

Задача 1

Обязательно ли старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков один и тот же человек?

Задача 2

Обязательно ли лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков один и тот же человек?

Определение 1

Множество - неупорядоченная совокупность элементов.

Пример 1. $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 3, 2, 3, 3\}$

Пример 2. $\{\} = \emptyset$

Пример 3. $\{a, \{b, c\}, \{\{d\}, e\}, \emptyset\}$

Определение 2

$a \in A$ - означает, что во множестве A есть элемент a

Определение 3

$B \subseteq A$ - означает, что если $b \in B$, то $b \in A$.

Пример 4. $1 \in \{1, 2, 3\}; \quad \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

Пример 5. $1 \notin \emptyset$.

Пример 6. $\{b, c\} \in \{a, \{b, c\}, \{\{d\}, e\}, \emptyset\}$.

Задача 3

Какие из выражений верны для произвольного x ?

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| • $x \in \{x\}$ | • $\{x, x\} \subseteq \{x\}$ | • $\emptyset \in \{x\}$ |
| • $\{x\} \subseteq \{x\}$ | • $\{x\} \in \{\{x\}\}$ | • $\emptyset \subseteq \{x\}$ |
| • $\{x\} \in \{x\}$ | • $\emptyset \in \emptyset$ | • $\emptyset \subseteq \emptyset$ |

Определение 4

Предикат от x — это такая функция $\varphi(x)$, которая принимает два возможных значения: либо истина, либо ложь (0 или 1)

Пример 7. $\varphi(x) = (x = 239)$ — принимает истинное значение только, если $x = 239$

Определение 5

Чтобы работать с предикатами, нужно познакомиться с *логическими связками*:

- \neg — **отрицание** "не ...",
- \wedge — **конъюнкция** "... и ...",
- \vee — **дизъюнкция** "... или ...",
- \rightarrow — **импликация** "если ..., то ...",
- \leftrightarrow — **эквивалентность** "... тогда и только тогда, когда ...";

и *кванторами*:

- $\forall x$ — **квантор всеобщности** "для любого x верно ..."
- $\exists x$ — **квантор существования** "существует x , такой что верно ..."

Пример 8. $\varphi(x) = (\forall z \exists y : z + y = x)$ — "для любого z найдется y , такие что они в сумме дают x ". Это утверждение всегда верно, если мы рассматриваем предикат на множестве вещественных чисел.

Пример 9. А вот записано утверждение "множества равны тогда и только тогда, когда у них совпадает набор элементов" $\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y)$

Определение 6

$A = \left\{ \underbrace{\quad}_{\text{множество}} \underbrace{x}_{\text{всех иксов}} \underbrace{\quad}_{\text{таких, что выполнено условие}} \underbrace{\varphi(x)}_{\varphi(x)} \right\}$, где $\varphi(x)$ предикат от x .

Парадокс 1 (Рассел)

Рассмотрим множество $A = \{x \mid x \notin x\}$. То есть множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего собственного элемента. Что тогда можно сказать про утверждение $A \in A$?

Определение 7

Пусть даны множества A и B . Тогда их **пересечением** называется множество:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Пусть дано семейство множеств $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Тогда его пересечением называется **множество**, состоящее из элементов, которые входят во все множества семейства:

$$\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in A, x \in M_\alpha\}.$$

Пример 10. $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$

Пример 11. $x \cap \emptyset = \emptyset$

Пример 12. $\bigcap \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 9\}, \{0, 2, 3\}\} = \{2, 3\}$

Определение 8

Пусть даны два множества A и B . Тогда их **объединением** называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Пусть дано семейство множеств $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Тогда его объединением называется множество, состоящее из всех элементов всех множеств семейства:

$$\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in A, x \in M_\alpha\}.$$

Пример 13. $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Пример 14. $x \cup \emptyset = x$

Пример 15. $\bigcup \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 9\}, \{0, 2, 3\}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$

Определение 9

Пусть даны два множества A и B . Тогда их **разностью** называется множество

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Пример 16. $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$

Пример 17. $\{3, 4, 5\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4, 5\}$

Определение 10

Пусть даны два множества A и B . Тогда их *симметрической разностью* называется множество

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пример 18. $\{1, 2, 3\} \triangle \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 4, 5\}$

Определение 11

Равенство называется *тождественно верным*, или *тождеством*, если оно истинно для любых значений входящих в него переменных.

Задача 4

Какие из равенств тождественно верны для множеств X, Y, Z ? Приведите контрпримеры к неверным тождествам.

- | | |
|---|---|
| • $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ | • $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ |
| • $X \cup Y = Y \cup X$ | • $X \cap Y = Y \cap X$ |
| • $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ | • $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ |
| • $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$ | • $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$ |
| • $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup Y$ | • $(X \cap Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cap Y$ |
| • $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$ | • $(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z)$ |

Задача 5

Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции \cap, \cup, \setminus , не является тождеством, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

Задача 6*

Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A и B с помощью операций пересечения, объединения и разности? Из n переменных? (Два выражения считаются одинаковыми, если они тождественно равны.)

