Сопряжённые числа в $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$

Определение 1 *Пусть m — натуральное число, не точный квадрат. Обозначим через $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ множество чисел вида $a + b\sqrt{m}$, где a, $b \in \mathbb{Q}$. Аналогично определим $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.*

Упражнение 1 *Пусть a_i, $b_i \in \mathbb{Q}$. Докажите, что если $a_1 + b_1\sqrt{m} = a_2 + b_2\sqrt{m}$, то $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.*

Определение 2 *Пусть $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, $x = a+b\sqrt{m}$. Сопряженным к x называется число $\overline{x} = a - b\sqrt{m}$.*

Упражнение 2 *Почему Упражнение 1. должно идти раньше определения сопряжения?*

Упражнение 3 *Пусть $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$.*

a) Докажите, что $x + \overline{x} \in \mathbb{Q}$ и $x \cdot \overline{x} \in \mathbb{Q}$. Выведите из этого, что x — корень квадратного трёхчлена с рациональными коэффициентами.

b) Докажите, что если $x \notin \mathbb{Q}$, то существует единственное $y \in \mathbb{R}$, что $x + y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

Упражнение 4 *Пусть x_1, $x_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Понятно, что $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$ также принадлежат $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Докажите, что если $x_2 \neq 0$, то x_1/x_2 принадлежит $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$.*

Упражнение 5 *Пусть x_0, x_1, $x_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, $f(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что*

a) $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$,

b) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$,

c) $\overline{x_1/x_2} = \overline{x_1}/\overline{x_2}$,

d) $\overline{f(x_0)} = f(\overline{x_0})$.

e) Докажите, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то и $\overline{x_0}$ корень $f(x)$.

$\boxed{1}$ Найдите первые 100 цифр после запятой в числе $(2 + \sqrt{3})^{1000}$.

$\boxed{2}$ Докажите, что для рациональных чисел x, y, z и t не может выполняться равенство

$$(x + y\sqrt{2})^4 + (z + t\sqrt{2})^4 = 5 + 4\sqrt{2}.$$

$\boxed{3}$ Докажите, что для натуральных m и n не может выполняться равенство $(5+3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$.

$\boxed{4}$ Докажите, что $(\sqrt{2} - 1)^{2022} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{5}$ Докажите, что уравнение $n^2 - 2m^2 = 1$ имеет

(a) 4 решения в целых числах

(b) бесконечно много решений в целых числах