

## Игры

Существует **три основных стратегии** решения задач на теорию игр:

- Стратегия дополнения
- Симметричная стратегия
- Выигрышные и проигрышные позиции
- Передача хода

- 1 На доске написаны числа от 1 до 10. 2 игрока по очереди вычеркивают по одному числу. Как надо делать ходы, чтобы выиграть в такой игре?
- 2 (а) На столе лежат две кучки спичек: в одной 10, в другой 7. Игроки ходят по очереди. За один ход можно взять любое число спичек  $(1, 2, 3, \dots)$  из одной из кучек (по выбору игрока). Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает.  
(б) Что будет в этой игре, если изначально в одной кучке  $m$  спичек, а в другой  $n$ . Какой игрок имеет выигрышную стратегию?
- 3 На столе лежит (а) 25 (б) 24 спичек. Играющие по очереди могут взять от одной до четырёх спичек. Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает. У какого игрока есть выигрышная стратегия?
- 4 Дана доска  $9 \times 9$ . Двое по очереди выставляют на нее королей так, чтоб они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?
- 5 Двое по очереди ставят слонов на шахматную доску. Очередным ходом нужно побить хотя бы одну небитую клетку. Фигура бьет и ту клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
- 6 Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?
- 7 Шоколадка представляет собой прямоугольник  $3 \times 5$ , разделённый углублениями на 15 квадратиков. Двое по очереди разламывают её на части по углублениям: за один ход можно разломить любой из кусков (большой одного квадратика) на два. Кто не может сделать хода (все куски уже разломаны), проигрывает.
- 8 Петя и Вася выписывают 100-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Петя ставит только нечетные цифры, а Вася — только четные. Начинает Петя. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Вася всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 9.

- [9] Первый называет целое число, затем второй называет ещё одно. Если (а) сумма (b) произведение чисел чётно, выигрывает первый, если нечётно - второй.
- [10] По кругу расставлены 50 фишек. Дима и Саша по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки вначале не стояли рядом, выигрывает Дима, а в противном случае выигрывает Саша. Дима ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?
- [11] Петя и Вася играют на доске размером  $7 \times 7$ . Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет победить, как бы ни играл соперник?
- [12] На столе лежит 9 спичек. Играющие по очереди могут взять 1, 2 или 4 спички. Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает.
- [13] На шахматной доске стоит король. Двое по очереди ходят им. Проигрывает игрок, после хода которого, король оказывается в клетке, в которой побывал ранее. Кто побеждает при правильной игре: начинающий или его соперник?
- [14] В одной из клеток шахматной доски стоит *односторонняя ладья*, которая может двигаться влево или вниз. Двое игроков ходят по очереди, сдвигая ладью влево или вниз на любое число клеток (но не менее одной); кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?
- [15] На клетчатой доске размером  $23 \times 23$  клетки стоят четыре фишки: в левом нижнем и в правом верхнем углах доски — по белой фишке, а в левом верхнем и в правом нижнем углах — по чёрной. Белые и чёрные фишки ходят по очереди, начинают белые. Каждым ходом одна из фишек сдвигается на любую соседнюю (по стороне) свободную клетку. Белые фишки стремятся попасть в две соседние по стороне клетки. Могут ли чёрные им помешать?
- [16] Двое играют в двойные шахматы: все фигуры ходят как обычно, но каждый делает по два шахматных хода подряд. Докажите, что первый может как минимум сделать ничью.
- [17] Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник  $1 \times 2$  или  $2 \times 1$  такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что учительница сможет победить.

- 18 Игра начинается с числа 4. Двое игроков по очереди прибавляют к имеющемуся числу любое, меньшее его, натуральное число. Выигрывает тот, кто получит ровно 100. Кто выигрывает?
- 19 Фишка стоит на поле  $a1$  шахматной доски. Двое играют в игру. За ход разрешается сдвинуть её на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на три клетки по диагонали вправо-вверх. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?
- 20 Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей, меньший самого числа. Проигрывает тот, кто получит 1. Кто выигрывает при правильной игре?
- 21 На столе стоит стопка дисков. Снизу лежит 1 чёрный диск, потом 2 белых, потом 3 чёрных, 4 белых, ..., 11 чёрных дисков. Лена и Вадим по очереди берут диски из стопок. Каждым ходом нужно взять несколько одноцветных дисков с верха одной стопки. Начинает Лена. Проигрывает тот, кто взял последний диск. Кто выигрывает при правильной игре?
- 22 Имеется шоколадка  $m \times n$ . За один ход можно съесть дольку, а также все дольки, которые находятся выше, правее, а также выше и правее выбранной. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю дольку. Кто выигрывает при правильной игре?
- 23 На доске написаны числа от 1 до 2000. Играют двое. За ход разрешается вычеркнуть любое число вместе со всеми его делителями. Выигрывает тот, кто вычёркивает последнее число. Кто выигрывает при правильной игре?
- 24 Дана шахматная доска. Играют двое. Первый игрок ставит коня в любую клетку доски. Далее каждый ход игроки ходят конём на любую ранее не занятую клетку (первый ход делает второй игрок). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
- 25 Имеется куча из  $2024!$  камней. Настя и Серёжа ходят поочерёдно, начинает Серёжа. За один ход из кучи разрешается взять не менее одного камня, но не более чем  $\frac{1}{2024}$  часть оставшихся в куче камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?