

Разнойбой

- [1] Серёжа написал на доске три натуральных числа, а затем вычислил их попарные НОДы и НОКи. Могла ли сумма шести полученных чисел оказаться равной 2023?
- [2] Докажите, что $2016 \cdot 2018 \cdot 2020 \cdot 2022 + 16$ — точный квадрат
- [3] Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M — середины отрезков BD и EF . Докажите, что треугольник AMK равносторонний.
- [4] В очереди стояло 2022 человека. Касса сломалась, и все перешли в соседнюю только что открытую кассу. Сколькими способами они могут выстроиться в новую очередь так, чтобы человек, стоявший на месте с номером k изменил свой номер не более, чем на k ?
- [5] Найдите все натуральные n такие, что $3^n + 5^n$ делится на $3^{n-1} + 5^{n-1}$.
- [6] Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.
- [7] Шах разбил свой квадратный одноэтажный дворец на 64 одинаковые квадратные комнаты, разделил комнаты на семь квартир (проделав двери в некоторых перегородках между комнатами) и в каждой квартире поселил по жене. Жёны могут ходить по всем комнатам своей квартиры, не заходя к другим. Какое наименьшее число дверей пришлось проделать во внутренних стенах?
- [8] Докажите, что $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- [9] Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения.
- [10] В компании у каждого двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.
- [11] Докажите, что $2021^2 + 2021^2 \cdot 2022^2 + 2022^2$ — точный квадрат.
- [12] вещественные числа a , b и c таковы, что $a + b + c = 0$. Докажите, что $ab + bc + ac \leq 0$
- [13] Докажите, что $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$