Изогонали

Определение: Пусть дан угол $\angle AOB$. Две прямые, проходящие через вершину O, называются изогоналями относительно этого угла (или парой изогональных прямых), если они получаются друг из друга отражением относительно биссектрисы этого угла. Например, высота треугольника из вершины A и диаметр описанной окружности, содержащий A, являются изогоналями.

Пусть даны угол $\angle AOB$ и луч, выходящий из его вершины и проходящий внутри угла. Тогда во всех точках луча отношение расстояний до сторон угла будет одним и тем же; и наоборот, такое отношение будет задавать этот луч однозначно. Обратные отношения при этом будут соответствовать лучам, содержащимся в изогоналях.

$\boxed{1}$ Докажите, что касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведенная в точке A, и прямая, проходящая через точку A параллельно BC, являются изогоналями относительно угла A треугольника.

$\boxed{2}$ Внутри угла ABC лежит точка P. Точки P_B и P_C симметричны точке P относительно AB и AC соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к P_BP_C является изогональю для прямой AP относительно угла BAC.

$\boxed{3}$ Внутри угла BAC лежат точки P и Q. Докажите, что проекции точек P и Q на стороны угла лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда AP и AQ являются изогоналями относительно угла BAC.

$\boxed{4}$ Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что изогональ для PA относительно угла A и изогональ для PB относительно угла B параллельны.

$\boxed{5}$ **Лемма об изогоналях** Пусть дан угол AOB и изогонали OC и OD относительно этого угла. Обозначим пересечение прямых AD и BC за P, а пересечение прямых AC и BD за Q. Тогда прямые OP и OQ также являются изогоналями относительно угла AOB.

$\boxed{6}$ В треугольнике ABC из вершин к противолежащим сторонам проведены отрезки AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в одной точке. Докажите, что если углы C_1A_1B и B_1A_1C равны, то AA_1 — высота треугольника ABC.

$\boxed{7}$ В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1C_1 пересекает биссектрису угла B в точке P, а отрезок A_1B_1 биссектрису угла C в точке Q. Докажите, что $\angle PAB = \angle QAC$.

$\boxed{8}$ На сторонах ABC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABFE$ и $ACGH$. Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте треугольника ABC, проведённой из вершины A.

9 a) Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведённые в вершинах B и C, пересекаются в точке X. Докажите, что прямая AX и прямая, содержащая медиану к стороне BC, являются изогоналями относительно угла A.

b) К описанной окружности треугольника ABC проведены касательные в точках B и C. Лучи CC_1 и BB_1, где B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB, пересекают эти касательные в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

10 Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E, а прямые AB и CD пересекаются в точке F. На прямой EF взяли такую точку P, что $\angle BPE = \angle EPC$. Докажите, что $\angle APE = \angle DPE$.

11 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки I и K — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ACD соответственно, а J и L — центры их вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CD соответственно. Докажите, что прямые IL и JK пересекаются на биссектрисе угла BCD.

Задачи на вырожденные случаи:

12 В остроугольном треугольнике ABC выполнено соотношение $AB < AC$. На стороне BC выбраны такие точки D и E, что $BD = CE < \frac{BC}{2}$. Точка P внутри треугольника такова, что $PD \parallel AE$ и $\angle PAB = \angle EAC$. Докажите, что $\angle PBA = \angle PCA$.

13 Вершины B и C треугольника ABC спроецировали на биссектрису внешнего угла A, получили точки B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямые BC_1 и CB_1 пересекаются на внутренней биссектрисе угла A.

14 В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

15 На прямой, содержащей высоту остроугольного треугольника ABC, проведённую к стороне BC, выбрали точку X. Точка D — середина дуги BC описанной окружности ABC, не содержащей точку A. Прямая, проходящая через центр окружности параллельно AD, пересекает прямую XD в точке N. Точка M — середина отрезка XD. Докажите, что $\angle XAM = \angle NAO$.

Задачи посложнее:

16 Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точки E и F — проекции точки P на стороны AB и CD соответственно. Отрезки CE и BF пересекаются в точке Q. Докажите, что PQ и EF перпендикулярны.

17 a) Внутри треугольника ABC выбраны такие точки X, Y, Z, что $\angle BAZ = \angle CAY$, $\angle ABZ = \angle CBX$, $\angle ACY = \angle BCX$. Докажите, что прямые AX, BY, CZ пересекаются в одной точке.

б) Обозначим через Y' и Z' точки пересечения пар прямых AZ и CX, AY и BX. Докажите, что прямые YZ, $Y'Z'$, BC пересекаются в одной точке.

18 Точка H' симметрична основанию высоты AH треугольника ABC относительно середины стороны BC. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке X. Прямая, проходящая через H' и перпендикулярная XH', пересекает прямые AB и AC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что $\angle BXY = \angle CXZ$.

19 Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Точка K является проекцией точки D на прямую EF. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка A' диаметрально противоположна A в описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что DK — биссектриса угла HKA'.