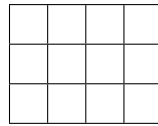


Разнойой

- 1] Сколько нужно сделать разрезов, чтобы разрезать 10 палок колбасы на 10 кусков каждую?
- 2] После битвы со Змеем Горынычем три богатыря заявили:
Добрыня Никитич: «Это не я, это младшенький наш–Алешка.»
Илья Муромец: «Я тут ни причем, это все Добрыня.»
Алеша Попович: «Ну я, я убил!»
Кто убил змея, если только один из богатырей сказал правду?
- 3] Можно ли а) квадрат 5×5 б) квадрат 5×5 с вырезанной угловой клеткой разрезать на доминошки?
- 4] Сколько квадратов изображено на картинке ниже?



- 5] В полосе из 11 клеток стоят два числа: в первой клетке число 6, а в девятой клетке число 4. Можно ли расставить числа в остальных клетках так, чтобы сумма чисел в любых трех подряд идущих клетках равнялась 15?

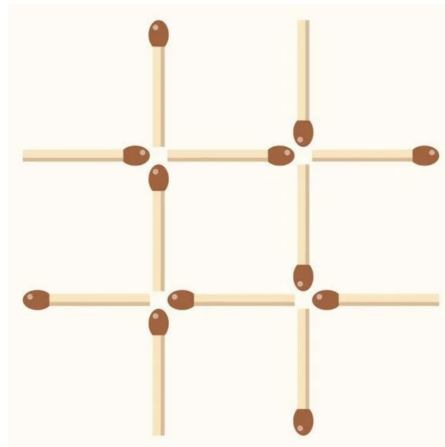
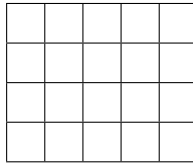


Рис. 1:

- 6] Переложите 3 спички так, что бы на картинке 1 получилось 3 квадрата.
- 7] а) Три пирата делят слитки золота весом $1, 2, \dots, 10$ килограммов. Могут ли они поделить золото поровну, если распиливать слитки запрещается?
б) При дележе один из пиратов был убит. Могут ли два оставшихся пирата разделить золото поровну, если распиливать слитки по-прежнему запрещается?

- 8] Занятия кружка художественного свиста проходят по вторникам и четвергам. Оказалось, что в некотором месяце состоится 10 занятий этого кружка. На какой день недели приходится первое число этого месяца?
- 9] Мистер Саша уверен, что можно вырезать из шахматной доски 8×8 ровно 4 клетки так, чтобы оставшуюся доску можно было разрезать на “доминошки”, то есть прямоугольники 1×2 . Прав ли Мистер Саша?
- 10] Мистер Саша так понравилось вырезать из доски 8×8 четыре клетки и разбивать оставшуюся часть на доминошки, что теперь он уверен, что как ни вырежи 4 клетки из шахматной доски 8×8 , всегда оставшуюся фигурку можно разрезать на доминошки. Не ошибается ли Мистер Саша?
- 11] Постройте отрицание к утверждениям:
- «Поле шахматной доски - белое»;
 - «Это или синее или белое»;
 - «Я рыцарь или ты лжец»;
 - «Верблюд синий и весит хотя бы 100 кг».
- 12] Сколько квадратов изображено на картинке ниже?

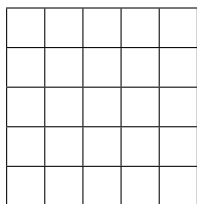


- 13] Найдите сумму а) $1 + 2 + 3 + \dots + 50$; б) $1 + 2 + 3 + \dots + 51$.
- 14] Получив двойку по географии, Вася решил порвать географическую карту в клочья. Каждый попавший ему в руки клочок он рвет на четыре части. Может ли он когда-нибудь получить ровно а) 2022 клочок? б) 2023 клочка?
- 15] На прямой расположено пять точек A, B, C, D, E (именно в таком порядке!). Известно, что $AB = 19$ см., $CE = 97$ см., $AC = BD$. Найдите длину отрезка DE .
- 16] На каждой клетке доски 5×5 сидит один дрессированный лягушонок. По команде «Ква!» каждый лягушонок перепрыгивает на одну из соседних (по стороне) клеток. Докажите, что после команды «Ква!» какие-то два лягушонка окажутся на одной клетке.
- 17] В кружке художественного свиста у каждого ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что в кружке четное число людей.
- 18] От шахматной доски 8×8 отрезали

- (а) угловую клетку (например, а1)
- (b) две соседние угловые клетки (а1 и а8)
- (с) две противоположные угловые клетки (а1 и h8).

