

Разнойбой

- [1] Число $\frac{3}{2}$ является корнем многочлена $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Найдите хотя бы один корень многочлена $a_0x^4 + 3a_1x^3 + 9a_2x^2 + 27a_3x + 81a_4$.
- [2] Известно, что $abc = 1$, и что $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что по меньшей мере одно из чисел a, b и c равно 1.
- [3] Докажите, что если $P(0)$ и $P(1)$ нечетные числа, то многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.
- [4] Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 2024$ имеет бесконечно много решений.
- [5] Три стороны четырёхугольника в порядке обхода равны 7, 1 и 4. Найдите четвёртую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его диагонали перпендикулярны.
- [6] На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M , отличная от C . Докажите, что $MA + MB > CA + CB$.
- [7] Рассмотрим треугольник ABC . Пусть r — центр вписанной окружности, r_a, r_b, r_c — центры соответствующих внеписанных окружностей. Докажите что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

- [8] Рассмотрим треугольник ABC . Пусть r — центр вписанной окружности, r_a, r_b, r_c — центры соответствующих внеписанных окружностей. Докажите что

$$S_{\Delta} = \sqrt{rr_ar_br_c}$$

- [9] За круглым столом совещались $2n$ депутатов. После перерыва эти же $2n$ депутатов расселись вокруг стола, но уже в другом порядке. Доказать, что найдутся два депутата, между которыми как до, так и после перерыва сидело одинаковое число человек.
- [10] В классе 20 учеников, причём каждый дружит не менее, чем с 14 другими. Можно ли утверждать, что найдутся четыре ученика, которые все дружат между собой?
- [11] Можно ли расставить по кругу 100 цифр так, чтобы каждая двузначная комбинация от 00 до 99 при движении по часовой стрелке встречалась ровно один раз?
- [12] Город представляет из себя квадрат 5×5 , в котором каждая сторона квартала квадрата участок улицы длины 500 метров. Какой наименьший путь придется проделать катку, чтобы заасфальтировать улицы?

- 13] Натуральное число n таково, что $[n, n+1] > [n, n+2] > \dots > [n, n+35]$. Докажите, что $[n, n+35] > [n, n+36]$
- 14] На длинной полоске написана десятичная запись числа $3^{20202021}$. Саша разрезал полосу на три куска. Изучив числа, написанные на этих кусках, Саша заявил, что каждое из этих трех чисел является степенью тройки. Докажите, что он ошибается.
- 15] Три натуральных числа таковы, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что эти три числа имеют общий делитель, больший единицы.