

Двудольные графы

- 1 Докажите, что в двудольном графе сумма степеней вершин одного цвета равна сумме степеней вершин другого цвета.
- 2 а) Какое наибольшее число рёбер может быть в двудольном графе с k белыми и m чёрными вершинами?
б) Какое наибольшее количество рёбер может быть в двудольном графе с $2n$ вершинами? А с $2n + 1$?
- 3 Докажите, что если в двудольном графе степени всех вершин одинаковы, то вершин каждого цвета поровну.
- 4 10 школьников решали 10 задач. Выяснилось, что каждый школьник решил ровно две задачи, и каждую задачу решило два школьника. Докажите, что можно так организовать рассказ решений, чтобы каждый школьник рассказал ровно одну из решенных им задач, и при этом все задачи были бы рассказаны.
- 5 **Теорема Кёнига.** Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит цикла нечётной длины.
- 6 В каждой строке и в каждом столбце таблицы 8×8 стоит ровно две фишки. Докажите, что их можно покрасить в чёрный и белый цвет так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке стояли разноцветные фишки.
- 7 *Лемма.* Пусть G — двудольный граф с черными и белыми вершинами.
а) Если в G есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
б) Если в G есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то что число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.
- 8 Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 метров. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?
- 9 а) В клетки доски 8×8 записали числа $1, 2, \dots, 64$ в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток с общей стороной. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел?
б) Тот же вопрос для доски 9×9 .
- 10 а) Найдется ли правильный треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки?
б) Вершины графа — это узлы клетчатой бумаги, ребра — отрезки фиксированной длины L . Докажите, что получившийся граф — двудольный.