

Определение 1

Комплексное число — число вида $z = a + bi \in \mathbb{C}$, где i — комплексная единица: $i^2 = -1$, а $a, b \in \mathbb{R}$ такая форма записи называется **алгебраической**.

Вещественной частью z называется число $\operatorname{Re}(z) = a$

Мнимой частью z называется число $\operatorname{Im}(z) = b$

Пример 1. $1 + 2i \in \mathbb{C}$

Определение 2

Сложение и вычитание комплексных чисел определяется так:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

Определение 3

Умножение комплексных чисел определяется так:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Определение 4

Сопряженное комплексное число к $z = a + bi$ это $\bar{z} = a - bi$

Пример 2. $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

Пример 3. $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

Задача 1

Пусть $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, $f(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Докажите, что

(a) $\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$,

(b) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$,

(c) $\overline{x_1/x_2} = \bar{x}_1/\bar{x}_2$,

(d) $\overline{f(x_0)} = f(\bar{x}_0)$.

(e) Докажите, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$. Докажите, что и \bar{x}_0 корень $f(x)$.

Задача 2

Докажите, что если есть комплексное число t , такое, что $t + z \in \mathbb{R}$, $t \cdot z \in \mathbb{R}$, и $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Тогда $t = \bar{z}$

Определение 5

Модуль комплексного числа $z = a + bi$ является $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Пример 4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Задача 3

Докажите, что $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$

Определение 6

Обратное к комплексному числу $z = a + bi$ является $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Задача 4

Выведите формулу деления комплексного числа $a + bi$ на $c + di$

Задача 5

Найдите $\frac{1 + 4i}{2 - 3i} + 3i - 4$

Теорема 1 Эйлера

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Определение 7

Тригонометрической формой записи комплексного числа $z = a + bi$ является запись $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$

$\arg(z) = \varphi$ — **аргумент** комплексного числа z

Задача 6

Найдите тригонометрическую форму для $z = 10 + 10\sqrt{3}i$

Задача 7

Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих: $|z - i| = 1$

Задача 8

Найти на плоскости множество решений, удовлетворяющих данному условию: $1 < |z + 3 + i| < 3$

Задача 9

Докажите, что $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Задача 10

Найдите формулу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме

Задача 11

Найдите формулу деления комплексных чисел в тригонометрической форме

Задача 12

Докажите, что **возведение в целую степень** комплексного числа $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$ работает так:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Задача 13

Найти $(1 + \sqrt{3}i)^9$

Задача 14

Найти $(1 + i)^{1000}$

Определение 8

Взятие корня n -той степени из комплексного числа $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$ работает так:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}} = r^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right) \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Задача 15

Извлеките корень из числа $z = 3 + 4i$

Задача 16

Решите уравнение $z^3 = -1$

Задача 17

Вычислите корни третьей степени из комплексного числа $2 + 2i$

Задача 18

Решите в комплексных числах следующие квадратные уравнения:

а) $z^2 + z + 1 = 0$

б) $z^2 + 4z + 29 = 0$

Задача 19

Известно, что $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$.

Докажите, что $z^n + z^{-n} = 2 \cos(\alpha \cdot n)$.

Задача 20

Пусть $P(x^n)$ делится на $x - 1$. Докажите, что $P(x^n)$ делится на $x^n - 1$.

Задача 21

Вычислите

а) $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \dots + C_{100}^{100}$

б) $C_{100}^1 - C_{100}^3 + C_{100}^5 - \dots - C_{100}^{99}$

Задача 22

Докажите, что многочлен $P(x) = (\cos \varphi + x \sin \varphi)^n - \cos(\varphi \cdot n) - x \sin(\varphi \cdot n)$ делится на $x^2 + 1$.

Задача 23

Докажите, что для произвольных комплексных чисел z и w выполняется равенство $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Какой геометрический смысл оно имеет?

Задача 24

Докажите данное равенство: $\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} - \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

Задача 25

При каких вещественных p и q двучлен $x^4 + 1$ делится на $x^2 + px + q$?