# Интерполяция

$\boxed{1}$ Даны различные числа $x_0, \dots, x_n$.

(a) Пусть многочлен $P_k(x)$ степени не больше $n$ равен 0 при всех $x_0, \dots, x_n$, кроме $x_k$. Докажите, что

$$P_k(x) = c(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n).$$

(b) Чему должна быть равна константа $c$, чтобы $P_k(x_k)$ было равно 1?

(c) Интерполяционный многочлен Лагранжа. Даны (не обязательно различные) числа $y_0, \dots, y_n$. Докажите, что единственный многочлен степени не выше $n$, принимающий в точках $x_0, \dots, x_n$ значения $y_0, \dots, y_n$, соответственно, равен

$$\sum_{k=0}^{n} y_k \left( \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \dots \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_k - x_n} \right) = y_0 P_0(x) + \ldots + y_n P_n(x)$$

$\boxed{2}$ Найдите многочлен $f$ наименьшей степени такой, что

$$f(-1) = 2, f(0) = 0, f(2) = 2, f(3) = 6.$$

$\boxed{3}$ Найдите многочлен $f$ наименьшей степени такой, что

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = -10.$$

$\boxed{4}$ Дан многочлен $f(x)$ степени не выше $n$. Докажите, что для любых различных вещественных чисел $x_0, x_1, \dots, x_n$ существуют и единственные $A_0, A_1, \dots, A_n$ такие, что

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)} = \frac{A_0}{x - x_0} + \frac{A_1}{x - x_1} + \dots \frac{A_n}{x - x_n}$$

$\boxed{5}$ Числа $p, q, r$ и $s$ различны. Докажите, что система линейных уравнений имеет единственное решение относительно переменных $x, y, z, u$ при любых значениях свободных членов $p_1, q_1, r_1, s_1$.

$$\begin{cases} p^3x + p^2y + pz + u = p_1 \\ q^3x + q^2y + qz + u = q_1 \\ r^3x + r^2y + rz + u = r_1 \\ s^3x + s^2y + sz + u = s_1 \end{cases} .$$

$\boxed{6}$ Многочлен $f(x)$ принимает рациональные значения во всех рациональных точках. Докажите, что все коэффициенты $f(x)$ рациональны.

$\boxed{7}$ Многочлен $f(x)$ степени не выше чем $n$ принимает в точках $0, 1, \ldots, n$ значения $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$ соответственно. Найдите

(a) $f(n+1)$;

(b) $f(-1)$.

$\boxed{8}$ (a) Многочлен $f(x)$ степени не выше чем $n$ принимает целые значения в точках $0, 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что он принимает целые значения во всех целых точках.

(b) Многочлен $f(x)$ степени не выше чем $n$ принимает целые значения в точках $0, 1, 4, \ldots, n^2$. Докажите, что он принимает целые значения во всех точных квадратах.

$\boxed{9}$ Дан унитарный многочлен $P(x)$ степени $n$ и различные целые числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что найдется такое $k$, что $|P(x_k)| > \dfrac{n!}{2^n}$