Задача 1

Обязательно ли старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков один и тот же человек?

Задача 2

Обязательно ли лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков один и тот же человек?

Определение 1

Множество - неупорядоченная совокупность элементов.

Пример 1. $\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{1,1,3,2,3,3\}$

Пример 2. $\{\} = \varnothing$

Пример 3. $\{a, \{b, c\}, \{\{d\}, e\}, \varnothing\}$

Определение 2

$a \in A$ - означает, что во множестве A есть элемент a

Определение 3

$B \subseteq A$ - означает, что если $b \in B$, то $b \in A$.

Пример 4. $1 \in \{1,2,3\}; \quad \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$.

Пример 5. $1 \notin \varnothing$.

Пример 6. $\{b, c\} \in \{a, \{b, c\}, \{\{d\}, e\}, \varnothing\}$.

Задача 3

Какие из выражений верны для произвольного x?

- $x \in \{x\}$
- $\{x\} \subseteq \{x\}$
- $\{x\} \in \{x\}$
- $\{x, x\} \subseteq \{x\}$
- $\{x\} \in \{\{x\}\}$
- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \in \{x\}$
- $\varnothing \subseteq \{x\}$
- $\varnothing \subseteq \varnothing$

Определение 4

Предикат от x — это такая функция $\varphi(x)$, которая принимает два возможных значения: либо истина, либо ложь (0 или 1)

Пример 7. $\varphi(x) = (x = 239)$ — принимает истинное значение только, если $x = 239$

Определение 5

Чтобы работать с предикатами, нужно познакомиться с *логическими связками*:

- $\neg$ — ***отрицание*** `"не ..."`,
- $\wedge$ — ***конъюнкция*** `"... и ..."`,
- $\vee$ — ***дизъюнкция*** `"... или ..."`,
- $\rightarrow$ — ***импликация*** `"если ..., то ..."`,
- $\leftrightarrow$ — ***эквивалентность*** `"... тогда и только тогда, когда ..."`;

и *кванторами*:

- $\forall x$ — ***квантор всеобщности*** `"для любого x верно ..."`
- $\exists x$ — ***квантор существования*** `"существует x, такой что верно ..."`

Пример 8. $\varphi(x) = (\forall z \exists y : z + y = x)$ — `"для любого z найдется y, такие что они в сумме дают x"`. Это утверждение всегда верно, если мы рассматриваем предикат на множестве вещественных чисел.

Пример 9. А вот записано утверждение `"множества равны тогда и только тогда, когда у них совпадает набор элементов"` $\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y)$

Определение 6

$A = \underbrace{\{}_{\text{множество}} \underbrace{x}_{\text{всех иксов}} \underbrace{|}_{\text{таких, что}} \underbrace{\varphi(x)}_{\text{выполнено условие } \varphi(x)} \}$, где $\varphi(x)$ предикат от x.

Парадокс 1 (Рассел)

Рассмотрим множество $A = \{x \mid x \notin x\}$. То есть множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего собственного элемента. Что тогда можно сказать про утверждение $A \in A$?

Определение 7

Пусть даны множества A и B. Тогда их ***пересечением*** называется множество:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Пусть дано семейство множеств $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Тогда его пересечением называется ***множество***, состоящее из элементов, которые входят во все множества семейства:

$$\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in A,\ x \in M_\alpha\}.$$

Пример 10. $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$

Пример 11. $x \cap \varnothing = \varnothing$

Пример 12. $\bigcap\{\{1,2,3,4,5\},\{2,3,4,9\},\{0,2,3\}\} = \{2,3\}$

Определение 8

Пусть даны два множества A и B. Тогда их ***объединением*** называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Пусть дано семейство множеств $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Тогда его объединением называется множество, состоящее из всех элементов всех множеств семейства:

$$\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in A,\ x \in M_\alpha\}.$$

Пример 13. $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

Пример 14. $x \cup \varnothing = x$

Пример 15. $\bigcup\{\{1,2,3,4,5\},\{2,3,4,9\},\{0,2,3\}\} = \{0,1,2,3,4,5,9\}$

Определение 9

Пусть даны два множества A и B. Тогда их ***разностью*** называется множество

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Пример 16. $\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$

Пример 17. $\{3,4,5\} \setminus \{1,2,3\} = \{4,5\}$

Определение 10

Пусть даны два множества A и B. Тогда их ***симметрической разностью*** называется множество

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

Пример 18. $\{1,2,3\} \triangle \{3,4,5\} = \{1,2,4,5\}$

Определение 11

Равенство называется ***тождественно верным***, или ***тождеством***, если оно истинно для любых значений входящих в него переменных.

