Теорема Виета

Теорема Виета: Пусть многочлен $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} &= (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ &\vdots \\ x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}, \frac{1}{x_3^2}$.

$\boxed{2}$ У многочлена с целыми коэффициентами $x^3 + px + q$ имеется три различных корня. Докажите, что сумма кубов этих корней есть целое число, кратное трём.

$\boxed{3}$ Известно, что $a + b + c = d$, и что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}.$$

Докажите, что по меньшей мере одно из чисел a, b, c равно d.

$\boxed{4}$ Даны действительные числа $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$, такие что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$
$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3.$$

Докажите, что если $a_1 \le b_1$, то $a_3 \le b_3$.

$\boxed{5}$ На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1, что $f+g = f_1+g_1$ или $fg = f_1g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней.

$\boxed{6}$ Натуральные числа a, b, c, d, e, f таковы, что число $S = a + b + c + d + e + f$ делит числа $abc + def$ и $ab + bc + ca - de - ef - df$. Докажите, что S составное.