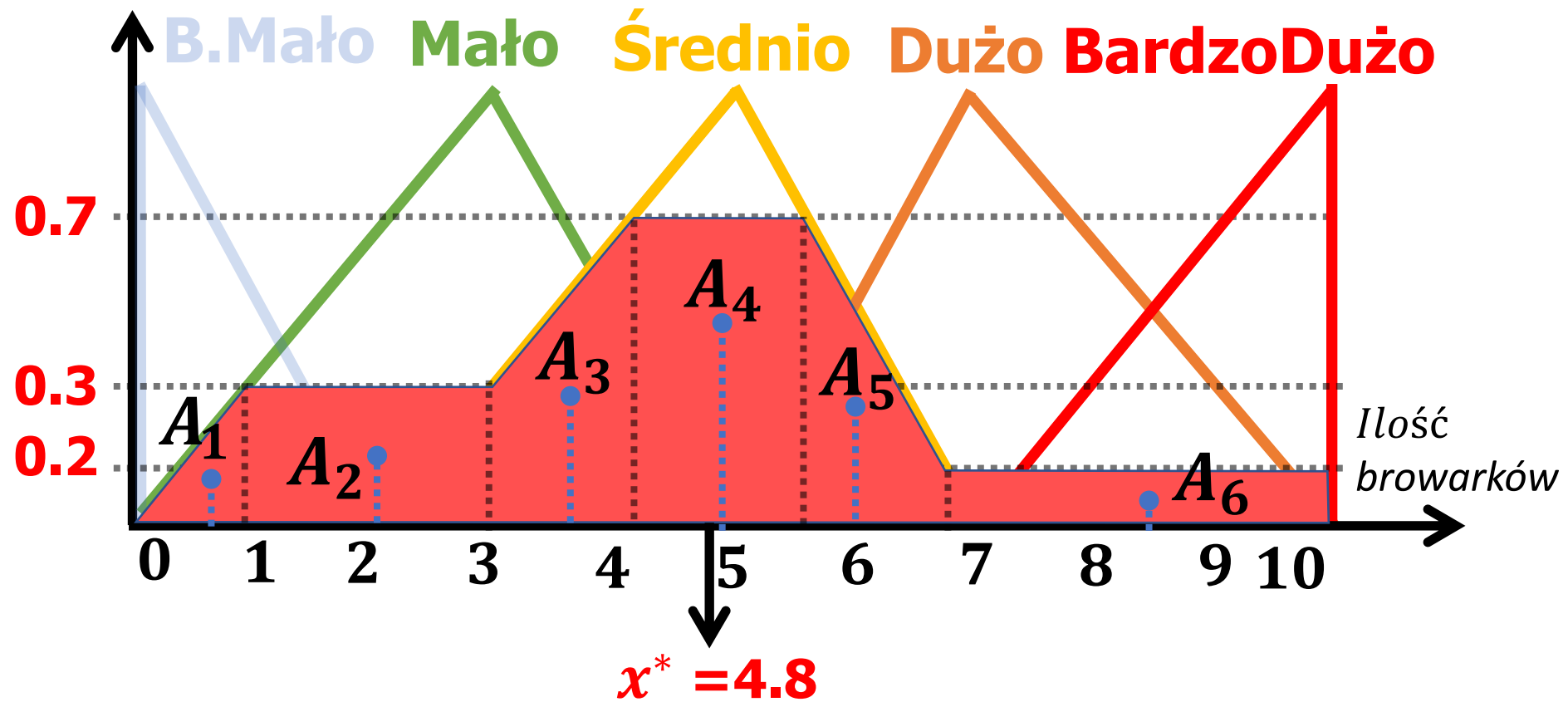


**W efekcie wnioskowania, jeśli:**

- ✓ budżet= 600 PLN,
- ✓ Temperatura= 17°C

**Przewidywana ilość browarków które należałoby spożyć wynosi 4.8!**

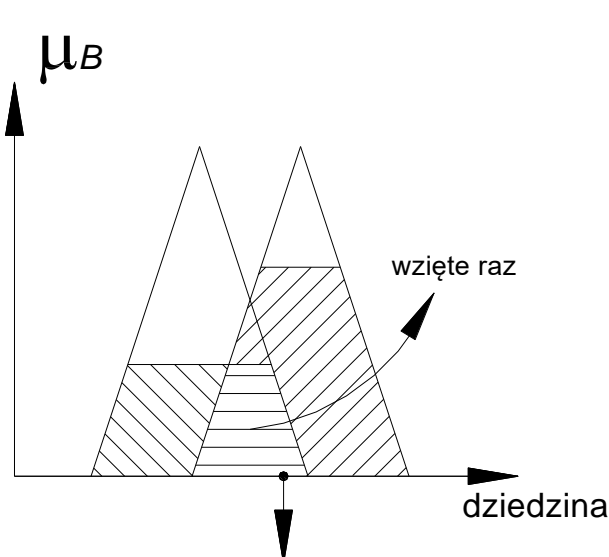
# Defuzyfikacja metodą środka ciężkości – jak policzyć ?



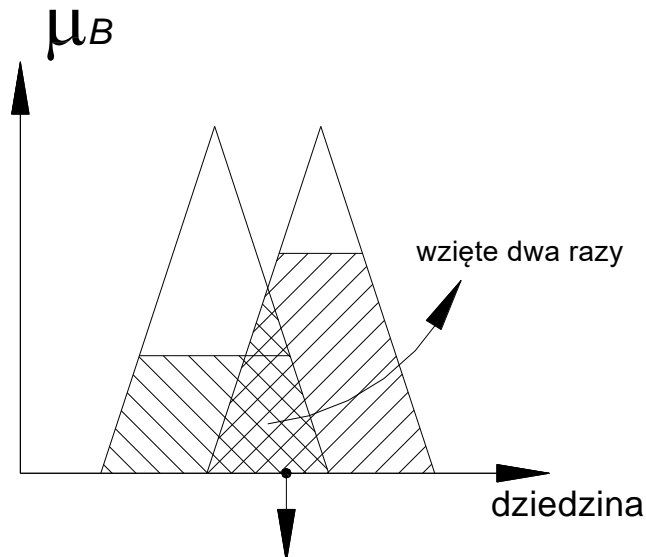
$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$A_i = \int \mu_G(x) dx$$

