Игры

Существует **три основных стратегии** решения задач на теорию игр:

- Стратегия дополнения
- Симметричная стратегия
- Выигрышные и проигрышные позиции
- Передача хода

$\boxed{1}$ На доске написаны числа от 1 до 10. 2 игрока по очереди вычеркивают по одному числу. Как надо делать ходы, чтобы выиграть в такой игре?

$\boxed{2}$ (a) На столе лежат две кучки спичек: в одной 10, в другой 7. Игроки ходят по очереди. За один ход можно взять любое число спичек $(1, 2, 3, \dots)$ из одной из кучек (по выбору игрока). Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает.

(b) Что будет в этой игре, если изначально в одной кучке m спичек, а в другой n

Какой игрок имеет выигрышную стратегию?

$\boxed{3}$ На столе лежит (a) 25 (b) 24 спичек. Играющие по очереди могут взять от одной до четырёх спичек. Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает. У какого игрока есть выигрышная стратегия?

$\boxed{4}$ Дана доска 9×9. Двое по очереди выставляют на нее королей так, чтоб они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

$\boxed{5}$ Двое по очереди ставят слонов на шахматную доску. Очередным ходом нужно побить хотя бы одну небитую клетку. Фигура бьет и ту клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

$\boxed{6}$ Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?

$\boxed{7}$ Шоколадка представляет собой прямоугольник 3×5, разделённый углублениями на 15 квадратиков. Двое по очереди разламывают её на части по углублениям: за один ход можно разломить любой из кусков (больший одного квадратика) на два. Кто не может сделать хода (все куски уже разломаны), проигрывает.

$\boxed{8}$ Петя и Вася выписывают 100-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Петя ставит только нечетные цифры, а Вася — только четные Начинает Петя. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Вася всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 9.

9 Первый называет целое число, затем второй называет ещё одно. Если (a) сумма (b) произведение чисел чётно, выигрывает первый, если нечётно - второй.

10 По кругу расставлены 50 фишек. Дима и Саша по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки вначале не стояли рядом, выигрывает Дима, а в противном случае выигрывает Саша. Дима ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?

11 Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет победить, как бы ни играл соперник?

12 На столе лежит 9 спичек. Играющие по очереди могут взять 1, 2 или 4 спички. Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает.

13 На шахматной доске стоит король. Двое по очереди ходят им. Проигрывает игрок, после хода которого король оказывается в клетке, в которой побывал ранее. Кто побеждает при правильной игре: начинающий или его соперник?

14 В одной из клеток шахматной доски стоит *односторонняя ладья*, которая может двигаться влево или вниз. Двое игроков ходят по очереди, сдвигая ладью влево или вниз на любое число клеток (но не менее одной); кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

15 На клетчатой доске размером 23×23 клетки стоят четыре фишки: в левом ниж- нем и в правом верхнем углах доски — по белой фишке, а в левом верхнем и в правом нижнем углах — по чёрной. Белые и чёрные фишки ходят по очереди, начинают белые. Каждым ходом одна из фишек сдвигается на любую соседнюю (по стороне) свободную клетку. Белые фишки стремятся попасть в две соседние по стороне клетки. Могут ли чёрные им помешать?

16 Двое играют в двойные шахматы: все фигуры ходят как обычно, но каждый делает по два шахматных хода подряд. Докажите, что первый может как минимум сделать ничью.

17 Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что учительница сможет победить.