Принцип Дирихле

Принцип Дирихле - Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

$\boxed{1}$ В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1×1, не содержащий внутри дырок? (Дырки считаются точечными).

$\boxed{2}$ В классе учатся 38 человек. Докажите, что среди них найдутся четверо, родившихся в один месяц.

$\boxed{3}$ Обязательно ли среди двадцати пяти монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей найдётся семь монет одинакового достоинства?

$\boxed{4}$ Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

$\boxed{5}$ В клетках таблицы 3×3 расставлены числа -1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из восьми сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

$\boxed{6}$ Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 расположено 7 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки на расстоянии не больше 1.

$\boxed{7}$ а) В каждой вершине куба написано число 1 или число 0. На каждой грани куба написана сумма четырёх чисел, написанных в вершинах этой грани. Может ли оказаться, что все числа, написанные на гранях, различны?

б) Тот же вопрос, если в вершинах написаны числа 1 или -1.

$\boxed{8}$ На плоскости нарисовано 12 прямых, проходящих через точку O. Докажите, что можно выбрать две из них так, что угол между ними будет меньше 17 градусов.

$\boxed{9}$ В мешке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 синих, 20 жёлтых, остальные – чёрные и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 10 шаров одного цвета?

$\boxed{10}$ Даны n точек. Некоторые из них соединены отрезками. Докажите, что найдутся две точки, из которых выходит поровну отрезков.

$\boxed{11}$ Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

$\boxed{12}$ 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

$\boxed{13}$ В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

$\boxed{14}$ Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

$\boxed{15}$ На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причём среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

$\boxed{16}$ Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждом уголке из трёх полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

$\boxed{17}$ Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

$\boxed{18}$ В дискуссии приняли участие 15 депутатов. Каждый из них в своем выступлении раскритиковал ровно k из оставшихся 14 депутатов. При каком наименьшем k можно утверждать, что найдутся два депутата, которые раскритиковали друг друга?

$\boxed{19}$ Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей (из этой компании).

$\boxed{20}$ Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату - 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

$\boxed{21}$ В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?

$\boxed{22}$ В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок

$\boxed{23}$ В поход пошли 20 туристов. Самому старшему из них 35 лет, а самому младшему 20 лет. Верно ли, что среди туристов есть одногодки?

$\boxed{24}$ Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

$\boxed{25}$ Доказать, что если 21 человек собрали 200 орехов, то есть два человека, собравшие поровну орехов.

$\boxed{26}$ Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, веса которых равны $370, 372, \ldots, 468$ кг, на семи трёхтонках?

$\boxed{27}$ Из чисел 1, 2, …, 49, 50 выбрали 26 чисел. Обязательно ли среди них найдутся два числа, отличающиеся друг от друга на 1?

$\boxed{28}$ Докажите, что никакая прямая не может пересечь все три стороны треугольника (в точках, отличных от вершин).

$\boxed{29}$ В классе 33 ученика, всем вместе 430 лет. Докажите, что если выбрать 20 самых старших из них, то им вместе будет не меньше, чем 260 лет. (Возраст любого ученика – целое число.)

$\boxed{30}$ По кругу стоят мальчики и девочки (есть и те, и другие), всего 20 детей. Известно, что у каждого мальчика сосед по часовой стрелке – ребёнок в синей футболке, а у каждой девочки сосед против часовой стрелки – ребёнок в красной футболке. Можно ли однозначно установить, сколько в круге мальчиков?

$\boxed{31}$ Квадрат разрезали 18 прямыми, из которых девять параллельны одной стороне квадрата, а девять – другой, на 100 прямоугольников. Оказалось, что ровно девять из них – квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.