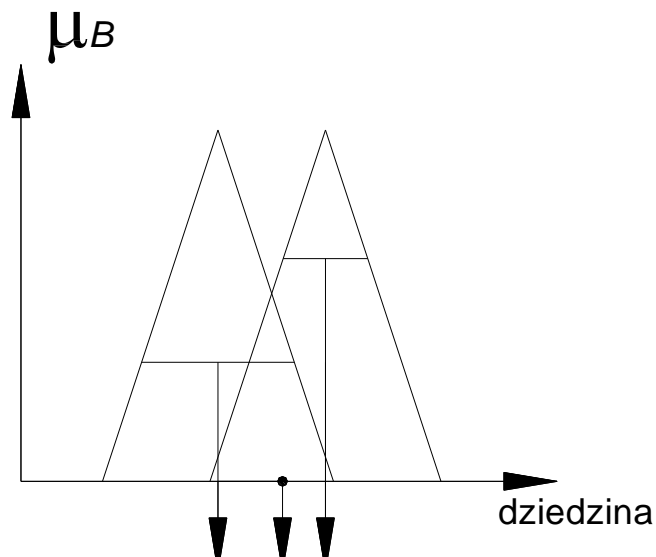
# albo jedna z metoda ..



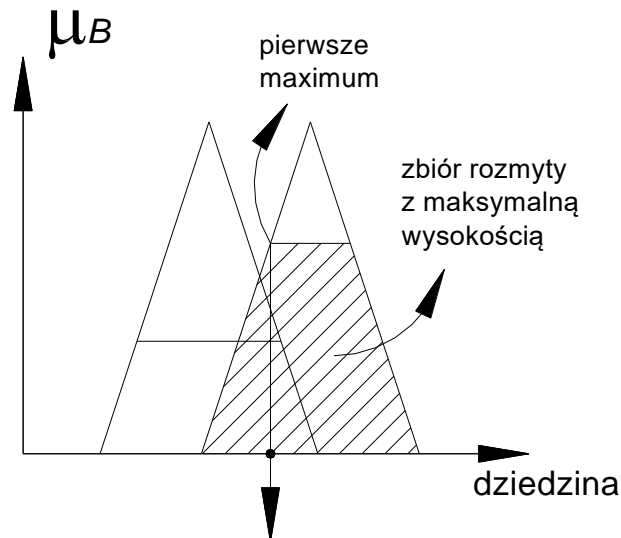
**Metoda środka ciężkości**



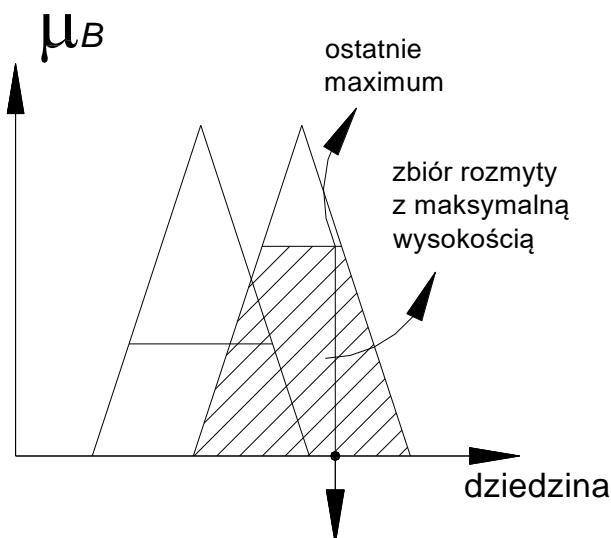
**Metoda środka sum**



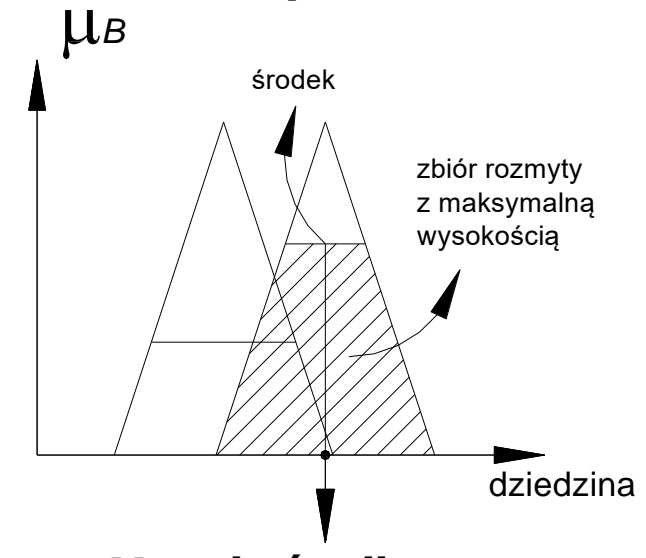
**Metoda wysokości**



**Metoda pierwszy z największych**



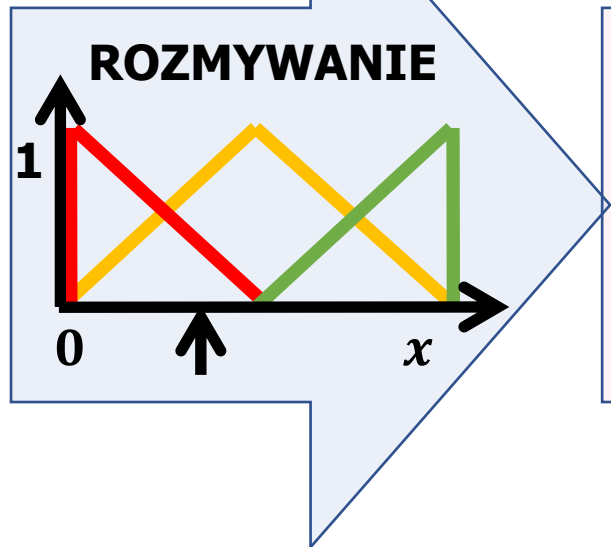
**Metoda ostatni z największych**



**Metoda środkowy z największych**

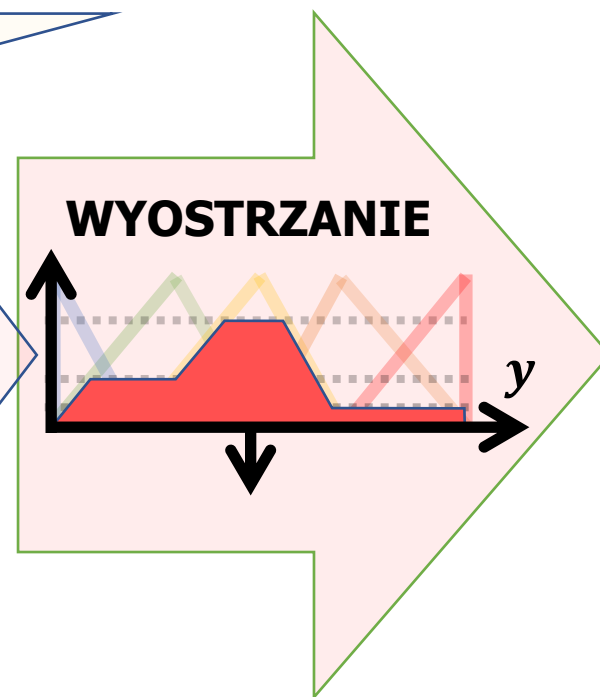
# Reasumując ..

WEJŚCIE UKŁADU  
 $x_1, x_2, \dots$



BAZA REGUŁ

AGREGACJA  
WNIOSKOWANIE  
KUMULACJA  
(min, max)



WYJŚCIE UKŁADU,  $y$

## ETAPY W MODELU ROZMYTYM (WNIOSKOWANIE ROZMYTE)

### Czynności wstępne:

1. Określenie reguł rozmytych.
2. Określenie funkcji przynależności do wartości wejść i wyjść.

### Główne kroki:

1. Rozmycie wejść poprzez użycie funkcji przynależności (fuzyfikacja).
2. Łączenie rozmytych przesłanek (wejść) poprzez rozmyte reguły by uzyskać rozmyte konsekwencje (z wielu reguł).
3. Łączenie wniosków (konsekwencji), by otrzymać ostateczny rozkład wyjścia.
4. Defuzyfikacja wyjścia (wyostrzenie) – gdy musimy uzyskać jednoznaczną odpowiedź.

FLOP

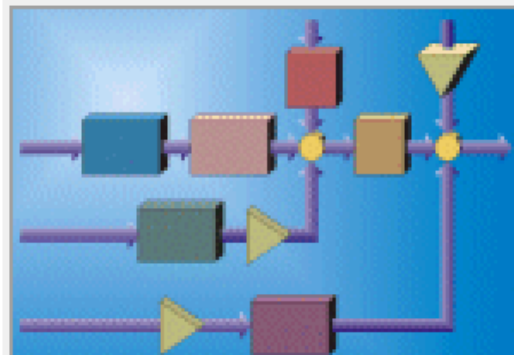
File Variables Inference View Opt

\*fuz

- Inputs
  - Budzet
    - Maly
    - Sredni
    - Duzy
  - Pr.Temp
    - Zimna
    - Srednia
    - Optymalna
    - Goraca
- Outputs
  - ile\_browarko
    - BMalo
    - Malo
    - Srednio
    - Duzo
    - BDuzo
- Rulebase
- Structure Overview

Debug Mode

## Info



## Fuzzy Logic Operating Program



Version: 9.1.5.46 (Full version)

