1 Топология

Определение 1

Топологическое пространство — это пара (X, Ω), где $\Omega \subset 2^X$ и выполнено 3 свойства:

1) $\varnothing, X \in \Omega$,
2) $A, B \in X \Rightarrow A \cap B \in X$,
3) $A_i \in X, i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in X$.

Элементы множества Ω называются ***открытыми*** множествами.
Если A — *открыто*, то $X \setminus A$ — ***замкнуто***.

Задача 1

Переформулируйте аксиомы для замкнутых множеств.

Пример 1. Топология называется *тривиальной* или *антидискретной*, если $\Omega = \varnothing, X$.

Задача 2

Докажите, что *тривиальная* топология — топология.

Пример 2. Топология называется *дискретной*, если $\Omega = 2^X$.

Задача 3

Докажите, что *дискретная* топология — топология.

Задача 4

Пусть X есть луч $[0, +\infty)$, а Ω состоит из $\varnothing$, X и всевозможных лучей $(a, +\infty)$, где $a > 0$.
Докажите, что Ω — топология на X.
Такая топология называется топология *стрелки*

Задача 5

Пусть X есть плоскость. Является ли топологической структурой набор множеств, состоящих из $\varnothing$, X и открытых кругов с центром в начале координат и всевозможными радиусами?

Задача 6

Пусть X состоит из четырёх элементов: $X = \{a, b, c, d\}$. Выясните, какие из следующих трёх наборов его подмножеств являются топологическими структурами в X (т.е. удовлетворяют аксиомам топологической структуры):

1) $\varnothing$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$;
2) $\varnothing$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{b, d\}$;
3) $\varnothing$, X, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Задача 7

Свойства замкнутых множеств. Докажите что:

1) Пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто;
2) Объединение любого конечного набора замкнутых множеств замкнуто;
3) Пустое множество и все пространство (т.е. все множество — носитель топологической структуры) замкнуты.

Определение 2

База топологии — некоторый набор открытых множеств, такой, что всякое непустое открытое множество представимо в виде объединения множеств из этого набора.

Пример 3. Всевозможные интервалы составляют базу стандартной топологии на $\mathbb{R}$.

Задача 8

Докажите эквивалентные определения базы:

1) Совокупность Σ открытых множеств является базой топологии Ω, когда для всякого множества $U \in \Omega$ и всякой точки $x \in U$ существует такое множество $V \in \Sigma$, что $x \in V \subseteq U$.

2) Совокупность Σ подмножеств множества X является базой некоторой топологии в X, когда X есть объединение множеств из Σ и пересечение любых двух множеств из Σ представляется в виде объединения множеств из Σ.

Задача 9

Рассмотрим следующие три набора подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$:

1) набор Σ_2, состоящий из всевозможных открытых кругов (т.е. кругов, в которые не включаются ограничивающие их окружности);

2) набор Σ_∞, состоящий из всевозможных открытых квадратов (квадратов без граничных точек — сторон и вершин), стороны которых параллельны координатным осям (они задаются неравенствами вида $\max\{|x - a|, |y - b|\} < r$);

3) набор Σ_1, состоящий из всевозможных открытых квадратов, стороны которых параллельны биссектрисам координатных углов (они задаются неравенствами вида $|x-a|+|y-b|<r$).

Докажите, что каждый из наборов Σ_2, Σ_∞ и Σ_1 служит базой некоторой топологической структуры в $\mathbb{R}^2$, и структуры, определяемые этими базами, совпадают.

Задача 10*

Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, образуют базу некоторой топологии в $\mathbb{N}$.
С помощью этой топологии докажите, что множество простых чисел бесконечно.
Воспользуйтесь тем, что в противном случае множество $\{1\}$ было бы открытым (?!).

Определение 3

Если Ω_1 и Ω_2 — топологические структуры в множестве X и $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то говорят, что структура Ω_2 ***тоньше***, чем Ω_1, а Ω_1 — ***грубее***, чем Ω_2.

Пример 4. Дискретная топология самая тонкая, а антидискретная самая грубая.

2 Метрическое пространство

Определение 4

Метрическое пространство — это пара (X, d), где $d : X \times X \to R_+$ и выполнено 3 свойства:
1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$,
3) Неравенство треугольника $\forall x, y, z$

$$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z).$$

d называется ***метрикой*** или ***расстоянием***

Пример 5. $\left(\mathbb{R}^n, \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i))}\right)$ — *Евклидово расстояние*

Задача 11

Докажите, что *Евклидово расстояние* — метрика

Пример 6. $(X, d), d = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$ — *метрика лентяя, дискретная метрика*

Задача 12

Докажите, что *дискретная метрика* — метрика

Определение 5

$\|x\|_p = p^{-\nu_p(x)}$ — *p-адическая норма*

Пример 7. $(\mathbb{Q}, d), d(r, s) = \|r - s\|_p$ — *p-адическая метрика*

Задача 13

Докажите, что *p-адическая метрика* — метрика

Определение 6

(X, d) — метрическое пространство.
Открытый шар — $B_r(x_0) = \{y \in X \mid d(y, x_0) < x\}$.

Замкнутый шар — $\overline{B_r(x_0)} = \{y \in X \mid d(y, x_0) \leqslant x\}$.

Задача 14

Как устроены шары в *метрике лентяя*?

Задача 15

Как устроены шары в *p-адической метрике*?

Определение 7

(X, d) — метрическое пространство.
Топология Ω_d ***индуцированная*** метрикой определяется так:
$A \in \Omega_d$, если A представляется как объединение открытых шаров в X.

Задача 16

Проверьте корректность определения *индуцированной* топологии.

Пример 8. $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой.
Открытые шары = открытые интервалы.
Примеры замкнутых множеств: $[0, 1], \{2, 3, 9\}$;

Задача 17

Докажите, что $A = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ *замкнутым* не является, а $A \cup \{0\}$ — *замкнуто*

Задача 18

(X, d) — метрическое пространство.
$U \subset X$ — *открыто* $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon : B_\varepsilon(x) \subset U$