Можно ли оставшуюся часть разрезать на доминошки?

- 19 Сколько квадратов изображено на картинке ниже?



- 20 Четно или нечетно число $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$
- 21 Можно ли на шести книжных полках длиной по 1 м каждая расставить 150 книг, из которых а) 51; b) 50; с) 49 книг имеют толщину 6 см, а остальные – 3 см?
- 22 Можно ли из семи прямоугольников $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times 6, 1 \times 7$ сложить какой-нибудь прямоугольник, обе стороны которого больше 1?

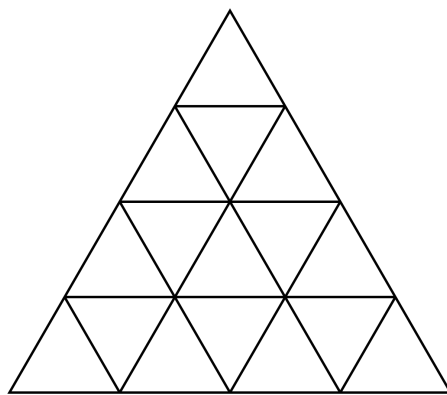


Рис. 2:

- 23 Сколько треугольников изображено на картинке 2?
- 24 Можно ли на шести книжных полках длиной по 1 м каждая расставить 150 книг, из которых а) 51; b) 50; с) 49 книг имеют толщину 6 см, а остальные – 3 см?
- 25 В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1×1 , не содержащий внутри дырок? (Дырки считаются точечными).
- 26 Обязательно ли среди двадцати пяти монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей найдётся семь монет одинакового достоинства?
- 27 Докажите, что число

(a) $4^{101} + 6^{101}$

(b) $9^{101} + 1$

Делится на 10

28 Сформулируйте и докажите:

(a) Признак делимости на 2

(b) Признак делимости на 3

(c) Признак делимости на 5

(d) Признак делимости на 10

(e) Признак делимости на 6

(f) Признак делимости на 9

(g) Признак делимости на 4

(h) Признак делимости на 8

29 Можно ли шашечную доску размером 10×10 замостить плитками размером 1×4 ?

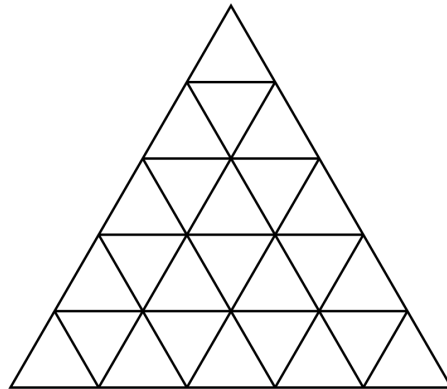


Рис. 3:

30 Сколько треугольников изображено на рисунке 3?

31 Можно ли из квадрата 7×7 вырезать 10 квадратов 2×2 ?

32 Треугольник разбит на треугольнички (25 штук), как показано на рисунке 3. Жук может ходить по треугольнику, переходя между соседними (по стороне) треугольничками. Какое максимальное количество треугольничков может пройти жук, если в каждом он побывал не больше одного раза?

33 Можно ли все клетки доски 9×9 обойти конём по одному разу и вернуться в исходную клетку?

34 Можно ли доску размером 10×10 клеток разрезать на фигурки в форме буквы Т

- 35 На Васильевском острове 100 перекрёстков, и из каждого выходит ровно 4 дороги. А каждая дорога соединяет 2 перекрёстка. Сколько всего дорог на Васильевском острове?
- 36 В городе Калининград 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было четыре телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, восемь телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и три телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?
- 37 В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?
- 38 В кружке художественного свиста у каждого ровно один друг и ровно один враг среди членов кружка. Докажите, что кружок можно разделить на два кружка равной численности так, чтобы ни в одном из них не было ни друзей, ни врагов.
- 39 20 школьников решили 20 задач, причем каждую задачу решило ровно 2 школьника, и каждый школьник решил ровно 2 задачи. Докажите, что Тимофей Дмитриевич может организовать разбор так, чтобы каждая задача была рассказана ровно по одному разу, а каждый школьник рассказал ровно одну из решенных им задач.
- 40 Докажите, что из любых трех натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 2
- 41 Докажите, что из любых четырех натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 3
- 42 Найдите остаток от деления 2^{100} на 3.
- 43 Можно ли монетами по 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 2024 шиллингов?
- 44 Гидрометцентр сообщает, что в 2023 году в Санкт-Петербурге пасмурных дней было в 5 раз больше, чем солнечных. Докажите, что Гидрометцентр ошибается.
- 45 Может ли сумма трёх последовательных натуральных чисел быть простым числом?
- 46 Какое из чисел больше: 2^{30} или 3^{20} ?
- 47 Делится ли число 32561698 на 12? Решите эту задачу:
- (а) с помощью признака делимости на 4;
 - (б) с помощью признака делимости на 3.

