

Тождественные преобразования

[1] Чему равняется сумма всех натуральных делителей числа $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$.

[2] Для каждого натурального $n \geq 2$ вычислите сумму

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

(В знаменателях стоят все возможные произведения нескольких из чисел $1, 2, \dots, n$. Произведение одного числа равно самому этому числу).

[3] Упростите выражение $(1 + 3 + 3^2) \cdot (1 + 3^3 + 3^6) \cdot (1 + 3^9 + 3^{18}) \cdot \dots \cdot (1 + 3^{3^n} + 3^{2 \cdot 3^n})$

[4] На доске записаны 10 различных чисел. Профессор Odd вычислил всевозможные произведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве (по 1, по 3, по 5, по 7, по 9), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на листок. Аналогично профессор Even вычислил все возможные произведения нескольких чисел, записанных на доске, взятых в четном количестве (по 2, по 4, по 6, по 8, по 10), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на свой листок. Оказалось, что сумма на листке профессора Odd на 1 больше, чем сумма на листке профессора Even. Докажите, что одно из чисел, выписанных на доске, равно 1.

[5] Рассмотрим все произведения некоторого количества чисел из $2, 3, \dots, n$ (произведение одного числа равно самому этому числу). Найдите сумму всех таких произведений, в которых чётное количество чётных сомножителей.

[6] Про натуральное число n известно, что сумма его натуральных делителей является степенью двойки. Докажите, что тогда и количество его делителей является степенью двойки.