

Математический бой за славу и честь!

1. Существует ли такое натуральное число N , что и у числа N , и у числа $N^2 - 1$ сумма цифр равна 2021
2. Существует ли такая непериодическая функция f , что при любом действительном x выполнено равенство

$$f(x+1) = f(x+1)f(x) + 1$$

3. По кругу сидит 2021 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из них сказал: «Если моего соседа справа спросить, кем является мой сосед слева, то он ответит — лжецом.». Сколько лжецов за этим столом?
4. Найдите все квадратные трехчлены $x^2 + tx + n$ такие, что числа t и n (не обязательно различные) являются их корнями?
5. Докажите, что не может одновременно выполняться для положительных a, b, c

$$a(1-b) > 1/4$$

$$b(1-c) > 1/4$$

$$c(1-a) > 1/4$$

6. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH . F — точка пересечения прямых EH и AC . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB .

7. Из клетчатого квадрата 2021×2021 вырезали угловой квадрат 6×6 . Можно ли оставшуюся фигуру разрезать на прямоугольники 1×5 ?
8. На первое занятие по олимпиадной математике пришло 7 человек, которые сели по кругу. При этом, если выбрать любых 6 человек, то возможна рассадка, при которой все будут сидеть рядом со своим знакомым. Верно ли, что и вся группа из 7 человек может быть так рассажена?
9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено равенство $AB = BD + CD$. Пусть M — середина диагонали AC . Докажите, что $\angle BMD = 90^\circ$.