Симедиана

Определение: Прямая, *си*мметричная *медиане* треугольника относительно биссектрисы проведенной из той же вершины, называется ***симедианой***.

$\boxed{1}$ Дан треугольник ABC, в котором $AC = BC$, и точка P внутри такая, что $\angle PAB = \angle PBC$. Обозначим середину AB через M. Докажите, что $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

$\boxed{2}$ Три различные точки A, B, C расположены на прямой в указанном порядке. Пусть окружность ω проходит через A и C, и ее центр не лежит на AC. Обозначим через P точку пересечения касательных к ω в точках A и C. Пусть отрезок PB пересекает ω в точке Q. Докажите, что основание биссектрисы угла $\angle Q$ треугольника AQC не зависит от выбора ω.

$\boxed{3}$ Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются их общей касательной в точках P и Q. Пусть S — точка пересечения касательных в точках P и Q к описанной окружности треугольника APQ, а точка H симметрична B относительно PQ. Докажите, что A, S и H лежат на одной прямой.

$\boxed{4}$ Дан треугольник ABC. Пусть X — центр поворотной гомотетии, переводящей B в A и A в C. Докажите, что AX содержит семидиану треугольника ABC.

$\boxed{5}$ Дан треугольник ABC. На стороне BC выбирается точка P. Точки Q и R на AC и AB соответственно таковы, что $PQ \parallel AB$ и $PR \parallel AC$. Докажите, что описанная окружность треугольника AQR проходит через точку X, не зависящую от выбора точки P.

(a) Докажите, что симедиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, совпадает с высотой.

(b) Докажите, что если симедиана треугольника совпадает с высотой, то он либо равнобедренный, либо прямоугольный.

$\boxed{6}$ (a) Докажите, что расстояния от любой точки на медиане AM треугольника ABC до сторон AB и AC обратно пропорциональны этим сторонам.

(b) Докажите, что расстояния от любой точки на симедиане AL треугольника ABC до сторон AB и AC прямо пропорциональны этим сторонам.

$\boxed{7}$ Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Пусть X и Y — проекции P на AB и AC, а M — середина BC. Докажите, что

(a) M — ортоцентр треугольника AXY;

(b) AP — симедиана треугольника ABC.

$\boxed{8}$ Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

$\boxed{9}$ Симедиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, пересекает отрезок BC в точке L, а описанную окружность — в точке $D \neq A$. Докажите, что

(a) $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$;

(b) $\dfrac{BL}{LC} = \left(\dfrac{BA}{AC}\right)^2$.

$\boxed{10}$ Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Касательные к ω в точках A и C пересекаются на прямой BD. Докажите, что касательные к ω в точках B и D пересекаются на прямой AC или параллельны ей.

$\boxed{11}$ Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок AB пополам.

$\boxed{12}$ Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, в котором $AB^2 + CD^2 = AD^2$. На стороне AD выбрана точка P такая, что $\angle APB = \angle CPD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, середина BC и точка P лежат на одной прямой.

$\boxed{13}$ Пусть ABC — остроугольный треугольник, M, N, P — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают AM в точках D и E соответственно. Прямые BD и CE пересекаются в точке F внутри треугольника ABC. Докажите, что точки A, N, F, и P лежат на одной окружности.

$\boxed{14}$ Треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в T. Точка S на прямой BC такова, что $AS \perp AT$. Точки B_1 и C_1 лежат на прямой ST так, что $B_1T = BT = C_1T$. Докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны.

$\boxed{15}$ Пусть A — одна из точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. Общая касательная к ω_1 и ω_2 касается их в точках B и C. Пусть O_3 — центр описанной окружности треугольника ABC. Обозначим через D такую точку, что A — середина отрезка O_3D. Пусть M — середина O_1O_2. Докажите, что $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.