

Математический бой за славу и честь!

1. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 10$. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их произведение, увеличенное на 91. Может ли через 9 таких операций на доске оказаться число вида 10^n ?
2. Найдите все квадратные трехчлены $x^2 + tx + n$ такие, что числа t и n (не обязательно различные) являются их корнями?
3. Глеб пригласил на День Рождения 2345 своих знакомых. Оказалось, что в каком бы порядке друзья ни приходили на праздник, каждый новый пришедший будет знать не менее четверти из уже присутствующих (включая Глеба). Докажите, что у кого-то из гостей на вечеринке не более двух незнакомых.
4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. На продолжении стороны AD за точку D дана такая точка E , что $\angle ABE = \angle ADC$. Точка K симметрична точке C относительно точки A . Докажите, что $\angle ADB = \angle AKE$.
5. Квадрат 104×104 разрезали на тетрамино “Т”. Докажите, что найдутся 6 прямых (линий сетки), которые разрезают одинаковое количество Т-шек?
6. Тоня загадывает натуральное число, а Аня хочет привести это число к единице. Аня может делать следующие 4 операции: $\bullet 2x \bullet \frac{x}{2} \bullet \frac{x-1}{3} \bullet 3x + 1$
В процессе могут получаться нецелые числа. Сможет ли Аня привести загаданное число к 1 или Тоня сможет придумать хитрое число?
7. В ЦРОДе присутствовали 2021 человек, некоторые из них являются друзьями. Назовём популярностью человека размер наибольшей группы людей, в которую он входит, такой, что любые двое из этой группы дружат между собой. Если у человека нет друзей в ЦРОДе, его популярность равна единице. Какое наибольшее число различных популярностей может быть у присутствующих в центре?
8. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH . F — точка пересечения прямых EH и AC . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB .
9. За ЧГК вы получили 30 коинов, однако Денис Раймундо сказал, что среди них есть ровно 5 фальшивых. Вы можете попросить Дениса посмотреть на любую подгруппу из 30 коинов и сказать сколько из них поддельных. Вам нужно найти 5 настоящих коинов и при этом задать Денису наименьшее количество вопросов. Как это сделать?
10. Из клетчатого квадрата 2022×2022 вырезали угловой квадрат 3×3 . Можно ли оставшуюся фигуру разрезать на прямоугольники 1×5 ?