Теоретический зачёт

1 Принцип крайнего

Задача: Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.

2 Теорема Безу

Формулировка + доказательство.

Задача: Докажите, что если значения двух многочленов степени не выше n совпадают в $n+1$ точке, то и сами многочлены равны.

3 Процессы

Задача: Круг разделен на 2022 сектора, и в каждом написано целое число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе, где стоит фишка (пусть прочитано k), фишка сдвигается на $|k|$ секторов по часовой стрелке, и там, куда она придет, число увеличивается на 1. Докажите, что со временем все числа станут больше миллиона.

4 Информация 1

Идея о том, как работают оценки в задачах на весы.

Задача: Есть 4 гири разных масс, за наименьшее число взвешиваний на чашечных весах упорядочите их по массе.

5 Уравнения в целых числах

Основные методы решения.

Задача: Решите в натуральных числах уравнение $1! + 2! + ... + n! = m^2$.

Задача: Найдите все целые a, b, c, d, для которых $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2abcd$.

6 Минимакс

Доказательство неравенства ломанной.

Задача: Из точки M, лежащей на стороне AB остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны BC и AC. При каком положении точки M длина отрезка PQ минимальна?

7 Теорема Чевы, Менелая, Фалеса

Формулировка и доказательство прямой и обратной теоремы Фалеса.

Формулировка и доказательство прямой и обратной теоремы Чевы.

Формулировка и доказательство прямой и обратной теоремы Менелая.

Задача: Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, точка D — ее середина, E — проекция D на AB. Известно, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL равнобедренный.

8 Подобие

Что? У нас был листик на подобие?... Ну ладно. Пускай будет 3 теоремы про подобные треугольники.

Задача: В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, углы ABD и BCD равны, $AB = CD$, AE биссектриса угла A. Докажите, что $ED \parallel AB$.

9 Конструктивы

Задача: Существуют ли на плоскости три такие точки A, B и C, что для любой точки X длина хотя бы одного из отрезков XA, XB и XC иррациональна?

10 Рациональность

Задача: Докажите, что если выражение $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ принимает рациональное значение, то и выражение $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ также рационально.

11 Гомотетия

Два определение и доказательство основных свойств.

Задача: Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 — середины дуг BC, AC, AB описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

12 Радоси

Определение степени точки и радикальной оси. Доказательство, что это прямая. Теорема о радикальном центре. Задача о медиане.

Задача: На сторонах треугольника ABC взято по две точки так, что шесть отрезков, соединяющих вершину с точкой на противолежащей стороне, равны. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной окружности.

13 Теорема Хелли

Формулировка + доказательство.

Задача: Внутри ограниченной выпуклой фигуры всегда найдется точка, обладающая следующим свойством: любая прямая, проходящая через эту точку, делит площадь фигуры на части, отношение которых не превосходит 2.

14 Степени вхождения простых

Определение степени вхождения простых в рациональное число. Доказательство корректности. Формула Лежандра.

Задача: Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Положим

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_n).$$

Докажите, что наименьшее общее кратное $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ делится на $(n-1)!$

15 Информация - 2

Задача: Есть $2n$ монеток попарно различного веса. За одно действие можно сравнить любые две монетки. Какое минимальное количество взвешиваний потребуется, чтобы найти самую тяжёлую и самую лёгкую монетки?

16 Транснеравенства

Формулировка, доказательство.

Задача: Докажите неравенство

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

17 КБШ

Формулировка, доказательство.

Формулировка, доказательство важнейшей формы КБШ.

Задача: Докажите, что при всех положительных a, b, c, d выполнено

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}.$$

18 Функции

Задача: Найдите все такие функции $f(x)$, что

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2x \ \ (x \neq 0).$$

19 Случайные события

Условная вероятность, определение.

Формула полной вероятности.

Задача: Карточка «спортлото» содержит 36 чисел. Игрок может выбрать 6, а выигрышных номеров в тираже определяется тоже 6. Какова вероятность того, что верно будет угадано ровно 3 числа?

20 Формула Байеса

Формула Байеса, формулировка доказательство.

Задача: 100 пассажиров садятся по очереди в 100-местный самолёт. Первый занимает случайное место. Второй садится на своё место, если оно свободно, а если нет, то садится на случайное место из оставшихся. Остальные делают то же самое. С какой вероятностью последний пассажир окажется на своём месте?

21 Равносоставленные Многоульники

Определение. Формулировка основной теоремы, идея доказательства.

22 Теорема Паскаля

Формулировка.

Задача: Точка M — середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC. Точки D и E на отрезках AM и AB соответственно выбраны так, что $BC \parallel DE$. Окружность ω, описанная около треугольника ABC, пересекает описанную окружность треугольника CDE в точках C и F, а прямую DE в точках X и Y. Касательная к окружности ω в точке B пересекает луч FC в точке Z. Докажите, что описанные окружности треугольников XMY и BFZ касаются.

23 Комбинаторика

Задача: Сколькими способами можно на доске 30×30 расставить сорок одинаковых ладей так, чтобы каждая била ровно одну другую?

Задача: Игральный кубик имеет 6 граней с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько различных игральных кубиков существует, если считать различными два кубика, которые нельзя спутать, как ни переворачивай?

24 Телескопические суммы

Доказательство теоремы про полиномиальную формулу.

Задача: $\dfrac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \dfrac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \ldots + \dfrac{50}{99^2 \cdot 101^2}$.

25 Инверсия

Определение. Доказательство Инволюции. Образ окружности, не проходящей через центр инверсии. Образ прямой не проходящей через центр инверсии.

Задача: Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC, а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Описанная окружность Ω треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром вписанной окружности треугольника PQT.

26 Теория множеств

Определение инъективности, сюръективности, биективности. Доказательство теоремы Кантора.

Задача: $|\mathbb{R}^*| \stackrel{?}{=} |\mathbb{R}|$.