

Двойной подсчёт

- 1 Можно ли расставить числа в таблице 6×9 так, чтобы в каждом столбце была сумма по 10, а в каждой строке — по 20?
- 2 В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце — по 10, а в каждой строке — по 20. Сколько в таблице строк?
- 3 В конференции участвовали 19 ученых. После конференции каждый из них отправил 2 или 4 письма участникам этой конференции. Могло ли получиться так, что каждый участник получил по 3 письма, если письма на почте не теряют?
- 4 Дано 25 чисел. Какие бы три из них мы ни выбрали, среди оставшихся найдётся такое четвёртое, что сумма этих четырёх чисел будет положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?
- 5 Несколько восьмиклассников и девятиклассников обменялись рукопожатиями. При этом каждый восьмиклассник пожал руку девяти девятиклассникам, а каждый девятиклассник — восьми восьмиклассникам.
Кого среди них было больше — восьмиклассников или девятиклассников?
- 6 Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратах 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.
- 7 Можно ли занумеровать рёбра куба числами $1, 2, \dots, 11, 12$ так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трёх выходящих из неё рёбер была одной и той же.
- 8 Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит с пятью белыми, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?
- 9 В городе от каждой площади отходит ровно 5 улиц. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5. (Улицы соединяют площади.)
- 10 Взяли несколько одинаковых равносторонних треугольников. Вершины каждого из них поместили цифрами 1, 2 и 3. Затем их сложили в стопку. Могло ли оказаться, что сумма чисел, находящихся в каждом углу, равна 55?
- 11 Дано 2021 число. Известно, что сумма любых четырёх чисел положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?
- 12 Можно ли в таблицу 5×5 записать числа $1, 2, 3, \dots, 25$ так, чтобы в каждой строке сумма нескольких записанных чисел была равна сумме остальных чисел этой строки?

- 13 По окружности отметили 40 красных, 30 синих и 20 зеленых точек. На каждой дуге между соседними красной и синей точками поставили цифру 1, на каждой дуге между соседними красной и зеленой – цифру 2, а на каждой дуге между соседними синей и зеленой – цифру 3. (На дугах между одноцветными точками поставили 0.) Найдите максимальную возможную сумму поставленных чисел.
- 14 Дан набор, состоящий из таких 2021 числа, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.
- 15 По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.