(C) Ingenieurbüro Dr. Kahlert, Hamm 1991, 2016

Ludwig-Erhard-Str. 45, D-59065 Hamm

Tel. +49-2381/926996 Fax +49-2381/926997

E-Mail: info@kahlert.com

This copy was licensed for

IMG-PAN

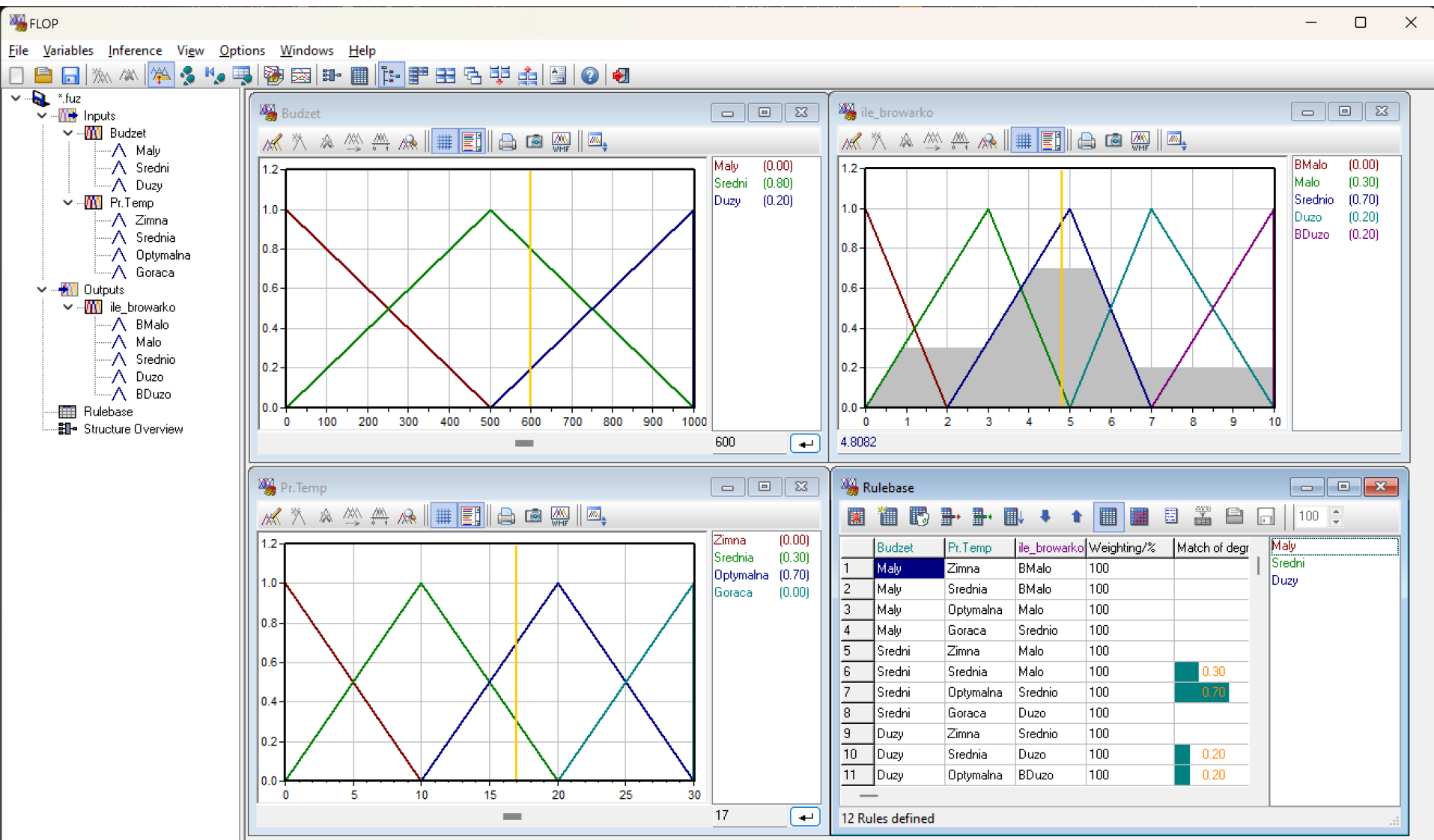
Serial number: #0093102620

OK

BMalo (0.00)  
Malo (0.30)  
Srednio (0.70)  
Duzo (0.20)  
BDuzo (0.20)

