

Гомотетия (поворотная)

Основные свойства поворотной гомотетии:

- [1] Если на плоскости даны непараллельные отрезки AB и $A'B'$, то поворотная гомотетия, переводящая A в A' , а B в B' , определяется однозначно. Если обозначить точку пересечения прямых AB и $A'B'$ за X , то центр искомой поворотной гомотетии лежит на втором пересечении окружностей, описанных около треугольников $AA'X$ и $BB'X$.
- [2] Если точка O является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в CD , то она является и центром поворотной гомотетии, переводящей AC в BD .
- [3] Пусть две окружности пересекаются в точках P и Q . Пусть два велосипедиста A и B одновременно выезжают из точки P , один по первой окружности, а другой по второй, причем их угловые скорости на соответствующих окружностях совпадают. Тогда прямая AB всегда будет проходить через точку Q .
- [4] Докажите, что середины отрезков AB лежат на одной окружности.
- [5] Докажите, что существует точка, равноудалённая от точек A и B в каждый момент времени.

Задачи:

- [1] Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC , причём $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC . Докажите, что $\angle DHQ = 90^\circ$.
- [2] На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$; CE — высота треугольника. Докажите, что угол LEM прямой.
- [3] Прямые, содержащие стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точке O . Точка M — середина AB , N — середина CD . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCO , ADO и MNO лежат на одной прямой.
- [4] На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D . Описанная окружность треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD , в точке K . Точка M — середина BC , N — середина AD . Докажите, что точки B , M , N и K лежат на одной окружности.
- [5] Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ повернули относительно их середин на 90° против часовой стрелки, получились отрезки A_0B_0 и C_0D_0 . Докажите, что $B_0C_0 = A_0D_0$.

- [6] Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 . На прямой AB отмечена такая точка X , что $A_1X \perp B_1C_1$. Окружности, описанные около треугольников ABC и AB_1C_1 , пересекаются второй раз в точке Z . Докажите, что $\angle XZC_1 = 90^\circ$.
- [7] Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник такой, что $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ и $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке P . Докажите, что прямая AP делит отрезок CD пополам.
- [8] Имеется два правильных пятиугольника с одной общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются по часовой стрелке цифрами от 1 до 5, причём в общей вершине ставится цифра 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Доказать, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.
- [9] а) Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 проходят через точку O . Окружности ω_1 и ω_2 повторно пересекаются в точке A_1 , окружности ω_2 и ω_3 — в точке A_2 , окружности ω_3 и ω_1 — в точке A_3 . На окружности ω_1 выбрана произвольная точка X_1 . Прямая X_1A_1 повторно пересекает окружность ω_2 в точке X_2 , прямая X_2A_2 повторно пересекает окружность ω_3 в точке X_3 , прямая X_3A_3 повторно пересекает окружность ω_1 в точке X'_1 . Докажите, что $X_1 = X'_1$.
- б) Докажите аналогичное утверждение для n окружностей.
- [10] Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке D . Окружность, проходящая через вершины B и C , пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F . Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O . Докажите, что угол BFO — прямой.
- [11] Окружность с центром O проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC повторно в точках K и N соответственно. Пусть M — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и KBN (отличная от B). Докажите, что $\angle OMB = 90^\circ$.
- [12] $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, X — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку X , пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках N_1 и N_2 , и окружности, описанные около треугольников ABX и CDX , в точках M_1 и M_2 . Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.
- [13] Внутри треугольника ABC взята такая точка D , что $BD = CD$, $\angle BDC = 120^\circ$. Вне треугольника ABC взята такая точка E , что $AE = CE$, $\angle AEC = 60^\circ$ и точки B и E находятся в разных полуплоскостях относительно AC . Докажите, что $\angle AFD = 90^\circ$, где F — середина отрезка BE .

- [14] На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCA = \angle LBA = \alpha$. Из точки A опущены перпендикуляры AE и AF на прямые BL и CK соответственно. Точка D — середина стороны BC . Найдите углы треугольника DEF .
- [15] На сторонах треугольника ABC во внутреннюю сторону построены такие треугольники ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 , что $\angle AC_1B + \angle BA_1C + \angle CB_1A = 360^\circ$ и $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle BAC_1 + \angle BCA_1$.
- [16] На сторонах четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построили правильные треугольники ABK , BCL , CDM и DAN . X и Y — середины отрезков BL и AN , Z — центр треугольника CMD .
- а) Докажите, что $XY \perp KZ$.
- б) Найдите отношение $XY : KZ$.
- [17] AB — хорда окружности, M и N — середины дуг на которые делят окружность точки A и B . При повороте вокруг точки A на некоторый угол точка B переходит в B' , а точка M — в M' . Докажите, что отрезки, соединяющие середину отрезка BB' с точками M' и N , перпендикулярны.