

## Рекурренты

- [1] Найдите формулу  $n$ -го члена для последовательностей, заданных условиями ( $n \geq 0$ ):
- (a)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ;
  - (b)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ;
  - (c)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ ;
  - (d)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ .
- [2] Сколько существует способов разрезать доску  $2 \times 10$  на доминошки?
- [3] Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения  $x^2 - 6x + 1 = 0$ . Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $x_1^n + x_2^n$  является целым и не делится на 5.
- [4] Последовательность задана рекуррентно:  $a_1 = \frac{1}{2}, a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 a_n$ . Найдите формулу общего члена.
- [5] Последовательность  $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$  задана рекуррентно:  $a_0 = a, a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ . При каких значениях  $a$  последовательность является монотонно возрастающей?
- [6] Последовательность  $a_0, a_1, a_2, \dots$  такова, что для всех неотрицательных  $m \geq n$  выполняется условие  $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$ . Найдите  $a_{2022}$ , если  $a_1 = 1$ .
- [7] Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна  $(n+1)! - 1$ .