Гармонический четырёхугольник

Вписанный четырехугольник называется гармоническим, если произведения длин его противоположных сторон равны.

$\boxed{1}$ Гармонический четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O; точка M — середина диагонали BD. Докажите, что точки M, O, A, C лежат на одной окружности или прямой.

$\boxed{2}$ Касательные к описанной окружности треугольника ABC (у которого $\angle BAC \neq 90°$), восстановленные в вершинах B и C, пересекаются в точке S; точка M — середина BC. Докажите, что прямые AM и AS симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

$\boxed{3}$ (a) $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\dfrac{|AM|}{|MC|} = \dfrac{|AB|^2}{|BC|^2} = \dfrac{|AD|^2}{|DC|^2}$.

(b) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольников, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.

(c) Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является симедианой треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

$\boxed{4}$ Пусть N — середина диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $ABCD$ — гармонический тогда и только тогда, когда $\angle BNC = \angle DNC$.

$\boxed{5}$ Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, в котором биссектрисы углов A и C пересекаются на диагонали BD. Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC.

$\boxed{6}$ Через точку A, лежащую вне окружности, проведены касательные AB и AC к этой окружности, а также прямая, пересекающая окружность в точках X и Y. Докажите, что точки A, B, C, и середина отрезка XY лежат на одной окружности.

$\boxed{7}$ В окружности S проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через C и середину AB, вторично пересекает S в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

$\boxed{8}$ Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q. Касательные к окружности ω_1 в точках P и Q пересекаются в точке S. На окружности ω_1 вне окружности ω_2 отмечена точка A. Прямые AP и AQ второй раз пересекают окружность ω_2 в точках B и C. Докажите, что прямая AS делит отрезок BC пополам.

$\boxed{9}$ Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC и описанную окружность ω неравнобедренного треугольника ABC в точках D и E соответственно. На окружности ω отмечена такая точка S, что $\angle DSE = 90^\circ$. Докажите, что прямая BS содержит симедиану треугольника ABC.

$\boxed{10}$ На плоскости зафиксирована окружность ω и точка A вне неё. Через точку A проведена касательная AT (где $T \in \omega$) и произвольная секущая XY (точки X, Y лежат на ω). Докажите, что окружность, проходящая через точки T и X, касающаяся прямой TY, проходит через фиксированную точку, отличную от точки T.

$\boxed{11}$ В угол BAC вписана окружность ω, касающаяся сторон угла в точках B, C. Хорда CD окружности ω параллельна прямой AB. Прямая AD второй раз пересекает окружность ω в точке E. Докажите, что прямая CE делит отрезок AB пополам.

$\boxed{12}$ Из точки P к окружности ω проведены отрезки касательных PA, PB, точка C диаметрально противоположна точке B. Докажите, что прямая CP делит пополам перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BC.

$\boxed{13}$ Две неравные окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Пусть C и D точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Прямая CD пересекает ω в точках E и F. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках E и F, пересекаются на прямой AB.

$\boxed{14}$ Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O. Биссектриса угла ABD пересекает отрезок AD в точке K и окружность ω второй раз в точке M. Биссектриса угла CBD пересекает отрезок CD в точке L и окружность ω второй раз в точке N. Известно, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину отрезка BD.

$\boxed{15}$ Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \neq D$. Точка K – центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N – середины отрезков BC и KM соответственно. Докажите, что точки B, C, N и L лежат на одной окружности.