100

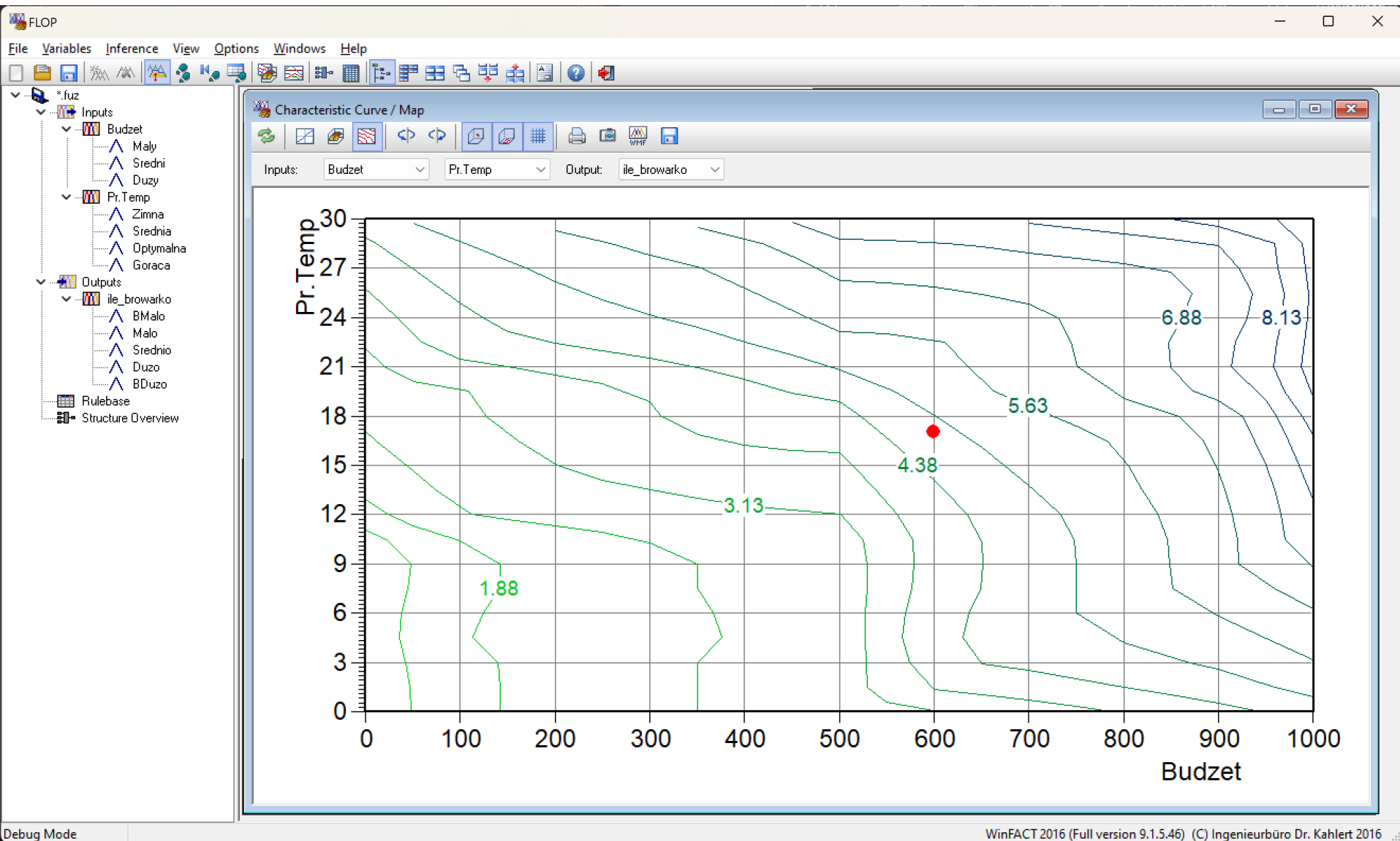
y  
dni  
y

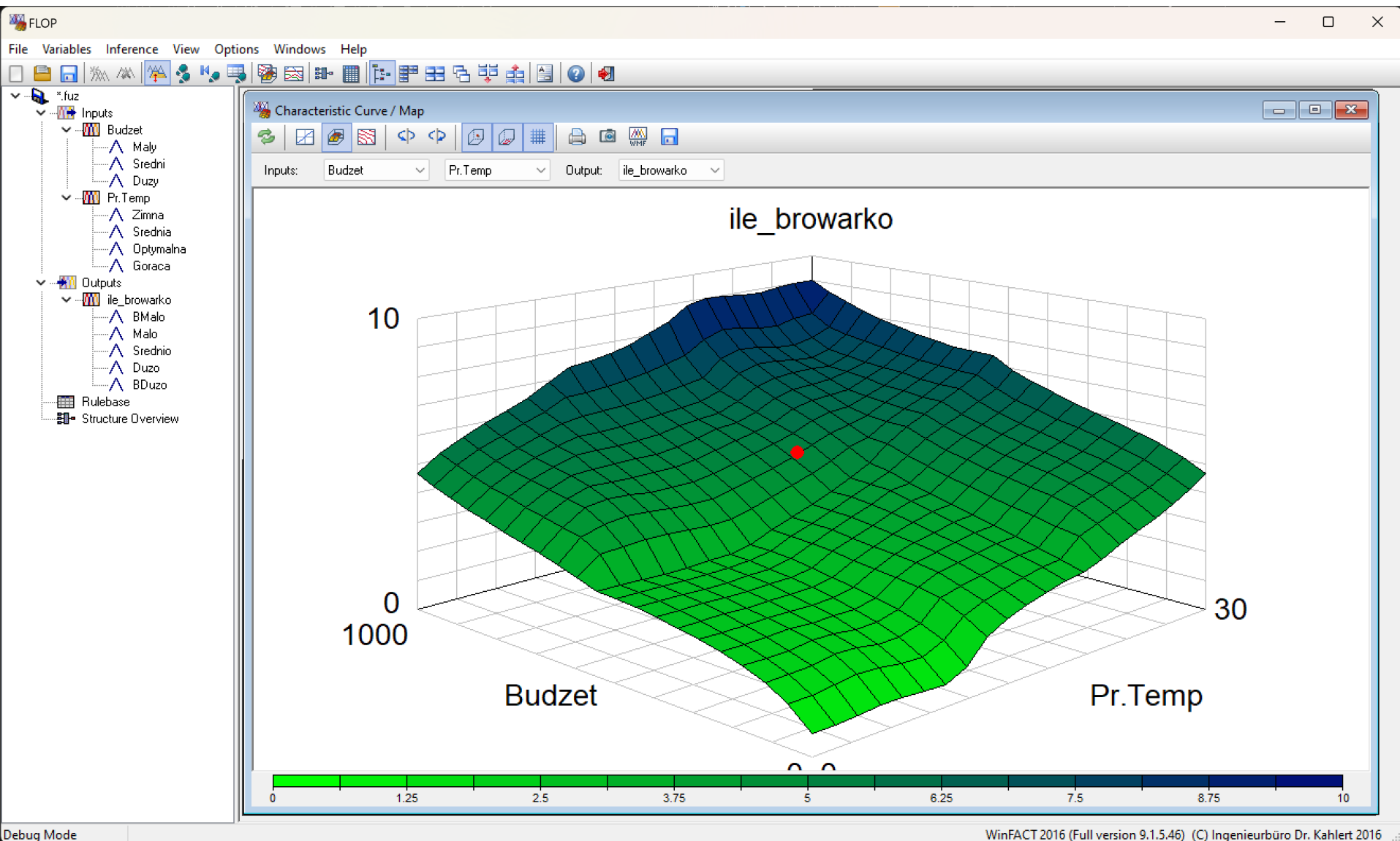


Debug Mode

WinFACT 2016 (Full version 9.1.5.46) (C) Ingenieurbüro Dr. Kahlert 2016







HOME

PLOTS

APPS

Design  
AppGet More  
AppsInstall  
AppPackage  
AppClassification  
LearnerDeep Network  
DesignerNeural Net  
ClusteringNeural Net  
FittingNeural Net  
Pattern Recog...Neural Net Time  
SeriesRegression  
LearnerDistribution  
FitterFuzzy Logic  
DesignerNeuro-Fuzzy  
DesignerColor  
Thresholder

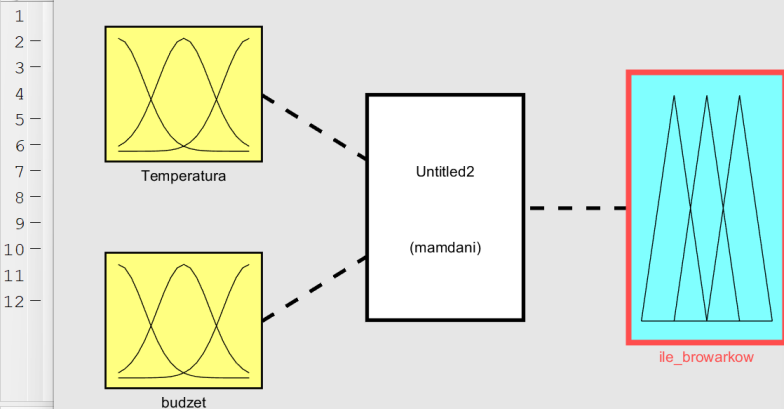
DICOM Browser

FILE

APPS

Fuzzy Logic Designer: Untitled2

File Edit View



Current



FIS Name: Untitled2

FIS Type: mamdani

And method

min

Current Variable

Or method

max

Name

ile\_browarkow

Implication

min

Type

output

Aggregation

max

Range

[0 1]

