

### Финальная олимпиада

1. Лиза нарисовала на бесконечном листе бумаги несколько окружностей, которые разделили весь лист на части. Покажите, что она может покрасить эти части в белый и чёрный цвета так, чтобы соседние части, это те, что имеют общую дугу границы, были бы разного цвета.
2. На каждой клетке-треугольничке треугольной доски со стороной 7 сидит лягушка. В некоторый момент все лягушки прыгают и приземляются на соседние (по стороне) клетки этой доски. Докажите, что тогда найдутся по крайней мере 7 пустых клеток.
3. Васе очень сильно понравилась задача про кубик сыра и мышь поэтому, придя домой, он захотел сделать 15 кубических котлет. Дома была всего одна большая сковородка. Котлеты оказались довольно маленькими, так что на одну сковородку помещается целых 10 кубо-котлет. Васе уже не терпится их съесть и он хочет приготовить их как можно быстрее. Он посчитал, что каждую котлету нужно пожарить с каждой стороны в течение одной минуты. Объясните Васе, как ему нужно действовать, и докажите, что быстрее точно не получится.
4. Сколько существует различных пятизначных чисел, в которых цифры идут в порядке убывания?
5. Сколькими способами можно выбрать две кости домино так, чтобы их можно было приложить друг к другу (то есть, чтобы какое-то число встречалось на обоих костях).
6. В стране несколько мегаполисов (из которых выходит по 43 дороги) и несколько провинциальных городов (из которых выходит по 4 дороги). Докажите, что из любого мегаполиса можно проехать в некоторый другой мегаполис.
7. На доске написаны числа 2, 3, 9. Разрешается взять любые два из написанных чисел  $a$  и  $b$ , стереть их, а вместо них написать числа  $3a - 2b$  и  $3b - 2a$ . Можно ли несколькими такими операциями получить числа 5, 6, 7?

---

8. Все жители острова прошли социальный опрос. Некоторые из них заявили, что на острове четное число рыцарей, а остальные — что на острове нечетное число лжецов. Может ли число жителей острова быть равно 2023? Известно, что хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец на острове есть.