Треугольники, высоты, окружности

Рассмотрим треугольник ABC. AH_a, BH_b, CH_c — высоты этого треугольника. H — ортоцентр (точка пересечения высот). O — центр описанной окружности. M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, AC, AB соответственно.

Дальше в задачах мы будем ссылаться на эти обозначения

1. Докажите, что $\angle ABH = \angle CBO$.

2. Докажите, что $\angle ABH = \angle H_cH_aH$.

3. Докажите, что H_aA — биссектриса $\angle H_cH_aH_b$.

4. Докажите, что H — центр вписанной окружности треугольника $H_aH_bH_c$.

5. Докажите, что O — ортоцентр треугольника $M_aM_bM_c$.

6. Точку O отразили относительно сторон треугольника ABC и получили точки A', B' и C'. Докажите, что треугольник $A'B'C'$ равен исходному, причём точка O для него является ортоцентром.

7. Докажите, что $AH = 2OM_a$

8. Докажите, что отражение H относительно стороны BC лежит на описанной окружности треугольника ABC.

9. Докажите, что отражение H относительно точки M_a лежит на описанной окружности треугольника ABC.

10. Докажите, что точка из предыдущей задачи диаметрально противоположна точке A

11. Докажите, что четырёхугольник $M_aM_bM_cH_a$ — равнобедренная трапеция.

12. Докажите, что четырёхугольник $H_bM_bM_cH_c$ — вписан.

13. Докажите что 6 точек $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c$ лежат на одной окружности.

14. Описанная окружность треугольника BHC пересекает отрезки AB и AC в точках Y и X соответственно. Докажите, что $XY = 2H_bH_c$

15. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников H_bHH_c и BHC соответственно. Докажите, что $O_1O_2 \parallel AM_a$.

16. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω проходит через вершины B и C и вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке C, пересекает луч AD в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.