Малая теорема Ферма

Теорема 1 *Для любого простого p и целого a верно сравнение* $a^p \equiv a \pmod{p}$

$\boxed{1}$ Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.

$\boxed{2}$ Докажите, что $60^{111} + 111^{60}$ делится на 61.

$\boxed{3}$ Пусть p – простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ для любых целых a и b.

$\boxed{4}$ Известно, что $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12}$ делится на 13 (a, b, c, d, e, f – целые числа). Докажите, что $abcdef$ делится на 4826809.

$\boxed{5}$ Докажите, что если p — простое число и $p > 2$, то $7^p - 5^p - 2$ делится на $6p$.

$\boxed{6}$ Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{11\ldots1}_{p-1}$ делится на p.

$\boxed{7}$ Пусть n – натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо n^8+1, либо n^4+1, либо n^2+1, либо $n+1$, либо $n-1$ делится на 17.

$\boxed{8}$ Докажи, что $a^{73} - a$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$.

$\boxed{9}$ Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.

$\boxed{10}$ Андрей берет натуральное число a и сначала прибавляет к нему число a^2, потом — a^3, потом — a^4 и т.д. Докажите, что когда-нибудь его сумма поделится на простое число p.

$\boxed{11}$ Пусть $p = 4k+3$ — простое, а $m^2 + n^2 \,\vdots\, p$. Докажите, что $m, n \,\vdots\, p$.

$\boxed{12}$ Найти все такие натуральные числа p, что p и $p^6 + 6$ – простые

$\boxed{13}$ a) Докажите, что равенство $\frac{10^n-1}{m} = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ равносильно тому, что десятичная запись дроби $1/m$ имеет вид $0,(a_1a_2\ldots a_n)$.

b) Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $1/p = 0,(a_1a_2\ldots a_n)$ (т.е. дробь не имеет предпериода).

c) Запишем $1/p = 0,(a_1a_2\ldots a_n)$. Докажите, что $p-1$ делится на n.

d) Запишем $1/p = 0,(a_1a_2\ldots a_n)$. Докажите, что дробь $0,(a_2a_3\ldots a_na_1)$ — тоже дробь со знаменателем p.

$\boxed{14}$ Найдите такое шестизначное число x, что x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ и $6x$ записываются одинаковым набором цифр, но в различном порядке.