

## Производящие функции

Производящей функцией последовательности  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется формальный степенной ряд.

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

- [1] Дан многочлен  $f(x)$  степени не выше  $n$ . Докажите, что для любого вещественного  $x_0$  существуют и единственные  $A_1, \dots, A_n$  такие, что

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_0)^n}.$$

- [2] Дан многочлен  $f(x)$  степени не выше  $n$ . Докажите, что для любых различных вещественных чисел  $x_0, x_1, \dots, x_n$  существуют и единственные  $A_0, A_1, \dots, A_n$  такие, что

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)} = \frac{A_0}{x - x_0} + \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

- [3] Посчитайте производящую функцию последовательности  $\{1\}_{n=0}^{\infty}$ .

- [4] Посчитайте производящую функцию последовательности  $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$  и выведите из неё формулу  $n$ -того числа Фибоначчи.

Производной степенного ряда

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

называется

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n x^{n-1} = g_1 + 2g_2 x + 3g_3 x^2 + \dots$$

Тогда заметим, что  $G^{(n)}(0) = n! \cdot g_n$

- [5] Найдите степенной ряд функции  $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ .

- [6] Докажите, что

$$4^n = \sum_{i=0}^n \binom{2i}{i} \binom{2(n-i)}{n-i}$$

- [7] Найдите производящую функцию чисел Каталана.

- [8] Посчитайте количество подмножеств множества из 1000 элементов, количество элементов в которых делится на 5