## Многочлены

$\boxed{1}$ Решите уравнение: $x(x+1) = 2020 \cdot 2021$

$\boxed{2}$ При каких $p$ и $q$ уравнению $x^2 + px + q = 0$ удовлетворяют два различных числа $2p$ и $p + q$?

$\boxed{3}$ Пусть $x_1, x_2$ — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Выразите через $p$ и $q$ следующие выражения:

(a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

(b) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$

$\boxed{4}$ Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2021$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

$\boxed{5}$ Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет корень, а сумма любых двух из них корней не имеет?

$\boxed{6}$ Два различных числа $x$ и $y$ (не обязательно целых) таковы, что

$$x^2 - 2000x = y^2 - 2000y$$

. Найдите сумму чисел $x$ и $y$.

$\boxed{7}$ Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Найдите знак коэффициента .

$\boxed{8}$ Верно ли, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

$\boxed{9}$ Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $(3x^2 - 4x + 2)^{2021}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

$\boxed{10}$ Докажите, что если в выражении $(x^2 - x + 1)^{2021}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.

$\boxed{11}$ Про действительные числа $a, b, c$ известно, что $(a + b + c) \cdot c < 0$. Докажите, что $b^2 - 4ac > 0$.

$\boxed{12}$ Докажите теорему Виета для кубического многочлена:

**Теорема Виета для кубического многочлена**

Если кубическое уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет три корня $x_1, x_2, x_3$, то

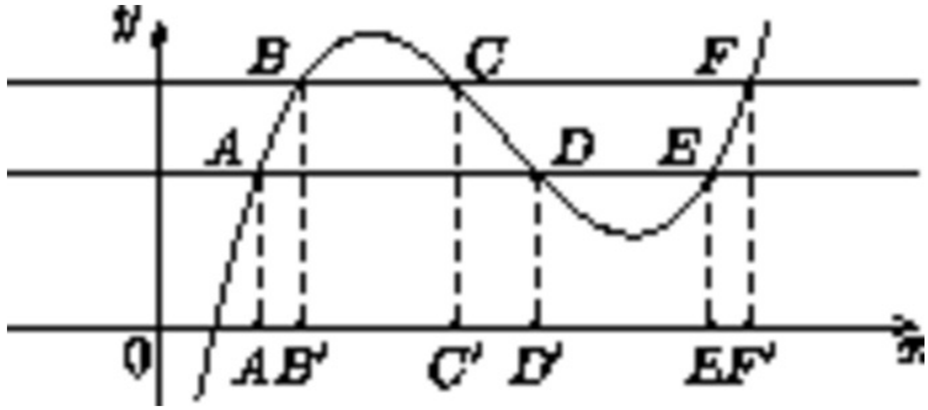
$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

$\boxed{13}$ Известно, что уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет три решения $x_1, x_2, x_3$, и $x_1 = -x_3$. Чему равен коэффициент $b$?

$\boxed{14}$ Прямые, параллельные оси $Ox$, пересекают график функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$: первая – в точках $A, D$ и $E$, вторая – в точках $B, C$ и $F$ (см. рис.). Докажите, что длина проекции дуги $CD$ на ось $Ox$ равна сумме длин проекций дуг $AB$ и $EF$.




$\boxed{15}$ **Теорема Безу**: Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $a$ и $b$ — различные целые числа. Тогда $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

$\boxed{16}$ Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6) = 5$ и $P(14) = 9$.

$\boxed{17}$ Докажите, что многочлен $P(x) = (x+1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x+1)(2x+1)$.

$\boxed{18}$ Какой остаток даёт $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ при делении на $x - 1$?

$\boxed{19}$ Докажите, что любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один корень