

## Многочлены

- 1 Докажите, что любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один корень
- 2 Дан многочлен  $P(x)$  с вещественными коэффициентами нечетной степени. Докажите, что уравнение  $P(P(x)) = 0$  имеет не меньше различных вещественных корней, чем уравнение  $P(x) = 0$ .
- 3 Последовательность многочленов  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$  удовлетворяет равенствам  $P_1(x) = x$  и  $P_{n+1}(x) = P_n(x-1)P_n(x+1)$ . Найдите наибольшее натуральное  $k$ , для которого  $P_{2021}(x)$  делится на  $x^k$ .
- 4 В выражении  $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2019}$  раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной  $x$  получился отрицательный коэффициент.
- 5 Даны два различных приведенных кубических многочлена  $F(x)$  и  $G(x)$ . Выписали все корни уравнений  $F(x) = 0$ ,  $G(x) = 0$ ,  $F(x) = G(x)$ . Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена  $F(x)$ .
- 6 Многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен  $Q(x)$  степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель  $P(x) + 2021$ . Докажите, что степень  $Q(x)$  не меньше 13.
- 7 Дан непостоянный многочлен  $P(x)$  с натуральными коэффициентами. Докажите, что найдется целое число  $k$  такое, что числа  $P(k), P(k+1), \dots, P(k+2021)$  — составные.