

## Рекурренты

- 1 Найдите формулу  $n$ -го члена для последовательностей, заданных условиями ( $n \geq 0$ ):
- (a)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ;
  - (b)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ;
  - (c)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ ;
  - (d)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ .
- 2 Сколько существует способов разрезать доску  $2 \times 10$  на доминошки?
- 3 Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения  $x^2 - 6x + 1 = 0$ . Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $x_1^n + x_2^n$  является целым и не делится на 5.
- 4 Последовательность задана рекуррентно:  $a_1 = \frac{1}{2}, a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 a_n$ . Найдите формулу общего члена.
- 5 Последовательность  $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$  задана рекуррентно:  $a_0 = a, a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ . При каких значениях  $a$  последовательность является монотонно возрастающей?
- 6 Последовательность  $a_0, a_1, a_2, \dots$  такова, что для всех неотрицательных  $m \geq n$  выполняется условие  $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$ . Найдите  $a_{2022}$ , если  $a_1 = 1$ .
- 7 На какую наибольшую степень двойки может делиться число вида  $[3 + \sqrt{10}]^{2n-1}$ ?
- 8 Лягушка прыгает по вершинам треугольника  $ABC$ , перемещаясь каждый раз на одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из  $A$  в  $A$  ровно за  $n$  прыжков?
- 9 Найдите количество функций  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , удовлетворяющих неравенству  $|f(k+1) - f(k)| \geq 3$  при всех  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .
- 10 Сколько  $n$ -разрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля, удовлетворяют условиям:
- (a) не содержат в своей записи двух стоящих рядом четных цифр;
  - (b) не содержат в своей записи цифры 5 после цифры 2.
- 11 Сколько существует несамопересекающихся ломаных длины  $n$ , начинающихся в начале координат  $(0, 0)$ , каждое звено которых совпадает с одним из векторов  $r = (1, 0)$ ,  $u = (0, 1)$ ,  $d = (0, -1)$ ?
- 12 Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Составьте рекуррентное соотношение для количества неправильных шеренг из  $n$  солдат разного роста.

- 13 На клетчатой доске размером  $2 \times n$  клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной. Пусть  $A_n$  — количество правильных раскрасок с четным числом закрашенных клеток,  $B_n$  — количество правильных раскрасок с нечетным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения  $A_n - B_n$ .