- 48] Даша и Таня по очереди выписывают на доску цифры шестизначного числа. Сначала Даша выписывает первую цифру, затем Таня — вторую, и так далее. Таня хочет, чтобы полученное в результате число делилось на три, а Даша хочет ей помешать. Кто из них может добиться желаемого результата независимо от ходов соперника?
- 49] Замените звездочки в записи числа $72*4*$ цифрами так, чтобы это число делилось на 45. Укажите все возможные варианты!
- 50] (а) Докажите, что произведение двух последовательных чётных чисел всегда делится на 8.
(б) Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел оканчиваться на 116?
- 51] Может ли натуральное число, записываемое с помощью 10 нулей, 10 единиц и 10 двоек, быть квадратом некоторого другого натурального числа?
- 52] Сколько существует натуральных чисел меньших 1000 и таких, что произведение всех цифр числа равно 6?
- 53] Серия для шестиклассников, выданная на первом занятии январской математической смены, состоит из 7 задач. Из 16 ребят каждый сдал больше половины серии. Докажите, что какую-то задачу решило не менее 10 человек.
- 54] Найдите последнюю цифру числа 7^{49} .
- 55] Одним взмахом меча Богатырь И. Муромец может отсечь З. Горынычу одну голову или сразу 10 голов (конечно, если их было не меньше 10). Однако, если после отсечения осталось чётное число голов, то число голов сразу же удваивается. Изначально, у З. Горыныча 444 головы. Может ли Богатырь отрубить З. Горынычу все его головы?
- 56] Вова забыл номер телефона (8 931 * * * * *) своей девушки Маши, но помнит, что дальше в нем были только девятки и двойки, причем двоек было больше, чем девяток. Также он вспомнил, что номер (как 11-значное число) делился на три и на четыре. Помогите Вове вспомнить номер Маши.
- 57] Ы и Ъ — только такие две буквы есть в алфавите некоторого племени. Каждая конечная последовательность из этих букв является словом и что-то да значит. От замен следующих буквосочетаний в словах смысл слова не меняется: ЫЫЬ \Leftrightarrow ЪЬ, ЪЫЫ \Leftrightarrow ЪЫЫ, ЪЫЬ \Leftrightarrow ЪЬ, ЪЬЬ \Leftrightarrow ЪЫ (замену можно делать в любом месте слова). Обязательно ли смысл у слов ЪЫЫ и ЪЫЬ одинаков?
- 58] Могут ли все три числа a, b, c быть меньше -1 , если известно, что

$$ab + a + b = c?$$

- [59] Гриша вычислил сумму первых 2024 чисел из ряда $9, 99, 999, \dots$. Сколько различных цифр содержит результат?
- [60] Олег лёг спать в 10 вечера и завел будильник (со стрелками и циферблатом на 12 делений) на 7 утра. Ночью в некоторый момент будильник, до этого работавший исправно, сломался, и его стрелки пошли в обратную сторону (с прежней скоростью). Тем не менее, утром будильник прозвенел точно в положенное время. Во сколько сломался будильник?
- [61] Докажите, что из чисел $x + y - 2z$, $x + z - 2y$, $y + z - 2x$ хотя бы одно неотрицательно.
- [62] Одно утверждение среди следующих неверно. Найдите его:
- если точный квадрат делится на 6, то он делится на 36;
 - если точный квадрат делится на 7, то он делится на 49;
 - если точный квадрат делится на 8, то он делится на 64.
- [63] Максим отметил несколько клеток в квадрате 12×12 так, что в любом а) прямоугольнике 1×3 ; б) L -тетрамино есть отмеченная клетка. Какое наименьшее число клеток мог отметить Максим?
- [64] Проверь свою наблюдательность. В условиях задач скрыто некоторое *послание*. Какое?
- [65] Петя перемножил натуральные числа от 1 до 20. На сколько нулей оканчивается полученное произведение?
- [66] Петя перемножил натуральные числа от 1 до 30. На сколько нулей оканчивается полученное произведение?
- [67] Про каждое из следующих чисел скажите, является ли оно простым: 0, 1, 12, 13, 17, 97, 899, 43825539123, 621212229, 100020001. Обоснуйте каждый свой ответ.
- [68] В ряд выписаны числа от 1 до 25. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?
- [69] Имеется много одинаковых квадратов. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 и 4. Квадраты сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из четырех углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом углу стопки сумма равна 2024?
- [70] Может ли число, десятичная запись которого состоит из 2024 нулей, 2024 единиц и 2024 двоек, быть точным квадратом?
- [71] Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.