Defuzzification

centroid

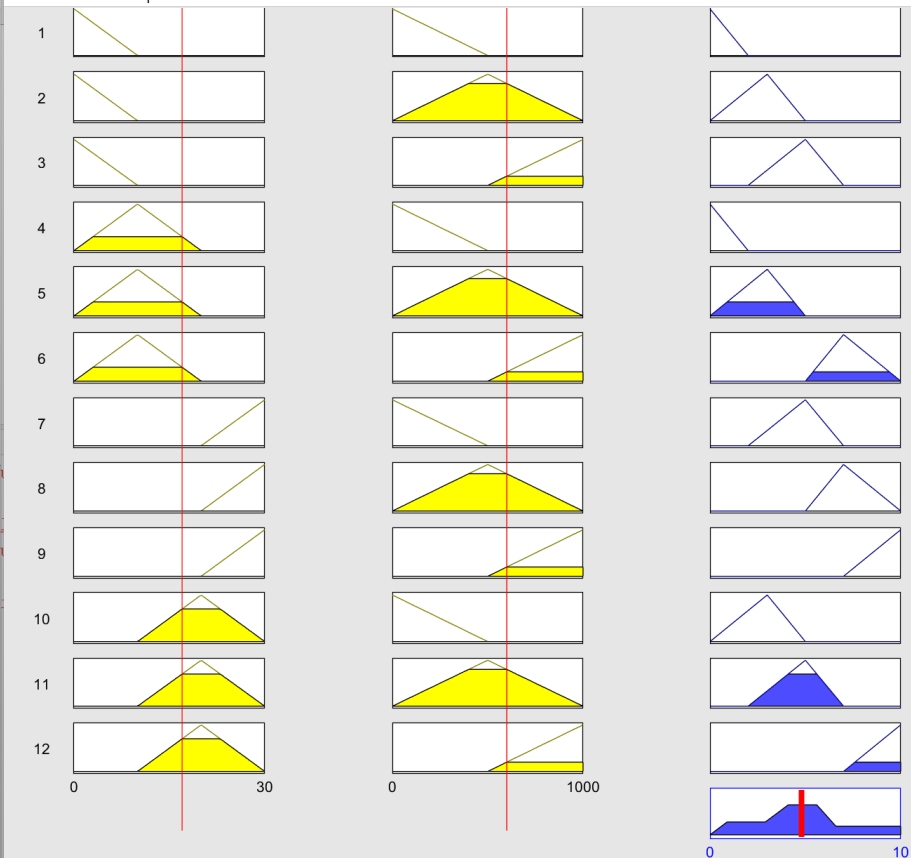
Help

Close

Updating Rule Editor

Rule Viewer: Untitled2

File Edit View Options



Input:

[17;600]

Plot points:

101

Move:

left

right

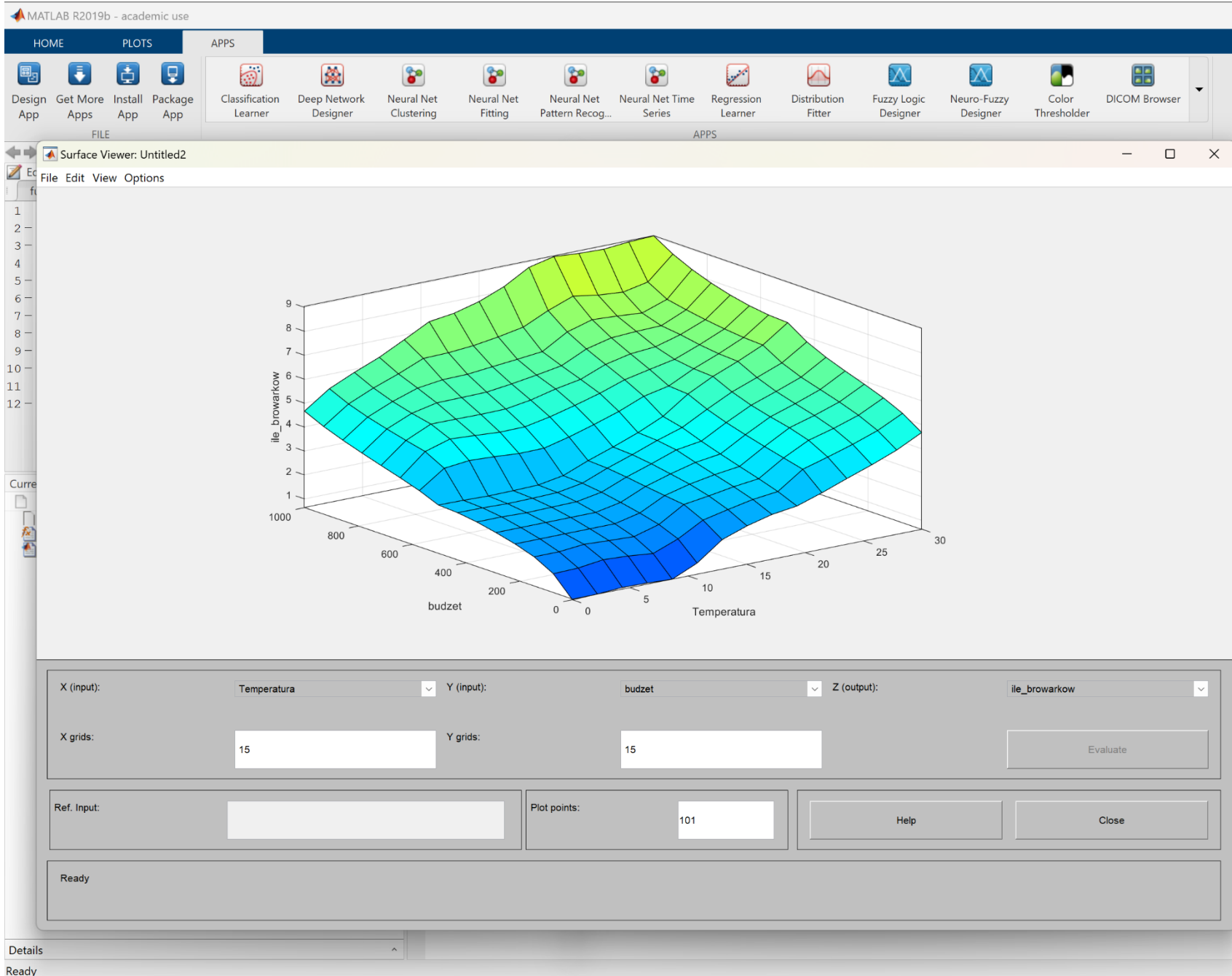
down

up

Opened system Untitled2, 12 rules

Help

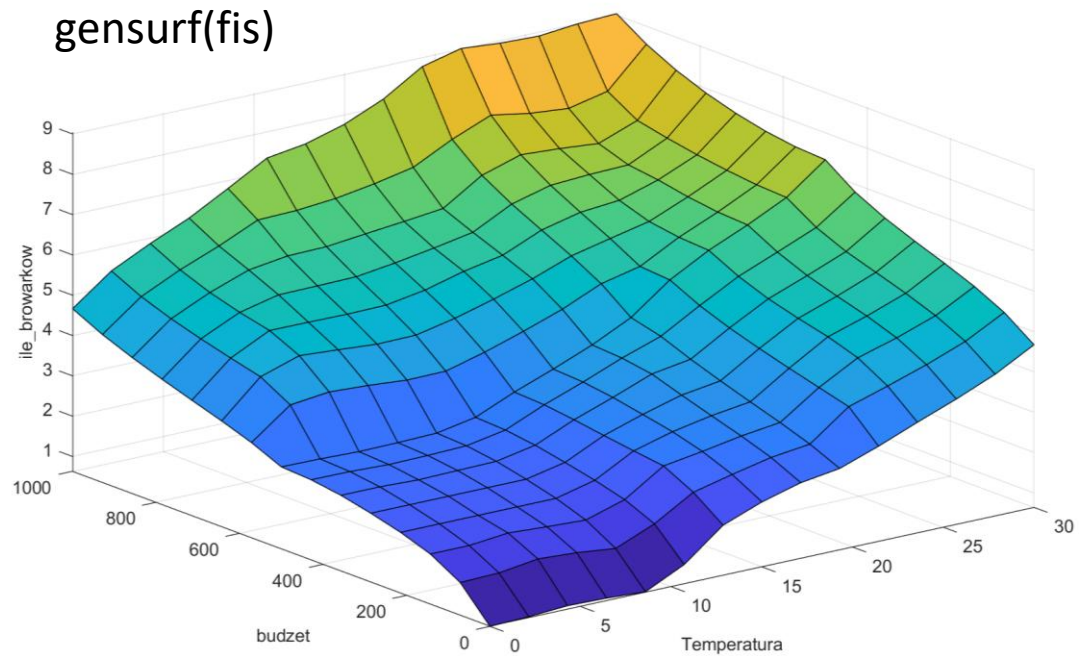
Close



Można także budować i konfigurować system z linii poleceń – dobry opis w dokumentacji matlaba „Build Fuzzy Systems at the Command Line”

```
fis = readfis('browarki');  
evalfis(fis,[17 600])  
ans =
```

4.7969

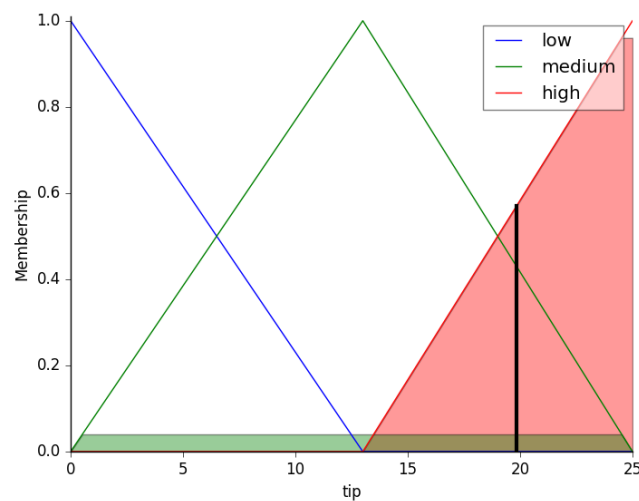
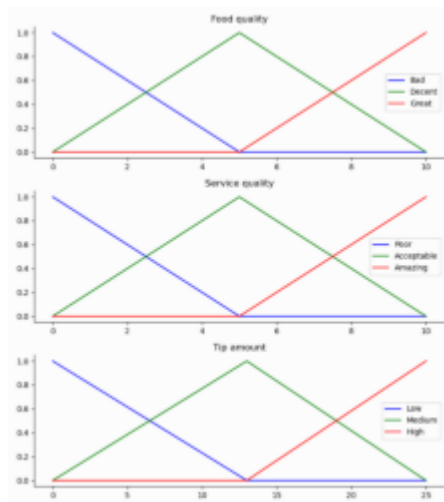




Fuzzy  
Logic  
Toolbox  
for  
Python.

<https://pythonhosted.org/scikit-fuzzy/>

<https://pythonhosted.org/scikit-fuzzy/api/skfuzzy.html#skfuzzy.trimf>



## ZASTOSOWANIE W BIZNESIE I FINANSACH:

- Inwestycje bankowe.
- Ocena ryzyka kredytowego.
- Ocena ryzyka ubezpieczenia.
- Określenie strategii inwestycyjnych.
- Określenie profilu klienta.
- Kontroler jakości.
- Przewidywanie długości pobytu w szpitalu.
- Wyszukiwanie powtarzających się danych w bazach.
- Prognozowanie giełdowe.
- Wyznaczanie ramówek dla reklam telewizyjnych.

## ZASTOSOWANIA INŻYNIERSKIE:

- ABS (Antilock-Bracking System).
- Sterowanie dźwigiem dopasowując ciężar i drogę, tak by elementy nie huśtały się na linach.
- Wszędzie tam, gdzie trudno jest utworzyć matematyczny model, ale daje się opisać sytuację w sposób jakościowy, za pomocą reguł rozmytych.
- Kontrolery rozmyte.
- Często w przemyśle – kontrola procesów.
- Inteligentne lodówki, pralki, windy, opiekacze do grzanek, aparaty fotograficzne.



# ZASTOSOWANIA TECHNICZNE

- Synteza jądrowa.
- Ustalanie drogi przelotu samolotu.
- Sterowanie procesem spalania paliw w elektrowniach.
- Kontrola prędkości ciężarówki.
- Sterowanie procesem produkcji penicyliny.
- Kontrola ruchu ulicznego.
- Mikrokontrolery (68HC12 MCU ).



