Вписанные углы

1. Даны две окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Прямая, проходящая через X, пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке C. Другая прямая, проходящая через Y, первую окружность пересекает в точке B, а вторую — в точке D. Докажите, что $AB \parallel CD$.

2. В окружность вписан шестиугольник. Найдите сумму углов при трёх его несоседних вершинах.

3. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_2A пересекает первую окружность в точке C. Докажите, что точки O_1, O_2, B, C лежат на одной окружности.

4. Докажите, что в равнобедренной трапеции вершины боковой стороны, точка пересечения диагоналей и центр описанной окружности лежат на одной окружности.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ Рассмотрим точки пересечения биссектрис его углов A и B, B и C, C и D, D и A. Докажите, что эти четыре точки являются вершинами вписанного четырёхугольника.

6. На хорде AB окружности с центром в точке O выбрана точка C. Описанная окружность треугольника AOC пересекает исходную окружность в точке D. Докажите, что $BC = CD$.

7. Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке M, K — точка пересечения биссектрис углов A и D. Докажите, что точки A, M, K, D лежат на одной окружности.

8. Пусть дан треугольник ABC, и в точке B построена касательная к описанной окружности треугольника ABC. Рассмотрим произвольную прямую, параллельную этой касательной, и отметим точки D и E пересечения с прямыми AB и BC соответственно. Докажите, что четыре точки A, C, D, E лежат на одной окружности.

9. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг AB и CD, параллельна биссектрисе угла AOB.

10. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Диаметр описанной окружности совпадает с диагональю AC. Докажите, что модули разностей длин его противоположных сторон равны.

11. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая l, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.