Определение 12

Определим *упорядоченную* пару X_1 и X_2 как $(X_1, X_2) := \{\{X_1\}, \{X_1, X_2\}\}$

Пример 19. $(1, 1) = \{\{1\}, \{1, 1\}\} = \{\{1\}\}$.

Определение 13

Пусть даны два множества X и Y . Тогда их *декартовым произведением* называется множество упорядоченных пар

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

Будем обозначать $A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}}$.

Пример 20. $\{a, b\} \times \{0, 1, 2\} = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$.

Пример 21. $\{a, b\}^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Пример 22. $\{1\}^6 = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$.

Определение 14

Под *бинарными отношениями* между X и Y мы будем понимать произвольные подмножества $X \times Y$. В частности, при $X = Y$ мы будем называть их еще *бинарными отношениями на X* . Для удобства будем писать xRy вместо $(x, y) \in R$.

Пример 23. *Тождественное* отношение на X

$$id_x := \{(x, x) \mid x \in X\} = \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}.$$

Определение 15

Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ на X будем называть:

- *рефлексивным*, если $\forall x(x \in X \rightarrow xRx)$;
- *иррефлексивным*, если $\neg \exists x(x \in X \wedge xRx)$;
- *транзитивным*, если $\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$;
- *симметричным*, если $\forall x \forall y(xRy \rightarrow yRx)$;
- *антисимметричным*, если $\forall x \forall y((xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y)$.

Пример 24. Отношение "=" на вещественных числах является *рефлексивным*.

Пример 25. Отношение ">" на вещественных числах является *иррефлексивным*.

Пример 26. Отношение параллельности на множестве прямых на плоскости является *транзитивным* и *симметричным*.

Пример 27. Отношение " \leq " на вещественных числах является *антисимметричным*.

Определение 16

Будем говорить, что отношение R является:

- **предпорядком** на X , если R рефлексивно и транзитивно;
- **строгим частичным порядком** на X , если R иррефлексивно и транзитивно;
- **частичным порядком** на X , если R рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
- **эквивалентностью** на X , если R рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример 28. Отношение делимости на натуральных числах является *предпорядком*.

Пример 29. Отношение ">" (строго больше) на вещественных числах является *строгим частичным порядком*.

Пример 30. Отношение " \geq " (нестрого больше) на вещественных числах является *частичным порядком*.

Пример 31. Отношение параллельности на множестве прямых на плоскости является *эквивалентностью*.

Определение 17

Пусть \approx — эквивалентность на X . Для каждого $x \in X$ под **классом эквивалентности** x по \approx понимается множество $[x]_{\approx} := \{u \in X \mid x \approx u\}$

Определение 18

Будем называть Y (взаимно, или попарно) **дизъюнктивным**, если оно удовлетворяет условию $\forall u \forall v ((u \in Y \wedge v \in Y \wedge u \neq v) \rightarrow u \cap v = \emptyset)$

Будем говорить, что Y является **разбиением** X , если Y дизъюнктивно, $\emptyset \notin Y$ и $\bigcup Y = X$.

Задача 7

Показать:

- (а) Если Y — разбиение X , то $\mathcal{E}_Y := \{(u, v) \in X^2 \mid \exists y(y \in Y \wedge u \in y \wedge v \in y)\}$ — эквивалентность на X , причём X/\mathcal{E}_Y равно Y .
 (б) Если \approx — эквивалентность на X , то X/\approx — разбиение X , причём $\mathcal{E}_{X/\approx}$ равно \approx .

Задача 8

Пусть R — предпорядок на X . Тогда

- (а) $\mathcal{S}_R := \{(u, v) \in X^2 \mid uRv \wedge vRu\}$ — эквивалентность на X ;
 (б) $R^\# := \{([u]_{\mathcal{S}_R}, [v]_{\mathcal{S}_R}) \mid u \in X \wedge v \in X \wedge uRv\}$ — частичный порядок на X/\mathcal{S}_R .

Задача 9

Доказать:

- (а) Если R — строгий частичный порядок на X , то $R \cup id_X$ — частичный порядок на X ;
 (б) Если R — частичный порядок на X , то $R \setminus id_X$ — строгий частичный порядок на X .

Определение 19

Множество $\text{dom}(R) := \{u \in X \mid \exists v : uRv\}$, называют **областью определения** R .

Определение 20

Множество $\text{range}(R) := \{v \in Y \mid \exists u : uRv\}$, называют и **областью значений** R .

Определение 21

Для каждого $U \subseteq X$ множество

$$R[U] := \text{range}(R \cap U \times Y) = \{v \in Y \mid \exists u(u \in U \wedge uRv)\}$$

называется **образом** U относительно R .

Пример 32. Рассмотрим строгий частичный порядок " $<$ " на $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогда $<[\{4, 5, 8\}] = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Определение 22

Обратное отношение к R определяется как $R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$

Пример 33. Рассмотрим *частичный порядок* " \geq " на $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогда \geq^{-1} равно \leq .

Определение 23

Для каждого $V \subseteq Y$ образ V под действием R^{-1} называется **прообразом** V относительно R .