Задача 4

Какие из равенств тождественно верны для множеств X, Y, Z? Приведите контрпримеры к неверным тождествам.

- $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
- $X \cup Y = Y \cup X$
- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
- $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$
- $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup Y$
- $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$
- $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
- $X \cap Y = Y \cap X$
- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
- $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$
- $(X \cap Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cap Y$
- $(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z)$

Задача 5

Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cap, \cup, \setminus$, не является тождеством, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

Задача 6*

Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A и B с помощью операций пересечения, объединения и разности? Из n переменных? (Два выражения считаются одинаковыми, если они тождественно равны.)

Определение 12

Определим ***упорядоченную*** пару X_1 и X_2 как $(X_1, X_2) \coloneqq \{\{X_1\}, \{X_1, X_2\}\}$

Пример 19. $(1,1) = \{\{1\}, \{1,1\}\} = \{\{1\}\}$.

Определение 13

Пусть даны два множества X и Y. Тогда их ***декартовым произведением*** называется множество упорядоченных пар

$$X \times Y \coloneqq \{(x, y) \mid x \in X \land y \in Y\}$$

Будем обозначать $A^n \coloneqq \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$.

Пример 20. $\{a, b\} \times \{0, 1, 2\} = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$.

Пример 21. $\{a, b\}^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Пример 22. $\{1\}^6 = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$.

Определение 14

Под ***бинарными отношениями*** между X и Y мы будем понимать произвольные подмножества $X \times Y$. В частности, при $X = Y$ мы будем называть их еще *бинарными отношениями на* X. Для удобства будем писать xRy вместо $(x, y) \in R$.

Пример 23. ***Тождественное*** отношение на X

$$id_x \coloneqq \{(x, x) \mid x \in X\} = \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}.$$

Определение 15

Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ на X будем называть:

- ***рефлексивным***, если $\forall x(x \in X \to xRx)$;
- ***иррефлексивным***, если $\neg\exists x(x \in X \land xRx)$;
- ***транзитивным***, если $\forall x \forall y \forall z((xRy \land yRz) \to xRz)$;
- ***симметричным***, если $\forall x \forall y(xRy \to yRx)$;
- ***антисимметричным***, если $\forall x \forall y((xRy \land yRx) \to x = y)$.

Пример 24. Отношение "$=$" на вещественных числах является *рефлексивным.*

Пример 25. Отношение "$>$" на вещественных числах является *иррефлексивным.*

Пример 26. Отношение параллельности на множестве прямых на плоскости является *транзитивным* и симметричным.

Пример 27. Отношение "$\leqslant$" на вещественных числах является *антисимметричным.*

Определение 16

Будем говорить, что отношение R является:

- ***предпорядком*** на X, если R *рефлексивно* и *транзитивно*;
- ***строгим частичным порядком*** на X, если R *иррефлексивно* и *транзитивно*;
- ***частичным порядком*** на X, если R *рефлексивно*, *антисимметрично* и *транзитивно*;
- ***эквивалентностью*** на X, если R *рефлексивно*, *симметрично* и *транзитивно.*

Пример 28. Отношение делимости на натуральных числах является *предпорядком.*

Пример 29. Отношение "$>$" (строго больше) на вещественных числах является *строгим частичным порядком.*

Пример 30. Отношение "$\geqslant$" (нестрого больше) на вещественных числах является *частичным порядком.*

Пример 31. Отношение параллельности на множестве прямых на плоскости является *эквивалентностью.*

Определение 17

Пусть $\approx$ — *эквивалентность* на X. Для каждого $x \in X$ под ***классом эквивалентности*** x по $\approx$ понимается множество $[x]_{\approx} := \{u \in X \mid x \approx u\}$

Определение 18

Будем называть Y (взаимно, или попарно) ***дизъюнктным***, если оно удовлетворяет условию $\forall u \forall v((u \in Y \wedge v \in Y \wedge u \neq v) \to u \cap v = \varnothing)$
Будем говорить, что Y является ***разбиением*** X , если Y *дизъюнктно*, $\varnothing \notin Y$ и $\bigcup Y = X$.

