

Функция Эйлера

Функцией Эйлера называется функция φ , такая, что $\varphi(n)$ — это количество натуральных чисел от 1 до n взаимно простых с n .

[1] Чему равно $\varphi(9)$; $\varphi(13)$; $\varphi(125)$; $\varphi(1)$?

[2] Чему равно $\varphi(p)$; $\varphi(p^\alpha)$, где p — простое число?

Пусть числа a и b взаимно просты и в таблицу размером $a \times b$ выписаны все последовательные числа подряд начиная с 1.

[3] Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b ?

[4] Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a ?

[5] Докажите, что для взаимно простых a, b , выполняется: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Это свойство называется **мультипликативностью**.

[6] Докажите **формулу Эйлера**:

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1) = \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\end{aligned}$$

[7] Докажите, что при $n > 2$ $\varphi(n)$ — чётно.

[8] Найдите сумму чисел взаимно простых с n , не превосходящих n .

[9] При каких m выполняется равенство $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$?

[10] Найдите все такие x , что а) $\varphi(x) = 2$; б) $\varphi(x) = 8$; в) $\varphi(x) = 12$; г) $\varphi(x) = 14$.

[11] Найдите все такие x , что а) $\varphi(x) = \frac{x}{2}$; б) $\varphi(x) = \frac{x}{3}$; в) $\varphi(x) = \frac{x}{4}$; г) $\varphi(x) = \frac{x}{7}$;

[12] Рассмотрим ряд дробей: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$. Сократим каждую из дробей на НОД ее числителя и знаменателя. Сколько будет дробей со знаменателем d , где d — некоторый делитель числа n ?

[13] Докажите **тождество Эйлера-Гаусса**: $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_k) = n$, где d_1, d_2, \dots, d_k — все делители числа n .

[14] Докажите, что: $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi((a, b)) \cdot \varphi([a, b])$;

[15] Докажите, что: $\varphi(ab) \cdot \varphi((a, b)) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot (a, b)$.

[16] Окружность разделена n точками на n равных частей. Сколько можно составить различных замкнутых ломаных из n равных звеньев с вершинами в этих точках?