Инверсия

Определение *Инверсией* относительно окружности $S(O;R)$ называют преобразование, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A', лежащую на луче OA такую, что $OA \cdot OA' = R^2$.

Отметим, что если при инверсии точка X переходит в точку Y, то Y переходит в X.

Инверсию относительно S будем также называть инверсией с центром O и степенью R^2, а окружность S — *окружностью инверсии.*

$\boxed{1}$ Докажите, что при инверсии относительно окружности ω с центром O

a) точка M, лежащая внутри окружности ω, переходит в точку M', лежащую снаружи;

b) прямая, проходящая через O, переходит в себя.

$\boxed{2}$ Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A', а точка B — в B'. Доказать:

a) треугольники OAB и $OB'A'$ подобны;

b) точки A, B, A' и B' лежат на одной окружности.

$\boxed{3}$ Докажите, что при инверсии с центром O:

a) прямая, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O;

b) окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не про- ходящую через O.

$\boxed{4}$ Точки A и B лежат на окружности ω. Что является образом прямой AB при инверсии относительно ω?

$\boxed{5}$ Докажите, что касающиеся окружности (окружность и прямая) переходят при инверсии в касающиеся окружности или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

$\boxed{6}$ Докажите, что инверсия с центром в вершине A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) и степенью AB^2 переводит основание BC треугольника в дугу BC описанной окружности.

$\boxed{7}$ Точки X' и Y' — образы точек X и Y при инверсии относительно окружности с центром O радиуса R, причём точки X и Y отличны от O. Докажите, что $X'Y' = XY \cdot \dfrac{R^2}{OX \cdot OY}$.

$\boxed{8}$ Пусть окружность ω вписана в угол BAC, B и C — точки касания ω со лучами AB и AC. Докажите, что точка A при инверсии относительно ω переходит в середину отрезка BC.

9 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Окружности, описанные около треугольников AOB и COD, вторично пересекаются в точке Y, прямые AB и CD пересекаются в точке X. Докажите, что точки X, O и Y лежат на одной прямой.

10 В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей, и для каждой пары через точки их пересечения проводится прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

11 В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей, точки касания отмечаются. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной окружности.

12 Что является образом описанной окружности треугольника при инверсии относительно вписанной окружности?

13 Две окружности пересекаются в точках A и B. Их общая касательная (та, которая ближе к точке B) касается окружностей в точках E и F. Прямая AB пересекает прямую EF в точке M. На продолжении AM за точку M выбрана точка K так, что $KM = MA$. Прямая KE вторично пересекает окружность, содержащую точку E, в точке C. Прямая KF вторично пересекает окружность, содержащую точку F, в точке D. Докажите, что точки C, D и A лежат на одной прямой.

14 Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC, а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Описанная окружность Ω треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром вписанной окружности треугольника PQT.

15 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O, причём O не лежит на диагоналях четырёхугольника. Описанная окружность Ω_1 треугольника AOC проходит через середину диагонали BD. Докажите, что описанная окружность Ω_2 треугольника BOD проходит через середину диагонали AC.

16 В угол α вписаны окружности ω и Ω, причём окружность Ω проходит через центр окружности ω и касается сторон угла α в точках P и Q. Докажите, что PQ касается ω.

17 В треугольнике $A_1A_2A_3$ провели окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, вписанные в углы $\angle A_1$, $\angle A_2$ и $\angle A_3$ соответственно и проходящие через центр вписанной окружности I. Эти окружности вторично пересекаются в точках B_1, B_2 и B_3 (B_i не лежит на ω_i). Докажите, что центры описанных окружностей треугольников A_iB_iI лежат на одной прямой.

18 В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y. Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.

19 Пусть O — одна из точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Окружность ω с центром O пересекает ω_1 в точках A и B,а ω_2 — в точках C и D. Пусть X— точка пересечения прямых AC и BD. Докажите, что все такие точки X лежат на одной прямой.

20 Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Касательные к описанной окружности треугольника AIC в точках A, C пересекаются в точке X. Касательные к описанной окружности треугольника BID в точках B, D пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, I, Y лежат на одной прямой.

21 В четырёхугольнике $ABCD$ вписанная окружность ω касается сторон BC и DA в точках E и F соответственно. Оказалось, что прямые AB, FE и CD пересекаются в одной точке S. Описанные окружности Ω и Ω_1 треугольников AED и BFC, вторично пересекают окружность ω в точках E_1 и F_1. Докажите, что прямые EF и E_1F_1 параллельны.