Задача 7

Показать:
(a) Если Y — *разбиение* X, то $\mathscr{E}_Y \coloneqq \{(u,v) \in X^2 \mid \exists y(y \in Y \wedge u \in y \wedge v \in y)\}$ — *эквивалентность* на X, причём $X_{/\mathscr{E}_Y}$ равно Y.
(b) Если $\approx$ — *эквивалентность* на X, то $X_{/\approx}$ — *разбиение* X, причём $\mathscr{E}_{X_{/\approx}}$ равно $\approx$.

Задача 8

Пусть R — *предпорядок* на X. Тогда
(a) $\mathscr{S}_R \coloneqq \{(u,v) \in X^2 \mid uRv \wedge vRu\}$ — *эквивалентность* на X;
(b) $R^{\#} \coloneqq \{([u]_{/\mathscr{S}_R}, [v]_{/\mathscr{S}_R}) \mid u \in X \wedge v \in X \wedge uRv\}$ — *частичный порядок* на $X_{/\mathscr{S}_R}$.

Задача 9

Доказать:
(a) Если R — *строгий частичный порядок* на X , то $R \cup id_X$ — *частичный порядок* на X;
(b) Если R — *частичный порядок* на X, то $R \setminus id_X$ — *строгий частичный порядок* на X.

Определение 19

Множество $\operatorname{dom}(R) \coloneqq \{u \in X \mid \exists v : uRv\}$, называют ***областью определения*** R.

Определение 20

Множество $\operatorname{range}(R) \coloneqq \{v \in Y \mid \exists u : uRv\}$, называют и ***областью значений*** R.

Определение 21

Для каждого $U \subseteq X$ множество

$$R[U] \coloneqq \operatorname{range}(R \cap U \times Y) = \{v \in Y \mid \exists u(u \in U \wedge uRv)\}$$

называется ***образом*** U относительно R.

Пример 32. Рассмотрим *строгий частичный порядок* "$<$" на $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Тогда $<[\{4,5,8\}] = \{5,6,7,8,9\}$.

Определение 22

Обратное отношение к R определяется как $R^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$

Пример 33. Рассмотрим *частичный порядок* "$\geqslant$" на $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Тогда $\geqslant^{-1}$ равно $\leqslant$.

Определение 23

Для каждого $V \subseteq Y$ *образ* V под действием R^{-1} называется ***прообразом*** V относительно R.

Пример 34. $\mathrm{range}(R) = \mathrm{dom}(R^{-1}) = R[X]$.

Пример 35. $\mathrm{range}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R) = R^{-1}[Y]$.

Определение 24

Бинарные отношения можно естественным образом комбинировать:
для любых $R \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$ множество

$$R \circ Q := \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y(xRy \wedge yQz)\}$$

называется ***композицией*** R и Q.

Определение 25

Говорят, что $R \subseteq X \times Y$ ***функционально***, если

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2((xRy_1 \wedge xRy_2) \to y_1 = y_2).$$

Далее, R называют ***функцией*** из X в Y , и пишут $R : X \to Y$, если $\mathrm{dom}(R) = X$ и R *функционально*.

Определение 26

Пусть $f : X \to Y$. Значит, для любого $x \in X$ имеется единственное $y \in Y$ такое, что $(x,y) \in f$, которое называется ***значением*** f в x и обозначается через $f(x)$.

