

Интерполяция

Повторение — мать учения

1 Даны различные числа x_0, \dots, x_n .

(а) Пусть многочлен $P_k(x)$ степени не больше n равен 0 при всех x_0, \dots, x_n , кроме x_k . Докажите, что

$$P_k(x) = c(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n).$$

(б) Чему должна быть равна константа c , чтобы $P_k(x_k)$ было равно 1?

(с) Интерполяционный многочлен Лагранжа. Даны (не обязательно различные) числа y_0, \dots, y_n . Докажите, что единственный многочлен степени не выше n , принимающий в точках x_0, \dots, x_n значения y_0, \dots, y_n , соответственно, равен

$$\sum_{k=0}^n y_k \left(\frac{x - x_0}{x_k - x_0} \dots \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_k - x_n} \right) = y_0 P_0(x) + \dots + y_n P_n(x)$$

2 Найдите многочлен f наименьшей степени такой, что

$$f(-1) = 2, f(0) = 0, f(2) = 2, f(3) = 6.$$

3 Найдите многочлен f наименьшей степени такой, что

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = -10.$$

4 Дан многочлен $f(x)$ степени не выше n . Докажите, что для любых различных вещественных чисел x_0, x_1, \dots, x_n существуют и единственные A_0, A_1, \dots, A_n такие, что

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)} = \frac{A_0}{x - x_0} + \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

5 Числа p, q, r и s различны. Докажите, что система линейных уравнений имеет единственное решение относительно переменных x, y, z, u при любых значениях свободных членов p_1, q_1, r_1, s_1 .

$$\begin{cases} p^3x + p^2y + pz + u = p_1 \\ q^3x + q^2y + qz + u = q_1 \\ r^3x + r^2y + rz + u = r_1 \\ s^3x + s^2y + sz + u = s_1 \end{cases}.$$

- 6] Многочлен $f(x)$ принимает рациональные значения во всех рациональных точках. Докажите, что все коэффициенты $f(x)$ рациональны.
- 7] Многочлен $f(x)$ степени не выше чем n принимает в точках $0, 1, \dots, n$ значения $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ соответственно. Найдите
- (a) $f(n+1)$;
 - (b) $f(-1)$.
- 8] (a) Многочлен $f(x)$ степени не выше чем n принимает целые значения в точках $0, 1, 2, \dots, n$. Докажите, что он принимает целые значения во всех целых точках.
- (b) Многочлен $f(x)$ степени не выше чем n принимает целые значения в точках $0, 1, 4, \dots, n^2$. Докажите, что он принимает целые значения во всех точных квадратах.
- 9] Дан унитарный многочлен $P(x)$ степени n и различные целые числа x_0, x_1, \dots, x_n . Докажите, что найдется такое k , что $|P(x_k)| > \frac{n!}{2^n}$

МОЁ ХОББИ: ЭКСТРАПОЛИРОВАТЬ

