

## Изогональное сопряжение 1

**Определение:** Пусть дан треугольник  $ABC$  и точка  $P$ . Тогда изогоналы к прямым  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  относительно соответствующих углов треугольника пересекаются в одной точке или параллельны. Если они пересекаются, то точка их пересечения  $Q$  называется изогонально сопряжённой точке  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Если  $P$  лежала не на стороне и не на описанной окружности треугольника, то изогональное сопряжение является взаимно-однозначным соответствием.

Если точку  $P$  отразить относительно сторон треугольника, то изогонально сопряжённая ей точка  $Q$  будет центром окружности, проходящей через эти три отражения.

- [1] Точка  $T$  такова, что все стороны треугольника  $ABC$  видны из неё под углами  $120^\circ$ . Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из изогонально сопряжённой ей точки, являются вершинами равностороннего треугольника.
- [2] Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точках  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $Q$  такова, что четырёхугольник  $ABQC$  является параллелограммом. Докажите, что точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены.
- [3] Про выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  известно, что  $\angle A = \angle C \neq 90^\circ$ . Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки  $D$  на прямые  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ , и середина отрезка  $AC$  лежат на одной окружности.
- [4] В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AK$ . Точка  $K'$  симметрична точке  $K$  относительно середины стороны  $BC$ . Касательные в точках  $B$  и  $C$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что точка  $K'$  и основания перпендикуляров, опущенных из точки  $X$  на прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , лежат на одной окружности.
- [5] В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  перпендикулярна основаниям,  $O$  — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника  $OCD$  взята точка  $S$ , диаметрально противоположная точке  $O$ . Докажите, что  $\angle BSC = \angle ASD$ .
- [6] Точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$ . Точка  $QA$  симметрична точке  $Q$  относительно прямой  $BC$ . Тогда точки  $A$  и  $QA$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $BPC$ .
- [7] Стороны треугольника  $ABC$  видны из точки  $T$  под углами  $120^\circ$ . Докажите, что прямые, симметричные прямым  $AT$ ,  $BT$  и  $CT$  относительно прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно, пересекаются в одной точке.
- [8] Точка  $M$  — середина основания  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Точка  $P$  внутри треугольника такова, что  $\angle CAP = \angle ABP$ . Докажите, что  $\angle APM + \angle CPB = 180^\circ$ .

- [9] Внутри выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  выбрана точка  $P$ . Точки  $Q_1$  и  $Q_2$  расположены внутри  $ABCD$  и таковы, что

$$\angle Q_1BC = \angle ABP, \angle Q_1CB = \angle DCP, \angle Q_2AD = \angle BAP, \angle Q_2DA = \angle CDP.$$

Докажите, что  $Q_1Q_2 \parallel AB$  тогда и только тогда, когда  $Q_1Q_2 \parallel CD$ .

- [10] В треугольнике  $ABC$  провели высоты  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $CC_0$ . Точка  $M$  — произвольная точка,  $A_1$  — точка, симметричная  $M$  относительно  $BC$ , аналогично определим точки  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что прямые  $A_0A_1$ ,  $B_0B_1$ ,  $C_0C_1$  пересекаются в одной точке или параллельны.
- [11] Про параллелограмм  $ABCD$  известно, что  $\angle DAC = 90^\circ$ . Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $A$  на  $DC$ ,  $P$  — такая точка на прямой  $AC$ , что прямая  $PD$  касается описанной окружности треугольника  $ABD$ . Докажите, что  $\angle PBA = \angle DBH$ .
- [12] Точки  $I$  и  $I_a$  являются центрами вписанной и невписанной (напротив вершины  $A$ ) окружностей треугольника  $ABC$ . Точка  $A'$  диаметрально противоположна точке  $A$  на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\angle BA'I + \angle CA'I_a = 180^\circ$ .
- [13] В треугольнике  $ABC$  выполнено неравенство  $AB < BC$ . Биссектриса угла  $C$  пересекает прямую, параллельную  $AC$  и проходящую через точку  $B$ , в точке  $P$ . Касательная к описанной окружности треугольника  $ABC$ , проведённая в точке  $B$ , пересекает ту же биссектрису в точке  $R$ . Точка  $R'$  симметрична точке  $R$  относительно  $AB$ . Докажите, что  $\angle R'PB = \angle RPA$ .
- [14] Пусть  $P$  — точка внутри треугольника  $ABC$  такая, что

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Докажите, что биссектрисы углов  $ABP$  и  $ACP$  пересекаются на прямой  $AP$ .