Производящие функции

Производящей функцией последовательности $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется формальный степенной ряд.

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

$\boxed{1}$ Дан многочлен $f(x)$ степени не выше n. Докажите, что для любого вещественного x_0 существуют и единственные $A_1, \dots, A_n$ такие, что

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \dots \frac{A_n}{(x-x_0)^n}.$$

$\boxed{2}$ Дан многочлен $f(x)$ степени не выше n. Докажите, что для любых различных вещественных чисел $x_0, x_1, \dots, x_n$ существуют и единственные $A_0, A_1, \dots, A_n$ такие, что

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \dots \frac{A_n}{x-x_n}.$$

$\boxed{3}$ Посчитайте производящую функцию последовательности $\{1\}_{n=0}^{\infty}$.

$\boxed{4}$ Посчитайте производящую функцию последовательности $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ и выведите из неё формулу n-того числа Фибоначчи.

Производной степенного ряда

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

называется

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n x^{n-1} = g_1 + 2g_2 x + 3g_3 x^2 + \dots$$

Тогда заметим, что $g_n = n! \cdot G^{(n)}(0)$

$\boxed{5}$ Найдите степенной ряд функции $(1-4x)^{1/2}$.

$\boxed{6}$ Докажите, что

$$4^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2i}{i} \binom{2(n-i)}{n-i}$$

$\boxed{7}$ Найдите производящую функцию чисел Каталана.

$\boxed{8}$ Посчитайте количество подмножеств множества из 1000 элементов, количество элементов в которых делится на 5