Региональный разнобой

$\boxed{1}$ Даны натуральные числа a, b и c. Ни одно из них не кратно другому. Известно, что число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что $c > b$.

$\boxed{2}$ Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

$\boxed{3}$ На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\dfrac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть d — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение d.

$\boxed{4}$ На доске девять раз (друг под другом) написали некоторое натуральное число N. Петя к каждому из 9 чисел приписал слева или справа одну ненулевую цифру; при этом все приписанные цифры различны. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди 9 полученных чисел?

$\boxed{5}$ Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше 10^{100}.

$\boxed{6}$ Рассмотрим такие натуральные числа a, b и c, что дробь

$$k = \frac{ab + c^2}{a + b}$$

является натуральным числом, меньшим a и b. Какое наименьшее количество натуральных делителей может быть у числа $a + b$?

$\boxed{7}$ Десятизначные натуральные числа a, b, c таковы, что $a + b = c$. Какое наибольшее количество из 30 их цифр могут оказаться нечётными?

$\boxed{8}$ Пусть p простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py + 1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y.