

Математический бой за славу и честь

1. На многопрофильную школу «Стратегия» приехали 20 *физматов*, из которых 10 математиков и 10 физиков. Каждый физмат знаком с 12-ю физматами, и при этом все математики друг с другом знакомы. Докажите, что физматов можно разделить на две группы так, что в каждой группе все со всеми знакомы.
2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено равенство $AB = BD + CD$. Пусть E — середина диагонали AC . Докажите, что $\angle BED = 90^\circ$.
3. Вычислить:
$$\sqrt[3]{40 + \sqrt{1573}} + \sqrt[3]{40 - \sqrt{1573}}.$$
4. В перерыве футбольного матча каждый болельщик Спартак съел в буфете FixPrice 2 бутерброда, 4 порции мороженого и выпил 4 стакана пепси-колы, а болельщик Динамо — 5 бутербродов, 4 порции мороженого и 6 стаканов пепси-колы. Рассчитайте выручку буфета, если известно, что всего было выпито 20000 стаканов пепси-колы (порция любого продукта стоит 50 рублей).
5. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись соответственно точки D и E такие, что $DB = BC = CE$. Отрезки BE и CD пересекаются в точке P . Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CEP , пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC .
6. Верно ли, что найдётся бесконечно много пар натуральных чисел a и b , для которых

$$\frac{\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b)}{a + b} = 2019?$$