

Числа Каталана

Определение 1 Правильной скобочной последовательностью длины $2n$ называется последовательность, состоящая из n открывающихся и n закрывающихся скобок, такая что среди любых первых k скобок открывающихся скобок не меньше чем закрывающихся.

Пример 1 При $n = 3$ существует 5 таких последовательностей

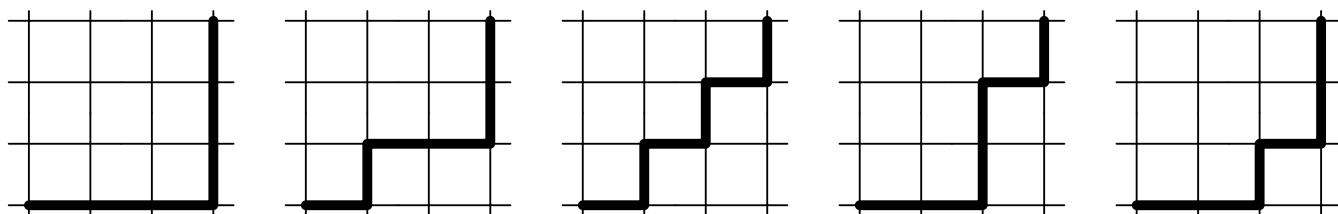
$$()()(), (())(), ()(()), (()()), ((())).$$

1 Докажите рекуррентную формулу для чисел Каталана

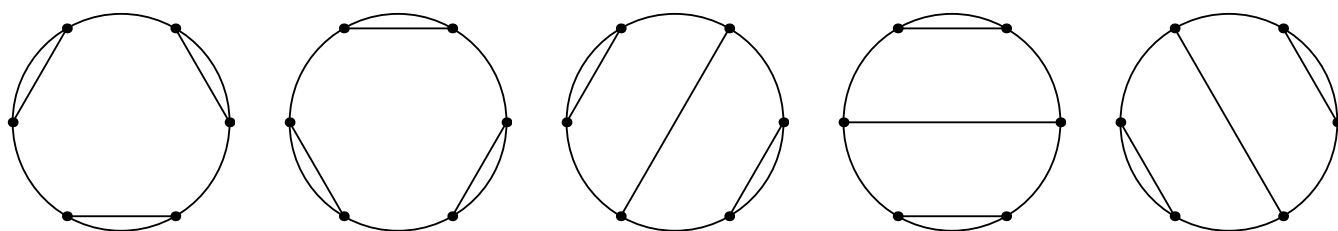
$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$$

2 Найти количество:

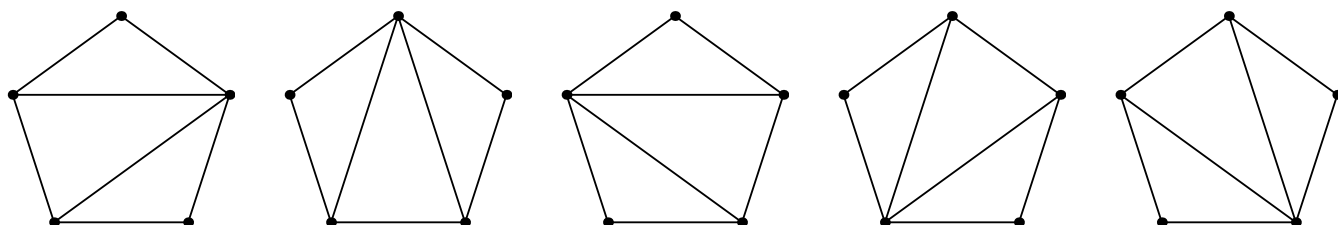
(a) путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, и не поднимающихся выше прямой $y = x$;



