Изогональное сопряжение 2

Изогональное сопряжение в четырёхугольнике:

$\boxed{1}$ Точка P лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ и проекции точки P на прямые, содержащие стороны, попадают на стороны. Докажите, что для точки P существует изогонально сопряжённая относительно четырёхугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда

a) основания перпендикуляров из точки P на стороны являются вершинами вписанного четырёхугольника;

b) верно соотношение $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$.

$\boxed{2}$ В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов $\angle BAC$ и $\angle BDC$ пересекаются в точке P. Кроме того, $\angle APB = \angle CPD$. Докажите, что $AB + BD = AC + CD$.

$\boxed{3}$ Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры вписанных окружностей ω_A, ω_B, ω_C и ω_D треугольников DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180^\circ$.

$\boxed{4}$ В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD не является биссектрисой ни угла ABC, ни угла CDA. Точка P внутри четырехугольника $ABCD$ такова, что $\angle PBC = \angle DBA$ и $\angle PDC = \angle BDA$. Докажите, что $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $AP = CP$.

Изогональное сопряжение окружности относительно треугольника:

$\boxed{5}$ На окружности, проходящей через вершины B и C треугольника ABC и через центр его вписанной окружности, выбраны такие точки P и Q, лежащие внутри треугольника, что $\angle BAP = \angle CAQ$. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

$\boxed{6}$ Окружность пересекает сторону BC треугольника ABC в точках A_1 и A_2, сторону CA — в точках B_1 и B_2, а сторону AB — в точках C_1 и C_2. Окружности, описанные около треугольников AB_1C_1 и BC_1A_1, пересекаются в точке P_1. Окружности, описанные около треугольников AB_2C_2 и BC_2A_2, пересекаются в точке P_2. Докажите, что точки P_1 и P_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

Изогональное сопряжение в подобных треугольниках:

$\boxed{7}$ Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A и N лежат на одной окружности.

$\boxed{8}$ Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Окружность ω_1 касается прямых AB и CD в точках X и Y и пересекает дугу AD окружности ω в точках K и L. Прямая XY пересекает прямые AC и BD в точках Z и T. Докажите, что K, L, Z и T лежат на одной окружности, касающейся прямых AC и BD.

$\boxed{9}$ Точка X вне треугольника ABC такова, что A лежит внутри треугольника BXC. При этом $2\angle BAX = \angle CBA$, $2\angle CAX = \angle BCA$. Докажите, что центры описанной и вневписанной со стороны BC окружностей треугольника ABC и точка X лежат на одной прямой.

$\boxed{10}$ Точки M и N — соответственно середины сторон AB и AC треугольника ABC. На касательной в точке A к описанной окружности треугольника ABC выбрана точка X. Окружность ω_B, проходящая через точки M и B, касается прямой MX, а окружность ω_C, проходящая через точки N и C, касается прямой NX. Докажите, что ω_B и ω_C пересекаются на прямой BC.

Задачи посложнее:

$\boxed{11}$ Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1, точка I — центр этой окружности. Прямая, проходящая через точку A_1 перпендикулярно AA_1, пересекает прямые BI и CI в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AX = AY$.

$\boxed{12}$ Пусть пары точек X и X', Y и Y' изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что точки пересечения пар прямых XY и $X'Y'$, XY' и $X'Y$ изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

$\boxed{13}$ Докажите, что проекция ортоцентра треугольника ABC на медиану, выходящую из вершины A, и проекция центра описанной окружности на симедиану, выходящую из вершины A, изогонально сопряжены.

$\boxed{14}$ Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P, лежащей внутри треугольника. Известно, что $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Докажите, что перпендикуляры, восставленные в точках A_1, B_1 и C_1 к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке.