Лемма об уточнении показателя

Лемма об уточнении показателя состоит из трёх частей

Пусть x и y — различные ненулевые целые числа, p — нечетное простое число, не являющееся делителем x и y и такое, что $x - y \ \vdots \ p$. Тогда для любого натурального n выполнено равенство $\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n)$.

Пусть x и y — различные целые числа, p — нечетное простое число, не являющееся делителем x и y и такое, что $x + y \ \vdots \ p$. Тогда для любого нечетного натурального n выполнено $\nu_p(x^n + y^n) = \nu_p(x + y) + \nu_p(n)$.

Пусть x и y — различные нечетные целые числа. Тогда для любого натурального n выполнено $\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(x + y) + \nu_2(n) - 1$.

1. Пусть p — простое число, числа a и b не делятся на p, а $a - b$ — делится.

   (a) Докажите, что $\nu_p(a^p - b^p) > \nu_p(a - b)$

   (b) Докажите, что $\nu_p(a^s - b^s) = \nu_p(a - b)$, если s не делится на p

   (c) Докажите, что $\nu_p(a^k - b^k) \geqslant \nu_p(a - b) + \nu_p(k)$

   (d) Докажите, что если $p > 2$, то $\nu_p(a^p - b^p) = \nu_p(a - b) + 1$

   (e) Докажите лемму в случае, когда $p > 2$.

   (f) Докажите лемму в случае, когда $p = 2$ и $a - b \ \vdots \ 4$.

   (g) Докажите лемму в случае, когда $p = 2$ и $a - b \ \vdots \ 2$ но не делится на 4.

2. Используя *лемму об уточнении показателя*, найдите степень вхождения тройки в число $5^{18} - 2^{18}$.

3. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, p такие, что p — простое и $p^x - y^p = 1$.

4. Дано простое число p и натуральные числа a и n. Докажите, что если $2^p + 3^p = a^n$, то $n = 1$.

5. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

6. Решить уравнение $3^x = 2^x \cdot y + 1$ в натуральных числах.

7. Дано натуральное число n, не делящееся ни на один точный квадрат, больший 1. Докажите, что не существует пары взаимно простых чисел (x, y) такой, что $x^n + y^n$ делится на $(x + y)^3$.

8. Пусть натуральные числа x, y, p, n, k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число $n > 1$ — нечетное, а число p — простое нечетное, то n является степенью числа p с натуральным показателем.

9. Докажите, что если $3^n - 2^n = p^a$ для некоторых натуральных n, a и простого p, то тогда n — простое.

$\boxed{10}$ Пусть положительные числа a и b таковы, что $a^k - b^k$ является натуральным числом для любого натурального k. Докажите, что a и b — натуральные

$\boxed{11}$ Найдите все такие натуральные n, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном $k > 1$ выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

$\boxed{12}$ На сколько нулей заканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

$\boxed{13}$ Пусть m — нечетное натуральное число, $m > 3$. Найти наименьшее натуральное n, такое, что $m^n - 1 \ \vdots \ 2^{2024}$.

$\boxed{14}$ Найдите все такие натуральные $n > 1$, что $2^n + 1$ делится на n^2.