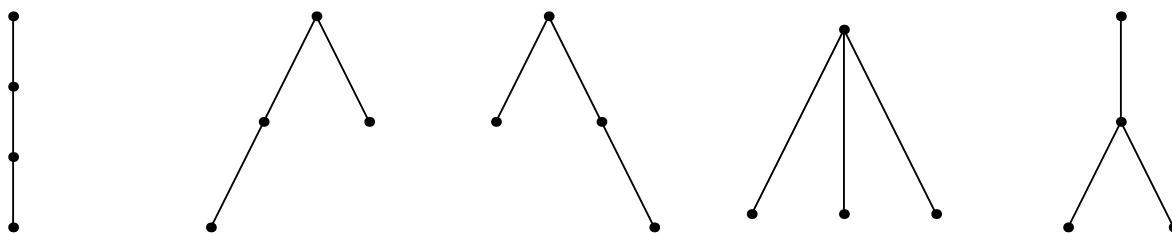
(b) способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами;



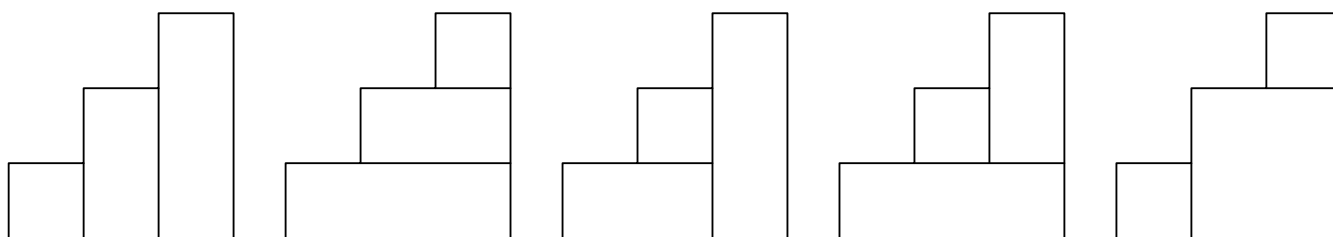
(c) способов разбить выпуклый n -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями;



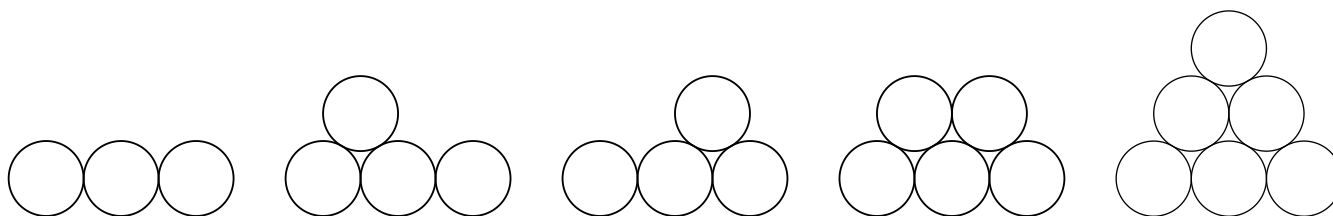
- (d) упорядоченных корневых деревьев (то есть деревьев, у которых задан корень и для каждой вершины задан порядок ее потомков) с $n + 1$ вершинами;



- (e) способов разбить на n прямоугольников лестницу ширины и высоты n ;



- (f) способов разложить монеты на плоскости так, чтобы в нижнем ряду было n монет;



- (g) последовательностей натуральных чисел таких, что $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, где $a_i \leq i$;

1 1 1 1 1 2 1 1 3 1 2 2 1 2 3

- (h) последовательностей целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n , таких что $a_1 = 0$ и $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$

0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 2

- (i) последовательностей целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n , в которых каждое число от 1 до n встречается ровно по 1 разу и длина любой убывающей подпоследовательности меньше 3.

1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2

- (j) количество неотрицательных последовательностей $a_1, \dots, a_n : a_1 = 0, a_j =$ количеству $i < j$ таких, что $a_i < a_j$.

0 0 0 0 0 2 0 1 0 0 1 1 0 1 2

3 Докажите формулу

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$