

Степени вхождения простых чисел

Определение: Степенью вхождения простого числа p в натуральное число n будем называть наибольшее такое k , что n делится на p^k . Обозначать для краткости будем $\nu_p(n)$ (это греческая буква “ню”)

Факт: $\nu_p(a + b) \geq \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, причём если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то $\nu_p(a + b) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$.

[1] Докажите **формулу Лежандра**: $\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$

[2] Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}$ целая. Докажите, что оба слагаемых целые.

[3] Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b, c удовлетворяют условию $ab = ac + bc$. Докажите, что abc — точный квадрат.

[4] Натуральные числа a, b, c таковы, что число $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c}$ является целым. Верно ли, что abc — точный куб?

[5] Докажите, что если числа ab, cd и $ac + bd$ делятся на k то ac и bd делятся на k .

[6] Натуральные числа m, n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ кратно mn . Докажите, что m — квадрат натурального числа.

[7] Докажите, что наименьшее общее кратное чисел от n до $2n + 1$ делится на $\frac{(2n + 1)!}{n! \cdot n!}$.

[8] Докажите, что не существует трёх различных натуральных чисел, каждое из которых равно наименьшему общему кратному своих разностей с двумя другими.

[9] Даны различные натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Положим

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n).$$

Докажите, что наименьшее общее кратное $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ делится на $(n - 1)!$.

[10] Найдите все натуральные x, y и простые p такие что:

$$x^5 + y^4 = pxy$$