

## Сочетания

**Определение 1** Количество способов выбрать  $k$  предметов из  $n$  имеющихся называется числом сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  и обозначается  $C_n^k = \binom{n}{k}$ .

- 1 Докажите, что  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- 2 У семиклассника Пети есть 7 детективов, а у восьмиклассника Васи – 8 книг по математике. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?
- 3 15 человек нужно разбить на баскетбольную, волейбольную и футбольную команды по пять человек. Сколькими способами это можно сделать?
- 4 (а) Что можно выбрать большим числом способов: двух преподавателей из 15 для работы в группе "Олимпиадная математика - 4" или 13 преподавателей, которые не решаются работать с группой "Олимпиадная математика - 4"? (б) Докажите тождество алгебраически, комбинаторно и через треугольник Паскаля.  $C_n^k = C_n^{n-k}$
- 5 (а) В группе 15 человек. Сколькими способами из них можно выбрать шестерых, которые пойдут на лекцию, если Даниил категорически отказывается туда идти, так как ему нужно дорешать задачи? (б) Для проведения матбоя нужна команда из шести человек, в которой Саша будет капитаном. Сколькими способами можно собрать такую команду из группы в 15 человек? (в) Докажите тождество алгебраически, комбинаторно и через треугольник Паскаля  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
- 6 (а) В классе 15 человек. Учитель по физкультуре Андрей Леопольдович выбирает команду в футбол на кубок ЦРОДа (из 6 человек). Капитаном он выберет самого высокого из них (в классе все дети разного роста). Но Андрей Леопольдович решил сначала выбрать капитана, а потом всю оставшуюся команду. Помогите ему посчитать количество возможных команд. (б) Докажите тождество комбинаторно и через треугольник Паскаля  $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} + \dots + C_n^n$
- 7 (а) У акулы было 100 зубов. Сколько различных улыбок могло у неё остаться после встречи с катером? (б) Докажите, что  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$
- 8 (а) Сколькими способами из 15 человек можно выбрать команду из шести человек, возглавляемую капитаном? (б) Сколькими способами можно выбрать из  $n$  человек  $k$  человек в парламент, возглавляемого президентом парламента? (в) Докажите тождество двумя способами – комбинаторно и алгебраически:  $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$
- 9 Сколькими способами можно выбрать положительные числа  $x_1, \dots, x_k$  такие, что  $x_1 + \dots + x_k = n$ .

- [10] Сколькими способами можно выбрать неотрицательные числа  $x_1, \dots, x_k$  такие, что  $x_1 + \dots + x_k = n$ .
- [11] В коробке лежат  $n$  синих и  $n$  красных шариков (все шарики разные). Сформулируйте вопрос, позволяющий доказать, что  $C_n^0 \cdot C_n^k + C_n^1 \cdot C_n^{k-1} + \dots + C_n^i \cdot C_n^{k-i} + \dots + C_n^k \cdot C_n^0 = C_{2n}^k$
- [12] Найдите, значение выражения  $C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \dots + C_n^i \cdot C_m^{k-i} + \dots + C_n^k \cdot C_m^0$
- [13] Найдите, значение выражения  $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^i)^2 + \dots + (C_n^n)^2$
- [14] Найдите, значение выражения  $C_n^0 + C_n^1 \cdot 2 + \dots + C_n^i \cdot 2^i + \dots + C_n^n \cdot 2^n$
- [15] Для натурального числа  $n$  оказалось, что каждое из чисел  $C_n^1, \dots, C_n^{k-1}$  делится на  $n$ , а число  $C_n^k$  — нет. Докажите, что  $k$  — простое число.