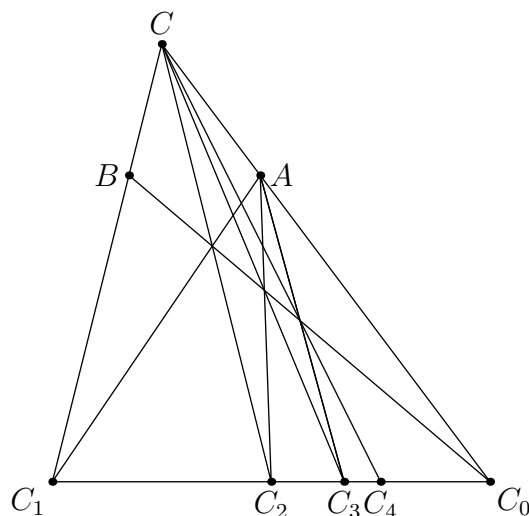


## Аффинная геометрия

- 1 (а) Докажите, что любой треугольник можно спроектировать так, чтобы получился треугольник любой заданной формы, то есть изображением любого треугольника может служить произвольный заданный треугольник.  
 (б) Изображаются ли при этом высоты высотами? Медианы — медианами? Биссектрисы — биссектрисами?
- 2 Какие четырехугольники могут служить изображениями квадрата; ромба; дельтоида; равнобокой трапеции; трапеции, отсекаемой от правильного треугольника средней линией? Как описать множество всевозможных изображений произвольного заданного четырехугольника?
- 3 Покажите, что задачу 9 (из листика про площади) достаточно решить для частного случая, когда данный параллелограмм — квадрат. Найдите решение для этого случая.
- 4 В треугольнике  $C_1C_0C$  провели 3 чевианы  $C_1A, C_0B, CC_1$  так, что  $AB \parallel C_1C_0$ . Докажите, что  $C_0C_1 : C_{n-1}C_n = n : 1$



- 5 Докажите теорему Чебы сведением к частному случаю — теореме о высотах треугольника. Можно ли аналогичным образом использовать медианы? биссектрисы?
- 6 На изображении прямоугольного треугольника  $ABC$ , у которого  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC : CB = 3 : 1$ , постройте изображение его а) биссектрисы, б) медианы, в) высоты, проведенных из  $\angle C$ .
- 7 Дано изображение треугольника  $ABC$ . Постройте изображения центров его вписанной и описанной окружностей, если известно, что  $AC = BC$  и высота  $CH = AB$ .
- 8 Известно, что данная трапеция является изображением

- (а) трапеции с острым углом  $45^\circ$ , вписанной в окружность с центром  $O$ ;
- (б) прямоугольной трапеции с острым углом  $60^\circ$ , описанной около окружности с центром  $O$ .

Постройте изображение точки  $O$ .

- 9 Дано изображение фигуры, состоящей из прямоугольного треугольника и квадрата, построенного на его катете. Постройте изображение квадрата, построенного
  - (а) на другом катете;
  - (б) на гипотенузе.
- 10 (а) На изображении прямоугольного треугольника  $ABC$ , в котором проведен отрезок  $CD$  — изображение биссектрисы прямого угла, постройте изображение  $CH$  высоты.  
(б) Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — точки на продолжениях сторон  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  такие, что  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CD$ . Докажите, что прямая  $HC$  (изображение перпендикуляра к  $AB$ ) делит пополам отрезок  $A_1B_1$ .
- 11 Дан треугольник, изображающий некоторый треугольник  $T$ . Где могут располагаться изображения а) центроида, б) центра описанной окружности, в) центра вписанной окружности, г) ортоцентра треугольника  $T$ ?
- 12 Как изображается правильный шестиугольник? Постройте его изображение, если даны изображения трёх вершин; вершины и середин двух сторон (рассмотрите разные случаи).
- 13 Докажите, что любой пятиугольник, у которого каждая сторона параллельна одной из диагоналей, является изображением правильного пятиугольника.
- 14 Из концов основания треугольника проведены медианы, а из произвольной точки основания — параллельные им прямые. Докажите, что отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с боковыми сторонами, делится медианами на три равные части.
- 15 Каждая диагональ выпуклого пятиугольника, кроме, может быть, одной, параллельна одной из его сторон. Докажите, что а) это верно и для пятой диагонали; б) отношение каждой диагонали к параллельной ей стороне одно и то же; найдите это отношение.
- 16 В выпуклом пятиугольнике проведены «медианы» — прямые, соединяющие каждую вершину с серединой противоположной стороны. Докажите, что если четыре из них проходят через одну точку, то и пятая тоже.

- 17 Докажите, что шестиугольник с вершинами в серединах «малых» диагоналей данного выпуклого шестиугольника имеет в четыре раза меньшую площадь.
- 18 Середины трёх сторон правильного шестиугольника соединены с концами противоположных сторон как на рисунке. Какую часть от площади шестиугольника составляет площадь треугольника, ограниченного проведенными отрезками?
- 19 В шестиугольнике  $ABCDEF$  противоположные стороны параллельны. Докажите, что
- если две пары противоположных сторон параллельны соответствующим диагоналям, то это верно и для третьей пары;
  - отрезки, соединяющие середины противоположных сторон шестиугольника, пересекаются в одной точке;
  - треугольники  $ACE$  и  $BDF$  равновелики;
  - если противоположные стороны не только параллельны, но и равны, то площадь  $\triangle ACE$  равна половине площади шестиугольника.
- 20 Докажите, что в произвольном шестиугольнике условия b) и c) из задачи 19 эквивалентны.
- 21 Докажите, что если каждый из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам, то эти отрезки пересекаются в одной точке.
- 22 Докажите, что если каждая из «больших» диагоналей выпуклого шестиугольника делит его площадь пополам, то они пересекаются в одной точке.
- 23 Даны площади трех треугольников найдите площадь  $\triangle AFN$ .

