

Рациональность

- [1] Числа x, y и z таковы, что все три числа $x + yz, y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.
- [2] Один из корней уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найдите a и b , если известно, что они рациональны.
- [3] Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 – иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца ("таблица умножения"). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
- [4] Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для каждой двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение – рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.
- [5] Докажите, что если выражение $\frac{x}{x^2 + x + 1}$ принимает рациональное значение, то и выражение $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ также рационально.
- [6] Числовое множество M , содержащее 2023 различных положительных числа, таково, что для любых трех различных элементов a, b, c из M число $a^2 + bc$ рационально. Докажите, что можно выбрать такое натуральное n , что для любого a из M число $a\sqrt{n}$ рационально.
- [7] Пусть A и B – два прямоугольника. Из прямоугольников, равных A , сложили прямоугольник, подобный B . Докажите, что из прямоугольников, равных B , можно сложить прямоугольник, подобный A .