

## Треугольники, высоты, окружности

Рассмотрим треугольник  $ABC$ .  $AN_a, BN_b, CN_c$  — высоты этого треугольника.  $H$  — ортоцентр (точка пересечения высот).  $O$  — центр описанной окружности.  $M_a, M_b, M_c$  — середины сторон  $BC, AC, AB$  соответственно.

Дальше в задачах мы будем ссылаться на эти обозначения

- [1] Докажите, что  $\angle ABH = \angle CBO$ .
- [2] Докажите, что  $\angle ABH = \angle H_c H_a H$ .
- [3] Докажите, что  $H_a A$  — биссектриса  $\angle H_c H_a H_b$ .
- [4] Докажите, что  $H$  — центр вписанной окружности треугольника  $H_a H_b H_c$ .
- [5] Докажите, что  $O$  — ортоцентр треугольника  $M_a M_b M_c$ .
- [6] Точку  $O$  отразили относительно сторон треугольника  $ABC$  и получили точки  $A', B'$  и  $C'$ . Докажите, что треугольник  $A'B'C'$  равен исходному, причём точка  $O$  для него является ортоцентром.
- [7] Докажите, что  $AH = 2OM_a$ .
- [8] Докажите, что отражение  $H$  относительно стороны  $BC$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .
- [9] Докажите, что отражение  $H$  относительно точки  $M_a$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .
- [10] Докажите, что точка из предыдущей задачи диаметрально противоположна точке  $A$ .
- [11] Докажите, что четырёхугольник  $M_a M_b M_c H_a$  — равнобедренная трапеция.
- [12] Докажите, что четырёхугольник  $H_b M_b M_c H_c$  — вписан.
- [13] Докажите, что 6 точек  $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c$  лежат на одной окружности.
- [14] Описанная окружность треугольника  $BH_c$  пересекает отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $Y$  и  $X$  соответственно. Докажите, что  $XY = 2H_b H_c$ .
- [15] Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры описанных окружностей треугольников  $H_b H H_c$  и  $BH_c$  соответственно. Докажите, что  $O_1 O_2 \parallel AM_a$ .
- [16] Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ . Окружность  $\omega$  проходит через вершины  $B$  и  $C$  и вторично пересекает сторону  $AB$  и диагональ  $BD$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Касательная, проведенная к окружности  $\omega$  в точке  $C$ , пересекает луч  $AD$  в точке  $Z$ . Докажите, что точки  $X, Y$  и  $Z$  лежат на одной прямой.