# Теорема Эйлера

**Теорема Эйлера** Для натуральных взаимно простых $a, m$, верно сравнение

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$$

$\boxed{1}$ Найдите 3 последние цифры чисел (a) $7^{2000}$; (b) $7^{2003}$.

$\boxed{2}$ Докажите, что существует натуральная степень тройки, заканчивающаяся на 00001. Найдите явно эту степень.

$\boxed{3}$ Найдите последние две цифры в десятичной записи числа $3^{219}$.

$\boxed{4}$ Докажите, что для любого натурального числа $a$ верно, что $a^{17} - a$ делится на 510;

$\boxed{5}$ Докажите, что для любого натурального $n$ число $n^{84} - n^4$ делится на 20400.

$\boxed{6}$ Докажите, что если $n$ нечётно, то $2^{n!} - 1$ делится на $n$;

$\boxed{7}$ Докажите, что если $n$ чётно, то $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.

$\boxed{8}$ Докажите, что $2^{3^k} + 1$ делится на $3^{k+1}$.

$\boxed{9}$ Докажите, что существует бесконечно много натуральных $n$ таких, что $2^n - 1$ имеет хотя бы 1000 различных простых делителей.

$\boxed{10}$ Докажите, что если число $n$ имеет два различных нечетных простых делителя, то для любого $a$, взаимно простого с $n$, верно, что $a^{\varphi(n)/2} - 1$ делится на $n$.

$\boxed{11}$ **(Усиление теоремы Эйлера)** Если $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ — разложение числа $m$ на простые множители и $x$ — наименьшее общее кратное чисел $\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}), \dots, \varphi(p_k^{a_k})$, то для любого $a$, взаимно простого с $m$, выполняется сравнение $a^x \equiv 1 \pmod m$.

$\boxed{12}$ Дано число $2^{2023}$. Докажите, что можно дописать слева от него несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

$\boxed{13}$ Обозначим через $L(m)$ длину периода дроби $1/m$. Докажите, что если $(m, 10) = 1$, то $L(m)$ является делителем числа $\phi(m)$.

$\boxed{14}$ Докажите, что если $(a, p!) = 1$, то $a^{(p-1)!} \equiv 1 \pmod{p!}$.

$\boxed{15}$ Докажите, что для каждого $n$ существует число с суммой цифр $n$, делящееся на $n$.