8 класс

Первый день

8.1 При каком наибольшем n существует выпуклый n-угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений?

8.2 Числа $1, 2, \ldots, 1000$ разбили на два множества по 500 чисел: красные $k_1, k_2, \ldots, k_{500}$ и синие $s_1, s_2, \ldots, s_{500}$. Докажите, что количество таких пар m и n, у которых разность $k_m - s_n$ дает остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n, у которых разность $s_n - k_m$ дает остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются все возможные разности, в том числе и отрицательные. Напомним, что остатком от деления целого числа a на 100 называется разность между числом a и ближайшим числом, не большим a и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен $2022 - 2000 = 22$, а остаток от деления числа -11 на 100 равен $-11 - (-100) = 89$.

8.3 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL. На отрезке BK отмечена точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла ABC.

8.4 Учитель придумал ребус, заменив в примере $a + b = c$ на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными (например, если $a = 23$, а $b = 528$, то $c = 551$, и получился, с точностью до выбора букв, ребус АБ + ВАГ = ВВД). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы c.

8.5 Можно ли без остатка разрезать клетчатый квадрат размером 8×8 клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек.

8 класс

Второй день

8.6 Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.

8.7 Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?

8.8 Будем называть натуральное число красивым, если в его десятичной записи поровну цифр $0, 1, 2$, а других цифр нет (во избежание недоразумений напомним, что десятичная запись числа не может начинаться с нуля). Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?

8.9 Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают.

8.10 В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера $1, 2, \ldots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?