Вписанные углы

$\boxed{1}$ Даны два угла $\angle ABC = 90^\circ$ и $\angle ADC = 90^\circ$. Докажите, что A, B, C, D лежат на одной окружности.

$\boxed{2}$ Дан треугольник ABC. I - центр вписанной окружности. Докажите (и запомните), что $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$

$\boxed{3}$ Дан треугольник ABC. H - ортоцентр (точка пересечения высот). Докажите (и запомните), что $\angle AHB = 180^\circ - \angle C$

$\boxed{4}$ Дан треугольник ABC. BH_1, CH_2 — высоты треугольника. Докажите, что C, B, H_1, H_2 лежат на одной окружности.

$\boxed{5}$ В условии предыдущей задачи пусть $H = BH_1 \cap CH_2$. Докажите, что A, H, H_1, H_2 лежат на одной окружности.

$\boxed{6}$ Рассмотрим вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть дуга $\breve{AB} = \alpha$, дуга $\breve{CD} = \beta$. O - точка пересечения диагоналей. Докажите, что $\angle AOB = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

$\boxed{7}$ Дана точка O и окружность ω, так что $O \notin \omega$. Через O провели 2 прямые, которые пересекают ω в точках A, B и C, D. Докажите, что $OA \cdot OB = OC \cdot OD$

$\boxed{8}$ На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону треугольника построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что CO — биссектриса угла ACB.

$\boxed{9}$ В остроугольном треугольнике ABC на высоте, проведённой из вершины C, выбрана точка X. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров из точки X на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что точки A, B, B_1, A_1 лежат на одной окружности.

$\boxed{10}$ Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров из точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

$\boxed{11}$ Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырёхугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.

$\boxed{12}$ Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из A. На отрезке MN нашлась точка К такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

13 Даны две окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Прямая, проходящая через X, пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке C. Другая прямая, проходящая через Y, первую окружность пересекает в точке B, а вторую — в точке D. Докажите, что $AB \parallel CD$.

14 В окружность вписан шестиугольник. Найдите сумму углов при трёх его несоседних вершинах.

15 Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_2A пересекает первую окружность в точке C. Докажите, что точки O_1, O_2, B, C лежат на одной окружности.

16 Докажите, что в равнобедренной трапеции вершины боковой стороны, точка пересечения диагоналей и центр описанной окружности лежат на одной окружности.

17 Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ Рассмотрим точки пересечения биссектрис его углов A и B, B и C, C и D, D и A. Докажите, что эти четыре точки являются вершинами вписанного четырёхугольника.

18 На хорде AB окружности с центром в точке O выбрана точка C. Описанная окружность треугольника AOC пересекает исходную окружность в точке D. Докажите, что $BC = CD$.

19 Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке M, K — точка пересечения биссектрис углов A и D. Докажите, что точки A, M, K, D лежат на одной окружности.

20 Пусть дан треугольник ABC, и в точке B построена касательная к описанной окружности треугольника ABC. Рассмотрим произвольную прямую, параллельную этой касательной, и отметим точки D и E пересечения с прямыми AB и BC соответственно. Докажите, что четыре точки A, C, D, E лежат на одной окружности.

21 Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг AB и CD, параллельна биссектрисе угла AOB.

22 Четырёхугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Диаметр описанной окружности совпадает с диагональю AC. Докажите, что модули разностей длин его противоположных сторон равны.

23 Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая l, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

$\boxed{24}$ Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

$\boxed{25}$ Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ расположены четыре окружности одного радиуса так, что они имеют общую точку и каждая из них вписана в один из углов четырёхугольника. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

$\boxed{26}$ Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $AC \parallel DE$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180°$.

$\boxed{27}$ В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120°$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X, а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y. Прямая l проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY. Докажите, что l касается ω.

$\boxed{28}$ Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведенной из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

$\boxed{29}$ Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA_0 и BB_0, и BB_0 повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA_0, ON и MB_0 пересекаются в одной точке.

$\boxed{30}$ На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается окружности ω.

$\boxed{31}$ Точка H является ортоцентром остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Точка E симметрична C относительно высоты AH. Обозначим за F точку пересечения прямых EH и AC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB.

$\boxed{32}$ В остроугольном треугольнике угол A равен $60°$. Докажите, что прямая, соединяющая центр описанной окружности с ортоцентром, отсекает от треугольника равносторонний треугольник.

$\boxed{33}$ Пусть H' — проекция ортоцентра на касательную в точке A к описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек A и H'.

$\boxed{34}$ Остроугольный треугольник ABC $(AB < AC)$ вписан в окружность Ω. Пусть M — точка пересечения его медиан, а AH — высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A'. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB.

$\boxed{35}$ Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая l пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает l в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности