

Параллелограммы

- [1] Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, в два раза меньше гипотенузы.
- [2] Докажите, что длина медианы, проведённой к стороне треугольника, меньше полусуммы длин двух других сторон.
- [3] Докажите, что в равнобедренной трапеции (у которой боковые стороны равны) равны углы, прилежащие к основанию, а также равны длины диагоналей.
- [4] (а) *Параллелограмм Вариньона*. Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.
(б) Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, пересекаются в середине отрезка, соединяющего середины диагоналей.
- [5] На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ выбраны точки K, L, M и N соответственно так, что $AK = CM$ и $AN = CL$ (причём никакая из точек K, L, M и N не является серединой стороны параллелограмма $ABCD$). Сколько существует параллелограммов с вершинами в восьми отмеченных точках (включая параллелограмм $ABCD$)?
- [6] Дан параллелограмм $ABCD$ с длинами сторон 12 и 8. Биссектрисы его углов при пересечении образуют четырёхугольник. Чему равны длины диагоналей этого четырёхугольника?
- [7] У выпуклого шестиугольника две пары противоположных стороны попарно равны и параллельны. Докажите, что оставшиеся стороны также равны и параллельны.
- [8] На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $AD : DC = 1 : 2$. Докажите, что у треугольников ADB и CDB есть по равной медиане.
- [9] В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC . На стороне AB выбрана точка X такая, что $\angle MXB = \angle ABC$. Длина стороны BC равна a . Найдите длину отрезка MX .
- [10] Средняя линия трапеции. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных непараллельных сторон трапеции, параллелен основаниям и по длине равен полусумме длин оснований.
- [11] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , в которой $AB = BD$. Пусть M — середина стороны DC . Докажите, что $\angle MBC = \angle BCA$.

- 12 Квадрат вписан в равнобедренный прямоугольный треугольник, причём одна вершина квадрата расположена на гипотенузе, противоположная ей вершина совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а остальные лежат на катетах. Найдите сторону квадрата, если катет треугольника равен a .
- 13 Биссектрисы AA_1 и CC_1 прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке I . Прямая, проходящая через точку C_1 и перпендикулярная прямой AA_1 , пересекает прямую, проходящую через A_1 и перпендикулярную CC_1 , в точке K . Докажите, что середина отрезка KI лежит на отрезке AC .