

## Разной по алгебре

- 1 Рациональные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют равенству

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$$

Докажите, что  $1 - ab$  — квадрат рационального числа.

- 2 Дано натуральное  $n > 1$ . Для каждого делителя  $d$  числа  $n + 1$  Петя разделил число  $n$  на  $d$  с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь — остаток. Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

- 3 Докажите, что для любого простого числа  $p$  найдется число вида  $2023^n - n$ , делящееся на  $p$ .

- 4 Найдите все тройки простых чисел  $p, q, r$  такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

- 5 Докажите, что существует бесконечно много таких пар различных натуральных чисел  $k, n > 1$ , что  $(k! + 1, n! + 1) > 1$ .

- 6 Числа  $a, b, c$  являются длинами сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3$$

- 7 Попарно различные натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $b + c + bc$  делится на  $a$ ,  $a + c + ac$  делится на  $b$ ,  $a + b + ab$  делится на  $c$ . Докажите, что хотя бы одно из чисел  $a, b, c$  не является простым.

- 8 Дано натуральное число  $a$ . Известно, что для любого натурального  $n$  у числа  $n^2a - 1$  найдётся натуральный делитель  $d > 1$  такой, что  $d \equiv 1 \pmod{n}$ . Докажите, что  $a$  — точный квадрат.