# Занятия летнего лагеря Юношеской Математической Школы

6 класс

Руководители параллели:

Анна Николаевна Пичугина
Борис Юрьевич Пичугин
Кирилл Дмитриевич Пронин
Владимир Евгеньевич Зверев

Санкт-Петербург, 2021

# Содержание

# Вводное слово

Дорогие наши ребята!

Мы очень рады, что в этом году наш лагерь состоялся! Для многих из вас он был первым в жизни, и мы надеемся, что у вас остались самые лучшие впечатления. Вы молодцы, что решали и сдавали задачи, бились на турнире матбоев, участвововали в общелагерных мероприятиях, приходили на альтернативную зарядку, дежурили в столовой, а вечером слушали и пели песни!

И, конечно, спасибо всем нашим ученикам за интерес к занятиям, трудолюбие и любовь к математике!

До встречи в сентябре на занятиях математического кружка ЮМШ!

Ваши:
Анна Николаевна Пичугина
Борис Юрьевич Пичугин
Кирилл Дмитриевич Пронин
Владимир Евгеньевич Зверев
Мария Владимировна Сомкова
Марина Николаевна Абросимова
Арина Сергеевна Артемьева
Анастасия Константиновна Мозголина
Анастасия Витальевна Беленко
Марк Сергеевич Бушмакин
Артем Константинович Неволин
Егор Кириллович Рожков
Александр Сергеевич Слоев

Не забудьте у всех преподавателей взять автограф!

# Занятия

## Вступительная олимпиада

**1.** На координатной прямой отметили 100 точек так, что расстояние между любыми соседними точками одно и то же, а крайние точки имеют координаты 33 и 47. Найдите сумму координат всех точек.

**2.** Олимпийская делегация страны Эээх состоит из спортсменов и чиновников. Средний возраст всех спортсменов равен 21 год, средний возраст всех чиновников — 47 лет, а средний возраст всей делегации — 41 год. Какова доля чиновников в этой делегации?

**3.** Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили 2106. Найдите все такие числа.

**4.** Можно ли расставить числа $1, 2, \ldots, 50$ в вершинах и серединах сторон правильного 25-угольника так, чтобы суммы трёх чисел вдоль каждой стороны были равны?

**5.** $a$, $b$, $c$ — целые числа, причём $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

**6.** Известно, что в выпуклом $n$-угольнике ($n > 3$) никакие три диагонали не проходят через одну точку. Найдите число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин.

**7.** В ряд записаны все правильные несократимые дроби, знаменатели которых не больше ста. Два игрока по очереди ставят знаки «+» или «−» перед любой дробью, перед которой знак еще не стоит, пока все знаки не будут поставлены. Если значение получившегося выражения будет целым, то выигрывает первый, иначе — второй. Какой из игроков сможет обеспечить себе победу?

**8.** У Вовы всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Вовы?

## Серия 1. Олимпийская система

**1.** Сколько боев нужно провести по олимпийской системе, чтобы выявить победителя,

а) для 8 боксеров;

б) для 16 боксеров;

в) для 13 боксеров;

г) для $n$ боксеров.

**2.** Имеется один большой ящик. В нем лежат еще два меньших ящиках. В некоторых из них лежат еще по два ящика и т. д. Известно, что всего имеется 13 пустых ящиков. Найдите число заполненных. Что общего у задачи о боксерах с задачей о ящиках?

**3.** Хулиган Петя порвал стенгазету. Каждый кусок он разрывал на 3 части. Когда попытались собрать стенгазету, то нашли 100 кусков. Докажите, что нашли не все обрывки.

**4.** Какое наименьшее число разрезов необходимо сделать, чтобы разрезать квадрат $40 \times 40$ на единичные квадратики, если накладывать части друг на друга нельзя?

**5.** У князя Гвидона было 2 сына. У 40 из его потомков было по 5 сыновей, а прочие умерли бездетными. Дочерей ни у одного из них не было. Сколько всего потомков было у князя Гвидона?

**6.** В начале эксперимента в кювете было 4 бактерии, и каждую секунду ровно две бактерии длились ровно на столько частей, сколько секунд прошло с начала эксперимента. Сколько прошло секунд до момента, когда в кювете стало 310 бактерий?

## Серия 2. Основная теорема арифметики

**Определение.** *Целое число $a$* ***делится*** *на целое число $b \neq 0$, если существует целое число $c$ такое, что $a = b\,c$. В этом случае также говорят, что $b$* ***делит*** *$a$ или $b$ является* ***делителем*** *$a$.*

**Определение.** *Натуральное число $a \neq 1$ называется **простым**, если оно делится только на себя и на 1. Иначе число $a$ называется **составным**.*

**Теорема** (Основная теорема арифметики)**.** *Каждое натуральное число $a$, кроме 1, можно представить в виде произведения*

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k,$$

*где $p_1$, $p_2$,…,$p_k$ — простые числа (возможно повторяющиеся). Причём такое представление единственно, если не учитывать порядок следования множителей.*

*Указание: при доказательстве единственности предположите противное и рассмотрите наименьшее натуральное число, разложение которого не единственно.*

# Линейное представление НОД

**1.** Некоторые целые числа покрасили в синий цвет. Известно, что числа 17 и 23 покрашены, и если числа $a$ и $b$ покрашены, то числа $a+b$ и $a-b$ тоже покрашены. Какие числа не покрашены?

**2.** Пусть натуральные числа $a$ и $b$ таковы, что $a > b$. Докажите, что
а) если числа $a$ и $b$ делятся на $d$, то число $a-b$ тоже делится на $d$;
б) если числа $a-b$ и $b$ делятся на $d$, то число $a$ тоже делится на $d$;
в) $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a-b,b)$.

**Теорема** (Алгоритм Евклида)**.** *Чтобы найти* $\text{НОД}(a,b)$*, применяйте правило*

$$\text{НОД}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{если } a=b,\\ \text{НОД}(a-b,\ b), & \text{если } a>b,\\ \text{НОД}(a,\ b-a), & \text{если } a<b, \end{cases}$$

*пока не найдёте.*

Найдём $\text{НОД}(23,17)$ и линейное разложение $\text{НОД}(23,17)$.

**Лемма** (Соотношение Безу, XVIII век)**.** *Пусть $a$ и $b$ — натуральные числа. Тогда можно подобрать такие целые числа $n$ и $m$, что*

$$\text{НОД}(a,b) = n\,a + m\,b.$$

*Указание: используйте алгоритм Евклида. Числа $n$ и $m$ называются коэффициентами Безу, они могут быть как положительными так и отрицательными.*

Заметим, что если $a$ и $b$ взаимно просты, то есть такие целые числа $n$ и $m$, что
$$n\,a + m\,b = 1.$$

**3.** В конце четверти Вовочка выписал подряд в строку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая оценка выходит у Вовочки в четверти по пению?

**4.** Найдите НОД$(607, 477)$, НОД$(343, 246)$ с помощью алгоритма Евклида.

**5.** Найдите линейное представление НОД$(607, 477)$, НОД$(343, 246)$.

**6.** Докажите, что любые два последовательные натуральные числа взаимнопросты.

**7.** Пусть $n$ — натуральное число. Докажите, что дробь $\frac{12\,n+1}{30\,n+2}$ несократима.

**8.** Пусть $n$ — натуральное число. Найдите НОД$(2\,n + 3, n + 7)$, .

**9.** Найдите все целые $n$, при которых $\frac{5\,n+13}{4\,n+9}$ — целое число.

**10.** Найдите НОД$(77\ldots77, 77\ldots77)$, если в первом числе 100 цифр, а во втором — 14.

**11.** Докажите, что для любого натурального $n$ существуют целые $x$ и $y$ такие, что
$$x\,(14\,n + 3) + y\,(21\,n + 4) = 1.$$

**12.** Мальчик и девочка измерили одно и то же расстояние в 143 метра шагами. Так как длины их шагов различны, то их следы совпали 20 раз. Шаг девочки 55 см. Шаг мальчика больше шага девочки, но меньше 75 см. Найдите длину шага мальчика.

**13.** Пусть $n$ — натуральное число. Докажите, что
$$\text{НОК}(1, 2, \ldots, 2\,n) = \text{НОК}(n + 1, \ldots, 2\,n).$$

**14*.** Докажите, что произведение 100 последовательных чисел не может быть 100-й степенью натурального числа.

# Серия 3. Симметрия

**1.** Сколькими способами можно совместить сам с собой

а) прямоугольник;

б) квадрат;

в) равнобедренный прямоугольный треугольник;

г) круг?

**2.** Разрежьте прямоугольник на

а) два равных шестиугольника;

б) два равных семиугольника.

**3.** а) Могут ли 8 слонов побить все клетки доски $4 \times 10$?

б) А 7 слонов?

**4.** Есть две клетчатых шоколадки $5 \times 7$. Двое по очереди разламывают шоколадку или любой из ранее отломанных кусков на два меньших по границам клеток. Если образуются один или несколько одноклеточных кусков, отломивший их съедает. Докажите, что второй может съесть не меньше первого.

**5.** Разрежьте квадрат на 8 одинаковых треугольников и квадрат.

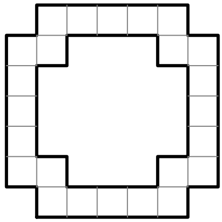
**6.** На балу было 10 юношей и 10 девушек и за 10 танцев каждый юноша станцевал с каждой девушкой. Могло ли получиться так, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал с более красивой или более умной девушкой?

**7.** Могут ли 8 коней на доске $4 \times 12$ побить все свободные клетки?

**8.** Билеты нумеруются от 000000 до 999999. Номер называется счастливым, если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Докажите, что сумма всех счастливых номеров делится а) на 1001; б) на 999.

**9.** Можно ли на плоскости отметить 6 точек и провести 6 прямых так, чтобы на каждой прямой было ровно две отмеченные точки и по обе стороны от неё лежало по две отмеченные точки?

**10.** Разрежьте рамку на 16 равных частей



## Серия 4. Малая теорема Ферма

**Теорема.** *(Обратная теорема об умножении по модулю) Пусть $a$, $b$, $c$ — целые числа, $m$ — натуральное число такое, что $m$ и $c$ взаимнопросты. Тогда*

$$a \equiv_m b \quad \Leftrightarrow \quad a\,c \equiv_m b\,c.$$

**1.** Пусть $p$ — простое и натуральное число $a$ не делится на $p$. Выпишем числа

$$a,\ 2\,a,\ 3\,a,\ \ldots,\ (p-1)\,a$$

и посчитаем их остатки при делении на $p$. Докажите, что мы получим все остатки от 1 до $(p-1)$, но, возможно, в другом порядке.

**Теорема** (Малая теорема Ферма)**.** *Пусть $p$ — простое и натуральное число $a$ не делится на $p$. Тогда*

$$a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

*Указание: рассмотрите произведение чисел $a$, $2\,a$, $3\,a$, $\ldots$, $(p-1)\,a$.*

**2.** Найдите остаток от деления

а) $3^{2000}$ на 43;

б) $8^{900}$ на 29;

в) $7^{60}$ на 143;

г) $300^{3000}$ на 1001.

**3.** Найти последнюю цифру числа $7^{2021} + 9^{2021}$.

**4.** Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ составное.

**5.** Пусть $p$ — простое, $a$ — любое натуральное число (возможно, даже делящееся на $p$). Докажите, что

$$a^p \equiv a (\mathrm{mod}\ p).$$

**6.** Сумма трёх натуральных чисел $a$, $b$ и $c$ делится на 30. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ также делится на 30.

**7.** Известно, что $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12}$ делится на 13 ($a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ — натуральные числа). Докажите, что $abcdef$ делится на $13^6$.

**8.** Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

**9.** Пусть $n$ — натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^8 - 1$ делится на 17.

**10.** Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если НОД$(a, 561) = 1$, то $a^{560} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 561)$.

**11*.** Пусть $n$ — чётное число, которое не кратно 10. Найдите цифру десятков числа $n^{20}$.

# Серия 5. Постепенное конструирование

**1.** Разрежьте квадрат на $n$ меньших квадратов (не обязательно одинаковых) а) $n = 4$; б) $n = 7$; в) $n = 10$; г) $n = 2021$.

**2.** а) Придумайте 3 различных натуральных числа, чтобы каждое делило сумму остальных;

б) как в (а), но 4 числа;

в) как в (а), но 10 чисел.

**3.** Давным-давно в СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

**4.** Представьте число 1 в виде суммы а) трех; б) четырех; в) десяти различных дробей с числителем 1.

**5.** Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

**6.** Имеются двое песочных часов. Одни отмеряют 3 минуты, а другие — 10 минут. Можно ли при помощи этих часов сварить яйцо всмятку если для этого его требуется варить: а) ровно 4 минуты; б) ровно 5 минут, в) ровно 28 минут; г) докажите, что с помощью этих часов можно отмерить любое целое число минут.

**7.** На бесконечной прямой тропинке сидит хромой кузнечик. Он умеет прыгать влево ровно на 7 попугаев, а вправо — на 4.

а) Как кузнечику перепрыгнуть на одного попугая вправо?

б) Как кузнечику перепрыгнуть на одного попугая влево?

в) Докажите, что кузнечик сможет отпрыгать на любоё целое число попугаев от начальной точки.

**8.** Расставьте различные натуральные числа в таблицу $2 \times 3$ (2 строки, 3 столбца) так, чтобы произведения в столбцах были равны, и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений).

**9.** В строке в беспорядке записаны числа 1, 2, $\ldots$ 2021. Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.

## Серия 6. Индукция

*Метод есть идея, применённая дважды.*
(Д. Пойа)

**1.** Из квадрата клетчатой бумаги размером 16x16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

**Теорема.** *Пусть есть бесконечная последовательность утверждений* $U_1, U_2, U_3, \ldots$ *таких, что*

*1)* $U_1$ *— это истинное утверждение (база индукции);*

*2) из истинности утверждения* $U_n$ *следует истинность следующего утверждения* $U_{n+1}$ *(индукционный переход).*

*Тогда все утверждения данной последовательности истинны.*

В задачах этой серии предполагается, что $n$ — натуральное число.

**2.** У Саши есть детская пирамидка, в которой $n$ колец уложены от большего к меньшему. Также два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть больше кольцо на меньшее. Докажите, что Саша может переложить все кольца на один из пустых стержней.

**3.** Найдите ошибку в рассуждениях.

Докажем, что в любом классе все ученики одного роста.

База индукции: в классе из одного человека все ученики одного роста.

Индукционный переход. Пусть в классе из $n$ человек все ученики одного роста. Рассмотрим класс из $n+1$ ученика. Если одного ученика $A$ изолировать, то получим класс из $n$ человек. По предположению индукции в этом классе все ученики одного роста. Теперь вернём ученика $A$ в класс и изолируем другого ученика $B$. В новом классе из $n$ человек опять все (включая $A$) одного роста. Следовательно, ученик $A$ одного роста с остальными учениками. Значит в классе из $n+1$ человека все ученики одного роста.

**4.** Докажите, что число $111\ldots111$, в котором $3^n$ единиц, делится на $3^n$.

**5.** Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. (Соседние области — это области, имеющие общий участок границы.)

**6.** Леша нарисовал на плоскости треугольник. Алиса провела несколько прямых, которые разделили треугольник на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей снова треугольник.

**7.** Докажите, что неоднозначное натуральное число больше произведения своих цифр.

**8.** В Математической стране 100 городов. Любые два города соединены напрямую либо автодорогой, либо подземной дорогой. Докажите, что или из любого города в любой можно проехать на автомобиле, или из любого города в любой можно добраться на метро.

**9.** На сколько частей делят плоскость $n$ прямых, если среди них нет параллельных и никакие три прямые не пересекаются в одной точке?

# Серия 7. Теория множеств

**Определение.** ***Множество*** *— это набор (совокупность) каких-либо (вообще говоря любых) объектов. Обозначение:* $A$, $B$, $\mathbb{R}$, …

**Определение.** *Объекты, из которых состоит множество, называют **элементами** множества или **точками** множества. Обозначение:*

$$x \in A \quad \text{— элемент } x \text{ принадлежит множеству } A,$$

$$x \notin A \quad \text{— элемент } x \text{ не принадлежит множеству } A.$$

Множество можно задать либо перечислив все его элементы через запятую в фигурных скобках:

$$A = \{1, 100, \star, \text{«луна»}\}, \quad (\text{тогда } 1 \in A,\ \text{«луна»} \in A,\ 5 \notin A,\ \clubsuit \notin A),$$

либо сформулировав условие, которое должно выполняться для всех элементов множества:

$$A = \{\text{все четные натуральные числа}\} = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ и } x \equiv_2 0\},$$

$$(\text{тогда } 26 \in A,\ \star \notin A).$$

**Определение.** ***Два множества равны*** *тогда и только тогда, когда содержат в точности одинаковые элементы:*

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ и } (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

**Определение.** ***Пустое множество*** *— это множество, в котором нет элементов. Обозначение: $\varnothing$.*

**Определение.** *Множество $B$ является **подмножеством** множества $A$, если все элементы множества $B$ являются элементами множества $A$:*

$$B \subset A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

*Для любого множества $A$ верно, что $\varnothing \subset A$ и $A \subset A$.*

Иногда (по аналогии со строгим $<$ и нестрогим $\leqslant$ неравенствами) пишут $B \subset A$, подразумевая строгое включение (т.е. $B \neq A$), и $B \subseteq A$ подразумевая нестрогое включение (т.е. $B$ может совпадать с $A$).

**Определение.** *Пусть $A$ и $B$ — некоторые множества. Тогда:*

$A \cup B = A + B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$ *— объединение $A$ и $B$;*

$A \cap B = A \cdot B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$ *— пересечение $A$ и $B$;*

$A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$ *— разность $A$ и $B$;*

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *— симметрическая разность $A$ и $B$.*

**Определение.** *Множество называется **конечным**, если в нём конечное количество элементов. Если $A$ — конечное множество, то количество элементов этого множества обозначается $|A|$. Например, $|\{7, 8, 2021\}| = 3$.*

**1.** Пусть $A = \{1, 2, \star\}$, $B = \{\spadesuit, 1\}$. Выпишите множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$. Найдите мощности всех этих множеств.

**2.** Пусть $A = \{\text{чётные целые числа}\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{Z}, x \equiv_4 0\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Найдите $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \Delta C$, $A \Delta B$.

**3.** Найдите $|\{1, 11, \{111\}, 1111, \{2, 3\}\}|$.

**4. Законы де Моргана**. Докажите, что

а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

**5.** Верно ли, что

а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

б) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$;

в) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$?

**6. Формула включений исключений**. Докажите, что для конечных множеств выполнено

а) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

б) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$;

в) Как эта формула выглядит для нескольких множеств?

**7.** Пусть $|A| = 5$. Сколько различных подмножеств у множества $A$?

**8. Свойства симметрической разности**.

а) $A \Delta B = B \Delta A$ — коммутативность;

б) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ — ассоциативность;

в) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

г) $A \Delta \varnothing = A$, $A \Delta A = \varnothing$;

е) $A \cap B = A \Delta B \Delta (A \cup B)$;

ж) $A \setminus B = B \Delta (A \cup B)$;

з) $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

**Парадокс Рассела или парадокс брадобрея**.

а) Пусть в некой деревне живёт брадобрей, который бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, и только их. Бреет ли брадобрей сам себя?

б) Истинно или ложно высказывание: «Данное высказывание — ложно.»

в) Пусть $A = \{x : x \notin x\}$, то есть множество $A$ (множество Рассела) содержит все такие множества, которые не содержат себя в качестве элемента. Верно ли, что $A \in A$?

**9.** В некотором царстве живут маги, чародеи и волшебники. Про них известно следующее: во-первых, не все маги являются чародеями, во-вторых, если волшебник не является чародеем, то он не маг. Правда ли, что не все маги — волшебники?

**10.** Члены Государственной Думы образовали фракции так, что для любых двух фракций $A$ и $B$ (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ — тоже фракция (через $\overline{C}$ обозначается множество всех членов Думы, не входящих в $C$). Докажите, что для любых двух фракций $A$ и $B$ $A \cup B$ — также фракция.

**11.** Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество $A$, состоящее из действительных чисел ($A \subset \mathbb{R}$), полным, если для любых действительных $a$ и $b$ (не обязательно различных и не обязательно лежащих в $A$) верно, что: $(a + b) \in A \Rightarrow a\,b \in A$. Найдите все полные множества действительных чисел.

# Серия 8. Графы. Введение

**Определение.**

***Граф*** *— это множество точек (вершин), некоторые из которых соединены линиями — ребрами.*

***Смежные вершины*** *— две вершины, которые соединены ребром.*

***Степень вершины*** *— количество рёбер, выходящих из этой вершины.*

***Полный граф*** *— это граф, в котором любые две вершины соединены ребром.*

***Путь*** *— это последовательность вершин в графе, которые последовательно соединены рёбрами.*

***Цикл*** *— это путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают.*

***Простой путь*** *— это путь, который начинается и заканчивается в разных вершинах и в котором все вершины попарно различны.*

***Простой цикл*** *— это цикл, в котором все вершины попарно различны.*

***Связный граф*** *— это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть путь.*

***Подграф графа*** $G$ *— это граф, который получен из графа* $G$ *удалением* *некоторых вершин или рёбер.*

***Компонента связности графа*** *$G$ — это связный погдраф графа $G$, в который уже нельзя добавить ни рёбра, ни вершины графа $G$ так, чтобы не нарушить связность.*

***Мост*** *— ребро, при удалении которого увеличивается количество компонент связности.*

**Определение.** *Два графа называются* ***изоморфными****, если у них поровну вершин (по $n$), и вершины каждого графа можно занумеровать числами от $1$ до $n$ так, чтобы вершины первого графа были соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром соответствующие (занумерованные теми же числами) вершины второго графа.*

**1.** В парламенте 7 лордов. Как-то раз на заседании лорды оскорбили друг друга, и каждый лорд вызвал всех остальных на дуэль. Вызывая на дуэль, лорды бросают в противника перчатку.

а) Сколько перчаток было брошено?

б) Сколько дуэлей было назначено?

**2.** На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь 3, 5 или 7 закрашенных соседей?

**3.**

**4.** а) Нарисуйте связный граф с 7 вершинами, так чтобы каждое ребро было мостом.
б) Нарисуйте связный граф с 7 вершинами, так чтобы никакое ребро не было бы мостом.
в) Нарисуйте связный граф с 7 вершинами, в котором ровно два моста.

**5.** Существует ли граф с 7 вершинами, в котором есть 7 мостов.

**6.** Докажите, что степени всех вершин связного графа равны двум тогда и только тогда, когда этот граф является циклом.

**7.** (Теорема Рамсея) В любом графе на 6 вершинах найдётся либо три точки попарно соединённые рёбрами, либо три точки попарно не соединённые.

**8.** Верно ли, что два графа изоморфны, если у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна трём?

**9.** Из полного графа на 40 вершинах выкинули 38 рёбер. Мог ли граф перестать быть связным?

**10.** Можно ли сложить сетку 5 на 5 узлов, из а) 6 кусков б) 5 кусков проволоки суммарной длины 40.

**11.** Двадцать школьников решали двадцать задач. Каждый решил две задачи, и каждую задачу решили двое. Докажите, что можно устроить разбор задач так, чтобы каждый рассказал решённую им задачу.

**12*.** Существует ли граф со 100 вершинами, степени которых будут 1, 1, 2, 2, …, 50, 50?

## Серия 9. Индукция-2

Во всех следующих задачах предполагается, что $n$ — натуральное число.

**1.** Пусть $x+\frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что $x^n+\frac{1}{x^n}$ — тоже целое число для любого натурального $n$.

Докажите тождества.

**2.** $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)$.

**3.** $1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-1)\cdot n=\frac{1}{3}(n-1)\,n\,(n+1)$.

**4.** $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}=\dfrac{n-1}{n}$.

**5.** $1+x+x^2+\dots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$, где $x$ — любое число не равное 1.

**6.** Докажите, что $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ делится на 9.

**7.** Докажите, что $3^{2\,n+2}+8\,n-9$ делится на 16.

**8.** Докажите, что $4^n+15\,n-1$ делится на 16.

**9.** Докажите, что $2^n>n$.

**10.** При каких $n$ верно, что $2^n>n^2$.

## Серия 10. Двудольные графы

**Определение.** ***Двудольный граф*** *— это такой граф, все вершины которого можно разбить на две группы (доли) так, что в каждой группе нет смежных вершин.*

**Теорема** (О числе рёбер в двудольном графе)**.** *Число рёбер в двудольном графе равно сумме степеней вершин в одной из долей.*

**Теорема** (Критерий двудольного графа)**.** *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.*

**1.** В классе учатся мальчики и девочки. Каждый мальчик дружит ровно с тремя девочкам, а каждая девочка дружит ровно с шестью мальчиками. Всего в классе 30 человек, сколько в классе девочек?

**2.** В графстве из каждого города выходит ровно одна авиалиния и ровно один тоннель метро, причём, покинув город на одном транспорте, можно будет вернуться в него на другом (возможно, после нескольких пересадок в других городах). Докажите, что при путешествии из любого города в какой-то другой город и обратно домой, необходимо будет совершить нечётное число пересадок.

**3.** а) На шахматной доске стоит король, который умеет ходить только по белым клеткам. Этот король вышел из какой-то клетки, прогулялся по полю и вернулся на исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

б) На некоторых белых клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы короли одинакового цвета друг друга не били.

**4.** На прямоугольной доске нарисованы несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников. У каждого есть сторона, параллельная нижнему краю доски. Докажите, что треугольники можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.

**5.** Дан полный $k$-дольный граф, в каждой доли которого $n$ вершин. Сколько в нём рёбер? Сколько в нём существует полных треугольников (троек вершин попарно соединённых рёбрами)? Сколько в нём существует пустых треугольников (троек вершин попарно не соединённых рёбрами)?

**6.** На костюмированном балу присутствовало 20 человек. В каждом танце участвовало двое. Оказалось, что одиннадцать из них танцевали с тремя партнёрами, один — с пятью и остальные восемь — с шестью. Докажите, что в каком-то танце участвовали двое людей одного пола.

**7*.** В компании есть эльфы, гномы и хотя бы четыре феи. Каждый эльф дружит со всеми феями, кроме каких-то трёх, а каждая фея — с в два раза большим числом эльфов. Каждый эльф дружит ровно с тремя гномами, а каждая фея — со всеми гномами. Каждый гном дружит ровно с половиной эльфов и фей в совокупности. Сколько в компании гномов?

**8*.** Выписаны 1000 целых чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

# Серия 11. Эйлеровы графы

**Определение.**

***Эйлеров цикл*** *— это маршрут, проходящий по всем рёбрам графа ровно один раз, и в котором начальная и конечная вершины совпадают.*

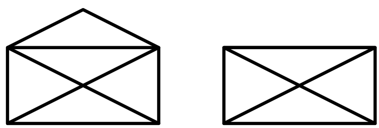
***Эйлеров путь*** *— это маршрут, проходящий по всем рёбрам графа ровно один раз, и в котором начальная и конечная вершины различны.*

**Теорема** (Эйлера)**.**

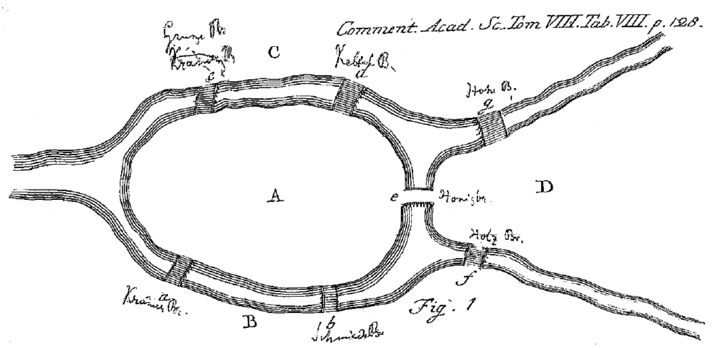
*а) В связном графе существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда нет нечётных вершин.*

*б) В связном графе существует эйлеров путь тогда и только тогда, когда вершин нечётной степени ровно две.*

**1.** Можно ли нарисовать следующие рисунки, не отрывая карандаша от бумаги и проводя по каждой линии ровно один раз?



**2.** «Эта задача, как мне сказали, довольно хорошо известна и связана вот с чем. В городе Кёнигсберге, в Пруссии, есть остров, называемый Кнайпхоф; река, окружающая его, делится на два рукава, что можно увидеть на рисунке. Рукава этой реки пересекают семь мостов a, b, c, d, e, f и g. В связи с этими мостами был поставлен вопрос, можно ли совершить по ним прогулку так, чтобы пройти по каждому из этих мостов, причём ровно по одному разу.»



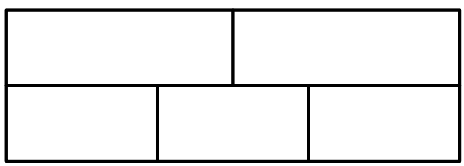

*— Леонард Эйлер. Решение одной задачи, связанной с геометрией положения.*

**3.** Можно ли нарисовать шестиугольник со всеми диагоналями, не отрывая карандаша от бумаги?

**4.** На плоскости нарисовано несколько пересекающихся окружностей так, что с любой можно перейти на любую, не сходя с этих окружностей. Всегда ли можно нарисовать эту фигуру, не отрывая карандаша от бумаги?

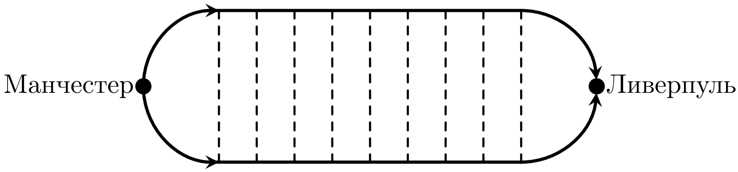
**5.** У Вовы есть проволока длинной 12 см. Можно ли сложить из неё каркас куба со стороной 1 см? На какое наименьшее количество кусков её надо разрезать, чтобы это стало возможно?

**6.** Существует ли ломаная, пересекающая все рёбра картинки по разу?



## Серия 12. Кодировка

**1.** Из Манчестера в Ливерпуль ведут два шоссе с односторонним движением, пересеченные десятью проселками (см. рис.). Машина выезжает из Манчестера в Ливерпуль по одному из шоссе, и, доезжая до любой развилки, может либо свернуть на проселок, либо не сворачивать. Свернув, она проезжает проселок до конца и продолжает путь по другому шоссе (по тем же правилам). Сколькими разными способами можно проехать из Манчестера в Ливерпуль?




**2.** Сигнальное устройство состоит из пяти одноцветных лампочек, расположенных в ряд. Сколько различных сигналов можно подать с его помощью? Какое наименьшее число лампочек надо взять, чтобы подать 200 различных сигналов?

**3.** Назовем число забавным, если все его цифры делятся на 4. Сколько забавных чисел среди четырехзначных? Шестизначных?

**4.** Сигнальный флажок состоит из шести горизонтальных полосок белого, синего или красного цвета, причем верхняя полоска всегда синяя, а соседние полоски — разноцветные. Сколько бывает разных сигнальных флажков?

**5.** Нумизмат взвешивает монеты на чашечных весах и результат взвешивания (меньше, больше, равно) записывает в тетрадь. Какое число различных последовательностей результатов существует для пяти взвешиваний.

**6.** а) Сколько различных делителей у числа 210?

б) Сколько различных делителей у числа 10800?

**7.** В дремучем лесу есть заколдованные пересекающиеся тропинки. На каждом перекрестке сходится по три тропинки, а всего перекрёстков 8. Прилежный бухгалтер Василий оказался на одном из перекрёстков и пошёл по произвольной тропинке. На следующем перекрёстке он повернул направо, на следующем — налево, и так далее чередуя повороты. Чтобы не заблудиться, он помечал тропинки и перекрёстки, и на каждом перекрёстке записывал в свою амбарную тетрадь его описание: номер тропинки, по которой пришел, номер перекрёстка, и номер тропинки, по которой он ушёл. Сколько существует различных описаний перекрёстков?

**8.** На плоскости дан квадрат $8 \times 8$, разбитый на клеточки $1 \times 1$. Его покрывают прямоугольными равнобедренными треугольниками (два треугольника закрывают одну клетку). Имеется 64 чёрных и 64 белых треугольника. Назовём покрытие «правильным», если в нём любые два треугольника, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Сколько существует правильных покрытий?

**9*.** Сколькими способами можно расставить числа 1, 2, ..., 10 в строку так, чтобы каждое число, кроме единицы, было больше по крайней мере одного из своих соседей?

## Серия 13. Деревья

**Определение.**
***Лесом*** *называется граф без циклов.*

***Деревом*** *называется связный граф без циклов.*

Лес — это граф, в котором каждая компонента связности — дерево.

**Определение.** *Пусть $G$ — связный граф. Подграф $T$ графа $G$ называется* ***остовным деревом*** *графа $G$, если подграф $T$ является деревом и содержит все вершины графа $G$.*

Чтобы получить остовное дерево, надо последовательно удалять по одному ребру из каждого цикла. У графа может быть несколько остовных деревьев.

**Определение.** *Вершина степени 1 называется* ***висячей*** *или* ***листом****.*

**Лемма.** *В любом дереве, в котором более одной вершины, найдётся хотя бы две висячие вершины.*

**Теорема** (Главный критерий дерева)**.**
*а) В дереве на $n$ вершинах ровно $n-1$ ребро.*

*б) Если в связном графе на $n$ вершинах ровно $n-1$ ребро, то это дерево.*

**Теорема** (Не главный критерий дерева)**.** *Пусть $G$ — это граф на $n$ вершинах. Граф $G$ является деревом тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

*а) $G$ — связный граф, в котором каждое ребро — мост;*

*б) в графе $G$ любые две вершины связаны ровно одним путем;*

*в) в $G$ ровно $n-1$ ребро и нет циклов;*

*г) в $G$ нет циклов и при добавлении любого ребра образуется цикл;*

*д) в $G$ ровно $n-1$ мост.*

**Следствие.** *В любом связном графе на $n$ вершинах не менее $n-1$ ребер.*

**1.** Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.

**2.** В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нём есть цикл.

**3.** В дереве есть 10 вершин степени 3, 15 вершин степени 4, а все остальные вершины — висячие. Сколько их?

**4.** Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?

**5.** Плохой мальчик Максим режет веревочную волейбольную сетку $4 \times 5$ клеток по ниточкам (не в узлах). Какое наибольшее число разрезов он может сделать так, чтобы сетка не распалась на части?

**6.** В некотором государстве нечётное количество городов. Некоторые пары городов соединены дорогами. Причём от каждого города до каждого по этим дорогам можно добраться ровно одним способом. Из каждого города в каждый другой отправились гонцы с важным донесением.

а) Делится ли суммарное расстояние, пройденное гонцами, на 4?

б) Делится ли суммарное расстояние, пройденное гонцами, на 8?

**7.** Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

# Серия 14. Планарные графы

**Определение.** ***Планарный граф*** *— это граф, который можно расположить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались.*

**Теорема** (Эйлера о планарном графе)**.** *Для связного планарного графа верно*

$$B - P + \Gamma = 2,$$

*где $B$ — число вершин графа, $P$ — число рёбер графа, $\Gamma$ — число граней (частей, на которые граф разбивает плоскость).*

**1.** В графстве 7 озер, соединённых между собой 10 каналами, причём от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в графстве островов?

**2.** Докажите, что в планарном графе, в котором нет кратных рёбер и $B \geqslant 3$, верны неравенства:

а) $3\,\Gamma \leqslant 2\,P$.

б) $P \leqslant 3\,B - 6$.

**3.** Докажите, что в планарном двудольном графе, в котором нет кратных рёбер и $B \geqslant 4$, верно, что $2\,\Gamma \leqslant P$.

**4.** Докажите, что полный граф на 5 вершинах ($K_5$) не планарный.

**5.** Докажите, что полный двудольный граф, в каждой доле которого по 3 вершины, ($K_{3,3}$) не планарный.

**6.** Докажите, что в планарном графе есть вершина степени не более 5.

**7.** В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

**8.** Сформулируйте теорему Эйлера для несвязного графа, каждая компонента связности которого является планарным графом.

# Серия 15. Количество информации

Метод подсчёта количества получаемой при испытаниях информации — это способ доказательства оценки в задачах типа «Оценка + пример». Под количеством информации в данном случае понимается число разных ситуаций, в которые мы можем попасть проведя серию испытаний.

**1.** а) Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта. Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить.

б) При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?

**2.** Среди 10 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить?

**3.** Среди 5 монет — ровно одна фальшивая: она отличается по весу от остальных, но неизвестно — легче или тяжелее. Требуется выявить ее на чашечных весах без гирь и узнать, легче она или тяжелее настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний для этого наверняка хватит?

**4.** В выпуклом пятиугольнике проведены все стороны и диагонали. Я загадал один из этих отрезков. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка угадать его при игре в «Данетки»?

**5.** Я загадал двоих из 7 присутствующих. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка угадать обоих при игре в «Данетки»?

**6.** Каким наименьшим числом гирь можно набрать все веса 1 г, 2 г, 3 г, $\ldots$, 31 г? (Гири можно класть только на одну чашку весов.)

**7.** Какое наименьшее число гирь должно быть в наборе, чтобы с его помощью можно было отвесить на чашечных весах веса 1 г, 2 г, $\ldots$, 13 г? (Гири можно класть на обе чашки весов.)

**8.** Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть два кокосовых ореха. За какое наименьшее число бросков обезьяна может удовлетворить свое любопытство? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)

**9*.** Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 35-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть четыре кокосовых ореха. Сможет ли обезьяна удовлетворить свое любопытство не более чем за 5 бросков? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)

# Серия 16. Раскраски графов

**Определение.** ***Правильной раскраской вершин*** *графа называется раскраска вершин графа в несколько цветов, при которой любые две смежные вершины окрашены в разные цвета.*

**Определение.** ***Правильной раскраской рёбер*** *графа называется раскраска рёбер графа в несколько цветов, при которой любые два ребра, имеющие общую вершину, окрашены в разные цвета.*

**Теорема** (Брукса (лайт))**.** *Если максимальная из степеней вершин графа равна $m$, то вершины графа можно правильно покрасить в $m+1$ цвет.*

**Лемма.** *В любом планарном графе есть вершина степени не более 5.*

**1.** Вершины любого планарного графа можно правильно покрасить в шесть цветов.

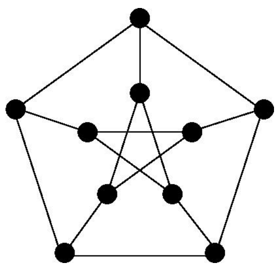
**Теорема** (О пяти красках)**.** *Вершины любого планарного графа можно правильно покрасить в пять цветов.*

**2.** Приведите пример графа, в котором максимальная из степеней вершин равна 2, и вершины которого нельзя правильно раскрасить в 2 цвета.

**3.** Приведите пример графа, в котором максимальная из степеней вершин равна 5, и вершины которого нельзя правильно раскрасить в 5 цветов.

**4.** Приведите пример плоского графа, вершины и рёбра которого нельзя правильно покрасить в три цвета.

**5.** Какое минимальное количество цветов понадобится, чтобы правильно раскрасить а) вершины; б) рёбра графа Петерсена?



**6.** В классе 19 учеников, каждый ученик дружит не менее, чем с тремя одноклассниками. На новый год каждый ученик подарил всем своим друзьям по открытке. Всего было подарено 64 открытки. Докажите, что учеников этого класса можно разделить на 8 групп так, что в каждой группе не будет друзей.

**7.** У многогранника все грани состоят из чётного числа рёбер. Докажите, что его вершины можно правильно раскрасить в 2 цвета.

**8.** В стране есть 11 городов, и из каждого города в каждый ведёт либо автомобильная, либо железная дорога. Докажите, что в этой стране есть либо пара автомобильных, либо пара железных дорог, которые пересекаются.

## Серия 17. Зацикливание

**Теорема** (Принцип зацикливания)**.** *Пусть $G$ — это ориентированный граф на $n$ вершинах, в каждой вершине которого ровно одно исходящее ребро (и, возможно, несколько входящих). Тогда в таком графе есть цикл длины не более $n$.*

**1.** Докажите, что при последовательном возведении любого натурального числа во все натуральные степени остатки по любому натуральному модулю зациклятся.

**2.** Докажите, что десятичная запись любой обыкновенной дроби либо конечна либо периодична. Докажите, что число цифр в периоде не превосходит знаменателя.

**3.** На доске записали цифры 2021822. Затем стали дописывать цифры по правилу: считаем сумму последних 7 выписанных цифр и дописываем на доску две последние цифры этой суммы. Докажите, что эта последовательность периодична а длина её периода не превосходит $2 \cdot 10^7$.

**4.** Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в исходное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

**Теорема** (Принцип зацикливания назад)**.** *Пусть $G$ — это ориентированный граф на $n$ вершинах, в каждой вершине которого ровно одно исходящее ребро и ровно одно входящее. Тогда этот граф — цикл длины $n$.*

**5.** В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся по три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он приедет к своему замку.

**6.** За десять лет наблюдений установлено, что погода на Сириусе в данный день полностью определяется предыдущей неделей. Варианты погоды: магнитная буря, метеоритный дождь, штиль. Последнюю неделю шел метеоритный дождь. Докажите, что «дождливые» недели всегда будут.

**7.** По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.

а) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик на предыдущем ходу. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

б) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?

## Серия 18. Принцип крайнего

*Я самый, самый, самый, самый...*

**Идея 1.** Обратите внимание на объекты «с краю», где край понимается геометрически (граница, вершина, угол) или арифметически (наибольшее, наименьшее).

Можно рассматривать и несколько крайних объектов. Так, для получения оценки бывает полезным выбрать два крайних объекта: для разностей — наибольший и наименьший, для расстояний — наиболее удаленные друг от друга.

**1.** В порядке возрастания весов лежат несколько камней. Есть чашечные весы без гирь. За какое наименьшее число взвешиваний можно проверить, правда ли, что любая пара камней тяжелее любого одного камня?

**2.** На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьет не более двух других.

**3.** На доске выписано 100 различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать пять чисел так, что их среднее арифметическое не будет равно среднему арифметическому никаких шести из выписанных чисел.

**4.** По кругу выписаны несколько чисел, каждое равно полусумме двух соседних. Докажите, что все числа равны.

**5.** Шахматная доска разбита на домино. Докажите, что какая-то пара домино образует квадратик $2 \times 2$.

*Указание: предположите противное и начните выкладывать доминошки с угла.*

**6.** Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 50 грибов.

**7.** Кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$ надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Докажите, что всё равно понадобится не менее 6 прямых распилов.

**Идея 2.** Рассмотрите минимальный (максимальный) контрпример. Условие минимальности (максимальности) помогает получить противоречие. Вспомните доказательство основной теоремы арифметики.

**8.** Можно ли на клетчатой бумаге обвести по линиям сетки два квадрата так, чтобы площадь первого была ровно вдвое меньше площади второго?

**9.** За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтоб все 100 читателей его услышали.

# Вопросы к зачёту

1. Какая система в спортивных соревнованиях называется олимпийской?
2. Дайте определение делимости целого числа на целое.
3. Какое число называется простым?
4. Опишите алгоритм Евклида. Обоснование.
5. Докажите соотношение Безу.
6. Сформулируйте и докажите основную теорему арифметики.
7. Как найти линейное представление НОД?
8. Сформулируйте и докажите обратную теорему об умножении по модулю.
9. Сформулируйте и докажите Малую теорему Ферма.
10. Опишите общую схему метода математической индукции.
11. Какие множества называются равными?
12. Определите пустое множество.
13. Дайте определение подмножества.

14. Какое множество называется конечным?
15. Запишите и докажите формулу включений-исключений для двух и трех множеств.
16. Что такое симметрическая разность множеств?
17. Сформулируйте парадокс Рассела и парадокс брадобрея.
18. Дайте определение графа.
19. Какие вершины графа называются смежными?
20. Что такое степень вершины графа?
21. Какой граф называется полным? Сколько в нём рёбер?
22. Сформулируйте понятия маршрута, пути и цикла в графе
23. Дайте определение связному графу. Что такое компонента связности?
24. Что такое мост?
25. Дайте определение подграфу.
26. Какие графы называются изоморфными?
27. Сформулируйте и докажите теорему Рамсея (для треугольников)
28. Какой граф называется двудольным?
29. Сформулируйте и докажите теорему о числе рёбер в двудольном графе.
30. Сформулируйте и докажите критерий двудольного графа
31. Сформулируйте и докажите теорему Эйлера о существовании эйлерова цикла и эйлерова пути.
32. Докажите, что в связном двудольном графе есть эйлеров цикл.
33. Какой граф называется лесом?
34. Какой граф называется деревом?
35. Дайте определение висячей вершине (листу).

36. Докажите, что в любом дереве с хотя бы двумя вершинами найдётся хотя бы две висячие вершины.
37. Сформулируйте и докажите главный критерий дерева.
38. Перечислите равносильные определения дерева (неглавные критерии дерева).
39. Какой граф называется планарным?
40. Сформулируйте и докажите теорему Эйлера о планарном графе.
41. Докажите, что в планарном графе, в котором нет кратных рёбер и $В \geqslant 3$, верно неравенство $3\,Г \leqslant 2\,Р$.
42. Докажите, что в планарном графе, в котором нет кратных рёбер и $В \geqslant 3$, верно неравенство $Р \leqslant 3\,В - 6$.
43. Докажите, что в планарном двудольном графе, в котором нет кратных рёбер и $В \geqslant 4$, верно, что $2\,Г \leqslant Р$.
44. Докажите, что полный граф на 5 вершинах ($K_5$) не планарный.
45. Докажите, что полный двудольный граф, в каждой доле которого по 3 вершины, ($K_{3,3}$) не планарный.
46. Докажите, что в планарном графе есть вершина степени не более 5.
47. Дайте определение правильной вершинной и реберной раскраски.
48. Сформулируйте и докажите теорему Брукса (лайт).
49. Сформулируйте и докажите теорему о шести красках.
50. Сформулируйте и докажите теорему о пяти красках.

# Турнир математических боёв 5–6 классов

## Командная олимпиада

**1.** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Всем жителям острова задали вопрос: «Верно ли, что рыцарей на острове больше половины?». В результате ровно половина жителей ответила на этот вопрос утвердительно. Кого на самом деле на острове больше — рыцарей, или лжецов?

Ответ. Их поровну.

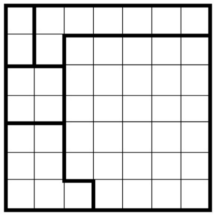
**Решение.** Пусть рыцарей больше половины, тогда утвердительных ответов больше половины. А если лжецов больше половины, то ситуация аналогична, утвердительных ответов слишком много.

**2.** На доске написаны числа 1, 2, 3, . . . , 2022. За один ход разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность (Из большего вычитается меньшее). В результате многократного выполнения таких действий на доске окажется записанным одно число. Может ли оно быть нулем?

**Решение.** Модуль разности двух целых чисел имеет ту же чётность, что и сумма этих чисел. Поэтому, при указанной замене чётность суммы всех чисел не меняется. Сумма целых чисел от 1 до 2022 нечётна (среди них нечётное количество нечётных чисел). Поэтому она не может стать равной нулю.

**3.** Разрежьте по линиям сетки клетчатый квадрат $7 \times 7$ на 5 частей таким образом, чтобы из них можно было сложить три квадрата разной площади.

**Решение.**



**4.** Из чисел $1, 2, 3 \ldots 99$ выбрано 50. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Чему равна сумма выбранных чисел?

**Решение.** Разобьём числа на пары, дающие в сумме 100. Получим 49 пар и отдельное число 50. Из каждой пары может быть выбрано только одно число, поэтому число 50 обязательно присутствует. Значит, число $49 = 99 - 50$ не может быть выбрано, поэтому выбрано парно ему число 51. Значит, отсутствует число 48, следовательно, присутствует парное ему число 52. Аналогично, не может быть выбрано 47, поэтому выбрано 53. Продолжая рассуждения, получаем, что выбраны числа: $50, 51, 52, 53, \ldots, 99$. Их сумма равна 3725.

**5.** В кружок поступили 20 школьников, среди которых Вася и Петя. Оказалось, что каждый из поступивших знает ровно четверых других, а у Васи и Пети трое общих знакомых. Докажите, что среди поступивших в кружок есть школьник, не знакомый ни с Васей, ни с Петей и даже не имеющий ни с кем из них общих знакомых.

**Решение.** Пусть Петя и Вася знакомы с Аней, Борей и Вовой, Петя кроме того знаком с Гришей, а Вася — с Димой. У Гриши и Димы, кроме Пети с Васей есть ещё, самое большее, $3+3 = 6$ разных знакомых, а у Ани, Бори и Вовы — тоже $2 + 2 + 2 = 6$ разных знакомых, всего — не больше 12. Ещё семеро — Петя, Вася, Аня, Боря, Вова, Гриша, Дима, всего — 19. Сюда входят все знакомые Пети и Васи и знакомые их знакомых. Поэтому в кружке из 20 человек найдётся школьник, не входящий в их число, что и требовалось доказать.

**6.** Сколько натуральных чисел из первой тысячи обладают свойством: сумма всех их делителей нечётна?

Ответ: 53.

**Решение.** Найдём общий вид чисел, обладающих указанным свойством. Рассмотрим сначала нечётные числа. Каждый делитель нечётного числа является нечётным. Для того, чтобы сумма нечётных чисел была нечётной, необходимо и достаточно, чтобы количество слагаемых было нечётным. Следовательно, число должно являться точным квадратом. Действительно, число является точным квадратом тогда и только тогда, когда каждый простой делитель входит в него в чётной степени. Возьмём число $n$ и какой-то его делитель $m$. Тогда $\frac{n}{m}$ — тоже делитель числа $n$. Поэтому все его делители разбиваются на пары $(m, \frac{n}{m})$ за исключением случая, когда $m = \frac{n}{m}$ . Тогда $m^2 = n$, то есть $n$ является точным квадратом. Любое чётное число m можно представить в виде $m = 2^s \cdot r$, где $r$ нечётное, поэтому все его делители, не являющиеся делителями числа $r$, являются чётными. Добавление любого количества чётных чисел к искомой сумме не меняет её чётности, поэтому условию задачи удовлетворяют только такие m, для которых r — полный квадрат. Полученный результат удобно переформулировать: искомые числа имеют вид либо $n^2$, либо $2n^2$, где $n$ — натуральное. В первой тысяче содержатся квадраты чисел от 1 до 31 и удвоенные квадраты чисел от 1 до 22, то есть всего имеется $31 + 22 = 53$ числа, обладающие указанным свойством

**7.** Маша и Настя играют в игру: они по очереди (начинает Маша) закрашивают по одной клетке бесконечной клетчатой плоскости: Маша в синий, а Настя в красный цвета. Маша хочет, чтобы в какой-то момент на плоскости образовался синий квадрат $2 \times 2$ или синий прямоугольник $1 \times 5$. Сможет ли Настя ей помешать?

**Решение.** Замостим клетчатую плоскость «доминошками» (прямоугольниками из двух клеток) «ёлочкой». Легко видеть, что в каждом квадрате $2 \times 2$ и каждом прямоугольнике $1 \times 5$ окажется по целой доминошке из замощения. Поэтому если на плоскости не окажется доминошек из нашего замощения, целиком выкрашенных в синий цвет, Петя не достигнет своей цели. Чтобы добиться такой ситуации, Васе достаточно каждым ходом красить в свой цвет вторую клетку доминошки, в которой перед этим закрасил клетку Петя.

**8.** Фея Динь-Динь умеет превращать число $x$ в число $2x$ или наоборот, а фея Розетта может сделать из числа $x$ число $3x + 1$ и наоборот. Докажите, что феи могут превратить любое натуральное число в 1 (при этом в процессе могут получаться и нецелые числа).

**Решение.** Достаточно показать, что мы можем уменьшить любое число на 1. Сделать это можно так:

$$n + 1 \to 3n + 4 \to \frac{3}{2}n + 2 \to \frac{3}{4}n + 1 \to \frac{1}{4}n \to \frac{1}{2}n \to n$$

# Бой-1. Высшая лига

**1.** На турнир приехали 15 команд. Каждую команду поселили в одну комнату гостиницы. Гостиница имеет 10 этажей, и на каждом этаже по 10 комнат, пронумерованных от 1 до 10. Обязательно ли можно выбрать пять номеров комнат, и пять этажей так, что все комнаты с выбранными номерами на всех выбранных этажах свободны?

Ответ: всегда можно.

Решение: Гостиница — это таблица $10 \times 10$, этажи — строки, номера — колонки, отмеченные клетки — занятые номера. В каждой колонке посчитаем число отмеченных клеток. Выберем 5 колонок, с наименьшим числом отмеченных клеток. В этих колонках вместе не более 5 отмеченных клеток. В противном случае будет колонка, в которой хотя бы 2 отмеченные клетки. Следовательно, в остальных (не выбранных колонках) отмечено как минимум $2 \cdot 5 = 10$ клеток и всего отмечено как минимум $6 + 5 \cdot 10 = 16$ клеток. Противоречие. В выбранных колонках 5 команд могут занять не более 5 строк. Выберем оставшиеся 5 строк. Выбранные колонки и строки удовлетворяют условию.

**2.** Вдоль реки едет поезд и дует ветер. Анемометр на поезде показывает то же значение, что и на катере, плывущем по реке. Дым из заводской трубы обгоняет плывущий по течению реки листок на 3 м/с. Поезд обгоняет тот же листок на 20 м/с. Найдите скорость катера в стоячей воде. (Анемометр — это прибор, который позволяет измерить скорость окружающего его воздуха.)

Ответ: 20 м/с или 14 м/с.

**Решение.** Из условия следует, что направления движения поезда, течения реки и скорости ветра совпадают. Но неизвестно, в каком направлении плывёт катер. Рассмотрим два случая. Пусть сперва катер движется по течению. Обозначим соответствующие скорости через П, Т, К и В. Тогда получаем: В–Т=3, П–Т=20, П–В=К+Т–В. Отсюда видно, что К=20. Теперь рассмотрим ситуацию, когда катер движется против течения. Равенства принимают вид: В–Т=3, П–Т=20, П–В=К–Т+В. Отсюда находим К=П+Т–2В=14. Потерян один из ответов — не более 6 баллов, и задача не решена. За вычислительные ошибки при верно ходе решения снимается до 4 баллов.

**3.** Число сложили с суммой его цифр, умноженной на 17. Могло ли в результате получиться 2021?

Ответ: Нет. **Решение.** Как известно, число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3. Поэтому сумма из условия задачи делится на 3, а число 2021 на 3 не делится.

**4.** Четыре человека из страны рыцарей и лжецов сидят за круглым столом. Глупая Галя утверждает, что оба её соседа лжецы. Странный Бука сказал, что Галя врёт, а затем добавил, что оба его соседа лжецы. Умный Тролль считает, что один из предыдущих ораторов лжёт. Скромный Молчун многозначительно промолчал. Кем он был?

Ответ: Молчун — лжец.

**Решение.** Галя и Бука не могли одновременно сказать правду. Поэтому Тролль говорил правду. Всего возможно три различные расстановки людей за столом: против Гали может сидеть Бука, Тролль, или Молчун.

1) Пусть против Гали — Бука. Тогда Тролль рядом с Галей. Поэтому Галя лжет. Поэтому Бука говорит правду. Но тогда Тролль должен быть лжецом. Противоречие.

2) Пусть против Гали — Тролль. Тогда Молчун рядом с Троллем, а, значит, он соврал. Следовательно, Галя сказала правду. Поэтому Молчун — лжец.

3) Пусть против Гали — Молчун. Тогда Тролль рядом с Галей. Поэтому Галя соврала. Следовательно, Бука сказал правду и Молчун — лжец.

**5.** На шахматной доске отмечено несколько клеток. Докажите, что можно покрасить остальные клетки в 4 цвета так, чтобы у каждой отмеченной клетки среди соседей по стороне не было одноцветных.

**Решение.** Красим строки: 12341234, 12341234, 34123412, 34123412, 12341234, 12341234, 34123412, 34123412.

Возможно существуют и другие раскраски.

**6.** В наборе разноцветных доминошек половинки каждой доминошки покрашены в разные цвета, цветов всего шесть и все доминошки различны. Какое максимальное количество доминошек можно выложить в ряд, соединяя их одинаковыми цветами?

**Решение.** Всего доминошек $5 \cdot 6/2 = 15$. Пусть можно выложить 14. Доминошек, содержащих клеточку одного цвета ровно пять. Чтобы выложить доминошки в ряд они должны соприкасаться одним цветом, при этом задействуются две доминошки одного цвета, а значит по клетке каждого цвета останется не задействовано. Всего их 6, но 2 могут быть использованы с краю, значит оставшиеся 4 клетки (две доминошки) выложить не получится. Пример на 13: 12 23 36 64 45 56 61 13 35 52 24 41 15 Ответ: 13

**7.** В школе учатся мальчики и девочки. Они разбились на пять хороводов, в каждом из которых было от 9 до 11 человек, причем хороводов с одинаковым количеством человек было не больше двух. Могут ли они образовать один большой хоровод, в котором каждый будет держаться за руки как с мальчиком, так и с девочкой?

Ответ: не могут.

**Решение.** В большом хороводе дети должны стоять ММДД-ММДД.... Поэтому число детей должно делится на 4. Пять хороводов можно образовать только тремя способами: 1) 9, 9, 10, 10, 11; 2) 9, 9, 10, 11, 11; 3) 9, 10, 10, 11, 11. Во всех этих случаях число детей не делится на 4.

**8.** Рассмотрим поле $11 \times 11$ клеток. У Лёлика и Болика есть дрессированные букашки и они играют в игру. Сначала Лёлик выбирает клетку и ссыпает в неё своих букашек, затем Болик выбирает клетку и ссыпает в неё своих. Затем игроки по очереди говорят своим букашкам в одной из занятых ими клетках «Марш, букашки!», и букашки захватывают все свободные клетки, соседние по стороне с выбранной клеткой (чужие клетки захватывать нельзя). Побеждает тот, чьи букашки первыми займут все клетки одной из сторон поля. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: выиграет Болик.

**Решение.** Если Лёлик начинает с угловой клетки, то Болик ходит в любую клетку кроме угловой, на одной из противоположных сторон и получает преимущество в один ход. Если Лёлик ходит в одну из клеток на стороне, то Болик ходит в угловую клетку на этой сторое и опять побеждает. Если Лёлик ходит внутрь поля, то Болик выбирает любую сторону и ходит в клетку, в которую проецируется клетка Лёлика. Затем Болик ходит так, чтобы проекции всех клеток Лёлика на выбранной стороне были заняты его клетками.

# Бой-1. Первая лига

**1.** Вдоль реки едет поезд и дует ветер. Анемометр на поезде показывает то же значение, что и на катере, плывущем по реке. Дым из заводской трубы обгоняет плывущий по течению реки листок на 3 м/с. Поезд обгоняет тот же листок на 20 м/с. Найдите скорость катера в стоячей воде. (Анемометр — это прибор, который позволяет измерить скорость окружающего его воздуха.)

Ответ: 20 м/с или 14 м/с.

**Решение.** Из условия следует, что направления движения поезда, течения реки и скорости ветра совпадают. Но неизвестно, в каком направлении плывёт катер. Рассмотрим два случая. Пусть сперва катер движется по течению. Обозначим соответствующие скорости через П, Т, К и В. Тогда получаем: В–Т=3, П–Т=20, П–В=К+Т–В. Отсюда видно, что К=20. Теперь рассмотрим ситуацию, когда катер движется против течения. Равенства принимают вид: В–Т=3, П–Т=20, П–В=К–Т+В. Отсюда находим К=П+Т–2В=14. Потерян один из ответов — не более 6 баллов, и задача не решена. За вычислительные ошибки при верно ходе решения снимается до 4 баллов.

**2.** На шахматной доске отмечено несколько клеток. Докажите, что можно покрасить остальные клетки в 4 цвета так, чтобы у каждой отмеченной клетки среди соседей по стороне не было одноцветных.

**Решение.** Красим строки: 12341234, 12341234, 34123412, 34123412, 12341234, 12341234, 34123412, 34123412.

Возможно существуют и другие раскраски.

**3.** Число сложили с суммой его цифр, умноженной на 17. Могло ли в результате получиться 2021?

Ответ: Нет.

**Решение.** Как известно, число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3. Поэтому сумма из условия задачи делится на 3, а число 2021 на 3 не делится.

**4.** Четыре человека из страны рыцарей и лжецов сидят за круглым столом. Глупая Галя утверждает, что оба её соседа лжецы. Странный Бука сказал, что Галя врёт, а затем добавил, что оба его соседа лжецы. Умный Тролль считает, что один из предыдущих ораторов лжёт. Скромный Молчун многозначительно промолчал. Кем он был?

Ответ: Молчун — лжец.

**Решение.** Галя и Бука не могли одновременно сказать правду. Поэтому Тролль говорил правду. Всего возможно три различные расстановки людей за столом: против Гали может сидеть Бука, Тролль, или Молчун.

1) Пусть против Гали — Бука. Тогда Тролль рядом с Галей. Поэтому Галя лжет. Поэтому Бука говорит правду. Но тогда Тролль должен быть лжецом. Противоречие.

2) Пусть против Гали — Тролль. Тогда Молчун рядом с Троллем, а, значит, он соврал. Следовательно, Галя сказала правду. Поэтому Молчун — лжец.

3) Пусть против Гали — Молчун. Тогда Тролль рядом с Галей. Поэтому Галя соврала. Следовательно, Бука сказал правду и Молчун — лжец.

**5.** В наборе разноцветных доминошек половинки каждой доминошки покрашены в разные цвета, цветов всего шесть и все доминошки различны. Какое максимальное количество доминошек можно выложить в ряд, соединяя их одинаковыми цветами?

**Решение.** Всего доминошек $5 \cdot 6/2 = 15$. Пусть можно выложить 14. Доминошек, содержащих клеточку одного цвета ровно пять. Чтобы выложить доминошки в ряд они должны соприкасаться одним цветом, при этом задействуются две доминошки одного цвета, а значит по клетке каждого цвета останется не задействовано. Всего их 6, но 2 могут быть использованы с краю, значит оставшиеся 4 клетки (две доминошки) выложить не получится. Пример на 13: 12 23 36 64 45 56 61 13 35 52 24 41 15 Ответ: 13

**6.** В школе учатся мальчики и девочки. Они разбились на пять хороводов, в каждом из которых было от 9 до 11 человек, причем хороводов с одинаковым количеством человек было не больше двух. Могут ли они образовать один большой хоровод, в котором каждый будет держаться за руки как с мальчиком, так и с девочкой?

Ответ: не могут.

**Решение.** В большом хороводе дети должны стоять ММДД-ММДД.... Поэтому число детей должно делится на 4. Пять хороводов можно образовать только тремя способами: 1) 9, 9, 10, 10, 11; 2) 9, 9, 10, 11, 11; 3) 9, 10, 10, 11, 11. Во всех этих случаях число детей не делится на 4.

**7.** Из шести внешне неотличимых монет две фальшивые (фальшивые монеты весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). В нашем распоряжении имеются чашечные весы без гирь. Как за четыре взвешивания найти обе фальшивых монеты?

Разобьем монеты на три пары. При этом фальшивые монеты попадут в одну пару или в разные, но в обоих случаях две пары будут весить одинаково, а третья будет отличаться от них по весу. Сравнив за два взвешивания одну из пар с двумя другими, мы найдем две пары одного веса. Назовем их «первая» и «вторая». Третьим взвешиванием сравним две монеты первой пары. Если их веса равны, все монеты в равных по весу парах — настоящие, а обе фальшивые монеты — в третьей паре. Последним взвешиванием сравниваем настоящую монету с фальшивой и узнаем, какая тяжелее. Если при третьем взвешивании веса двух монет различны, то первая и вторая пары состоят из настоящей и фальшивой монеты, а в третьей паре обе монеты — настоящие. При этом мы уже сравнивали одну из двух первых пар с третьей и потому знаем, как соотносятся веса настоящей и фальшивой монет. Поэтому мы можем сказать, какая из монет в первой паре — фальшивая, а сравнив четвертым взвешиванием монеты второй пары, найдем и вторую фальшивую.

**8.** На карточках записаны числа от 1 до 2021. Карточки выложены одна за другой в произвольном порядке. Разрешается поменять местами две карточки, если число, написанное на одной из них, делится на число, написанное на другой. Докажите, что за несколько таких операций числа на карточках можно расположить в порядке возрастания.

**Решение.** 1) Крайнее справа число меняем местами с 1. 2) Меняем 2021 с единицей. В результате число 2021 окажется на последнем месте. Далее ставим 2020 на предпоследнее место и т.д.

# Бой-1. Вторая лига

**1.** На карточках записаны числа от 1 до 2021. Карточки выложены одна за другой в произвольном порядке. Разрешается поменять местами две карточки, если число, написанное на одной из них, делится на число, написанное на другой. Докажите, что за несколько таких операций числа на карточках можно расположить в порядке возрастания.

**Решение.** 1) Крайнее справа число меняем местами с 1. 2) Меняем 2021 с единицей. В результате число 2021 окажется на последнем месте. Далее ставим 2020 на предпоследнее место и т.д.

**2.** Из шести внешне неотличимых монет две фальшивые (фальшивые монеты весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). В нашем распоряжении имеются чашечные весы без гирь. Как за четыре взвешивания найти обе фальшивых монеты?

**Решение.** Разобьем монеты на три пары. При этом фальшивые монеты попадут в одну пару или в разные, но в обоих случаях две пары будут весить одинаково, а третья будет отличаться от них по весу. Сравнив за два взвешивания одну из пар с двумя другими, мы найдем две пары одного веса. Назовем их «первая» и «вторая». Третьим взвешиванием сравним две монеты первой пары. Если их веса равны, все монеты в равных по весу парах — настоящие, а обе фальшивые монеты — в третьей паре. Последним взвешиванием сравниваем настоящую монету с фальшивой и узнаем, какая тяжелее. Если при третьем взвешивании веса двух монет различны, то первая и вторая пары состоят из настоящей и фальшивой монеты, а в третьей паре обе монеты — настоящие. При этом мы уже сравнивали одну из двух первых пар с третьей и потому знаем, как соотносятся веса настоящей и фальшивой монет. Поэтому мы можем сказать, какая из монет в первой паре — фальшивая, а сравнив четвертым взвешиванием монеты второй пары, найдем и вторую фальшивую.

**3.** Можно ли расставить числа от 1 до 6 на рёбрах тетраэдра так, чтобы для каждой вершины сумма чисел на примыкающих к ней ребрах была одной и той же?

Ответ: нет.

**Решение.** Предположим, что сумма для каждой вершины равна $x$. Тогда $4\,x = 2\,(1 + 2 + \cdots + 6)$. Противоречие.

**4.** После успешного набега пираты Андрей, Боря, Витя и Гриша разделили свою добычу в 70 золотых монет. Каждый пират получил хотя бы по одной монете. Артур получил больше всех. Боря и Витя вместе получили 45 монет. Сколько монет мог получить Гриша?

Ответ. 1 монету.

**Решение.** Артур получил не меньше $45/2 + 1$.

**5.** На турнир едут Таня, Никита, Ира, Ася, Герман, Кирилл, Илья и Женя. Им надо разбиться на две равные команды, но Таня не любит людей с буквой «а» в имени. Как ребятам разбиться на команды?

**Решение.** Заметим, что Таня не может быть ни с Асей, ни с Никитой, ни с Ирой, ни с Германом. Тогда Танина бригада составляется единственным образом: ТИКЖ.

**6.** В стране гномов есть города и деревни, которые связаны между собой дорогами так, что каждая дорога связывает два населенных пункта и не пересекается с другими дорогами. Оказалось, что для того чтобы доехать из города в город нужно проехать четное число дорог, и чтобы проехать из деревни в деревню тоже нужно проехать четное число дорог. Докажите, что любой путь из деревни в город будет состоять из нечетного числа дорог.

**Решение.** Посмотрим на город и деревню. Пусть между ними четное число дорог. Тогда между ними есть хотя бы одно селение. Посмотрим на селение на расстоянии 1 от города. Это не может быть город — это противоречит условию. Это не может быть деревней — между ней и вот той в начале будет Ч-1=Н дорог. Значит ее не существует.

**7.** Гарри Поттер и Гермиона Грейнджер учили заклинание «Экспекто Патронум». Они произнесли слово «Экспекто» по 36 раз и затем Гермиона несколько раз произнесла «Экспекто Патронум». Слово «Патронум» прозвучало в 10 раз меньше раз, чем всего было произнесено слов. Сколько раз Гермиона сказала «Патронум»?

Ответ: П=8.

Решение: $10 \cdot \text{П} = \text{П} + 72$.

**8.** В квадрате $3 \times 3$ в каждой клетке живет рыцарь или лжец. Каждый из них сказал фразу: «у меня ровно два соседа рыцаря». Сколько рыцарей могло быть?

Ответ: 0, 4 или 8 рыцарей.

# Бой-2. Высшая лига

**1.** (сложный конструктив) 14 команд играют между собой чемпионат — в каждом туре встречаются какие-то 7 пар команд, не игравшие между собой ранее. Докажите, что можно так провести первые 7 туров, что ни одного такого тура больше сыграть не удастся.

**Решение.** Разобьем команды на две группы по 7 команд. Очевидно, можно провести первые семь туров та к, чтобы каждая команда из одной группы сыграла с каждой командой из другой. После этого все матчи должны происходить внутри групп, а 7 команд разбить на пары невозможно.

**2.** (Задача на движение) В деревне П живёт фермер Петров со своим котом Петькой, а в деревне В — фермер Васильев с котом Васькой. Однажды Петров с Петькой поехали в пункт В, а Васильев с Васькой одновременно — в пункт П. Когда они встретились, оказалось, что Петька съел в два раза больше пакетиков «Вискас», чем Васька. За всю дорогу между пунктами В и П пакетиков они съели поровну. К новому году фермеры подарили своих котов друг другу. Одиннадцатого января они снова выехали из своих деревень с котами. На этот раз за всю дорогу Васька съел 5 пакетиков «Вискас». Сколько пакетиков за всю дорогу съел Петька?

Ответ: 20 пакетиков.

**Решение.** Поскольку в первый раз фермеры до места встречи ехали одно и то же время, Васька ест «Вискас» вдвое быстрее, чем Петька. Поскольку в первый раз они съели «Вискаса» поровну, Васильев едет вдвое быстрее Петрова. Во второй раз Петька ехал вдвое быстрее, чем в первый, и потому съел вдвое меньше «Вискаса», а Васька ехал вдвое медленнее, и потому съел «Вискаса» вдвое больше. Отсюда — ответ. Ответ без обоснования — 2 балла.

**3.** (Простая делимость) На доску выписаны 12 составных чисел и любые два из них взаимнопросты. Докажите, что одно из них больше 1000.

**4.** (Игра с нетривиальной стратегией) В каждой клетке доски $9 \times 9$ лежат несколько монет: в первой строке — 1, 2, ..., 9, во второй строке — 2, 3,

…9, 1 и т.д. в последней строке — 9, 1, 2, …8. За ход можно выбрать прямоугольник со стороной 1, в каждой клетке которого ещё есть монета и забрать по монете из каждой его клетки. Побеждает тот, у кого окажется больше монет. Кто победит?

**Решение.** У первого игрока работает жадная стратегия. Поэтому он возьмёт не меньше. Монет нечётное число. Поэтому первый победит.

**5.** (Здравый смысл и немного делимость) Имеются четыре таймера. У одного промежуток между сигналами — 1 час, у другого — 2 часа, у третьего — 3 часа, у четвертого — 5 часов. Таймеры включили в случайно выбранные моменты (у каждого свой). Кот Васька уснул сразу после первого сигнала одночасового таймера и спал сутки, просыпаясь (и сразу засыпая снова) после каждого сигнала. Докажите, что ему не меньше четырех раз удалось беспробудно проспать целый час.

**Решение.** Сутки сигналами часового таймера разделены на 24 промежутка по часу. Назовем такой промежуток испорченным, если в течении него (не в начале и не в конце) сработал один из трех других таймеров. Возьмем шесть часов подряд. Двухчасовой таймер портит три из них, трехчасовой — два, и один они портят вместе. Значит, два промежутка из шести останутся неиспорченными, причем между ними — нечетное число промежутков. Поэтому пятичасовой таймер сможет испортить не больше одного из них. Поскольку в течение суток эта пара промежутков будет повторяться с периодом 6 часов, за сутки наберется по крайней мере 4 неиспорченных промежутка.

Доказано только существование неиспорченных промежутков, но не доказано, что их минимум 4 — 2 балла.

**6.** (сложная оценка+пример) Найти наименьшее $n$ такое, что числа от 3 до $n$ можно выписать в ряд так, что сумма любых двух соседних будет равна квадрату натурального числа.

Ответ: 22.

**Решение.** Строим граф: вершины — натуральные числа, числа соединены ребром, если их сумма — точный квадрат. При $n < 22$ слишком много вершин маленькой степени. При $n = 22$ получаем граф, в котором есть гамильтонов путь, начинающийся в 18 и заканчивающийся в 8 (или наоборот): 18, ..., 8.

**7.** (Не очень сложная делимость) Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Натуральное число называется редким, если самый большой из его собственных делителей равен произведению самого маленького на следующий по величине. Сколько редких чисел оканчивается цифрой 5?

Ответ: 8.

**Решение.** Ясно, что самый маленький собственный делитель натурального числа $N$ есть простое число. Обозначим его через $p$. Тогда самый большой делитель числа $N$ есть число $\frac{N}{p}$, а второй по величине делитель есть либо второй по величине простой делитель $q$, либо число $p^2$. В первом случае должно выполнять неравенство $p < q < p^2$. Соответственно, в первом случае должно выполняться условие $N = p^2 q$, а во втором — $N = p^4$. Второй случай даёт число $N = 625$. В первом случае либо $p = 3$ и $q = 5$, либо $p = 5$ и $q = 7, 11, 13, 17, 19, 23$.

Только 625 — 2 балла. Потеря одного из трех случаев — не более 6 баллов, задача не решена.

**8.** После первого матча чемпионата Шанил О'Кил имел результативность бросков меньше 75%, а в конце чемпионата — больше 75%. Докажите, что был момент, когда его результативность его бросков была ровно 75%? Результативность бросков — это отношение числа попаданий в корзину к общему числу бросков.

**Решение.** Предположим, что не было момента, когда результативность была ровно 75%. Рассмотрим момент, когда после очередного точного броска результативность впервые стала превышать 75%. Обозначим через $k$ — количество точных бросков и $n$ — общее количество бросков до рассматриваемого момента. Тогда $\frac{k}{n} < \frac{3}{4} < \frac{k+1}{n+1}$. Из левого неравенства получаем, что $4k < 3n$, а из правого, что $3n - 1 < 4k$. Следовательно, $3n - 1 < 4k < 3n$, что невозможно, так как $k$ — целое число.

# Бой-2. Первая лига

**1.** 14 команд играют между собой чемпионат — в каждом туре встречаются какие-то 7 пар команд, не игравшие между собой ранее. Докажите, что можно так провести первые 7 туров, что ни одного такого тура больше сыграть не удастся.

**Решение.** Разобьем команды на две группы по 7 команд. Очевидно, можно провести первые семь туров так, чтобы каждая команда из одной группы сыграла с каждой командой из другой. После этого все матчи должны происходить внутри групп, а 7 команд разбить на пары невозможно.

**2.** На доску выписаны пять составных чисел и любые два из них взаимнопросты. Докажите, что одно из них больше 100.

**3.** В каждой клетке доски $9 \times 9$ лежат несколько монет: в первой строке — 1, 2, …, 9, во второй строке — 2, 3, …9, 1 и т.д. в последней строке — 9, 1, 2, …8. За ход можно выбрать прямоугольник со стороной 1, в каждой клетке которого ещё есть монета и забрать по монете из каждой его клетки. Побеждает тот, у кого окажется больше монет. Кто победит?

**Решение.** У первого игрока работает жадная стратегия. Поэтому он возьмёт не меньше. Монет нечётное число. Поэтому первый победит.

**4.** (Здравый смысл) Имеются три таймера. У одного промежуток между сигналами — 1 час, у второго — 2 часа, а у третьего — 2.5 часа. Таймеры включили в случайно выбранные моменты (у каждого — свой). Кот Васька уснул сразу после первого сигнала одночасового таймера и спал сутки, просыпаясь (и сразу засыпая снова) после каждого сигнала. Докажите, что ему хотя бы однажды удалось беспробудно проспать целый час.

**Решение.** Сутки сигналами часового таймера разделены на 24 промежутка по часу. Назовем такой промежуток испорченным, если в течении него (не в начале и не в конце) сработал один из трех других таймеров. Двухчасовой таймер портит каждый второй промежуток, то есть 12 промежутков за сутки, а 2.5-часовой может испортить за сутки не больше 10 промежутков, потому что $2,5 \cdot 10 > 24$. Значит, останется даже два промежутка, когда Васькин сон ничто не потревожит.

**5.** (Движение) В деревне П живёт фермер Петров со своим котом Петькой, а в деревне В — фермер Васильев с котом Васькой. Однажды Петров с Петькой поехали в пункт В, а Васильев с Васькой одновременно — в пункт П. Когда они встретились, оказалось, что Петька съел в два раза больше пакетиков «Вискас», чем Васька. За всю дорогу между пунктами В и П пакетиков они съели поровну. К новому году фермеры подарили своих котов друг другу. Одиннадцатого января они снова выехали из своих деревень с котами. На этот раз за всю дорогу Васька съел 5 пакетиков «Вискас». Сколько пакетиков за всю дорогу съел Петька?

Ответ: 20 пакетиков. **Решение.** Поскольку в первый раз фермеры до места встречи ехали одно и то же время, Васька ест «Вискас» вдвое быстрее, чем Петька. Поскольку в первый раз они съели «Вискаса» поровну, Васильев едет вдвое быстрее Петрова. Во второй раз Петька ехал вдвое быстрее, чем в первый, и потому съел вдвое меньше «Вискаса», а Васька ехал вдвое медленнее, и потому съел «Вискаса» вдвое больше. Отсюда — ответ. Ответ без обоснования — 2 балла.

**6.** Числа 1, 2, 3, 4 расположены по кругу именно в этом порядке. Вы можете прибавить по единице к любой паре соседних чисел. Сможете ли вы сделать все числа равными? Либо докажите, как это сделать, либо докажите, что это невозможно.

**Решение.** Рассмотрим сумму двух чисел, стоящих напротив друг друга. В исходном положении это $1+3=4$ и $2+4=6$. После каждой операции каждая из сумм увеличивается на 1. Поэтому они никогда не будут равными.

**7.** В классе учатся 30 детей. В течение недели учительница поставила им в журнал несколько оценок по математике. В воскресенье оказалось, что у любых десяти детей вместе присутствуют все пять видов оценок (от 1 до 5). Какое наименьшее количество оценок могло быть выставлено в течение этой недели?

Ответ: 105.

**Решение.** Чтобы в каждой группе из 10 учеников оказался школьник, получивший единицу, единицы должен получить по крайней мере 21 ученик. То же касается и остальных оценок. Поэтому каждая из пяти оценок выставлялась не меньше 21 раза, и всего их было поставлено не меньше 105. Пример на 105: каждая оценка выставлена 21 произвольному школьнику.

Только ответ — 2. Оценка без примера — 6 баллов и задача не решена. Ответ с примером без оценки — 4 балла.

**8.** (Рыцари и лжецы) В парламент прошли 99 представителей двух партий: «красные» и «синие». На первом заседании парламента каждый депутат сделал следующее заявление: «в парламенте представители моей партии составляют большинство». Известно, что каждый красный говорит правду, если перед ним выступает синий, и обманывает, если перед ним выступает однопартиец. А каждый синий, наоборот, говорит правду после однопартийца, и обманывает после человека из чужой партии. К какой партии принадлежал первый выступавший? (В парламенте присутствуют представители обеих партий и выступают по одному.)

Ответ: К красной.

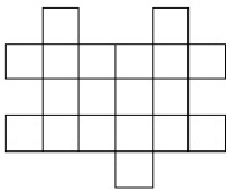
**Решение.** Поскольку число 99 нечетно, представители какой-то партии составляют в парламенте большинство. Все они сказали правду. Допустим, это синие. Тогда все они (кроме, может быть, первого) выступали после однопартийцев. Но это, поскольку в парламенте есть и красные, означает, что сначала выступили все синие, а потом — все красные. Однако, тогда первый красный должен был сказать правду. Противоречие. Значит, правду говорят красные. Стало быть, они чередуются с синими и их больше. Но это возможно только в случае, когда первый оратор — красный.

# Бой-2. Вторая лига

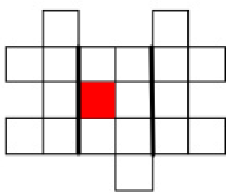
**1.** В каждой клетке доски $9 \times 9$ лежат несколько монет: в первой строке — 1, 2, ..., 9, во второй строке — 2, 3, ...9, 1 и т.д. в последней строке — 9, 1, 2, ...8. За ход можно выбрать прямоугольник со стороной 1, в каждой клетке которого ещё есть монета и забрать по монете из каждой его клетки. Побеждает тот, у кого окажется больше монет. Кто победит?

**2.** Имеются три таймера. У одного промежуток между сигналами — 1 час, у второго — 2 часа, а у третьего — 2.5 часа. Таймеры включили в случайно выбранные моменты (у каждого — свой). Кот Васька уснул сразу после первого сигнала одночасового таймера и спал сутки, просыпаясь (и сразу засыпая снова) после каждого сигнала. Докажите, что ему хотя бы однажды удалось беспробудно проспать целый час.

**3.** Покажите, как удалить из фигуры на рисунке одну клетку, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать три равные части.



Ответ.



**4.** Гриша купил на базаре красные и синие шарики – всего десять штук. Если бы он купил десять красных шариков, то потратил бы на 21 рубль меньше, а если бы купил десять синих шариков, то на 9 рублей больше. На сколько синий шарик дороже красного?

Ответ. На 3 рубля

**5.** У продавца есть три сорта зелёного чая. Петя купил по несколько граммов каждого сорта. Продавец заметил, что какие бы два ценника он ни поменял местами, Пете пришлось бы заплатить больше. Может ли такое быть или продавец ошибается?

Ответ. Покупка 1, 2, 3 граммов чая со стоимостью 3, 2, 1 рублей соотвественно.

**6.** Числа 1, 2, 3, 4 расположены по кругу именно в этом порядке. Вы можете прибавить по единице к любой паре соседних чисел. Сможете ли вы сделать все числа равными? Либо докажите, как это сделать, либо докажите, что это невозможно.

**7.** Сколько существует пятизначных чисел, читающихся одинаково слева направо и справа налево?

Ответ. 900

**8.** Для того чтобы обменяться протоколами прошедших матбоёв, из «Берендеевых полян» и «Алых парусов» одновременно выехали два члена жюри. Известно, что один из них за 40 минут успел проехать половину пути и ещё 2 км, а другой за час не доехал 3 км до середины пути. Через какое время после выезда они встретились?

**Решение.** $2x$ — расстояние между пунктами, тогда $x + 2$ — прошел первый, $x-3$ — прошел второй. Скорость сближения $V = (x+2)/(40/60)+(x-3)/(60/60) = (3x+6)/2+x-3 = (3x+2x+6-6)/2 = 2.5x$. Следовательно, время $= 2/(2.5) = 4/5$ часа $= 48$ мин

**9.** Найдите все решения ребуса и докажите, что других нет.

$$\text{ШЕ} \cdot \text{СТЬ} + 1 = \text{СЕ} \cdot \text{МЬ}$$

**Решение.** Произведение с обеих сторон заканчивается на одну цифру, соответственно после прибавления единицы равенство не может сохраниться.

# Бой-3. Высшая лига

**1.** В классе поровну мальчиков и девочек, всего 24 человека. Каждый мальчик написал, сколько в классе девочек выше его, а каждая девочка написала, сколько в классе мальчиков ниже её. Оказалось, что все написанные числа не меньше четверти числа учеников в классе. Докажите, что суммарный рост девочек в классе больше суммарного роста мальчиков.

**Решение.** У нас есть 6 девочек, которые выше любого мальчика и 6 мальчиков, которые ниже любой девочки (возьмем самого высокого мальчика, он кого-то посчитал и т.д.). Выстроим девочек по росту и мальчиков по росту, составим соответствие. Средние девочки $(7-12)$ выше маленьких мальчиков $(7-12)$, т.к. те заведомо ниже всех в классе. Высокие девочки $(1-6)$ заведомо выше средних мальчиков $(1-6)$, т.к. в принципе выше всех в классе. Т.е. для каждого слагаемого одной суммы мы поставили в соответствие большее его слагаемое другой суммы. Другая сумма очевидно больше.

**2.** Семь гномов ростом 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 дециметров встали в круг в некотором порядке. Белоснежка дает каждому гному количество конфет, равное разности роста двух его соседей. Какого наименьшего количества конфет наверняка хватит Белоснежке?

Ответ: 24.

**Решение.** Рассмотрим, как должны встать гномы, чтобы получить максимальную сумму. В выплату входит разница ростов всех гномов, стоящих через 1. Если рост гнома в одном случае входит в разницу со знаком «+», а в другом — со знаком «−», то в сумме он сокращается. Остаются те роста, которые входят оба раза с плюсом, и те, которые входят оба раза с минусом. Всего слагаемых 14 и ровно 7 из них с плюсом и ровно 7 — с минусом. Поэтому не может быть более трёх ростов с двумя плюсами и не может быть менее 3 ростов с двумя минусами. Сумма максимальна, когда с плюсом входят 5, 6, 7 дм, а с минусом — 1, 2, 3 дм. Отсюда получаем оценку и ответ. Пример: 7, 5, 1, 3, 6, 4, 2.

**3.** В каждой клетке квадрата $7\times 7$ написано число. Сумма чисел в любом квадрате $2\times 2$ и $3\times 3$ равна 0. Докажите, что сумма всех чисел по периметру квадрата равна 0.

**Решение.** Сумма чисел в любых прямоугольниках $2\times 6$, $3\times 6$ и $6\times 6$ равна 0, так как эти прямоугольники можно составить из квадратов $2\times 2$ и $3\times 3$. Следовательно, сумма чисел в полоске $1\times 6$ равна 0, так как $6-3-2=1$. Периметр квадрата $7\times 7$ состоит из 4-х непересекающихся прямоугольников $1\times 6$.

**4.** На берегу озера три деревни — $A$, $B$, и $C$. Туристы обходят озеро вдоль берега. Они вышли из деревни $A$ двумя группами в разные стороны, заходя во все деревни. Первая группа пошла по кратчайшей дуге в сторону $B$, а вторая — по кратчайшей дуге в сторону $C$. Дойдя до этих деревень, туристы разделились: в каждой группе несколько человек повернули обратно и вернулись в $A$ с той же стороны, откуда вышли. Все остальные продолжили поход и в конце концов вернулись в $A$ с другой стороны, обойдя озеро. Известно, что в первой группе было 100 человек, а в $C$ побывало на 10 человек больше, чем в $B$. Сколько человек прошло из $C$ в $A$ по кратчайшей дуге?

Ответ: 110.

**Решение.** Пусть в первой группе $b_1 + b_2$ людей, а во второй группе $c_1 + c_2$ людей, где $b_1$ и $c_1$ — это число людей, которые вернулись в каждой из групп. Тогда $b_1 + b_2 = 100$. Точку $B$ посетило $b_1 + b_2 + c_2$ людей, а точку $C$ — $c_1 + c_2 + b_2$. Поэтому $b_1 + b_2 + c_2 + 10 = c_1 + c_2 + b_2$. Откуда $b_2 + c_1 = 110$. Но это как раз искомое число людей.

**5.** Игровое поле — это квадрат $100 \times 100$ клеток, в каждой клетке которого лежит по 5 монет. Двое ходят по очереди. Первый в свой ход выбирает две соседние по стороне непустые клетки и забирает по одной монете из каждой из них. Второй в свой ход повторяет аналогичную операцию трижды. Проигрывает тот, кто не может походить. Кто выиграет при правильной игре.

Ответ: второй.

**Решение.** Приведем стратегию для второго игрока. Сначала он мысленно разбивает поле на квадратики $2 \times 2$ (будем называть их «блоки»), и потом каждый раз ходит так, чтобы после его хода в каждом блоке во всех клетках было одинаковое число монет. Докажем, что второй игрок всегда сможет это сделать. Если первый игрок взял монеты из двух соседних блоков, то второй берёт 6 монет из нетронутых клеток этих двух блоков. Если же первый игрок взял монеты из одного блока, то второй берёт две монеты из двух нетронутых клеток этого блока. И еще 4 монеты из любого другого блока. Такой блок всегда найдётся, так как общее число монет $5 \cdot 100 \cdot 100$ делится на 8, а к текущему моменту число взятых монет равно $8\,k + 4$. Таким образом, второй игрок всегда может сделать ход, а значит, не проиграет.

**6.** В классе 27 учеников. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любых двух учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, в котором занимаются не менее 18 учеников.

**Решение.** Если в некоторый кружок ходит весь класс, то всё в порядке. Далее мы считаем, что такого кружка нет. Пусть самый многочисленный кружок — математический; его участников мы будем называть математиками. Есть ученик Вася, который в него не ходит. Рассмотрим его и одного из математиков. Они вместе ходят в другой кружок, допустим, в фото. Вася не может ходить в этот кружок вместе со всеми математиками, иначе математический кружок не будет самым многочисленным. Значит, с кем-то из математиков он ходит ещё в один кружок, например, в танцевальный. Итак, каждый математик ещё является либо фотографом, либо танцором (и никем другим). То, что было выше сказано про Васю, можно сказать и про любого ученика, который не является математиком: каждый из таких учеников фотограф и танцор одновременно (и больше ни в какие кружки не ходит). Таким образом, кружков всего три, и каждый ученик ходит ровно в два кружка. Пусть в классе $n$ учеников, тогда на три кружка в общей сложности приходится $2n$ их участников. Поэтому в математический кружок (самый многочисленный) ходит не менее, чем $\frac{2n}{3}$ учеников.

**7.** Дана доска $5 \times 6$, в каждой клетке которой стоит рыцарь или лжец. В один момент все произнесли фразу: «Ровно один из моих соседей по стороне — рыцарь». Какое максимальное количество рыцарей могло стоять на доске? Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

**Решение.** Очевидно, что рыцари стоят доминошками. Разобьём полоску $6 \times 4$ на квадратики $2 \times 2$. В каждом квадратике максимум 2 рыцаря, а в оставшейся полоске максимум 4. Тогда максимум 16 рыцарей.

Пример: шахматная раскраска в виде доминошек.

**8.** В ряд выписаны натуральные числа от 1 до 100 в произвольном порядке. За одну операцию можно отсортировать 50 любых подряд идущих чисел. Докажите, что за 6 операций можно отсортировать все числа.

**Решение.** После выполнения операций $[1 : 50]$, $[26 : 75]$, $[51 : 100]$ в промежутке $[76 : 100]$ соберутся 25 самых больших чисел и они будут отсортированы по возрастанию. После операций $[26 : 75]$, $[1 : 50]$ в промежутке $[1 : 25]$ будут собраны 25 самых маленьких чисел и они будут отсортированы по возрастанию. Шестая операция $[26 : 75]$ отсортирует все числа.

## Бой-3. Первая лига

**1.** Могут ли у натуральных чисел $k$, $21k$ и $6k + 5$ наименьшие делители, отличные от 1, быть одинаковыми?

Ответ. Нет.

**Решение.** Двойка не подходит, тройка всегда будет у $21k$, но $6k + 5$ не делится на 3.

**2.** В круговом шахматном турнире участвовало шесть человек. Могло ли оказаться так, что для любых двух игроков найдётся третий, которого они оба выиграли?

**Решение.** Нельзя. Аккуратно рисуем графы.

**3.** В ряд выписаны натуральные числа от 1 до 100 в произвольном порядке. За одну операцию можно отсортировать 50 любых подряд идущих чисел. Докажите, что за 6 операций можно отсортировать все числа.

Решение: Возьмём так: Первые 50, вторые 50, средние 50. Повторим ещё раз первые три операции. Очевидно, что любое число такими операциями встанет на нужное место. (Разбиение на четверти)

**4.** В каждом из 2021 полей, расположенных по кругу, записано натуральное число. На одно из полей ставится фишка. Ход состоит в том, что фишку сдвигают по часовой стрелке на число полей, равное числу на начальном поле, затем увеличивают на 1 число на поле, куда она пришла. Докажите, что через некоторое время фишка побывает на всех полях.

**Решение.** Рассмотрим остатки по модулю 2021. Если мы в какое-то место не попадаем, то значит мы ходим по одинаковым полям, при это зацикливаются и остатки. Следовательно, мы побываем в одной точке со всеми остатками. Следовательно, мы из этой точки попадём во все остальные поля.

**5.** В классе поровну мальчиков и девочек, всего 24 человека. Каждый мальчик написал, сколько в классе девочек выше его, а каждая девочка написала, сколько в классе мальчиков ниже её. Оказалось, что все написанные числа не меньше четверти числа учеников в классе. Докажите, что суммарный рост девочек в классе больше суммарного роста мальчиков.

**Решение.** У нас есть 6 девочек, которые выше любого мальчика и 6 мальчиков, которые ниже любой девочки (возьмем самого высокого мальчика, он кого-то посчитал и т.д.). Выстроим девочек по росту и мальчиков по росту, составим соответствие. Средние девочки $(7-12)$ выше маленьких мальчиков $(7-12)$, т.к. те заведомо ниже всех в классе. Высокие девочки $(1-6)$ заведомо выше средних мальчиков $(1-6)$, т.к. в принципе выше всех в классе. Т.е. для каждого слагаемого одной суммы мы поставили в соответствие большее его слагаемое другой суммы. Другая сумма очевидно больше.

**6.** В каждой клетке квадрата $7 \times 7$ написано число. Сумма чисел в любом квадрате $2 \times 2$ и $3 \times 3$ равна 0. Докажите, что сумма всех чисел по периметру квадрата равна 0.

**Решение.** Сумма чисел в любых прямоугольниках $2 \times 6$, $3 \times 6$ и $6 \times 6$ равна 0, так как эти прямоугольники можно составить из квадратов $2 \times 2$ и $3 \times 3$. Следовательно, сумма чисел в полоске $1 \times 6$ равна 0, так как $6 - 3 - 2 = 1$. Периметр квадрата $7 \times 7$ состоит из 4-х непересекающихся прямоугольников $1 \times 6$.

**7.** Дана доска $5 \times 6$, в каждой клетке которой стоит рыцарь или лжец. В один момент все произнесли фразу: «Ровно один из моих соседей по стороне — рыцарь». Какое максимальное количество рыцарей могло стоять на доске? Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

**Решение.** Очевидно, что рыцари стоят доминошками. Разобьём полоску $6 \times 4$ на квадратики $2 \times 2$. В каждом квадратике максимум 2 рыцаря, а в оставшейся полоске максимум 4. Тогда максимум 16 рыцарей.

Пример: шахматная раскраска в виде доминошек.

**8.** Таня и Алёна написали на доске число 2038. За один ход разрешается или прибавить к числу его сумму цифр, или разделить нацело, если это возможно, на одну из его цифр. Кто первый получит число 5533, тот и выиграет. Таня ходит первой. Всегда ли Таня может победить?

**Решение.** Заметим что после первого хода может получится либо 1019, либо 2051. Оба этих числа содержат единицу, а значит второй игрок может своим ходом разделить число на один. При этом само число не изменится, но изменится очерёдность хода, а значит у первого победной стратегии быть не может.

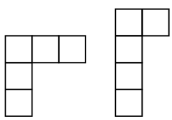
# Бой-3. Вторая лига

**1.** Кот может съесть связку сосисок за 37 минут, а пёс — за 23 минуты. Они начали есть с двух концов и когда съели все сосиски, подсчитали, сколько процентов от всей связки досталось каждому. Оказалось, что коту досталось на 10% больше, чем псу. Кто из них начал есть раньше и на сколько минут?

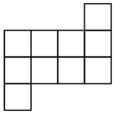
Ответ. 10 минут.

**Решение.** Так как кот ест связку медленнее, значит он начал раньше. Тогда кот съел — 55% связки, а пёс — 45%. Составим уравнение, где $t$ — разница, с которой они начали поедать связку и вычислим $t$: $0,55 \times 37 = 0,45 \times 23 + t$.

**2.** Существует ли клетчатая фигура, которую можно разрезать как на уголки, так и буквы Г из 5 клеток предстваленные на рисунке ниже?



**Решение.**



**3.** В каждом из 4 полей, расположенных по кругу, записано натуральное число. На одно из полей ставится фишка. Ход состоит в том, что фишку сдвигают по часовой стрелке на число полей, равное числу на начальном поле, затем увеличивают на 1 число на поле, куда она пришла. Докажите, что через некоторое время фишка побывает на всех полях.

**Решение.** От противного. Пусть есть хотя бы одно поле, на котором фишка не побывает, тогда через 10 ходов найдётся клетка, из которой фишка выпрыгнула 4 раза. Значит, что фишка прыгнула из неё во все 4 поля.

**4.** Поставьте между некоторыми девятками в левой части скобки или знаки арифметических операций ($+$, $-$, $*$ и $:$) так, чтобы равенство ниже было верным. В один промежуток разрешается ставить больше одного символа.

$$9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 = 100$$

Пример. $99 + (99 - 9) : 9 - 9 - 9 + 9 = 100$

**5.** Павлик купил 30 грибов. Среди любых 13 грибов будет хотя бы одна поганка, а среди любых 19 — хотя бы один мухомор. Сколько у Павлика сыроежек?

Ответ. 0 сыроежек

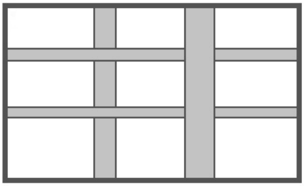
**Решение.** Поганок хотя бы $30 - 12 = 28$, а мухоморов хотя бы — 12. Соответственно, все грибы либо поганки, либо мухоморы.

**6.** Могут ли у натуральных чисел $k$, $21k$ и $6k + 5$ наименьшие делители, отличные от 1, быть одинаковыми?

Ответ. Нет.

**Решение.** Двойка не подходит, тройка всегда будет у $21k$, но $6k + 5$ не делится на 3.

**7.** Крош и Ёжик сделали флаг. Крош достал прямоугольный кусок белой ткани, а Ёжик нашил на него 4 синие ленты, как показано на рисунке. Размеры вертикальных лент $50 \times 10$ и $50 \times 16$, а горизонтальных — $8 \times 80$ и $3 \times 80$. Чему равна площадь белой части флага?



Ответ. 2106

**Решение.** Перенесём одну вертикальную и горизонтальную полосы так, чтобы получилось две полосы крест на крест размерами $26 \cdot 50$ и $11 \cdot 80$. Вычтем их площадь из площади прямоугольника и прибавим их пересечение. $50 \cdot 80 - 26 \cdot 50 - 11 \cdot 80 + 11 \cdot 26 = 2106$

**8.** Дана доска $5 \times 6$, в каждой клетке которой стоит рыцарь или лжец. В один момент все произнесли фразу: «Ровно один из моих соседей по стороне — рыцарь». Какое максимальное количество рыцарей могло стоять на доске? Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

**Решение.** Очевидно, что рыцари стоят доминошками. Разобьём полоску $6 \times 4$ на квадратики $2 \times 2$. В каждом квадратике максимум 2 рыцаря, а в оставшейся полоске максимум 4. Тогда максимум 16 рыцарей.

Пример: шахматная раскраска в виде доминошек.