Праздничный математический бой

1. Алиса очень хочет на день рождения найти все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами такие, что $f(n)$ и $f(2^n)$ взаимно просты при любом натуральном n. Помогите ей!

2. Парты в конференц зале в ЦРОДе расположены так, что образуют таблицу 8×8. В момент, когда Тимофей отвернулся, каждый ребенок решил подойти к парте своего друга. Чтобы не быть замеченными, ученики дошли лишь до соседней по стороне парты (в таблице 8×8 каждый попал в соседнюю по стороне клетку). Когда преподаватель посмотрел обратно в зал, он заметил, что занято минимально возможное количество парт. Сколько парт оказалось занято?

3. Федя записал себе в тетрадку подряд 100 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Вадим заметил, что первое число последовательности равно 1, а $x_{n+m} = 2^n x_m + 3^m x_n$. Выясните, чему равно x_{100}.

4. На сторонах AC и AB треугольника ABC лежат точки D и E соответственно. Прямые BD и CE пересекаются в точке S, M — середина отрезка CS. Прямая BM пересекает отрезок CD в точке T. Известно, что $BE = ES = 1$ и $CD = DS = 2$. Докажите, что $AB = AT$.

5. После пары по целым и дробным частям Алина очень захотела найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f([x]y) = f(x)[f(y)]$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x. Помогите ей решить эту задачу!

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $KH = AM$.

7. Миша разбил квадрат 40×40 на L-тетраминошки, так как это вторая буква в имени «Алиса». Докажите, что Настя сможет жестко провести прямую так, чтобы она разрезала не менее шести тетрамишек на доминошки.

8. Натуральные числа p и q отличаются на 2. Саша утверждает, что числа p^4+4 и q^4+4 всегда имеют общий делитель. Прав ли он?

🥳🎂🎉🎊