

1 Топология

Определение 1

Топологическое пространство — это пара (X, Ω) , где $\Omega \subset 2^X$ и выполнено 3 свойства:

- 1) $\emptyset, X \in \Omega$,
- 2) $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega$,
- 3) $A_i \in \Omega, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \Omega$.

Элементы множества Ω называются **открытыми** множествами.

Если A — *открыто*, то $X \setminus A$ — **замкнуто**.

Задача 1

Переформулируйте аксиомы для замкнутых множеств.

Пример 1. Топология называется *тривиальной* или *антидискретной*, если $\Omega = \{\emptyset, X\}$.

Задача 2

Докажите, что *тривиальная* топология — топология.

Пример 2. Топология называется *дискретной*, если $\Omega = 2^X$.

Задача 3

Докажите, что *дискретная* топология — топология.

Задача 4

Пусть X есть луч $[0, +\infty)$, а Ω состоит из \emptyset , X и всевозможных лучей $(a, +\infty)$, где $a > 0$.

Докажите, что Ω — топология на X .

Такая топология называется топология *стрелки*

Задача 5

Пусть X есть плоскость. Является ли топологической структурой набор множеств, состоящих из \emptyset , X и открытых кругов с центром в начале координат и всевозможными радиусами?

Задача 6

Пусть X состоит из четырёх элементов: $X = \{a, b, c, d\}$. Выясните, какие из следующих трёх наборов его подмножеств являются топологическими структурами в X (т.е. удовлетворяют аксиомам топологической структуры):

- 1) $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}$;
- 2) $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}$;
- 3) $\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$.

Задача 7

Свойства замкнутых множеств. Докажите что:

- 1) Пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто;
- 2) Объединение любого конечного набора замкнутых множеств замкнуто;
- 3) Пустое множество и всё пространство (т.е. всё множество — носитель топологической структуры) замкнуты.

Определение 2

База топологии — некоторый набор открытых множеств, такой, что всякое непустое открытое множество представимо в виде объединения множеств из этого набора.

Пример 3. Всевозможные интервалы составляют базу стандартной топологии на \mathbb{R} .

Задача 8

Докажите эквивалентные определения базы:

- 1) Совокупность Σ открытых множеств является базой топологии Ω , когда для всякого множества $U \in \Omega$ и всякой точки $x \in U$ существует такое множество $V \in \Sigma$, что $x \in V \subseteq U$.
- 2) Совокупность Σ подмножеств множества X является базой некоторой топологии в X , когда X есть объединение множеств из Σ и пересечение любых двух множеств из Σ представляется в виде объединения множеств из Σ .

Задача 9

Рассмотрим следующие три набора подмножеств плоскости \mathbb{R}^2 :

- 1) набор Σ_2 , состоящий из всевозможных открытых кругов (т.е. кругов, в которые не включаются ограничивающие их окружности);
- 2) набор Σ_∞ , состоящий из всевозможных открытых квадратов (квадратов без граничных точек — сторон и вершин), стороны которых параллельны координатным осям (они задаются неравенствами вида $\max\{|x - a|, |y - b|\} < r$);

3) набор Σ_1 , состоящий из всевозможных открытых квадратов, стороны которых параллельны биссектрисам координатных углов (они задаются неравенствами вида $|x - a| + |y - b| < r$).

Докажите, что каждый из наборов Σ_2 , Σ_∞ и Σ_1 служит базой некоторой топологической структуры в \mathbb{R}^2 , и структуры, определяемые этими базами, совпадают.

Задача 10*

Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, образуют базу некоторой топологии в \mathbb{N} .

С помощью этой топологии докажите, что множество простых чисел бесконечно.

Воспользуйтесь тем, что в противном случае множество $\{1\}$ было бы открытым (?!).

Определение 3

Если Ω_1 и Ω_2 — топологические структуры в множестве X и $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то говорят, что структура Ω_2 *тоньше*, чем Ω_1 , а Ω_1 — *грубее*, чем Ω_2 .

Пример 4. Дискретная топология самая тонкая, а антидискретная самая грубая.

2 Метрическое пространство

Определение 4

Метрическое пространство — это пара (X, d) , где $d : X \times X \rightarrow R_+$ и выполнено 3 свойства:

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- 2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$,
- 3) Неравенство треугольника $\forall x, y, z$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

d называется **метрикой** или **расстоянием**

Пример 5. $\left(\mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \right)$ — Евклидово расстояние

Задача 11

Докажите, что *Евклидово расстояние* — метрика

Пример 6. $(X, d), d = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$ — метрика лентя, дискретная метрика

Задача 12

Докажите, что *дискретная метрика* — метрика

Определение 5

$\|x\|_p = p^{-\nu_p(x)}$ — p -адическая норма

Пример 7. $(\mathbb{Q}, d), d(r, s) = \|r - s\|_p$ — p -адическая метрика

Задача 13

Докажите, что p -адическая метрика — метрика

Пример 8. $(\mathbb{R}^n, d), d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$ — метрика ℓ_p

Задача 14

Докажите, что метрика ℓ_p — метрика

Определение 6

(X, d) — метрическое пространство. $r > 0$

Открытый шар — $B_r(x_0) = \{y \in X \mid d(y, x_0) < r\}$.

Замкнутый шар — $\overline{B_r(x_0)} = \{y \in X \mid d(y, x_0) \leq r\}$.

Замкнутый шар, также называют **диском** и обозначают $D_r(x_0) = \overline{B_r(x_0)}$

Сфера — $S_r(x_0) = \{y \in X \mid d(y, x_0) = r\}$.

Задача 15

Как устроены шары в метрике лентяя?

Задача 16

Как устроены шары в p -адической метрике?

Задача 17

Как устроены шары в метриках $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$?

Определение 7

(X, d) — метрическое пространство.

Топология Ω_d **индуцированная** метрикой определяется так:

$A \in \Omega_d$, если A представляется как объединение открытых шаров в X .

Задача 18

Проверьте корректность определения индуцированной топологии.

Пример 9. \mathbb{R} со стандартной метрикой.

Открытые шары = открытые интервалы.

Примеры замкнутых множеств: $[0, 1], \{2, 3, 9\}$;

Задача 19

Докажите, что $A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ замкнутым не является, а $A \cup \{0\}$ — замкнуто

Задача 20

(X, d) — метрическое пространство.

$U \subset X$ — открыто $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon : B_\varepsilon(x) \subset U$

Определение 8

(X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X$. Тогда сужение метрики ρ на $A \times A$ является метрикой в A и $(A, \rho|_{A \times A})$ — метрическое пространство. Оно называется подпространством пространства (X, ρ) .

Определение 9

Шар $D_1(0)$ и сфера $S_1(0)$ пространства \mathbb{R}^n (с евклидовой метрикой) обозначаются символами D^n и S^{n-1} и называются n -мерным шаром и $(n-1)$ -мерной сферой. Они рассматриваются как метрические пространства — подпространства пространства \mathbb{R}^n .

Пример 10. Убедитесь в том, что: D^1 есть отрезок $[-1; 1]$, D^2 есть круг, S^0 — пара точек $\{-1, 1\}$; S^1 — окружность, S^2 — сфера, D^3 — шар.

Задача 21

Докажите, что для любых точек x, a произвольного метрического пространства и любого числа $r > \rho(x, a)$ имеют место включения

$$B_{r-\rho(a,x)}(x) \subset B_r(a), \text{ а } D_{r-\rho(a,x)}(x) \subset D_r(a)$$