- 72] При каких простых p число $5p + 1$ тоже простое
- 73] Можно ли разменять 100 фертингов монетами по 1, 3, 5 и 25 фертингов так, чтобы всего оказалось 33 монеты?
- 74] На доске написано 1012 плюсов и 1013 минусов. За один ход разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс (если они одинаковы) или минус (если они различны). Какой знак останется на доске через 2024 ходов?
- 75] В каждой клетке таблицы 2023×2023 написано целое число. Оказалось, что сумма чисел в каждой строке нечётна. Докажите, что сумма чисел в каком-то столбце таблицы также нечётна.
- 76] Разложите на простые множители число 4704.
- 77] Разложите на простые множители число 899.
- 78] Может ли произведение числа и суммы его цифр равняться 4704?
- 79] Натуральное число умножили на произведение всех его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.
- 80] Найдите n из равенства $5^{47} \cdot 5^{19} = 5^n$.
- 81] Вася возводил число в квадрат и получил 1234567. Его друг Петя сказал: «Пересчитай, а то получишь двойку». Докажите, что Петя прав.
- 82] На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. На улице встретились два жителя острова. Один из них сказал: «По крайней мере один из нас рыцарь». Второй ему ответил: «Ты лжец». Кто из них кто?
- 83] Можно ли в выражении $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$ заменить все звездочки на $+$ или $-$ так, чтобы в ответе получилось а) 1? б) 0?
- 84] Разложите 2008 на простые множители
- 85] Число умножили на его сумму цифр и получили 2008. Найдите все такие числа.
- 86] Разложите 2017 на простые множители
- 87] Вася возводил число в квадрат и получил 1234567. Его друг Петя сказал: «Пересчитай, а то получишь двойку». Докажите, что Петя прав.
- 88] Сумма двух чисел 627. Одно число заканчивается нулём. Если это нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найди эти числа.
- 89] Котят было на 6 больше, чем цыплят, а ног все котята имели на 44 больше, чем все цыплята. Сколько было котят?

- [90] Маша съела половину всех конфет и ещё одну, а Даша - половину остатка, и ещё осталось 5 конфет. Сколько конфет съела Маша?
- [91] Расставьте по кругу цифры от 1 до 9, каждую по одному разу, так, чтобы каждое двузначное число, составленное из двух идущих подряд по часовой стрелке цифр, делилось на 3 или 4.
- [92] Тане и Ване дали одинаковые многоугольники из бумаги. Таня отрезала от своего листа кусок, и остался квадрат. Ваня отрезал точно такой же (и по форме, и по размеру) кусок по-другому, и у него остался треугольник. Нарисуйте пример, как это могло быть.
- [93] Каждая клетка доски 10×10 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
- [94] На доске записано натуральное число. Каждую минуту с ним делают следующую операцию: если в нём есть две одинаковых цифры, то стирают любую из них; если же все цифры различны, то стирают всё число и вместо него пишут втрое большее число. Например, из числа 57 можно за две минуты получить $57 \rightarrow 171 \rightarrow 71$ или $57 \rightarrow 171 \rightarrow 17$. Мария написала двузначное число и через несколько минут снова получила его же. Приведите пример, как она могла это сделать.
- [95] Вершины правильного 222-угольника покрасили в красный и синий цвет. Будем называть сторону одноцветной, если вершины покрашены в один цвет, и разноцветной, если они покрашены в разные цвета. Можно ли так раскрасить вершины, чтобы одноцветных и разноцветных сторон было поровну?