# Сравнения по модулю

**Определение 1** Число $a$ делится на натуральное $b$ с остатком $r$, если $a = bk + r$, причем $0 \le r < b$.

**Определение 2** Целые числа, разность которых делится на $m$, называются сравнимыми по модулю $m$. Запись: $a \equiv b \pmod{m}$.

**Свойства сравнений**

- $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow$ числа $a$ и $b$ дают одинаковые остатки по модулю $m$.
- $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m}$.
- $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
- $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$.
- $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

$\boxed{1}$ Докажите, что число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$

(a) делится на 999;

(b) на 1004.

$\boxed{2}$ Известно, что $a - 2b$ делится на $m$ и $c - 3d$ делится на $m$. Докажите, что $ac - 6bd$ делится на $m$.

**Идея:** Давайте посмотрим на остатки $1, a, a^2, a^3, \ldots$ при делении на $p$. Они в какой-то момент зациклятся (докажите это)

$\boxed{3}$ Найдите остаток от деления:

(a) $4^{2020}$ на 3;

(b) $7^{2021}$ на 8;

(c) $13^{555}$ на 9.

$\boxed{4}$ Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31

$\boxed{5}$ Найдите остатки от деления числа $2^{2021}$ на $3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$.

$\boxed{6}$ Какой остаток дает $x + y$ при делении на 17, если

(a) $x - 16y \equiv 2 \pmod{17}$;

(b) $3x \equiv 5 + 14y \pmod{17}$;

(c) $-10x \equiv 100 + 27y \pmod{17}$;

(d) $28x + 10 \equiv -11y \pmod{17}$;

(e) $34x - 8 \equiv 14(y + x) \pmod{17}$;

(f) $1000x \equiv -1085y - 90 \pmod{17}$?

$\boxed{7}$ Докажите, что если при некоторых натуральных числах $a$ и $b$ сумма $a^2 + b^2 \vdots 7$, то она делится и на 49.

$\boxed{8}$ Докажите, что число $9^{2021} + 7^{2020}$ делится на 10;

$\boxed{9}$ Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6.

$\boxed{10}$ Докажите, что число $5^{2021} + 28$ — составное.

$\boxed{11}$ Пусть $s(x)$ — сумма цифр в десятичной записи числа $x$. Докажите, что

(a) $x \equiv s(x) \pmod 3$;

(b) $x \equiv s(x) \pmod 9$.

$\boxed{12}$ Про натуральные числа $a, b, c$ известно, что $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что $abc$ делится на 60.

$\boxed{13}$ Докажите, что если $2^k - 1$ делится на 11, то оно делится и на 31.

$\boxed{14}$ Целые числа $x, y$ и $z$ таковы, что $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$. Докажите, что число $x + y + z$ делится на 27.

$\boxed{15}$ Докажите, что для любого натурального $n$, $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

$\boxed{16}$ Докажите, что если $a, b, c$ – нечётные числа, то хотя бы одно из чисел $ab - 1, bc - 1, ca - 1$ делится на 4.

$\boxed{17}$ Решите сравнения

(a) $5x \equiv 2 \pmod 3$;

(b) $3x \equiv 2 \pmod{11}$;

(c) $6x \equiv 1 \pmod{13}$.