

## Телескопические суммы

Слагаемые разных знаков могут компенсировать друг друга или давать более простую разность. То же верно и для сомножителей.

$$\boxed{-2} \quad (1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + 99 \cdot 101) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2).$$

Взаимно уничтожающиеся слагаемые можно получить, заменив каждое слагаемое на разность.

$$\boxed{-1} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}.$$

Разность может отличаться от члена суммы в несколько раз или содержать дополнительное слагаемое. Но и общий множитель, и лишние слагаемые часто удаётся учесть или сосчитать отдельно.

$$\boxed{0} \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 100}.$$

Если мы «подозреваем» формулу  $F(n)$  для суммы  $n$  первых членов, это немедленно дает нам представление  $n$ -го члена как разности  $F(n) - F(n-1)$ . Для подозрений есть основания: сумма линейных выражений (арифметической прогрессии) всегда квадратична, квадратичных – кубична, и т.д. Коэффициенты можно подобрать.

$$\boxed{1} \quad (1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + 99 \cdot 101) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2).$$

$$\boxed{2} \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right).$$

$$\boxed{3} \quad 1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + 100! \cdot 100.$$

$$\boxed{4} \quad \frac{2^2}{1 \cdot 3} + \frac{4^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{100^2}{99 \cdot 101}.$$

$$\boxed{5} \quad 3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 3 \cdot 99 \cdot 100.$$

$$\boxed{6} \quad \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{50}{99^2 \cdot 101^2}.$$

Найдите формулу зависящую от  $n$

$$\boxed{7} \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\boxed{8} \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$\boxed{9} \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

$$\boxed{10} \quad \text{Для каждого натурального } n \geq 2 \text{ вычислите сумму}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$$