

Региональный разнбой

- [1] Даны натуральные числа a, b и c . Ни одно из них не кратно другому. Известно, что число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что $c > b$.
- [2] Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m , что $S_{m+1} = 4S_m$?
- [3] На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\frac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть d — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение d .
- [4] На доске девять раз (друг под другом) написали некоторое натуральное число N . Петя к каждому из 9 чисел приписал слева или справа одну ненулевую цифру; при этом все приписанные цифры различны. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди 9 полученных чисел?
- [5] Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше 10^{100} .
- [6] Рассмотрим такие натуральные числа a, b и c , что дробь

$$k = \frac{ab + c^2}{a + b}$$

является натуральным числом, меньшим a и b . Какое наименьшее количество натуральных делителей может быть у числа $a + b$?

[7]

[8]

[9]