Математический бой за славу и честь!

1. Существует ли такое натуральное число N, что и у числа N, и у числа N^2-1 сумма цифр равна 2021

2. Существует ли такая непериодическая функция f, что при любом действительном x выполнено равенство
$$f(x+1)=f(x+1)f(x)+1$$

3. По кругу сидит 2021 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из них сказал: «Если моего соседа справа спросить, кем является мой сосед слева, то он ответит — лжецом.». Сколько лжецов за этим столом?

4. Найдите все квадратные трехчлены x^2+mx+n такие, что числа m и n (не обязательно различные) являются их корнями?

5. Докажите, что не может одновременно выполняться для положительных a, b, c
$$a(1-b)>1/4$$
$$b(1-c)>1/4$$
$$c(1-a)>1/4$$

6. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, в котором $AB>AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH. F — точка пересечения прямых EH и AC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB.

7. Из клетчатого квадрата 2021×2021 вырезали угловой квадрат 6×6. Можно ли оставшуюся фигуру разрезать на прямоугольники 1×5?

8. На первое занятие по олимпиадной математике пришло 7 человек, которые сели по кругу. При этом, если выбрать любых 6 человек, то возможна рассадка, при которой все будут сидеть рядом со своим знакомым. Верно ли, что и вся группа из 7 человек может быть так рассажена?

9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено равенство $AB=BD+CD$. Пусть M — середина диагонали AC. Докажите, что $\angle BMD=90^\circ$.