

Дискретная непрерывность

- [0] В ряд сидят 10 мальчиков и 10 девочек.
- (a) Докажите, что можно выбрать 8 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
 - (b) Всегда ли из них можно выбрать 16 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
- [1] Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Налево!» некоторые из них повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?
- [2] По кругу сидят 25 мальчиков и 25 девочек.
- (a) Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
 - (b) Докажите, что для каждого чётного n от 2 до 50 можно выбрать n школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
- [3] (a) На плоскости есть $2n$ точек. Докажите, что можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.
- (b) На плоскости есть $2n+1$ точка, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что через любую из них можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.
- [4] Вася и Петя играют в игру. На доске написаны два числа: $\frac{1}{2022}$ и $\frac{1}{2023}$. На каждом ходу Вася называет любое число x , а Петя увеличивает любое из чисел на доске на x . Вася выигрывает, если когда-то одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Вася выиграть, как бы ни действовал Петя?
- [5] За круглым столом сидит 100 дедов, причем у любых двух соседей число волос в бороде отличается не больше чем на 100. Докажите, что найдется пара дедов, сидящих друг напротив друга, у которых число волос в бородах тоже отличается не больше, чем на 100.
- [6] $2n$ радиусов разделили круг на $2n$ равных секторов: n синих и n красных, чередующихся в произвольном порядке. В синие сектора, начиная с некоторого, записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до n по порядку. В красные сектора, начиная с некоторого, записывают те же числа, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до n .