

Транснеравенство

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$. И пусть числа c_1, c_2, \dots, c_n — некоторая перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Во всех предложенных задачах подразумевается, что рассматриваемые числа положительны.

[1] Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

[2] Докажите, что

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

[3] Докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

[4] Докажите, что

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leq \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}.$$

[5] Докажите неравенство

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

[6] Докажите неравенство

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq \frac{3}{2}(a + b + c + d).$$

[7] Докажите неравенство

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

[8] **Неравенство Чебышева.** Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$