Синусы в геометрии

$\boxed{1}$ На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1 так, что $\angle BCA_1 = \angle B_1CA = \varphi$, $\angle CAB_1 = \angle BAC_1 = \theta$, $\angle CBA_1 = \angle ABC_1 = \psi$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

$\boxed{2}$ В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB' и CC'. Пусть P — точка пересечения $A'B'$ и CC', а Q — точка пересечения $A'C'$ и BB'. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.

$\boxed{3}$ В окружность вписан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

$\boxed{4}$ Через точку M проведены касательные MA и MB и две произвольные секущие CD и EF. Докажите, что прямые CF и DE пересекаются на прямой AB.

$\boxed{5}$ В треугольнике ABC через внутреннюю точку X проведены чевианы AD, BE, CF. В сегмент, отсекаемый прямой AC от описанной окружности ω треугольника ABC (не содержащий точку B), вписана окружность, касающаяся AC в точке E и ω в точке B_1. Аналогично определяются точки A_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

$\boxed{6}$ Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

$\boxed{7}$ Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Внутри треугольника ABC взята точка X. Прямая AX пересекает дугу B_1C_1 вписанной окружности в точке A_2; точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

$\boxed{8}$ Через точки A и D, лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке S. На дуге AD взяты точки B и C. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, AB и CD — в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через точку S.