

Теорема Виета

Теорема Виета:

Пусть многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ имеет корни x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\dots \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ &\dots \\ x_1 x_2 \dots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

- [1] Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}, \frac{1}{x_3^2}$.
- [2] У многочлена с целыми коэффициентами $x^3 + px + q$ имеется три различных корня. Докажите, что сумма кубов этих корней есть целое число, кратное трём.
- [3] Известно, что $a + b + c = d$, и что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}.$$

Докажите, что по меньшей мере одно из чисел a, b, c равно d .

- [4] Даны действительные числа $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ и $b_1 \leq b_2 \leq b_3$, такие что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3 = b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3.$$

Докажите, что если $a_1 \leq b_1$, то $a_3 \leq b_3$.

- [5] На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1 , что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1 g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней.
- [6] Натуральные числа a, b, c, d, e, f таковы, что число $S = a + b + c + d + e + f$ делит числа $abc + def$ и $ab + bc + ca - de - ef - df$. Докажите, что S составное.