Теорема Эйлера

Теорема 1 (Эйлера)**.** *Для натуральных взаимно простых a, m, верно сравнение*

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$$

$\boxed{1}$ Найдите 3 последние цифры чисел (a) 7^{2000}; (b) 7^{2003}.

$\boxed{2}$ Докажите, что существует натуральная степень тройки, заканчивающаяся на 00001. Найдите явно эту степень.

$\boxed{3}$ Найдите последние две цифры в десятичной записи числа 3^{219}.

$\boxed{4}$ Докажите, что для любого натурального числа a верно, что $a^{17} - a$ делится на 510;

$\boxed{5}$ Докажите, что для любого натурального n число $n^{84} - n^4$ делится на 20400.

$\boxed{6}$ Докажите, что если n нечётно, то $2^{n!} - 1$ делится на n;

$\boxed{7}$ Докажите, что если n чётно, то $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.

$\boxed{8}$ Докажите, что $2^{3^k} + 1$ делится на 3^{k+1}.

$\boxed{9}$ Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $2^n - 1$ имеет хотя бы 1000 различных простых делителей.

$\boxed{10}$ Докажите, что если число n имеет два различных нечетных простых делителя, то для любого a, взаимно простого с n, верно, что $a^{\varphi(n)/2} - 1$ делится на n.

$\boxed{11}$ **(Усиление теоремы Эйлера)** Если $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ — разложение числа m на простые множители и x — наименьшее общее кратное чисел $\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}), \dots, \varphi(p_k^{a_k})$, то для любого a, взаимно простого с m, выполняется сравнение $a^x \equiv 1 \pmod m$.

$\boxed{12}$ Дано число 2^{2021}. Докажите, что можно дописать слева от него несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

$\boxed{13}$ Обозначим через $L(m)$ длину периода дроби $1/m$. Докажите, что если $(m, 10) = 1$, то $L(m)$ является делителем числа $\phi(m)$.

$\boxed{14}$ Докажите, что если $(a, p!) = 1$, то $a^{(p-1)!} \equiv 1 \pmod{p!}$.

$\boxed{15}$ Докажите, что для каждого n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.