Гомотетия

Определение 1 Пусть заданы точка O и ненулевое число k. Тогда гомотетия с центром O и коэффициентом k — это преобразование плоскости, переводящее каждую точку плоскости A в A' так, что $OA' = k \cdot OA$ и O, A, A' лежат на одной прямой. Гомотетию с такими параметрами обозначают H_O^k.

Докажем основные свойства гомотетии:

$\boxed{1}$ Каждая фигура переходит в фигуру, подобную изначальной, и коэффициент подобия равен $|k|$;

$\boxed{2}$ Прямая переходит в прямую, параллельную исходной прямой;

$\boxed{3}$ Окружность переходит в окружность, и радиус увеличивается в $|k|$ раз.

Задачи:

$\boxed{1}$ На сердечко с площадью S и периметром d подействовали гомотетией с коэффициентом 5, какая стала площадь и какой периметр у большого сердечка?

$\boxed{2}$ Две окружности ω, Ω касаются в точке A, через нее проведём две прямые, которые пересекают ω в B_1, C_1, а Ω в B_2, C_2 соответственно. Докажите, что $B_1C_1 \parallel B_2C_2$

$\boxed{3}$ Первая окружность гомотетична второй с коэффициентом 0.25, а вторая гомотетична третей с коэффициентом 5. Какой радиус у третей окружности, если первая радиуса 12.

$\boxed{4}$ Докажите, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

$\boxed{5}$ Две окружности радиусов 14 и 35 касаются внутренним образом в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 12$.

$\boxed{6}$ Внутри угла расположены три окружности S_1, S_2, S_3, каждая из которых касается двух сторон угла, причем окружность S_2 касается внешним образом окружностей S_1 и S_3. Известно, что радиус окружности S_1 равен 1, а радиус окружности S_3 равен 9. Чему равен радиус окружности S_2?

$\boxed{7}$ Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

$\boxed{8}$ Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM и DAM образуют квадрат.

$\boxed{9}$ Между двумя параллельными прямыми расположили окружность радиуса 12, касающуюся обеих прямых, и равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной прямой, а вершина — на другой. Известно, что треугольник и окружность имеют ровно одну общую точку, и что эта точка лежит на вписанной окружности треугольника. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.

$\boxed{10}$ **Лемма Архимеда**: Пусть в окружности ω проведена хорда AB, и ещё одна окружность касается ω в точке C и отрезка AB в точке D. Тогда прямая CD проходит через середину дуги AB, не содержащей точки C.

$\boxed{11}$ На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

$\boxed{12}$ В окружности ω проведена хорда AB. Найдите геометрической место точек пересечения медиан треугольников ABC, где $C \in \omega$.

$\boxed{13}$ Две окружности касаются внутренним образом в точке А. Секущая пересекает окружности в точках M, N, P и Q (точки расположены на секущей в указанном порядке). Докажите, что $\angle MAP = \angle NAQ$.

$\boxed{14}$ На плоскости проведены параллельные прямые l_1 и l_2. Окружности ω_1 и ω_2 лежат между этими прямыми. Окружность ω_1 касается l_1 в точке A, окружность ω_2 касается l_2 в точке B, окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга в точке C. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

$\boxed{15}$ Внутри треугольника ABC выбрана точка X. Докажите, что прямые, проходящие через середины сторон AB, AC, BC параллельно прямым CX, BX, AX соответственно, пересекаются в одной точке.

$\boxed{16}$ Пусть M и P — точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC со стороной BC, MN — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, N и P лежат на одной прямой.

$\boxed{17}$ На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись точки M и N такие, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

$\boxed{18}$ Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$ и $AD > BC$), в которой на основаниях выбраны точки K и L так, что прямые AB, CD и KL пересекаются в одной точке. На отрезке KL выбраны такие точки P и Q, что $\angle AQD = \angle ABC$ и $\angle BPC = \angle BAD$. Докажите, что четырёхугольник $ABPQ$ вписанный.