Геометрия масс

Определение: Пусть M некоторая точка плоскости и m ненулевое число. Материальной точкой (m, M) называется точка M с числом (массой) m, причем число m называется массой материальной точки (m, M), а точка M носителем этой материальной точки.

Определение: Центром масс системы материальных точек $(m_1, M_1), (m_2, M_2), \ldots, (m_n, M_n)$ с ненулевой суммой масс называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1\overrightarrow{ZM_1} + m_2\overrightarrow{ZM_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{ZM_n} = 0$.

$\boxed{1}$ **(Основная теорема)** Точка Z является центром масс системы точек (m_1, M_1), $(m_2, M_2), \ldots, (m_n, M_n)$, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$. Докажите для любой точки плоскости O, что

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overrightarrow{OZ} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OM_n}$$

Следствие: У системы точек с ненулевой суммой масс центр масс существует и единственен.

$\boxed{2}$ **(Правило группировки)** Есть n материальных точек с ненулевой суммой масс $(m_1, M_1), \ldots, (m_n, M_n)$. Точка Z является центром масс системы первых k из этих материальных точек $(m_1, M_1), \ldots, (m_k, M_k)$. Докажите, что центры масс исходной системы и системы, в которой первые k материальных точек были заменены на материальную точку $(m_1 + \ldots + m_k, Z)$, совпадают.

$\boxed{3}$ На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно. X — точка пересечения отрезков BE и CD. В точке A находится масса 1. Какие массы надо поместить в точки B и C, чтобы центр масс системы попал в точку X, если $AD : DB = 1 : 2$, $AE : EC = 3 : 1$?

$\boxed{4}$ Стороны треугольника ABC равны $AB = 3, BC = 4, AC = 5$. В вершине C находится масса 5. Какие массы нужно поместить в вершины A и B, чтобы центр масс попал в точку пересечения медиан треугольника ABC?

$\boxed{5}$ Стороны треугольника ABC равны $AB = 5, BC = 10, AC = 7$. В вершине C находится масса 10. Какие массы нужно поместить в вершины A и B, чтобы центр масс попал в точку пересечения биссектрис треугольника ABC?

$\boxed{6}$ Дан треугольник ABC со сторонами $|AB| = c, |BC| = a, |CA| = b$. Какие массы нужно поставить в его вершины, чтобы центр масс попал в

(a) точку пересечения медиан;

(b) центр вписанной окружности;

(c) центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC;

(d) вершину D параллелограмма $ABCD$;

(e) точку *Нагеля*, то есть точку пересечения отрезков, соединяющих вершину с точкой касания противоположной вневписанной окружности;

(f) точку *Жергонна*, то есть точку пересечения отрезков, соединяющих вершину с противоположной точкой касания вписанной окружности;

Эти массы называются **барицентрическими координатами** точки, относительно треугольника.

7 Пусть K, L, M — точки пересечения медиан треугольников PAB, PBC, PCA соответственно. Докажите, точка P и точки пересечения медиан треугольников ABC и KLM лежат на одной прямой.

8 Дан треугольник ABC и точка P на плоскости. Обозначим через S_{BPC} ориентированную площадь треугольника BPC с положительным знаком, если P и A в одной полуплоскости относительно BC, и с отрицательным иначе. Аналогично определим S_{CPA} и S_{APB}. Докажите, что P является центром масс системы материальных точек $(S_{BPC}, A), (S_{CPA}, B), (S_{APB}, C)$.

9 В шестиугольнике точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ являются серединами последовательных сторон. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают.

10 **(Теорема ван Обеля)** Пусть в треугольнике ABC проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке X. Тогда

$$\frac{BX}{XB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C}.$$

11 Докажите, что уравнение $ax+by+cz = 0$ с фиксированными a, b и c $(a+b+c \neq 0)$ задает прямую, состоящую из точек, являющихся центром масс системы материальных точек $(x, A), (y, B), (z, C)$, не лежащих на одной прямой.

12 На биссектрисе угла A неравнобедренного треугольника ABC выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают стороны AC и AB в точках L и M. Докажите, что прямая LM проходит через основание биссектрисы внешнего угла A треугольника.

13 Чевианы AA_1 и CC_1 в треугольнике ABC пересекаются на высоте BH. Докажите, что BH является биссектрисой угла A_1HC_1.

14 Вписанная окружность треугольника ABC с центром в точке I касается сторон BC, CA и AB в точках A' , B' и C' соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых $A'B'$ и $C'I$ лежит на медиане из вершины C.

15 **(Прямая Гаусса)** Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC треугольника ABC в точках D, E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков CD, AE и BF лежат на одной прямой.

$\boxed{16}$ Пусть BM медиана прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$). Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается сторон AB и AM в точках A_1 и A_2 соответственно; аналогично определяются точки C_1 и C_2. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на биссектрисе угла ABC.

$\boxed{17}$ Пусть BD биссектриса треугольника ABC. Точки I_a, I_c центры вписанных окружностей треугольников ABD, CBD. Прямая I_aI_c пересекает прямую AC в точке Q. Докажите, что $\angle DBQ = 90^\circ$.

$\boxed{18}$ На окружности расположены n точек с единичными массами. Вася выбирает произвольные $n-2$ из них, рисует их центр масс и опускает из него перпендикуляр на прямую, проходящую через две оставшиеся точки. Докажите, что все Васины прямые пройдут через одну точку.

$\boxed{19}$ Вневписанная окружность треугольника ABC, вписанная в угол C, касается продолжения стороны BC в точке X. Прямая, параллельная AX и проходящая через вершину B пересекает AC в точке Y. Точка I центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\angle YIC = 90^\circ$.