

Разнобой по геометрии

- 1 На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иглой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.
- 2 Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2 , S_2 и S_3 , S_3 и S_1 пересекаются в точках A , B и C соответственно. Докажите, что точки A , B и C лежат на одной прямой.
- 3 Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L . Отрезок AK пересекает ω второй раз в точке M . Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности ω .
- 4 В треугольнике ABC AN_1 и BN_2 – высоты; касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке S_1 , а касательная в точке B пересекает AC в точке S_2 ; T_1 и T_2 – середины отрезков AS_1 и BS_2 . Докажите, что T_1T_2 , AB и N_1N_2 пересекаются в одной точке.
- 5 На диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' – центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X . Докажите, что точки A , X , I , D лежат на одной окружности.
- 6 Окружность S находится внутри треугольника ABC . Каждая из окружностей S_1 , S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
- 7 Точка X , лежащая вне непересекающихся окружностей ω_1 и ω_2 , такова, что отрезки касательных, проведённых из X к ω_1 и ω_2 , равны. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, образованного точками касания, совпадает с точкой пересечения общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2 .
- 8 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O . Пусть M и N – центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ADE и ODE . Докажите, что середина меньшей дуги DE лежит на прямой MN .
- 9 На стороне BC треугольника ABC взята точка A' . Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AB в точке M , а серединный перпендикуляр к отрезку $A'C$ пересекает сторону AC в точке N . Докажите, что точка, симметричная

точке A' относительно прямой MN , лежит на описанной окружности треугольника ABC .

- [10] На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2 , BCC_1B_2 и CAA_1C_2 . Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 , пересекаются в одной точке.
- [11] Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I , внешние биссектрисы его углов B и C пересекаются в точке J . Окружность ω_b с центром в точке O_b проходит через точку B и касается прямой CI в точке I . Окружность ω_c с центром в точке O_c проходит через точку C и касается прямой BI в точке I . Отрезки O_bO_c и IJ пересекаются в точке K . Найдите отношение $\frac{IK}{KJ}$.