Региональный разнобой

1 Дано натуральное число n. На клетчатой доске $2n \times 2n$ расставили $2n$ ладей так, что никакие две не стоят в одной горизонтали или одной вертикали. После этого доску разрезали по линиям сетки на две связных части, симметричных друг другу относительно центра доски. Какое наибольшее количество ладей могло оказаться в одной из частей? (Клетчатая фигура называется связной, если по этой фигуре от любой её клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)

2 Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём столбцом набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно k лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, использовав не более $k/100$ переключателей с красной грани.

3 В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

4 Петя разбил клетчатый квадрат 100×100 некоторым образом на домино — клетчатые прямоугольники 1×2, и в каждом домино соединил центры двух его клеток синим отрезком. Вася хочет разбить этот же квадрат на домино вторым способом, и в каждом своём домино соединить две клетки красным отрезком. Вася хочет добиться того, чтобы из каждой клетки можно было пройти в любую другую, идя по синим и красным отрезкам. Обязательно ли у него будет возможность это сделать?

5 Ослик Иа-Иа составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и покрасил шесть палочек в два цвета: три самых коротких — в жёлтый цвет, а три остальных — в зелёный. Обязательно ли ослику удастся составить два треугольника, один — из трёх жёлтых палочек, а другой — из трёх зелёных?

6 Петя и Вася играют на доске 100×100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На рисунке справа показаны

возможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

	П		В
П			В
			В

7 Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

8 В алфавите $n > 1$ букв; словом является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется хорошим, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

9 Изначально на столе лежали 10 куч конфет, в которых было $1, 2, \ldots, 10$ конфет соответственно. Малыш решил перераспределить конфеты. На каждой нечётной минуте он выбирает одну из куч и делит её на две кучи, в каждой из которых хотя бы по одной конфете. На каждой чётной минуте он выбирает две кучи и объединяет их в одну (таким образом, первым действием он делит кучу на две). Может ли в некоторый момент оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет?

10 Коля и Дима играют в игру на доске 8×8, делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (доминошками) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т.е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две соседних клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

11 Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт и после этого немедленно зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов (зелёных и коричневых) каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа $1, 2, 3, \ldots, 2019$ (в некотором порядке, причём не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально?

12 Назовём многоугольник хорошим, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший?