Теорема Безу

Определение 1. *Многочлен A делится на ненулевой многочлен B, если существует многочлен Q, называемый частным такой, что $A = B \cdot Q$.*

Определение 2. *Разделить многочлен A на ненулевой многочлен B с остатком — это найти многочлены Q, R такие, что выполнено равенство $A = B \cdot Q + R$, причем* $\deg R < \deg B$[1]. *Многочлен Q называется неполным частным, многочлен R называется остатком.*

$\boxed{1}$ Поделите многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ в столбик на $x^2 - 3x + 2$. При каких a и b остаток будет равен нулю?

$\boxed{2}$ При каких n многочлен $x^n + x + 1$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$? *Указание: начните делить в столбик.*

$\boxed{3}$ Алгоритм деления «в столбик» даёт нам пример каких-то Q и R, для которых $A = B \cdot Q + R$. Докажите, что других Q и R быть не может, т.е. докажите, что неполное частное и остаток при делении A на B определяются однозначно. *Указание: предположите противное.*

$\boxed{4}$ a) Разделите многочлен x^{100} на $x - 1$ и $x + 1$ с остатком.

b) Чему равны остатки при делении многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ на многочлены $x - 1$ и $x + 1$? Сформулируйте и докажите признаки делимости на эти многочлены. Признаки делимости на какие числа они вам напоминают?

$\boxed{5}$ **Теорема Безу.** Докажите, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен $P(a)$, т.е. $P(x) = Q(x)(x - a) + P(a)$. Выведите из этого, что число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $x - a$.

$\boxed{6}$ Докажите, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные корни многочлена P, то он делится на многочлен $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$. Верно ли обратное утверждение?

$\boxed{7}$ При каких a и b многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится на многочлен $(x - 1)(x - 2)$?

$\boxed{8}$ Докажите, что многочлен степени n имеет не более n различных корней.

$\boxed{9}$ Докажите, что если значения двух многочленов степени не выше n совпадают в $n + 1$ точке, то и сами многочлены равны.

$\boxed{10}$ Пусть a, b, c — натуральные числа. Верно ли, что обязательно существует квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, который в некоторых целых точках принимает значения a^3, b^3, c^3?

[1] или $R = 0$