Теорема Хелли

1. На плоскости дано произвольное множество точек. Любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Тогда 1 и все множество можно накрыть кругом радиуса 1.

2. Для произвольного выпуклого семиугольника все выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника имеют общую точку.

3. Дана система из 100 линейных неравенств. Если любые три из них имеют общее решение, то и вся система имеет решение.

4. В выпуклом многоугольнике M для любых трёх сторон существует точка X внутри M такая, что основания высот из X на выбранные три стороны лежат на этих сторонах. Докажите, что внутри M существует точка Y, что из неё все перпендикуляры падают на стороны M.

5. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

6. На плоскости даны несколько параллельных отрезков. Известно, что для любых трех отрезков найдется прямая, их пересекающая. Тогда существует прямая, пересекающая все эти отрезки.

7. На координатной плоскости дано несколько вертикальных отрезков. Если для любых трех отрезков существует парабола у $= x^2+px+q$, которая их пересекает, то найдется такая парабола, пересекающая сразу все отрезки.

8. На плоскости дано конечное семейство прямых. Известно, что любые три прямые можно пересечь кругом радиуса r. Тогда все прямые семейства можно пересечь кругом радиуса r.

9. На плоскости лежат несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (не обязательно одинаковых), каждые два из которых пересекаются. Тогда все прямоугольники имеют общую точку.

10. Внутри ограниченной выпуклой фигуры всегда найдется точка, обладающая следующим свойством: любая прямая, проходящая через эту точку, делит площадь фигуры на части, отношение которых не превосходит 2.