Пример 36. $\mathrm{range}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Определение 27

Для каждого $U \subseteq X$ ***ограничение*** (или ***сужение***) f на U определяется как

$$f|_U \coloneqq f \cap U \times Y.$$

$f|_U$ будет функцией из U в Y. Вообще, если $f : X \to Y$ и $g : U \to Y$ таковы, что $U \subseteq X$ и $f|_U = g$, то g называют ***ограничением*** f, а f ***расширением*** g.

Определение 28

Обозначим $Y^X \coloneqq \{f \mid f : X \to Y\}$. Под *двухместными*, *трехместными* и так далее функциями из X в Y понимают элементы Y^{X^2}, Y^{X^3} и так далее.

Определение 29

Функцию f из X в Y называют:
 сюръективной, если $\operatorname{range}(f) = Y$;
 инъективной, если f^{-1} функционально.
 биективной, если f *сюръективна* и *инъективна*.
Сюръективные функции также называют ***сюръекциями***, *инъективные* ***инъекциями***, а *биективные* ***биекциями***.

Определение 30

Введём особые символы для часто использующихся множеств.
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ - множество *натуральных* чисел.
 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ - множество натуральных чисел и ноль.
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ - множество *целых* чисел.
 $\mathbb{Q}$ - множество *рациональных* чисел.
 $\mathbb{R}$ - множество *вещественных* чисел.
 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - множество *иррациональных* чисел.
 $\mathbb{A}$ - множество *алгебраических* чисел (вещественные числа, которые могут быть корнями многочленов с целыми коэффициентами).

Пример 37. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$.

Пример 38. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ является *инъективной*.

Пример 39. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$ является *сюръективной*.

Пример 40. $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, f(x) = \dfrac{1}{x}$ является *биективной*.

Определение 31

$|A| = |B|$ — множества A и B ***равномощны*** — между ними есть *биекция*.

Задача 10

Покажите, что для любых X, Y, Z верно:

- $|X \times Y| = |Y \times X|$
- $|(X \times Y) \times Z| = |X \times (Y \times Z)|$
- если $|X| = |Y|$, то $|X \times Z| = |Y \times Z|$
- $|Z^{X \times Y}| = |(Z^Y)^X|$

Пример 41. Если $|A| = |\mathbb{N}|$, то A называется ***счётным*** множеством (его элементы можно пересчитать).

Определение 32

Для конечных множеств A определим $|A|$ — ***мощность*** множества — количество элементов в нем.

Пример 42. $|\{a, \{b, c\}, \{\{d\}, e\}, \varnothing\}| = |\{0, 1, 2, 3\}| = 4$.

Определение 33

Говорят, что X по мощности меньше или равно Y, и пишут $X \preccurlyeq Y$ или $|X| \leqslant |Y|$, если существует инъекция из X в Y.

Теорема 1 (Кантора–Шрёдера–Бернштейна)

Если $X \preccurlyeq Y$ и $Y \preccurlyeq X$, то $|X| = |Y|$.

Определение 34

$A^* = \{\varnothing\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \ldots$ — множество всех конечных последовательностей.

Пример 43. $\{a, b\}^* = \{\varnothing, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$.

Определение 35

$\mathcal{P}(A) = 2^A$ - множество всех подмножеств множества A.

Пример 44. $2^{\{1,2,3\}} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Задача 11

- Докажите, что |Чётных положительных| $= |\mathbb{N}|$.
- Докажите, что |Нечётных положительных| $= |\mathbb{N}|$.
- Докажите, что если $|A| = |B| = |\mathbb{N}|$, то $A \cup B = |\mathbb{N}|$.
- Докажите, что $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$.
- Докажите, что $|(0,1)| = |2^{\mathbb{N}}|$.
- Докажите, что $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$.
- Докажите, что $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$.

- $|\mathbb{Z}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{Q}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{N}^2| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{N}^*| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{A}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{R}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{R}^*| \stackrel{?}{=} |\mathbb{R}|$.

Теорема 2 (Кантора)

Для любого A верно $|2^A| \neq |A|$.

Теорема 3 (Континуум-гипотеза)

Для любого A если $\mathbb{N} \preccurlyeq A \preccurlyeq \mathbb{R}$, то либо $|A| = |\mathbb{N}|$, либо $|A| = |\mathbb{R}|$.