Гомотетия (поворотная)

Основные свойства поворотной гомотетии:

$\boxed{1}$ Если на плоскости даны непараллельные отрезки AB и $A'B'$, то поворотная гомотетия, переводящая A в A', а B в B', определяется однозначно. Если обозначить точку пересечения прямых AB и $A'B'$ за X, то центр искомой поворотной гомотетии лежит на втором пересечении окружностей, описанных около треугольников $AA'X$ и $BB'X$.

$\boxed{2}$ Если точка O является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в CD, то она является и центром поворотной гомотетии, переводящей AC в BD.

$\boxed{3}$ Пусть две окружности пересекаются в точках P и Q. Пусть два велосипедиста A и B одновременно выезжают из точки P, один по первой окружности, а другой по второй, причем их угловые скорости на соответствующих окружностях совпадают. Тогда прямая AB всегда будет проходить через точку Q.

$\boxed{4}$ Докажите, что середины отрезков AB лежат на одной окружности.

$\boxed{5}$ Докажите, что существует точка, равноудалённая от точек A и B в каждый момент времени.

Задачи:

$\boxed{1}$ Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причём $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что $\angle DHQ = 90^\circ$.

$\boxed{2}$ На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$; CE — высота треугольника. Докажите, что угол LEM прямой.

$\boxed{3}$ Прямые, содержащие стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точке O. Точка M — середина AB, N — середина CD. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCO, ADO и MNO лежат на одной прямой.

$\boxed{4}$ На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Описанная окружность треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD, в точке K. Точка M — середина BC, N — середина AD. Докажите, что точки B, M, N и K лежат на одной окружности.

$\boxed{5}$ Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ повернули относительно их середин на 90° против часовой стрелки, получились отрезки A_0B_0 и C_0D_0. Докажите, что $B_0C_0 = A_0D_0$.

6 Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. На прямой AB отмечена такая точка X, что $A_1X \perp B_1C_1$. Окружности, описанные около треугольников ABC и AB_1C_1, пересекаются второй раз в точке Z. Докажите, что $\angle XZC_1 = 90°$.

7 Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник такой, что $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ и $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP делит отрезок CD пополам.

8 Имеется два правильных пятиугольника с одной общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются по часовой стрелке цифрами от 1 до 5, причём в общей вершине ставится цифра 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Доказать, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.

9 a) Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 проходят через точку O. Окружности ω_1 и ω_2 повторно пересекаются в точке A_1, окружности ω_2 и ω_3 — в точке A_2, окружности ω_3 и ω_1 — в точке A_3. На окружности ω_1 выбрана произвольная точка X_1. Прямая X_1A_1 повторно пересекает окружность ω_2 в точке X_2, прямая X_2A_2 повторно пересекает окружность ω_3 в точке X_3, прямая X_3A_3 повторно пересекает окружность ω_1 в точке X_1'. Докажите, что $X_1 = X_1'$.

b) Докажите аналогичное утверждение для n окружностей.

10 Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO — прямой.

11 Окружность с центром O проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC повторно в точках K и N соответственно. Пусть M — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и KBN (отличная от B). Докажите, что $\angle OMB = 90°$.

12 $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, X — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку X, пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках N_1 и N_2, и окружности, описанные около треугольников ABX и CDX, в точках M_1 и M_2. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

13 Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $BD = CD$, $\angle BDC = 120°$. Вне треугольника ABC взята такая точка E, что $AE = CE$, $\angle AEC = 60°$ и точки B и E находятся в разных полуплоскостях относительно AC. Докажите, что $\angle AFD = 90°$, где F — середина отрезка BE.

$\boxed{14}$ На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCA = \angle LBA = \alpha$. Из точки A опущены перпендикуляры AE и AF на прямые BL и CK соответственно. Точка D — середина стороны BC. Найдите углы треугольника DEF.

$\boxed{15}$ На сторонах треугольника ABC во внутреннюю сторону построены такие треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1, что $\angle AC_1B+\angle BA_1C+\angle CB_1A = 360^\circ$ и $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle BAC_1 + \angle BCA_1$.

$\boxed{16}$ На сторонах четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построили правильные треугольники ABK, BCL, CDM и DAN. X и Y — середины отрезков BL и AN, Z — центр треугольника CMD.

a) Докажите, что $XY \perp KZ$.

b) Найдите отношение $XY : KZ$.

$\boxed{17}$ AB — хорда окружности, M и N — середины дуг на которые делят окружность точки A и B. При повороте вокруг точки A на некоторый угол точка B переходит в B', а точка M — в M'. Докажите, что отрезки, соединяющие середину отрезка BB' с точками M' и N, перпендикулярны.