

## Неравенства

- [1] Докажите, что  $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$  при любых  $x$  и  $y$ .
- [2] Докажите, что  $1 + x \geq 2\sqrt{x}$  при  $x \geq 0$ .
- [3] Докажите, что  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  при  $x, y > 0$ .
- [4] Докажите, что  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$  при  $x, y > 0$ .
- [5] Докажите, что если  $-1 < x, y < 1$ , то
- (a)  $\frac{2}{1 + xy} \geq \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2}$
- (b)  $\frac{2}{1 - xy} \leq \frac{1}{1 - x^2} + \frac{1}{1 - y^2}$
- [6] Докажите, что при  $a, b, c > 0$  имеет место неравенство  $(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$ ;
- [7] Докажите, что  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$  при любых  $x, y, z$ .
- [8] Сумма трёх положительных чисел равна 6. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.
- [9] Докажите, что  $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$  при любых  $a, b$ .
- [10] Докажите, что при  $a, b, c > 0$  имеет место неравенство  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$ .
- [11] Докажите, что при  $a, b, c > 0$  имеет место неравенство  $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c$ .
- [12] Докажите, что  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz - 2zx$  при любых  $x, y, z$ .
- [13] Пусть  $a, b$  и  $c$  положительные числа, докажите неравенство
- $$\frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} \geq 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$
- [14] **(Неравенство Бернулли.)** Докажите, что если  $x > -1$ , то  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$  для всех натуральных  $n \geq 1$ .
- [15] Что больше  $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{101}$  или  $2^{10}$ ?
- [16] Докажите, что для любого натурального  $n$  выполнено неравенство  $(n - 1)^{n+1}(n + 1)^{n-1} < n^{2n}$ .