Разнобой УТЮМа 1

$\boxed{1}$ Можно ли заполнить клетки таблицы 2020×2020 натуральными числами от 1 до 4080400 так, чтобы сумма чисел в каждой строке, начиная со второй, была на 1 больше, чем сумма чисел во всех предыдущих строках?

$\boxed{2}$ В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH и отмечены середины A_1, B_1 и C_1 сторон BC, CA и AB соответственно. Точка K симметрична точке B_1 относительно прямой BC. Докажите, что прямая C_1K делит отрезок HA_1 пополам.

$\boxed{3}$ Каждую клетку доски 2022×2022 красят в чёрный или белый цвет. В некоторые клетки ставят хромых ферзей. Хромой ферзь с клетки A бьёт клетку B, если клетки A и B находятся на одной линии (горизонтали, вертикали или диагонали) и все клетки этой линии от A до B включительно покрашены в один цвет. При каком наибольшем k можно покрасить доску и расставить на ней k хромых ферзей так, чтобы они не били друг друга?

$\boxed{4}$ На столе стоит несколько гирь суммарного веса s. Назовём гирю раздвоителем, если после её удаления все остальные гири можно разбить на две группы, суммарный вес каждой из которых не больше $\frac{s}{2}$. Докажите, что вес самого большого раздвоителя больше суммы весов всех нераздвоителей.

$\boxed{5}$ Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Перпендикуляр к AC, проведённый через точку X, пересекает сторону AB в точке Y. Докажите, что прямая YA_1 делит отрезок BH пополам.

$\boxed{6}$ Нечётная раскраска графа – это такая раскраска множества его вершин в несколько цветов, что любые две соседние вершины покрашены в разный цвет и при этом для каждой вершины можно указать цвет, в который покрашено нечётное число её соседей. Барон Мюнхгаузен нарисовал граф и создал нечётную раскраску его вершин в 1022 цвета. «Вы можете мне не поверить, друзья, — говорит барон, — но на этом графе не существует нечётных раскрасок с меньшим числом цветов. Однако после того как я добавил всего одну вершину и соединил её с некоторыми вершинами этого графа, для нечётной раскраски мне понадобилось всего три цвета». Не обманывает ли нас барон?

$\boxed{7}$ Докажите, что нечётное число $p > 1$ — простое тогда и только тогда, когда среди любых $\dfrac{p+1}{2}$ различных натуральных чисел можно найти два числа, сумма которых хотя бы в p раз больше их наибольшего общего делителя.

$\boxed{8}$ Даны различные ненулевые цифры a, b, c, d. Известно, что ни одно из чисел $\overline{abcd}$, $\overline{bcda}, \overline{cdab}, \overline{dabc}$ не имеет простых делителей, меньших 10. Чему может быть равна сумма этих четырёх четырёхзначных чисел?

$\boxed{9}$ На доске написано несколько различных неотрицательных чисел. Оказалось, что произведение любых двух выписанных чисел также есть на этой доске. Какое наибольшее количество чисел может быть написано?

$\boxed{10}$ Два равных отрезка AB и CD пересекаются в точке P. Точка M — середина отрезка BD. Оказалось, что точка M равноудалена от точек A и C. Докажите, что $AP = CP$.

$\boxed{11}$ Дан клетчатый квадрат 101×101. Внутри него выбирается квадрат 100×100. Внутри этого квадрата выбирается квадрат 99×99, и так далее, пока не будет выбран квадрат 1×1. Оказалось, что выбранный квадрат 1×1 совпадает с центральной клеткой исходного квадрата 101×101. Сколько существует таких последовательностей квадратов? Ответ не должен содержать знака многоточия.

$\boxed{12}$ В стране из 1000 городов некоторые города соединены дорогами, по которым можно двигаться в обе стороны. Известно, что в этой стране нет циклического маршрута. При каком наибольшем k всегда можно выбрать k городов так, чтобы каждый выбранный город был соединен не более чем с двумя из остальных выбранных?

$\boxed{13}$ Серёжа придумал два положительных не целых числа a и b. Затем он подсчитал четыре выражения: $a+b, a-b, a \cdot b, \dfrac{a}{b}$. Докажите, что хотя бы одно из получившихся чисел не целое.

$\boxed{14}$ Даны 36 различных чисел (не обязательно целых). Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 6×6 так, чтобы для любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне ячейках, их разность была не равна 1.

$\boxed{15}$ На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение че- тырёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, на его сумму цифр?

$\boxed{16}$ На плоскости отмечено 10 точек. Докажите, что существует не более 90 равно- бедренных прямоугольных треугольников с вершинами в этих точках.

$\boxed{17}$ В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CF и BE. На отрезке BE нашлась такая точка P, что $BP = AC$. На продолжении отрезка CF за точку F нашлась такая точка Q, что $CQ = AB$. Докажите, что $AP \perp AQ$.