Неравенство о средних

Неравенство о средних — это неравенство между *средним квадратическим, средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим*:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

для любых **положительных** чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Частный случай,

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

$\boxed{1}$ $1+x \geq 2\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$ через неравенство о средних.

$\boxed{2}$ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2$ при $x, y > 0$ через неравенство о средних.

$\boxed{3}$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}$ при $x, y > 0$ через неравенство о средних.

$\boxed{4}$ $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$ при $a, b, c > 0$.

$\boxed{5}$ $2(x^2+y^2) \geqslant (x+y)^2$ при любых x и y через неравенство о средних.

$\boxed{6}$ $\frac{a+3b}{4} \geqslant \sqrt[4]{ab^3}$, при $a, b \geqslant 0$

$\boxed{7}$ $\frac{a^6+b^9}{4} \geqslant 3a^2b^3-16$, при $b \geqslant 0$.

$\boxed{8}$ $2x+\frac{3}{8} \geqslant \sqrt[4]{x}$, при $x \geqslant 0$.

$\boxed{9}$ $(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27$, если $xyz = 1$ и $x, y, z > 0$.

$\boxed{10}$ $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3}$, при положительных a, b, c, d.

$\boxed{11}$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ac$, если $a+b+c = 3$.

$\boxed{12}$ Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}$.

Транснеравенство

Транснеравенство. *Пусть* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ *и* $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. *И пусть числа* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *— некоторая перестановка чисел* $b_1, b_2, \ldots, b_n$. *Тогда*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

Во всех предложенных задачах подразумевается, что рассматриваемые числа положительны.

$\boxed{1}$ Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^3b + b^3c + c^3a.$$

$\boxed{2}$ Докажите, что

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

$\boxed{3}$ Докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

$\boxed{4}$ Докажите, что

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leqslant \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}.$$

$\boxed{5}$ Докажите неравенство

$$a + b + c \geqslant \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

$\boxed{6}$ Докажите неравенство

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leqslant \frac{3}{2}(a + b + c + d).$$

$\boxed{7}$ Докажите неравенство

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

$\boxed{8}$ **Неравенство Чебышева.** Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots b_n}{n}.$$

Неравенство КБШ

Теперь докажем **неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)**: для двух произвольных наборов вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

Для этого рассмотрим следующий вспомогательный квадратный трехчлен: $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 + 2 \cdot (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$. **Контрольный вопрос.** Когда в неравенстве КБШ достигается равенство?

$\boxed{1}$ Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_n и b_1, b_2, $\ldots$, b_n — положительные числа. Докажите неравенство

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2.$$

$\boxed{2}$ **Важнейшая форма КБШ.** Докажите через КБШ, выбрав два нужных набора, КБШ для дробей: при *положительных* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполнено неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

$\boxed{3}$ Суммы двух наборов положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{2}.$$

$\boxed{4}$ Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a^2}{b(a+c)} + \frac{b^2}{c(b+d)} + \frac{c^2}{d(a+c)} + \frac{d^2}{a(d+b)} \geqslant 2.$$

$\boxed{5}$ Докажите, что при всех положительных a, b, c, d выполнено

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}.$$

$\boxed{6}$ Для положительных a, b, c, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

$\boxed{7}$ Даны положительные числа a, b, c, сумма которых не меньше двух. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b\sqrt[3]{c} + a} + \frac{b}{c\sqrt[3]{a} + b} + \frac{c}{a\sqrt[3]{b} + c} \leqslant 2.$$