

Малая теорема Ферма

- [1] Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.
- [2] Докажите, что $60^{111} + 111^{60}$ делится на 61.
- [3] Пусть p — простое число. Докажите, что $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ для любых целых a и b .
- [4] Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{11 \dots 1}_{p-1}$ делится на p .
- [5] Докажите, что если p — простое число и $p > 2$, то $7^p - 5^p - 2$ делится на $6p$.
- [6] Андрей берет натуральное число a и сначала прибавляет к нему число a^2 , потом — a^3 , потом — a^4 и т.д. Докажите, что когда-нибудь его сумма поделится на простое число p .
- [7] Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.
- [8] Известно, что $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12}$ делится на 13 (a, b, c, d, e, f — целые числа). Докажите, что $abcdef$ делится на 4826809.
- [9] Пусть $p = 4k + 3$ — простое, а $m^2 + n^2 \div p$. Докажите, что $m, n \div p$.
- [10] Пусть n — натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^4 + 1$, либо $n^2 + 1$, либо $n + 1$, либо $n - 1$ делится на 17.
- [11] Докажи, что $a^{73} - a$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$.
- [12] Найти все такие натуральные числа p , что p и $p^6 + 6$ — простые
- [13] а) Докажите, что равенство $\frac{10^n - 1}{m} = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ равносильно тому, что десятичная запись дроби $1/m$ имеет вид $0, (a_1 a_2 \dots a_n)$.
б) Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $1/p = 0, (a_1 a_2 \dots a_n)$ (т.е. дробь не имеет предпериода).
в) Запишем $1/p = 0, (a_1 a_2 \dots a_n)$. Докажите, что $p - 1$ делится на n .
г) Запишем $1/p = 0, (a_1 a_2 \dots a_n)$. Докажите, что дробь $0, (a_2 a_3 \dots a_n a_1)$ — тоже дробь со знаменателем p .
- [14] Найдите такое шестизначное число x , что $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ и $6x$ записываются одинаковым набором цифр, но в различном порядке.