Иррациональность

Определение. Число называется рациональным, если его можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Действительные числа, не представимые в таком виде, называются иррациональными.

$\boxed{1}$ Докажите, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{2^3}$ – иррациональны.

$\boxed{2}$ Может ли:

(a) Сумма двух иррациональных чисел быть рациональной?

(b) Произведение двух иррациональных чисел быть рациональным?

(c) Произведение иррационального с рациональным быть рациональным?

(d) Иррациональное число в рациональной степени быть рациональным?

$\boxed{3}$ Докажите, что $\sqrt{n}$, где n – натурально, является либо целым числом, либо иррациональным.

$\boxed{4}$ Пусть x – такое число, что $10^x = 2$. Докажите, что x – иррационально.

$\boxed{5}$ Пусть a, b, c – рациональные числа, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Докажите, что $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ – рациональные числа.

$\boxed{6}$ Пусть m, n – целые числа, такие, что $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n} \in \mathbb{Z}$. Верно ли, что оба слагаемых – целые числа?

$\boxed{7}$ Иррациональны ли числа:

(a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}} + \sqrt{5}$

(c) $\sqrt{5\sqrt{2}-1} + \left(\sqrt{2}-3\right)\sqrt{\sqrt{2}+1}$

(d) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

$\boxed{8}$ Последовательность задана соотношением $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, $0 < x_0 < 1$. Докажите, что эта последовательность периодична тогда и только тогда, когда x_0– рационально.