Площади

1. Найдите множество таких точек P внутри треугольника ABC, что A треугольники ABP и CAP

   (a) равновелики;

   (b) $S_{ABP} : S_{CAP} = 2 : 1$.

2. **Лемма об отношении площадей треугольников с общей стороной:** $S_{ABC'} : S_{ABC} = PC' : PC$, где P — точка пересечения прямых AB и CC'

   (a) Докажите эту лемму.

   (b) Что можно сказать о площадях ABC И ABC', если точка P не существует (прямые AB и CC' параллельны)?

3. Найдите множество точек P, таких что $S_{PCD} = S_{PAB}$, Где AB и CD — произвольные отрезки.

4. Каждая вершина треугольника симметрично отражается относительно следующей по часовой стрелке вершины. Полученные три точки задают новый треугольник. Во сколько раз его площадь больше площади исходного треугольника?

5. На сторонах треугольника ABC площади S выбраны точки A_1, B_1, C_1 так, что

$$BA_1 : A_1C = 3 : 1, AC_1 : C_1B = CB_1 : B_1A = 1 : 5.$$

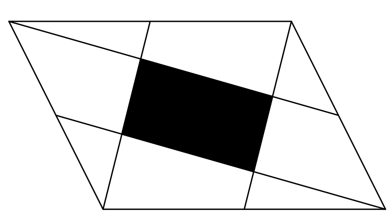
   Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

6. В условиях задачи 5 найдите отношения, в которых отрезки AA_1 и B_1C_1 делят друг друга.

7. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC, M — точка пересечения прямых AF и DE, причем $AE = 2BE$, а $BF = 3CF$. Найдите отношения $AM : MF$ и $DM : ME$.

8. Точка лежит на продолжении стороны BC параллелограмма $ABCD$ за точку C. Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E и сторону CD в точке G. Известно, что $AE = 2, GF = 3$. Найти отношение площадей треугольников BAE и EDG.

9. Вершины параллелограмма площади S соединены с серединами противоположных сторон, как показано на рисунке. Найдите площадь закрашенной фигуры.



$\boxed{10}$ Докажите, что если площадь четырехугольника вдвое меньше площади описанного около него параллелограмма,то одна из его диагоналей параллельна стороне параллелограмма.

$\boxed{11}$ Точки A_1, B_1, C_1 делят стороны BC, CA, AB треугольника ABC площади 1 в одинаковом отношении $1 : 2$, считая от вершин B, C, A соответственно. Найдите площадь треугольника, ограниченного чевианами AA_1, BB_1, CC_1.

$\boxed{12}$ Каждая сторона треугольника поделена на три равные части и точки деления соединены с противоположной к этой стороне вершиной. Найдите отношение площади шестиугольника, ограниченного проведенными отрезками, к площади треугольника.

$\boxed{13}$ Где нужно взять точки на двух сторонах треугольника так, чтобы из четырех частей, на которые разбивается треугольник чевианами, проведенными из выбранных точек, по крайней мере три были равновелики? Площадь и подобие

$\boxed{14}$ Из точки M на основании AB треугольника ABC проведены прямые параллельно двум другим сторонам. Площадь отсекаемого ими параллелограмма составляет $5/18$ площади треугольника. Найдите отношение AM/MB.

$\boxed{15}$ Прямые, проходящие через точку внутри данного треугольника и параллельные его сторонам, разбивают его на три параллелограмма и три треугольника.

(a) Докажите, что площади s_1, s_2 и s_3 треугольников, отсекаемых от данного треугольника этими прямыми и площадь S данного треугольника связаны соотношением $\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3} = \sqrt{S}$.

(b) Выразите S через площади S_1, S_2, S_3 параллелограммов.

$\boxed{16}$ Через точку M внутри параллелограмма $ABCD$ проведены прямые ℓ и m, параллельные его сторонам.

(a) Найдите геометрическое место таких точек M, что образовавшиеся параллелограммы с диагоналями MA и MC равновелики.

(b) Соединим точки пересечения ℓ и m со сторонами AB и AD с вершинами D и B, соответственно. Докажите, что получившиеся прямые и прямая MC пересекаются в одной точке. (Это теорема о трех параллелограммах.)

$\boxed{17}$ Пусть $ABCD$ — прямоугольник и на сторонах AB и AD отложены равные отрезки $BE = DF$. Докажите, что прямая CP, где $P = BF \cap DE$, делит пополам угол C.

$\boxed{18}$ Через вершины A и C треугольника BC проведены прямые параллельно сторонам BC и AC соответственно; на них отложены равные отрезки AD и CE, F — точка пересечения прямых AE и CD. Докажите, что BF — биссектриса угла B, если отрезки отложены по одну сторону от AC, и внешняя биссектриса, если по разные стороны,