Теорема Паскаля

Теорема Паскаля: Точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

Обратная теорема Паскаля: Если пять вершин шестиугольника лежат на одной окружности, и точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой, то и шестая точка тоже лежит на этой окружности.

Как использовать? Пронумеруем вершины ломанной от 1 до 6. Пусть $12 \cap 45 = 7$; $23 \cap 56 = 8$; $34 \cap 61 = 9$. Тогда точки 7, 8, 9 лежат на одной прямой.

При этом можно «склеивать» точки. Например, если склеить точки 1 и 2, то прямая 12 превратится в касательную к окружности. Примеры склеивания точек можно посмотреть на обратной стороне листа.

$\boxed{1}$ Доказать, что во вписанном четырехугольнике точки пересечения противоположных сторон и точки пересечения касательных в противоположных вершинах лежат на одной прямой.

$\boxed{2}$ Даны треугольник ABC и некоторая точка T. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

$\boxed{3}$ Внутри треугольника ABC выбрана точка M. Прямые AM, BM, CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A', B', C' соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, образованного пересечением треугольников ABC и $A'B'C'$, пересекаются в точке M.

$\boxed{4}$ Окружность, проходящая через вершины A и D основания трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB, CD в точках P, Q, а диагонали — в точках E, F. Докажите, что прямые BC, PQ, EF пересекаются в одной точке.

$\boxed{5}$ Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

$\boxed{6}$ Точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC; R — произвольная точка. Прямые AR, BR, CR пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что точки пересечения прямых MA_1 и BC, MB_1 и CA, MC_1 и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку R.

$\boxed{7}$ Пусть A' — точка, диаметрально противоположная точке A в описанной окружности треугольника ABC с центром O. Касательная к описанной окружности в точке A' пересекает прямую BC в точке X. Прямая OX пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

$\boxed{8}$ Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω.

$\boxed{9}$ Точка M — середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC. Точки D и E на отрезках AM и AB соответственно выбраны так, что $BC \parallel DE$. Окружность ω, описанная около треугольника ABC, пересекает описанную окружность треугольника CDE в точках C и F, а прямую DE в точках X и Y. Касательная к окружности ω в точке B пересекает луч FC в точке Z. Докажите, что описанные окружности треугольников XMY и BFZ касаются.

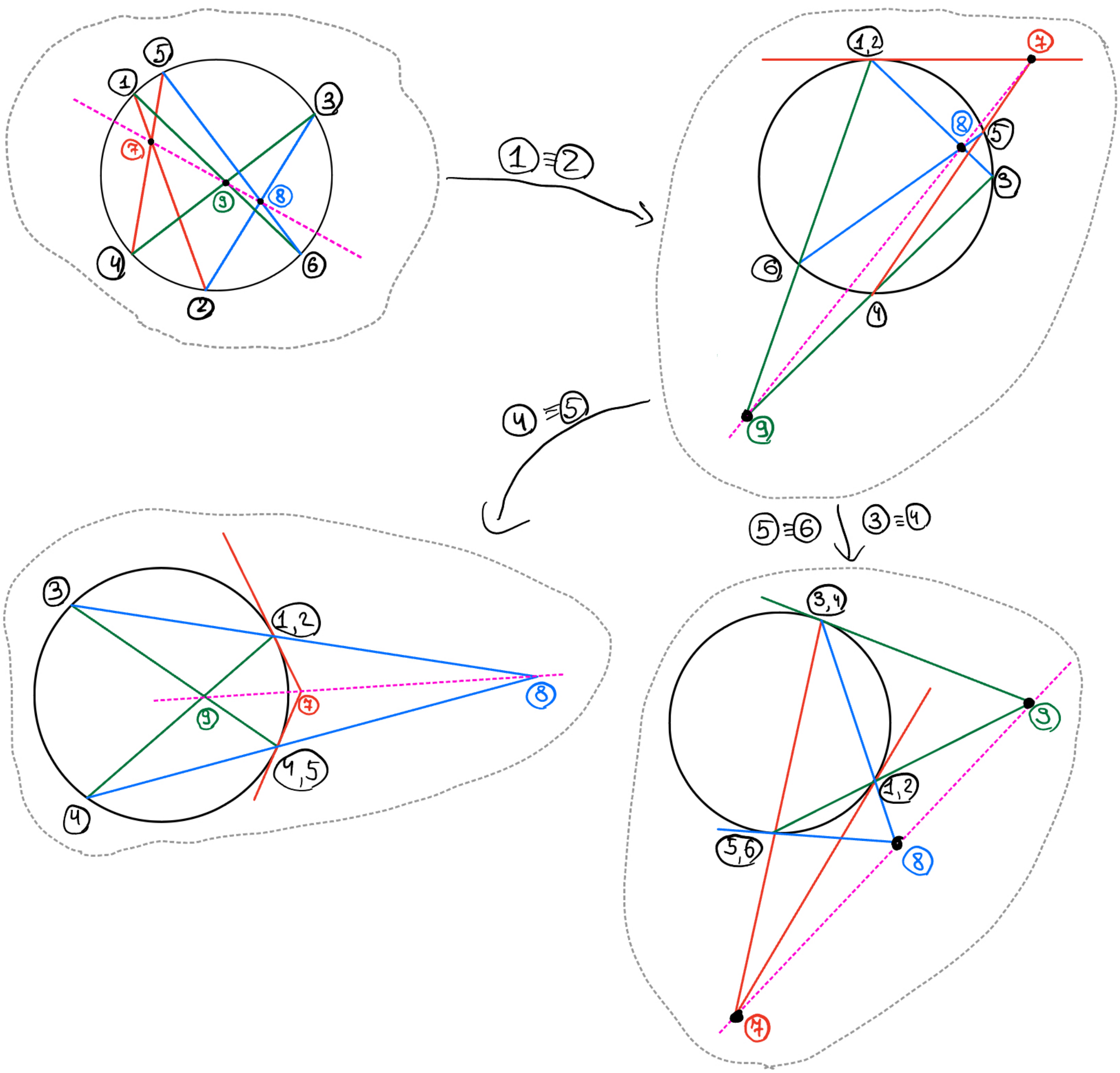

Рис. 1: Примеры склейки точек