Функция Эйлера

Определение 1 ***Функцией Эйлера*** *называется функция φ, такая, что $\varphi(n)$ — это количество натуральных чисел от 1 до n взаимно простых с n.*

$\boxed{1}$ Чему равно $\varphi(9)$; $\varphi(13)$; $\varphi(125)$; $\varphi(1)$?

$\boxed{2}$ Чему равно $\varphi(p)$; $\varphi(p^\alpha)$, где p — простое число?

Пусть числа a и b взаимно просты и в таблицу размером $a \times b$ выписаны все последовательные числа подряд начиная с 1.

$\boxed{3}$ Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b?

$\boxed{4}$ Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a?

$\boxed{5}$ Докажите, что для взаимно простых a, b, выполняется: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Это свойство называется **мультипликативностью**.

$\boxed{6}$ Докажите **формулу Эйлера**:

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_1 - 1)(p_2 - 1)\dots(p_k - 1) = \\ = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$\boxed{7}$ Докажите, что при $n > 2$ $\varphi(n)$ — четно.

$\boxed{8}$ Найдите сумму чисел взаимно простых с n, не превосходящих n.

$\boxed{9}$ При каких m выполняется равенство $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$?

$\boxed{10}$ Найдите все такие x, что a) $\varphi(x) = \dfrac{x}{2}$; b) $\varphi(x) = \dfrac{x}{3}$; c) $\varphi(x) = \dfrac{x}{4}$; d) $\varphi(x) = \dfrac{x}{7}$;

$\boxed{11}$ Рассмотрим ряд дробей: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$. Сократим каждую из дробей на НОД ее числителя и знаменателя. Сколько будет дробей со знаменателем d, где d — некоторый делитель числа n?

$\boxed{12}$ Докажите **тождество Эйлера-Гаусса**: $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_k) = n$, где $d_1, d_2, \dots d_k$ — все делители числа n.

$\boxed{13}$ Окружность разделена n точками на n равных частей. Сколько можно составить различных замкнутых ломаных из n равных звеньев с вершинами в этих точках?