An advertisement for an Electrolux EWF10760DW washing machine. It features a large image of the machine with a blue cloth inside. Text highlights 'Pojemność 7 kg', 'Programy parowe', and '10 letnia gwarancja typu inwerter'. A red circle highlights the 'TECHNOLOGIA FUZZY LOGIC' section, which states 'dostosowuje parametry do wsadu.' The price '1499,-' is prominently displayed in large orange numbers. The bottom text describes the machine as a 'PRALKA Z PROGRAMAMI PAROWYMI' with a 1000 rpm spin speed, 7 kg capacity, LED display, Time Manager function, steam programs, Fuzzy Logic technology, and inverter motor. Dimensions are given as 85x60x52.2 cm.



Neuro Fuzzy® Rice Cooker & Warmer





# Na kiedy ??

Dzisiejszy wykład – fuzzy logic

Wykład za tydzień:  
system ekspercki  
na bazie logiki rozmytej ..

## Kwiecień

2025

Pn	Wt	Śr	Cz	Pt	So	N
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				
Cz		Pt				

## Maj

Kolejne obligatoryjne  
laborki – 8 i 9 maja..

2025

Pn	Wt	Śr	Cz	Pt	So	N
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

TERMINY  
ODDANIA  
PROJEKTÓW

1 1 maja/  
genetyczny

Wszelkie problemy  
z genetycznym – piszcie  
albo przyjdźcie na  
nieobligatoryjne, albo do  
mnie (p.317)

Pod linkiem na dole slajdu  
znajduje się zestawienie z datami  
oddania kolejnych projektów i ..  
ogólnie bieżącą sytuacją –  
proszę sprawdzajcie, czy się nie  
pomyliłem –  
jeśli się pomyliłem, piszcie do mnie ...

Montecarlo – 100%

Nazwisk	Imię	Monte	Genetycz	Fuzzy	Neuro	Ile oddanych	Ocena z projektów	Ocena z egzaminu	Ocena Końcowa
A	Lucja Weronika	3/21/2025				1	2		
B	Jakub Marcel	3/24/2025				1	2		
B	Maja	3/21/2025				1	2		
Ch	Jakub Hubert	4/3/2025	3/30/2025			2	3		
Ch	Wiktor Jan	3/30/2025				1	2		
D	Konrad Adam	4/6/2024				1	2		
D	Kamil Stanisław	3/19/2025				1	2		
D	Adam	4/4/2025				1	2		
D	Tomasz Piotr	3/31/2025				1	2		
D	Gabriela	3/30/2025				1	2		
D	Jan Bartosz	3/21/2025	3/30/2025			2	3		
E	Maurycy	4/1/2025				1	2		
F	Julia	4/6/2025				1	2		
F	Aleksandra Maria	3/27/2025				1	2		
G	Zuzanna Ewa	4/6/2025				1	2		
G	Patrycja	3/19/2025				1	2		
G	Mikołaj	4/6/2025				1	2		
G	Konrad Wojciech	4/3/2025				1	2		
G	Jakub Przemysław	3/19/2025				1	2		
H	Karol	4/3/2025				1	2		
H	Aleksander Jakub	3/21/2025				1	2		
I	Bartosz	4/6/2025				1	2		
J	Filip Andrzej	4/6/2025				1	2		
J	Aleksandra Monika	4/6/2025				1	2		
J	Julia Weronika	3/29/2025				1	2		
J	Roksana Kamila	3/24/2025				1	2		
J	Weronika	4/6/2025				1	2		
Ki	Maria	3/31/2025				1	2		
Kn	Maria	3/17/2025				1	2		
K	Karolina Agnieszka	3/27/2025				1	2		
K	Oliwier Piotr	3/15/2025				1	2		
K	Julia Anita	3/27/2025				1	2		
K	Bartłomiej Mariusz	3/23/2025				1	2		
K	Dawid Tomasz	3/20/2025				1	2		
K	Natalia Katarzyna	3/21/2025				1	2		
K	Kacper Bartłomiej	4/5/2025				1	2		
L	Patryk	4/3/2025				1	2		
M	Patrycja Anna	3/21/2025				1	2		
M	Gerard	3/20/2025				1	2		
M	Jakub Franciszek	3/16/2025				1	2		
M	Eliza Klaudia	3/28/2025				1	2		
M	Karolina Małgorzata	4/6/2025				1	2		
O	Joanna Julia	3/26/2025				1	2		
P	Miłosz	3/25/2025				1	2		
P	Szymon Mateusz	4/3/2025				1	2		
Pie	Bartosz	4/6/2025				1	2		
Piw	Bartłomiej Jakub	3/24/2025				1	2		
P	Magdalena Maria	4/4/2025				1	2		
P	Dominika	3/31/2025				1	2		
R	Gabriel Mieczysław	4/4/2025				1	2		
S	Dominik	3/30/2025				1	2		
S	Marcin Jan	3/17/2025				1	2		
S	Julia Krystyna	3/25/2025				1	2		
S	Julita	3/28/2025				1	2		
S	Szymon Marcin	3/16/2025				1	2		
S	Weronika					0	2		
S	Martyna Joanna	3/26/2025				1	2		
S	Wiktoria Danuta	4/4/2024				1	2		
S	Aleksandra	3/27/2025				1	2		
S	Anna Sara	4/3/2025				1	2		
Szcz	Magdalena Anna	4/6/2025				1	2		
Szt	Magdalena	3/19/2025				1	2		
Sz	Mikołaj	4/3/2025				1	2		
T	Katarzyna	4/1/2025				1	2		
T	Witold	3/17/2025				1	2		
W	Julia Barbara	3/26/2025				1	2		
W	Katarzyna	4/6/2025				1	2		
W	Oliwia Klaudia	3/25/2025				1	2		
Z	Michał	3/21/2025				1	2		
Z	Karolina	4/2/2025				1	2		
Wzrost średni		100,0	2,9	0,0	0,0	1,014	2,03		

# Inteligencja obliczeniowa w analizie danych



**dziękuję za uwagę !**