

Неравенства

- [1] Докажите, что $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ при любых x и y .
- [2] Докажите, что $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ при $x \geq 0$.
- [3] Докажите, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ при $x, y > 0$.
- [4] Докажите, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$ при $x, y > 0$.
- [5] Докажите, что если $-1 < x, y < 1$, то
- (a) $\frac{2}{1 + xy} \geq \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2}$
- (b) $\frac{2}{1 - xy} \leq \frac{1}{1 - x^2} + \frac{1}{1 - y^2}$
- [6] Докажите, что при $a, b, c > 0$ имеет место неравенство $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$;
- [7] Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ при любых x, y, z .
- [8] Сумма трёх положительных чисел равна 6. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.
- [9] Докажите, что $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ при любых a, b .
- [10] Докажите, что при $a, b, c > 0$ имеет место неравенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$.
- [11] Докажите, что при $a, b, c > 0$ имеет место неравенство $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c$.
- [12] Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz - 2zx$ при любых x, y, z .
- [13] Пусть a, b и c положительные числа, докажите неравенство
- $$\frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$
- [14] **(Неравенство Бернулли.)** Докажите, что если $x > -1$, то $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ для всех натуральных $n \geq 1$.
- [15] Что больше $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{101}$ или 2^{10} ?