Сопряжённые числа в $\mathbb{Q}\left[\sqrt{m}\right]$ и $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$

Определение 1. *Пусть m — натуральное число, не точный квадрат. Обозначим через $\mathbb{Q}\left[\sqrt{m}\right]$ множество чисел вида $a+b\sqrt{m}$, где $a,\ b \in \mathbb{Q}$. Аналогично определим $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$.*

Упражнение 1. *Пусть $a_i,\ b_i \in \mathbb{Q}$. Докажите, что если $a_1+b_1\sqrt{m} = a_2+b_2\sqrt{m}$, то $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.*

Определение 2. *Пусть $x \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{m}\right]$, $x = a+b\sqrt{m}$. Сопряженным к x называется число $\overline{x} = a-b\sqrt{m}$.*

Упражнение 2. *Почему Упражнение 1 должно идти раньше определения сопряжения?*

Упражнение 3. *Пусть $x \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{m}\right]$.*

a) *Докажите, что $x+\overline{x} \in \mathbb{Q}$ и $x\cdot\overline{x} \in \mathbb{Q}$. Выведите из этого, что x — корень квадратного трёхчлена с рациональными коэффициентами.*

b) *Докажите, что если $x \notin \mathbb{Q}$, то существует единственное $y \in \mathbb{R}$, что $x+y \in \mathbb{Q}$, $x\cdot y \in \mathbb{Q}$.*

Упражнение 4. *Пусть $x_1,\ x_2 \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{m}\right]$. Понятно, что x_1+x_2 и $x_1\cdot x_2$ также принадлежат $\mathbb{Q}\left[\sqrt{m}\right]$. Докажите, что если $x_2 \neq 0$, то x_1/x_2 принадлежит $\mathbb{Q}\left[\sqrt{m}\right]$.*

Упражнение 5. *Пусть $x_0,\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{m}\right]$, $f(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что*

a) $\overline{x_1+x_2} = \overline{x_1}+\overline{x_2}$,

b) $\overline{x_1\cdot x_2} = \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$,

c) $\overline{x_1/x_2} = \overline{x_1}/\overline{x_2}$,

d) $\overline{f(x_0)} = f(\overline{x_0})$.

e) *Докажите, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то и $\overline{x_0}$ корень $f(x)$.*

$\boxed{1}$ Найдите первые 100 цифр после запятой в числе $(2+\sqrt{3})^{1000}$.

$\boxed{2}$ Докажите, что для рациональных чисел x, y, z и t не может выполняться равенство

$$\left(x+y\sqrt{2}\right)^4 + \left(z+t\sqrt{2}\right)^4 = 5+4\sqrt{2}.$$

$\boxed{3}$ Докажите, что для натуральных m и n не может выполняться равенство $(5+3\sqrt{2})^m = \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$.

$\boxed{4}$ Докажите, что $(\sqrt{2}-1)^{2022} = \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{5}$ Докажите, что уравнение $n^2-2m^2=1$ имеет

(a) 4 решения в целых числах

(b) бесконечно много решений в целых числах