

Радикальные оси

- [1] Внутри треугольника ABC отметили такую точку M , что $\angle ABM = \angle MAC$, $\angle CBM = \angle MCA$. Докажите, что точка M лежит на медиане, проведённой из вершины B .
- [2] На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M . Докажите, что общая хорда окружностей с центром C и радиусом CA и с центром M и радиусом MC проходит через середину AB .
- [3] Окружности s_1 , s_2 и s_3 проходят через точку A . Известно, что прямая, содержащая общую хорду s_1 и s_2 , проходит через центр s_3 , а прямая, содержащая общую хорду s_2 и s_3 — через центр s_1 . Докажите, что прямая, содержащая общую хорду s_1 и s_3 , проходит через центр s_2 .
- [4] На сторонах BC , AC , AB треугольника ABC отмечены точки A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 . Оказалось, что четырёхугольники $A_1A_2B_2B_1$, $A_1A_2C_2C_1$ и $B_1B_2C_1C_2$ вписанные. Докажите, что шесть отмеченных точек лежат на одной окружности.
- [5] Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N , а диагонали — в точках X и Y . Докажите, что прямые XY , MN и AD пересекаются в одной точке.
- [6] В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота BH . Точка F — основание перпендикуляра из точки H на сторону BC . Докажите, что прямая, перпендикулярная AF и проходящая через точку B , делит отрезок HF пополам.
- [7] Точки B и C — середины касательных, проведённых из точки A к окружности ω . На прямой BC выбрали точки X и Y . Из точек X и Y провели касательные к ω , пересекающиеся в точке F , причём ω располагается внутри четырёхугольника $AXFY$. Докажите, что в четырёхугольник $AXFY$ можно вписать окружность.
- [8] Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB , AC , BC в точках C_1 , B_1 , A_1 соответственно. P — произвольная точка плоскости. Серединный перпендикуляр к отрезку PA_1 пересекает прямую BC в точке A_2 . Аналогично определяются точки B_2 и C_2 . Докажите, что точки A_2 , B_2 и C_2 лежат на одной прямой.
- [9] Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается сторон AB , AC , BC в точках C_1 , B_1 , A_1 соответственно. Точка K — середина отрезка A_1C_1 . Докажите, что центр описанной окружности треугольника BKB_1 лежит на прямой AC .

Посложнее

- 10 Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . На стороне BC выбрана произвольная точка X . Описанные окружности треугольников XCB_1 и XBC_1 повторно пересекаются в точке Y . Докажите, что четырёхугольник $XUNA_1$ вписанный.
- 11 На сторонах треугольника ABC взято по две точки так, что шесть отрезков, соединяющих вершину с точкой на противоположной стороне, равны. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной окружности.