Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида: для того, чтобы найти НОД двух чисел a и b, нужно выполнить последовательно несколько делений с остатком:

$$\begin{gathered}
a = b\,q_1 + r_1 \\
b = r_1\,q_2 + r_2 \\
r_1 = r_2\,q_3 + r_3 \\
r_2 = r_3\,q_4 + r_4 \\
\ldots \\
r_{n-2} = r_{n-1}\,q_n + r_n \\
r_{n-1} = r_n\,q_{n+1}
\end{gathered}$$

1. Найдите НОД 1000002846 и 1423.

2. Найдите НОД 12345678987654321 и 12345654321.

3. Найдите НОД $\underbrace{33...3}_{n}, \underbrace{66...6}_{m}$.

4. Числа Фибоначчи определяются так: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Докажите, что $(F_{n+1}, F_n) = 1$.

5. Докажите, что $(n + 3, 5n + 14)$ взаимно просты при любом целом n.

6. Какие значения может принимать $(3n + 2, 10n + 23)$?

7. При каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$?

8. При каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{2n + 13}{n + 7}$?

9. При каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{7n + 8}{19n + 17}$?

10. При каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{n^2 + 2n + 4}{n^2 + n + 3}$?

11. Докажите, что $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.

12. Пусть p — простое число. Сколько существует пар взаимнопростых натуральных чисел (m, n) таких, что $p = m + n$?

13. **Теорема о линейном представлении НОДа.** Покажите, что уравнение $ax+by = c$ имеет решения в целых тогда и только тогда, когда $c \vdots (a, b)$(уравнение решаем для x и y).