Неравенство Йенсена

Определение: Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой* на $[a, b]$, если для любых $x, y \in [a, b]$ и любых $\alpha, \beta > 0$ таких, что $\alpha + \beta = 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Функция f называется *вогнутой* на $[a, b]$, если при тех же условиях выполняется аналогичное неравенство с противоположным знаком $\geqslant$.

Геометрически, функция f выпукла (вогнута), если любая точка любой хорды кривой $y = f(x)$ лежит над (под) этой кривой или на ней.

Факт: Если для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) > 0$, то функция f выпукла на отрезке $[a, b]$. Если для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) < 0$, то функция f вогнута на отрезке $[a, b]$.

$\boxed{1}$ Функция f выпукла на $[a, b]$. Пусть числа $x_1, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a, b]$, а числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ неотрицательны и в сумме дают 1. Докажите, что

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Для вогнутой функции выполнено аналогичное неравенство со знаком $\geqslant$.

$\boxed{2}$ Пусть $x_1, \ldots, x_n \in [0, \pi]$. Докажите, что

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_n \leq n \cdot \sin \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

$\boxed{3}$ Пусть $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, $\alpha > 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

$\boxed{4}$ Пусть $x_1, \ldots, x_n > 0$. Докажите, что

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

$\boxed{5}$ Числа $x_1, \ldots, x_n$ неотрицательны и в сумме дают 1. Докажите, что

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} > \sqrt{\frac{n}{n - 1}}.$$

$\boxed{6}$ Докажите, что для положительных x_i и y_i верно

$$\sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

$\boxed{7}$ **Неравенство Гёльдера.** Пусть $p, q > 0$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что для положительных a_i и b_i выполнено:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) \leqslant (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{1/p} (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{1/q}.$$