## Лемма об уточнении показателя

**Лемма об уточнении показателя** состоит из трёх частей

Пусть $x$ и $y$ — различные ненулевые целые числа, $p$ — нечетное простое число, не являющееся делителем $x$ и $y$ и такое, что $x - y \vdots p$. Тогда для любого натурального $n$ выполнено равенство $\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n)$.

Пусть $x$ и $y$ — различные целые числа, $p$ — нечетное простое число, не являющееся делителем $x$ и $y$ и такое, что $x + y \vdots p$. Тогда для любого нечетного натурального $n$ выполнено $\nu_p(x^n + y^n) = \nu_p(x + y) + \nu_p(n)$.

Пусть $x$ и $y$ — различные нечетные целые числа. Тогда для любого натурального $n$ выполнено $\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(x + y) + \nu_2(n) - 1$.

$\boxed{1}$ Пусть $p$ — простое число, числа $a$ и $b$ не делятся на $p$, а $a - b$ — делится.

(a) Докажите, что $\nu_p(a^p - b^p) > \nu_p(a - b)$

(b) Докажите, что $\nu_p(a^s - b^s) = \nu_p(a - b)$, если $s$ не делится на $p$

(c) Докажите, что $\nu_p(a^k - b^k) \geqslant \nu_p(a - b) + \nu_p(k)$

(d) Докажите, что если $p > 2$, то $\nu_p(a^p - b^p) = \nu_p(a - b) + 1$

(e) Докажите лемму в случае, когда $p > 2$.

(f) Докажите лемму в случае, когда $p = 2$ и $a - b \vdots 4$.

(g) Докажите лемму в случае, когда $p = 2$ и $a - b \vdots 2$ но не делится на 4.

$\boxed{2}$ Используя *лемму об уточнении показателя*, найдите степень вхождения тройки в число $5^{18} - 2^{18}$.

$\boxed{3}$ Найдите все тройки натуральных чисел $x, y, p$ такие, что $p$ — простое и $p^x - y^p = 1$.

$\boxed{4}$ Дано простое число $p$ и натуральные числа $a$ и $n$. Докажите, что если $2^p + 3^p = a^n$, то $n = 1$.

$\boxed{5}$ Докажите, что показатель числа 2 по модулю $3^n$ равен $\varphi(3^n)$.

$\boxed{6}$ Решить уравнение $3^x = 2^x \cdot y + 1$ в натуральных числах.

$\boxed{7}$ Дано натуральное число n, не делящееся ни на один точный квадрат, больший 1. Докажите, что не существует пары взаимно простых чисел $(x, y)$ такой, что $x^n + y^n$ делится на $(x + y)^3$.

$\boxed{8}$ Пусть натуральные числа $x, y, p, n, k$ таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число $n > 1$ — нечетное, а число $p$ — простое нечетное, то $n$ является степенью числа $p$ с натуральным показателем.

$\boxed{9}$ Докажите, что если $3^n - 2^n = p^a$ для некоторых натуральных $n$, a и простого $p$, то тогда $n$ — простое.

10 Пусть положительные числа $a$ и $b$ таковы, что $a^k - b^k$ является натуральным числом для любого натурального $k$. Докажите, что $a$ и $b$ — натуральные

11 Найдите все такие натуральные $n$, что при некоторых взаимно простых $x$ и $y$ и натуральном $k > 1$ выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

12 На сколько нулей заканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

13 Пусть $m$ — нечетное натуральное число, $m > 3$. Найти наименьшее натуральное $n$, такое, что $mn - 1 \, \vdots \, 2^{2022}$.

14 Найдите все такие натуральные $n > 1$, что $2^n + 1$ делится на $n^2$.