Индукция в графах

1. В одной далёкой-далёкой стране некоторые (соседние) города соединены дорогами. Докажите, что президент может в каждый город назначить мэра (рыцаря или лжеца), чтобы на вопрос «есть ли лжецы среди мэров соседних городов?» любой мэр отвечал утвердительно.

2. (a) Докажите, что в связном графе существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз (Эйлеров цикл), тогда и только тогда, когда степени всех вершин данного графа чётны;

   (b) Докажите, что в связном графе существует путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз (Эйлеров путь), тогда и только тогда, когда в данном графе есть не более двух вершин нечётной степени.

3. Дан набор из n натуральных чисел. Сумма всех чисел равна $2n-2$. Докажите, что существует дерево, для которого набор степеней вершин совпадает с данным набором.

4. Докажите, что в планарном графе с V вершинами, E рёбрами и F гранями

$$V - E + F = 2$$

5. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из каждого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что каждые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдётся город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдётся пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

6. В компании из $n > 2$ человек среди любых четырех есть знакомый с тремя остальными. Докажите, что есть человек, который знает всех.

7. Дан планарный граф, степени всех вершин которого чётны. Докажите, что её грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две грани, имеющие общее ребро, были покрашены в разные цвета.

8. В связном графе n вершин. В каждой из них лежит некоторое количество монет, в сумме kn. За один ход разрешается переложить некоторое количество монет из одной вершины в соседнюю. Докажите, что из любого расположения монет можно разложить монеты поровну во все вершины не более чем за $n-1$ ходов.