

Строим примеры

- 1 Существуют ли попарно различные натуральные числа x , y и z , удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2024}$?
- 2 Два натуральных числа называются похожими, если одно получается из другого зачёркиванием одной цифры (и возможно отбрасыванием впереди стоящих нулей). Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух похожих.
- 3 Есть кусок сыра. Разрешается выбрать иррациональное $a > 0$ и разрезать этот кусок в отношении $1 : a$ по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, что после конечного числа разрезов весь сыр удастся разложить на две кучки равного веса?
- 4 Существует ли такое натуральное n , что число вида $12345678 \underbrace{9 \dots 9}_n 87654321$, в котором n девяток, делится на 2023?
- 5 Существует ли 2023^{2024} таких различных натуральных чисел, что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?
- 6 Даны натуральные числа a и b . Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ не делится на $n^b + 1$.