

## Разнойбой

- 1 Серёжа написал на доске три натуральных числа, а затем вычислил их попарные НОДы и НОКи. Могла ли сумма шести полученных чисел оказаться равной 2023?
- 2 Докажите, что  $2016 \cdot 2018 \cdot 2020 \cdot 2022 + 16$  — точный квадрат
- 3 Шестиугольник  $ABCDEF$  правильный,  $K$  и  $M$  — середины отрезков  $BD$  и  $EF$ . Докажите, что треугольник  $AMK$  равносторонний.
- 4 В очереди стояло 2022 человека. Касса сломалась, и все перешли в соседнюю только что открытую кассу. Сколькими способами они могут выстроиться в новую очередь так, чтобы человек, стоявший на месте с номером  $k$  изменил свой номер не более, чем на  $k$ ?
- 5 Найдите все натуральные  $n$  такие, что  $3^n + 5^n$  делится на  $3^{n-1} + 5^{n-1}$ .
- 6 Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.
- 7 Шах разбил свой квадратный одноэтажный дворец на 64 одинаковые квадратные комнаты, разделил комнаты на семь квартир (проделав двери в некоторых перегородках между комнатами) и в каждой квартире поселил по жене. Жёны могут ходить по всем комнатам своей квартиры, не заходя к другим. Какое наименьшее число дверей пришлось проделать во внутренних стенах?
- 8 Докажите, что  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 9 Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения.
- 10 В компании у каждого двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.
- 11 Докажите, что  $2021^2 + 2021^2 \cdot 2022^2 + 2022^2$  — точный квадрат.
- 12 Вещественные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $a + b + c = 0$ . Докажите, что  $ab + bc + ac \leq 0$
- 13 Докажите, что  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$