

М@тем@тi4eСкий boy!

1. Однажды утром Гера очень громко сообщил всем, что нашел наименьшее, состоящее из чётных цифр, число, делящееся на 99. Какое число у него получилось?
2. В треугольнике ABC сторона AC длиннее стороны AB . Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Прямая AI пересекает прямые DE и DF в точках X и Y соответственно. Z — основание перпендикуляра, опущенного из A на BC . Докажите, что D — центр вписанной окружности треугольника XYZ .
3. На доске в аудитории у 9 классов Глеб Мангукович написал и забыл стереть уравнение $x^2 + ax + b = 0$, где коэффициенты a и b целые и не равны 0. Его ученики, проходя мимо доски, стирали старое уравнение и писали новое такого же вида так, чтобы корнями нового уравнения были коэффициенты старого. В какой-то момент новое составленное уравнение совпало с тем, что было написано на доске изначально Глебом Мангуковичем. Какое уравнение изначально было написано на доске?
4. Перед матбоем составителям задач очень захотелось доказать для положительных чисел a, b, c неравенство

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1$$

Они справились всего за 10 минут! Докажите и вы это неравенство.

5. Существует ли многочлен P с целыми коэффициентами, у которого

$$P(-10) = 145, P(9) = 164, P(0) = -25$$

6. У Антона есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. У Тимофея Дмитриевича есть чашечные весы - они показывают, какая чашка тяжелее, но не показывают, насколько. За каждое взвешивание Антон платит Тимофею Дмитриевичу (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Но Тимофеем Дмитриевичем не так просто, как кажется. Если уплачена настоящая монета, он сообщит Антону верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. Антон хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Тимофею Дмитриевичу. Может ли Антон гарантированно этого добиться?
7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = CD$, $AB = AC$ и $\angle ADC = \angle BAC$. На сторонах AB и AD соответственно отмечены их середины — N и M . Докажите, что $\triangle MNC$ — равнобедренный.
8. На паре Анастасия Константиновна написала на доске число 2. Миша и Кирилл играют в такую игру. Миша записывает на доску число, делящееся на 2, затем Кирилл выписывает число, делящееся на 3, затем Миша — число, делящееся на 4 и т.д. При этом новое число нужно получить из предыдущего либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив цифры предыдущего числа (оставлять число без изменения нельзя). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?