

Изогональное сопряжение 2

Изогональное сопряжение в четырёхугольнике:

- 1 Точка P лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ и проекции точки P на прямые, содержащие стороны, попадают на стороны. Докажите, что для точки P существует изогонально сопряжённая относительно четырёхугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда
 - а) основания перпендикуляров из точки P на стороны являются вершинами вписанного четырёхугольника;
 - б) верно соотношение $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$.
- 2 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов $\angle BAC$ и $\angle BDC$ пересекаются в точке P . Кроме того, $\angle APB = \angle CPD$. Докажите, что $AB + BD = AC + CD$.
- 3 Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через I_A , I_B , I_C и I_D центры вписанных окружностей ω_A , ω_B , ω_C и ω_D треугольников DAB , ABC , BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_A A + \angle CI_C I_D = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BI_B A + \angle CI_C I_D = 180^\circ$.
- 4 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD не является биссектрисой ни угла ABC , ни угла CDA . Точка P внутри четырёхугольника $ABCD$ такова, что $\angle PBC = \angle DBA$ и $\angle PDC = \angle BDA$. Докажите, что $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $AP = CP$.

Изогональное сопряжение окружности относительно треугольника:

- 5 На окружности, проходящей через вершины B и C треугольника ABC и через центр его вписанной окружности, выбраны такие точки P и Q , лежащие внутри треугольника, что $\angle BAP = \angle CAQ$. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.
- 6 Окружность пересекает сторону BC треугольника ABC в точках A_1 и A_2 , сторону CA — в точках B_1 и B_2 , а сторону AB — в точках C_1 и C_2 . Окружности, описанные около треугольников AB_1C_1 и BC_1A_1 , пересекаются в точке P_1 . Окружности, описанные около треугольников AB_2C_2 и BC_2A_2 , пересекаются в точке P_2 . Докажите, что точки P_1 и P_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC .

Изогональное сопряжение в подобных треугольниках:

- 7 Дан неравносторонний треугольник ABC . Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC . Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1 , I_2 , A и N лежат на одной окружности.

- [8] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Окружность ω_1 касается прямых AB и CD в точках X и Y и пересекает дугу AD окружности ω в точках K и L . Прямая XY пересекает прямые AC и BD в точках Z и T . Докажите, что K , L , Z и T лежат на одной окружности, касающейся прямых AC и BD .
- [9] Точка X вне треугольника ABC такова, что A лежит внутри треугольника BXC . При этом $2\angle BAX = \angle CBA$, $2\angle CAX = \angle BCA$. Докажите, что центры описанной и вневписанной со стороны BC окружностей треугольника ABC и точка X лежат на одной прямой.
- [10] Точки M и N — соответственно середины сторон AB и AC треугольника ABC . На касательной в точке A к описанной окружности треугольника ABC выбрана точка X . Окружность ω_B , проходящая через точки M и B , касается прямой MX , а окружность ω_C , проходящая через точки N и C , касается прямой NX . Докажите, что ω_B и ω_C пересекаются на прямой BC .

Задачи посложнее:

- [11] Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1 , точка I — центр этой окружности. Прямая, проходящая через точку A_1 перпендикулярно AA_1 , пересекает прямые BI и CI в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AH = AY$.
- [12] Пусть пары точек X и X' , Y и Y' изогонально сопряжены относительно треугольника ABC . Докажите, что точки пересечения пар прямых XY и $X'Y'$, XY' и $X'Y$ изогонально сопряжены относительно треугольника ABC .
- [13] Докажите, что проекция ортоцентра треугольника ABC на медиану, выходящую из вершины A , и проекция центра описанной окружности на симедиану, выходящую из вершины A , изогонально сопряжены.
- [14] Чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P , лежащей внутри треугольника. Известно, что $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Докажите, что перпендикуляры, восстановленные в точках A_1 , B_1 и C_1 к сторонам треугольника ABC , пересекаются в одной точке.