Рождественская теорема Ферма

Рождественская теорема Ферма. Натуральное число представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда в его разложение на простые множители любое простое число вида $4k+3$ входит в четной степени.

$\boxed{1}$ Два числа представляются в виде суммы двух квадратов. Докажите, что их произведение представляется в виде суммы двух квадратов.

$\boxed{2}$ Докажите, что для любого простого $p = 4k+1$ существует x такое, что x^2+1 делится на p

$\boxed{3}$ Докажите, что $p = 4k+1$ представляется в виде суммы двух квадратов.

Доказательство Акселя Туэ:

(a) Для любого целого s существуют две различные пары (x, y) и (x', y') чисел из множества $\{0, 1, \dots \lfloor\sqrt{p}\rfloor\}$, такие что $x - sy \equiv x' - sy' \pmod p$.

(b) Для любого s существует ненулевая пара (x, y) чисел из множества $\{0, 1, \dots \lfloor\sqrt{p}\rfloor\}$, такая что $x \equiv \pm sy \pmod p$.

(c) Примените пункт (b) для s такого, что что $s^2 \equiv -1 \pmod p$, и закончите доказательство.

$\boxed{4}$ Докажите, что если $x^2 + y^2$ делится на $p = 4k+3$,то x и y делятся на p.

(a) Рассмотрим пары обратных остатков для чисел $2, 3, \dots, p-2$. Назовем пару (x, y) далекой, если $x < \frac{p}{2} < y$. Докажите, что количество далеких пар четно.

(b) Используя пункт (a) докажите, что сравнение $x^2 \equiv -1 \pmod p$ не имеет решений. Завершите доказательство.

$\boxed{5}$ Докажите **рождественскую теорему Ферма**

$\boxed{6}$ Докажите, что $p = 4k+1$ представляется в виде суммы двух квадратов единственным способом.

$\boxed{7}$ Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = z^5 + z$ имеет бесконечно много целых решений, в которых x, y и z попарно взаимно просты.

$\boxed{8}$ Пусть n — нечетное целое число, большее 1. Докажите, что уравнение $x^n + 2^{n-1} = y^2$ не разрешимо в нечетных натуральных числах.

$\boxed{9}$ Докажите, что уравнение $x^3 - x^2 + 8 = y^2$ не имеет решений в целых числах.