Неравенство КБШ

Теперь докажем **неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)**: для двух произвольных наборов вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2.$$

Для этого рассмотрим следующий вспомогательный квадратный трехчлен: $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 + 2 \cdot (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$. **Контрольный вопрос.** Когда в неравенстве КБШ достигается равенство?

$\boxed{1}$ Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_n и b_1, b_2, $\ldots$, b_n — положительные числа. Докажите неравенство

$$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2.$$

$\boxed{2}$ **Важнейшая форма КБШ.** Докажите через КБШ, выбрав два нужных набора, КБШ для дробей: при *положительных* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполнено неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

$\boxed{3}$ Суммы двух наборов положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{2}.$$

$\boxed{4}$ Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a^2}{b(a+c)} + \frac{b^2}{c(b+d)} + \frac{c^2}{d(a+c)} + \frac{d^2}{a(d+b)} \geqslant 2.$$

$\boxed{5}$ Докажите, что при всех положительных a, b, c, d выполнено

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}.$$

$\boxed{6}$ Для положительных a, b, c, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

$\boxed{7}$ Даны положительные числа a, b, c, сумма которых не меньше двух. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b\sqrt[3]{c} + a} + \frac{b}{c\sqrt[3]{a} + b} + \frac{c}{a\sqrt[3]{b} + c} \leqslant 2.$$