Алгебра

$\boxed{1}$ Докажите, что если $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, то $a = b = c$.

$\boxed{2}$ Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 + 2a_1x + b_1$, $f_2(x) = x^2 + 2a_2x + b_2$, $f_3(x) = x^2 + 2a_3x + b_3$, причем $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 > 1$. Докажите, что хотя бы один из этих трёхчленов имеет два корня.

$\boxed{3}$ Даны квадратные трехчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами. У каждого из этих трехчленов есть по два корня. У каждого трехчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать выражение $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

$\boxed{4}$ Многочлен $P(x)$ дает остаток 5 при делении на $(x - 2)$ и остаток 7 при делении на $(x - 3)$. Какой остаток $P(x)$ дает при делении на $x^2 - 5x + 6$?

$\boxed{5}$ Пусть

$$P(x) = (2x^2 - 2x + 1)^{17}(3x^2 - 3x + 1)^{17}.$$

Найдите

а) сумму коэффициентов многочлена $P(x)$;

б) знакопеременную сумму коэффициентов многочлена $P(x)$;

в) сумму коэффициентов при четных степенях многочлена $P(x)$;

г) сумму коэффициентов при нечетных степенях многочлена $P(x)$.

$\boxed{6}$ Петя сложил 100 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

$\boxed{7}$ Числа a, b, c, d таковы, что $a+b = c+d$ и $a^2+b^2 = c^2+d^2$. Докажите, что $a^3+b^3 = c^3+d^3$.

$\boxed{8}$ Про различные числа x, y, z известно, что выполняются равенства $x^3-3x = y^3-3y = z^3 - 3z$. Чему может равняться значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$?

$\boxed{9}$ Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x - a)(x - b) = x - c$, $(x - b)(x - c) = x - a$, $(x - c)(x - a) = x - b$ имеют решение.

$\boxed{10}$ Пусть $P(x)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами, причём известно, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий вещественный корень. Докажите, что эти многочлены имеют общий целый корень.

$\boxed{11}$ Докажите, что если $P(x^8)$ делится на $x - 1$, то $P(x^8)$ делится на $x^4 + 1$.