Занятие 2

Рекурренты

$\boxed{1}$ Найдите формулу n-го члена для последовательностей, заданных условиями $(n \geqslant 0)$:

(a) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;

(b) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;

(c) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$;

(d) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

$\boxed{2}$ Сколько существует способов разрезать доску 2×10 на доминошки?

$\boxed{3}$ Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ является целым и не делится на 5.

$\boxed{4}$ Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}, a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 a_n$. Найдите формулу общего члена.

$\boxed{5}$ Последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ задана рекурентно: $a_0 = a, a_{n+1} = 2^n - 3a_n$. При каких значениях a последовательность является монотонно возрастающей?

$\boxed{6}$ Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что для всех неотрицательных $m \geq n$ выполняется условие $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2022}, если $a_1 = 1$.

$\boxed{7}$ Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, 3, ..., n\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n+1)! - 1$.