Перераспределение зарядов

Пример. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

1. Утром на 7 деревьев расселись бакланы. Вечером эти же бакланы сели на 8 деревьев (так, что на каждом дереве есть хотя бы 1 баклан). Докажите, что найдется баклан, у которого утром соседей по дереву было строго больше, чем вечером.

2. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с нею находится больше звёздочек, чем с нею в одном столбце.

3. В библиотеке на полках стоят книги, ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k + 1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.

4. Каждая клетка доски $4 \times n$ покрашена в черный или белый цвет. Каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной черной. Докажите, что черных клеток хотя бы n.

5. На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).

6. Некоторые клетки таблицы покрашены в зеленый. Известно, что для любой зелёной клетки число зелёных клеток в её столбце совпадает с числом зелёных клеток в строке. Докажите, что число столбцов, в которых есть хотя бы одна зелёная клетка, равно числу строк, в которых есть хотя бы одна зеленая клетка.

7. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камешков (возможно, по нескольку в одной клетке). Расположение камешков называется неподвижным, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.

   (a) За одну операцию разрешается снять два камешка с клетки с номером n и добавить один в клетку с номером $n + 1$. Докажите, что неподвижное состояние не зависит от порядка операций.

   (b) За одну операцию разрешается снять по одному камешку с клеток с номерами n и $n + 1$ и добавить камешек в клетку с номером $n + 2$. Докажите, что все неподвижные состояния, в которых на каждой клетке лежит не более одного камешка, одинаковы.

$\boxed{8}$ На турнир по игре в мяч приехало B баскетболистов и V волейболистов. После турнира каждый волейболист сыграл в настольный теннис по крайней мере с одним баскетболистом, а каждый баскетболист — не более чем с десятью волейболистами. Также известно, что у каждого волейболиста соперников-баскетболистов было больше, чем у любого из них — соперников-волейболистов. Докажите, что $V \leqslant \frac{10}{11}B$.

$\boxed{9}$ В классе учатся m мальчиков и d девочек. У каждого мальчика есть хотя бы одна подруга, при этом у него количество подруг хотя бы вдвое больше, чем количество друзей у любой из его подруг. Докажите, что $d > 2m$.

$\boxed{10}$ Пусть есть выпуклый n-угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между двумя вершинами многоугольника содержит по крайней мере одну красную точку. Тогда

$$m \geqslant n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\right).$$

$\boxed{11}$ В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами (i, j) и добавить по фишке в узлы $(i+1, j), (i, j+1)$; при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.

(a) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.

(b) Докажите,что если изначально в узле $(0, 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

$\boxed{12}$ Можно ли за круглым столом рассадить 12 сладкоежек и поставить 28 сахарниц на стол так, чтобы между любыми двумя сладкоежками стояла сахарница?

$\boxed{13}$ В вершинах правильного n—угольника расположены лампочки. Изначально одна горит, остальные выключены. Разрешается выбрать правильный многоугольник с вершинами в точках, где стоят лампочки, все лампочки в котором имеют одинаковое состояние, и все их переключить. Докажите, что нельзя выключить все лампочки.

$\boxed{14}$ Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдётся два с общей стороной.