Разнобой

$\boxed{1}$ Число $\dfrac{3}{2}$ является корнем многочлена $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Найдите хотя бы один корень многочлена $a_0x^4 + 3a_1x^3 + 9a_2x^2 + 27a_3x + 81a_4$.

$\boxed{2}$ Известно, что $abc = 1$, и что $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Докажите, что по меньшей мере одно из чисел a, b и c равно 1.

$\boxed{3}$ Докажите, что если $P(0)$ и $P(1)$ нечетные числа, то многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

$\boxed{4}$ Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 2024$ имеет бесконечно много решений.

$\boxed{5}$ Три стороны четырёхугольника в порядке обхода равны $7, 1$ и 4. Найдите четвёртую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его диагонали перпендикулярны.

$\boxed{6}$ На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M, отличная от C. Докажите, что $MA + MB > CA + CB$.

$\boxed{7}$ Рассмотрим треугольник ABC. Пусть r — центр вписанной окружности, r_a,r_b, r_c — центры соответствующих вневписанных окружностей. Докажите что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

$\boxed{8}$ Рассмотрим треугольник ABC. Пусть r — центр вписанной окружности, r_a,r_b, r_c — центры соответствующих вневписанных окружностей. Докажите что

$$S_\Delta = \sqrt{r r_a r_b r_c}$$

$\boxed{9}$ За круглым столом совещались $2n$ депутатов. После перерыва эти же $2n$ депутатов расселись вокруг стола, но уже в другом порядке. Доказать, что найдутся два депутата, между которыми как до, так и после перерыва сидело одинаковое число человек.

$\boxed{10}$ В классе 20 учеников, причём каждый дружит не менее, чем с 14 другими. Можно ли утверждать, что найдутся четыре ученика, которые все дружат между собой?

$\boxed{11}$ Можно ли расставить по кругу 100 цифр так, чтобы каждая двузначная комбинация от 00 до 99 при движении по часовой стрелке встречалась ровно один раз?

$\boxed{12}$ Город представляет из себя квадрат 5×5, в котором каждая сторона квартала квадратика участок улицы длины 500 метров. Какой наименьший путь придется проделать катку, чтобы заасфальтировать улицы?

$\boxed{13}$ Натуральное число n таково, что $[n, n+1] > [n, n+2] > \ldots > [n, n+35]$. Докажите, что $[n, n+35] > [n, n+36]$

$\boxed{14}$ На длинной полоске написана десятичная запись числа $3^{20202021}$. Саша разрезал полоску на три куска. Изучив числа, написанные на этих кусках, Саша заявил, что каждое из этих трех чисел является степенью тройки. Докажите, что он ошибается.

$\boxed{15}$ Три натуральных числа таковы, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что эти три числа имеют общий делитель, больший единицы.