Бесконечные множества

Определение 1 *Множество - неупорядоченная совокупность элементов.*

Пример 1: $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 3, 2, 3, 3\}$
Пример 2: $\{\} = \varnothing$
Пример 3: $\{a, \{b, c\}, \{\{d\}, e\}, \varnothing\}$

Определение 2 $a \in A$ *- означает, что во множестве A есть элемент a*

Определение 3 $B \subseteq A$ *- означает, что если $b \in B$, то $b \in A$.*

Пример 4: $1 \in \{1, 2, 3\}, \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
Пример 5: $1 \notin \varnothing$
Пример 6: $\{b, c\} \in \{a, \{b, c\}, \{\{d\}, e\}, \varnothing\}$

Определение 4 *Введём особые символы для часто использующихся множеств.*
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ *- множество натуральных чисел*
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ *- множество натуральных чисел и ноль*
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ *- множество целых чисел*
$\mathbb{Q}$ *- множество рациональных чисел*
$\mathbb{R}$ *- множество вещественных чисел*
$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *- множество иррациональных чисел*
$\mathbb{A}$ *- множество алгебраических чисел (числа, которые могут быть корнями многочленов с целыми коэффициентами)*

Пример 7: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$

Определение 5 $|A|$ *- мощность множества A - количество элементов в нем.*
$|A| = |B|$ *- множества A и B равномощны — между ними есть биекция*

Пример 8: $|\{a, \{b, c\}, \{\{d\}, e\}, \varnothing\}| = |\{0, 1, 2, 3\}| = 4$

Определение 6 $A \times B$ *- множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A, b \in B$*
$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$

Пример 9: $\{a, b\} \times \{0, 1, 2\} = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$
Пример 10: $\{a, b\}^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

Определение 7 $A^* = \{\varnothing\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \dots$ *- множество всех конечных подпоследовательностей*

Пример 10: $\{a, b\}^* = \{\varnothing, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$

Определение 8 2^A - *множество всех подмножеств множества* A

Пример 11: $2^{\{1,2,3\}} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Определение 9 $|A| = |B|$ - *если между множествами* A *и* B *есть взаимно однозначное соответствие (биекция)*

Определение 10 *Если* $|A| = |\mathbb{N}|$*, то* A *называется счётным множеством (его элементы можно пересчитать)*

$\boxed{1}$ Докажите, что $|\text{Чётных положительных}| = |\mathbb{N}|$

$\boxed{2}$ Докажите, что $|\text{Нечётных положительных}| = |\mathbb{N}|$

$\boxed{3}$ Докажите, что $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

$\boxed{4}$ $|\mathbb{Q}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$

$\boxed{5}$ $|\mathbb{N}^2| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$

$\boxed{6}$ Докажите, что если $|A| = |B| = |\mathbb{N}|$, то $A \cup B = |\mathbb{N}|$

$\boxed{7}$ $|\mathbb{N}^*| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$

$\boxed{8}$ $|\mathbb{A}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$

$\boxed{9}$ Докажите, что $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$

$\boxed{10}$ Докажите, что $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$

$\boxed{11}$ Докажите, что для любого множества A: $|2^A| \neq |A|$

$\boxed{12}$ Докажите, что множество точек интервала $(0,1)$ равномощно множеству точек прямой $\mathbb{R}$

$\boxed{13}$ Докажите, что $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$

$\boxed{14}$ Докажите, что $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$

$\boxed{15}$ Докажите, что $|\mathbb{R}^*| = |\mathbb{R}|$