Процессы

$\boxed{9}$ На бесконечной шахматной доске находятся ферзь и невидимый король, которому запрещено ходить по диагонали. Они ходят по очереди. Может ли ферзь ходить так, чтобы король рано или поздно наверняка попал под шах?

$\boxed{10}$ На бесконечной шахматной доске стоят ферзь и невидимый король. Известно, что ферзь дал шах по горизонтали, и король ушел из под шаха. Докажите, что ферзь может ходить так, чтобы король наверняка ещё раз попал под шах.

УТЮМ 1

$\boxed{7}$ Докажите, что нечётное число $p > 1$ — простое тогда и только тогда, когда среди любых $\dfrac{p+1}{2}$ различных натуральных чисел можно найти два числа, сумма которых хотя бы в p раз больше их наибольшего общего делителя.

УТЮМ 2

$\boxed{5}$ В стране из 1000 городов некоторые города соединены дорогами, по которым можно двигаться в обе стороны. Известно, что в этой стране нет циклического маршрута. При каком наибольшем k всегда можно выбрать k городов так, чтобы каждый выбранный город был соединен не более чем с двумя из остальных выбранных?

Лампочки

$\boxed{5}$ В каждой вершине графа находит лампочка: включенная либо выключенная. Разрешается одновременно переключать лампочку в любой вершине и всех, с ней смежных. Докажите, что можно состояние всех лампочек изменить на противоположное.

Рациональность

$\boxed{7}$ Пусть A и B – два прямоугольника. Из прямоугольников, равных A, сложили прямоугольник, подобный B. Докажите, что из прямоугольников, равных B, можно сложить прямоугольник, подобный A.

Питерский город

$\boxed{7}$ Существует ли выпуклый многоугольник, который можно разрезать непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями на треугольники равной площади хотя бы тремя разными способами?

КБШ

$\boxed{7}$ Даны положительные числа a, b, c, сумма которых не меньше двух. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b\sqrt[3]{c}+a}+\frac{b}{c\sqrt[3]{a}+b}+\frac{c}{a\sqrt[3]{b}+c}\leqslant 2.$$

Равносоставленные многоугольники

15 Докажите, что правильный пятиугольник можно разрезать на 4 части, из которых без просветов и наложений можно сложить прямоугольник.

Инверсия

18 В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y . Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.

19 Пусть O — одна из точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Окружность ω с центром O пересекает ω_1 в точках A и B,а ω_2 — в точках C и D. Пусть X— точка пересечения прямых AC и BD. Докажите, что все такие точки X лежат на одной прямой.

21 В четырёхугольнике $ABCD$ вписанная окружность ω касается сторон BC и DA в точках E и F соответственно. Оказалось, что прямые AB, FE и CD пересекаются в одной точке S. Описанные окружности Ω и Ω_1 треугольников AED и BFC, вторично пересекают окружность ω в точках E_1 и F_1. Докажите, что прямые EF и E_1F_1 параллельны.