## Графы

- [1] В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
- 2 В деревне 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?
- $\boxed{3}$  В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11- по 4 друга, а 10- по 5 друзей (считается, что все дружбы взаимные)?
- [4] Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
- [5] Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.
- [6] В некоторой стране 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
- 7 Докажите, что любое ребро графа или является мостом, или лежит в каком- то цикле.
- 8 Нарисуйте все деревья с 5 вершинами и объясните, почему других нет.
- 9 Верно ли, что существует граф на 1001 вершине, 1000 вершин которого висячие?
- 10 Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером  $50 \times 100$  клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
- 11 В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив не более 196 перелётов.
- 12 Докажите, что в любом связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами, чтобы он остался связным.
- 13 Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее  $\frac{n-1}{2}$ , связен.
- 14 В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний одна, а из всех остальных городов по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).
- [15] Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из каждого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?

- [16] В стране из каждого города выходит 100 дорог и от каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от каждого города можно добраться до любого другого.
- [17] Связный граф на 10 вершинах таков, что при выкидывании любых двух вершин вместе со всеми выходящими из них рёбрами он остаётся связным. Какое наименьшее количество рёбер может быть у этого графа?
- 18 Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 рёбер. Доказать, что он остался связным.
- [19] В некоторой стране каждые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что
  - а) можно выбрать вид транспорта так, чтобы от каждого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;
  - б) из некоторого города, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более чем с одной пересадкой (пользоваться можно только выбранным видом транспорта);
  - в) каждый город обладает свойством из пункта б);
  - г) можно выбрать вид транспорта так, чтобы пользуясь только им, можно было добраться из каждого города до любого другого не более чем с двумя пересадками.
- <u>20</u> Между некоторыми из 2n городов установлено воздушное сообщение, причём каждый город связан (беспересадочными рейсами) не менее чем с n другими. Докажите, что если отменить любые n-1 рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолётах (с пересадками).
- 21 На клетчатой доске 11 × 11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?
- 22 Степени всех вершин графа не меньше n, причем в нем нет циклов длины 3,4 и 5. Докажите, что в нём существует  $n^2-n$  вершин, никакие две из которых не соединены ребром.