

## Максимумы и минимумы в геометрии

- [1] Докажите, что любая ломанная длиннее, чем расстояние между её концами.
- [2] На плоскости дана прямая  $l$  и точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от неё. Найти на прямой точку  $M$ , для которой сумма  $AM + BM$  наименьшая.
- [3] На плоскости даны параллельные прямые  $l_1$  и  $l_2$  точки  $A$  и  $B$  лежат между ними. Найти на прямой  $l_1$  точку  $M$ , а на прямой  $l_2$  —  $N$ , для которой сумма  $AM + MN + BN$  наименьшая.
- [4] Внутри угла выбрана точка  $A$ . Какие точки  $B$  и  $C$  на сторонах угла нужно выбрать, чтобы периметр  $ABC$  был минимальный.
- [5] Деревни  $A$  и  $B$  разделены рекой, берега которой параллельны. Где на реке нужно поставить мост, чтобы путь из одной деревни в другую был наименьшим (мост перпендикулярен берегам реки)?
- [6] Дана прямая  $l$  и точки  $A$  и  $B$  по разные стороны от неё. Найти на прямой точку  $M$ , для которой величина  $|AM - BM|$  принимает наименьшее значение.
- [7] В выпуклом четырехугольнике найдите точку, для которой сумма расстояний до вершин минимальна.
- [8] Три офиса  $A, B$  и  $C$  одной фирмы расположены в вершинах треугольника. В офисе  $A$  работают 10 человек, в офисе  $B$  — 20, а в офисе  $C$  — 30. Где нужно построить столовую, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми сотрудниками фирмы, было бы как можно меньше?
- [9] Внутри квадрата содержится треугольник. Докажите, что периметр этого треугольника, меньше, чем периметр квадрата.
- [10] Из точки  $M$ , лежащей на стороне  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$ , опущены перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на стороны  $BC$  и  $AC$ . При каком положении точки  $M$  длина отрезка  $PQ$  минимальна?
- [11] Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, стороны которого  $a, b, c$  заключены в следующих пределах:  
$$0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3?$$
- [12] На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  взята точка  $X, M$  и  $N$  — её проекции на катеты  $AC$  и  $BC$ .
  - а) При каком положении точки  $X$  длина отрезка  $MN$  будет наименьшей?
  - б) При каком положении точки  $X$  площадь четырехугольника  $CMXN$  будет наибольшей?

- 13 Докажите, что среди всех треугольников с фиксированным углом  $\alpha$  и площадью  $S$  наименьшую длину стороны  $BC$  имеет равнобедренный треугольник с основанием  $BC$ .
- 14 Даны два пересекающихся луча  $AC$  и  $BD$ . На этих лучах выбираются точки  $M$  и  $N$  (соответственно) так, что  $AM = BN$ . Найти положение точек  $M$  и  $N$ , при котором длина отрезка  $MN$  минимальна.