

Китайская теорема об остатках

- [1] Найдите остаток от деления натурального числа на 115, если известно, что остаток от деления его на 5 равен 3, а остаток от деления на 23 равен 17.
- [2] Найдите остаток от деления натурального числа на 105, если известно, что остаток от деления его на 3 равен 1, остаток от деления на 5 равен 2, а остаток от деления на 7 равен 1.
- [3] Найдите остаток от деления натурального числа на 30, если известно, что остаток от деления его на 15 равен 7, а остаток от деления на 6 равен 4.
- [4] Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Какое наименьшее число солдат могло быть у генерала?
- [5] При каких целых n число $n^2 + 3n + 1$ делится на 55?
- [6] Назовем число хорошим, если оно делится на квадрат натурального числа > 1 . При каких N найдется N последовательных хороших чисел? (Пример для $N = 3$: 48, 49, 50).
- [7] Докажите, что найдутся 100 последовательных чисел, каждое из которых не является простым числом или степенью простого числа;
- [8] Назовём натуральное число *свободным от квадратов*, если оно не делится ни на один квадрат целого числа. Докажите, что существует 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного числа, свободного от квадратов.
- [9] Назовём натуральное число *позитивным*, если оно не является степенью натурального числа. Докажите, что при любом натуральном n можно указать n последовательных *позитивных* чисел.
- [10] Докажите, что найдутся 2022 последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет не менее трех различных простых делителей.
- [11] Докажите, что найдутся гуголплекс $\left(10^{10^{100}}\right)$ последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет не менее гугола $\left(10^{100}\right)$ различных простых делителей.