Пример 34. $\text{range}(R) = \text{dom}(R^{-1}) = R[X]$.

Пример 35. $\text{range}(R^{-1}) = \text{dom}(R) = R^{-1}[Y]$.

Определение 24

Бинарные отношения можно естественным образом комбинировать: для любых $R \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$ множество

$$R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y(xRy \wedge yQz)\}$$

называется **композицией** R и Q .

Определение 25

Говорят, что $R \subseteq X \times Y$ **функционально**, если

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 ((xRy_1 \wedge xRy_2) \rightarrow y_1 = y_2).$$

Далее, R называют **функцией** из X в Y , и пишут $R : X \rightarrow Y$, если $\text{dom}(R) = X$ и R функционально.

Определение 26

Пусть $f : X \rightarrow Y$. Значит, для любого $x \in X$ имеется единственное $y \in Y$ такое, что $(x, y) \in f$, которое называется **значением** f в x и обозначается через $f(x)$.

Пример 36. $\text{range}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Определение 27

Для каждого $U \subseteq X$ **ограничение** (или **сужение**) f на U определяется как

$$f|_U := f \cap U \times Y.$$

$f|_U$ будет функцией из U в Y . Вообще, если $f : X \rightarrow Y$ и $g : U \rightarrow Y$ таковы, что $U \subseteq X$ и $f|_U = g$, то g называют **ограничением** f , а f **расширением** g .

Определение 28

Обозначим $Y^X := \{f \mid f : X \rightarrow Y\}$. Под *двухместными*, *трехместными* и так далее функциями из X в Y понимают элементы Y^{X^2} , Y^{X^3} и так далее.

Определение 29

Функцию f из X в Y называют:

сюръективной, если $\text{range}(f) = Y$;

инъективной, если f^{-1} функционально.

биективной, если f сюръективна и инъективна.

Сюръективные функции также называют **сюръекциями**, инъективные **инъекциями**, а биективные **биекциями**.

Определение 30

Введём особые символы для часто использующихся множеств.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ - множество *натуральных* чисел.

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ - множество натуральных чисел и ноль.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ - множество *целых* чисел.

\mathbb{Q} - множество *рациональных* чисел.

\mathbb{R} - множество *вещественных* чисел.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - множество *иррациональных* чисел.

\mathbb{A} - множество *алгебраических* чисел (вещественные числа, которые могут быть корнями многочленов с целыми коэффициентами).

Пример 37. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$.

Пример 38. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$ является инъективной.

Пример 39. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$ является сюръективной.

Пример 40. $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, f(x) = \frac{1}{x}$ является биективной.

Определение 31

$|A| = |B|$ — множества A и B **равномощны** — между ними есть *биекция*.

Задача 10

Покажите, что для любых X, Y, Z верно:

- $|X \times Y| = |Y \times X|$
- если $|X| = |Y|$, то $|X \times Z| = |Y \times Z|$
- $|(X \times Y) \times Z| = |X \times (Y \times Z)|$
- $|Z^{X \times Y}| = |(Z^Y)^X|$

Пример 41. Если $|A| = |\mathbb{N}|$, то A называется **счётным** множеством (его элементы можно пересчитать).

Определение 32

Для конечных множеств A определим $|A|$ — **мощность** множества — количество элементов в нём.

Пример 42. $|\{a, \{b, c\}, \{\{d\}, e\}, \emptyset\}| = |\{0, 1, 2, 3\}| = 4$.

Определение 33

Говорят, что X по мощности меньше или равно Y , и пишут $X \preceq Y$ или $|X| \leq |Y|$, если существует инъекция из X в Y .

Теорема 1 (Кантора–Шрёдера–Бернштейна)

Если $X \preceq Y$ и $Y \preceq X$, то $|X| = |Y|$.

Определение 34

$A^* = \{\emptyset\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \dots$ — множество всех конечных последовательностей.

Пример 43. $\{a, b\}^* = \{\emptyset, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$.

Определение 35

$\mathcal{P}(A) = 2^A$ — множество всех подмножеств множества A .

Пример 44. $2^{\{1,2,3\}} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Задача 11

- Докажите, что $|\text{Чётных положительных}| = |\mathbb{N}|$.
- Докажите, что $|\text{Нечётных положительных}| = |\mathbb{N}|$.
- Докажите, что если $|A| = |B| = |\mathbb{N}|$, то $A \cup B = |\mathbb{N}|$.
- Докажите, что $|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$.
- Докажите, что $|(0, 1)| = |2^{\mathbb{N}}|$.
- Докажите, что $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$.
- Докажите, что $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$.
- $|\mathbb{Z}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{Q}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{N}^2| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{N}^*| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{A}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{R}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{R}^*| \stackrel{?}{=} |\mathbb{R}|$.

Теорема 2 (Кантора)

Для любого A верно $|2^A| \neq |A|$.

Теорема 3 (Континуум-гипотеза)

Для любого A если $\mathbb{N} \preccurlyeq A \preccurlyeq \mathbb{R}$, то либо $|A| = |\mathbb{N}|$, либо $|A| = |\mathbb{R}|$.