

Вписанные углы

- [1] Даны два угла $\angle ABC = 90^\circ$ и $\angle ADC = 90^\circ$. Докажите, что A, B, C, D лежат на одной окружности.
- [2] Дан треугольник ABC . I - центр вписанной окружности. Докажите (и запомните), что $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$
- [3] Дан треугольник ABC . H - ортоцентр (точка пересечения высот). Докажите (и запомните), что $\angle AHB = 180^\circ - \angle C$
- [4] Дан треугольник ABC . BH_1, CH_2 - высоты треугольника. Докажите, что C, B, H_1, H_2 лежат на одной окружности.
- [5] В условии предыдущей задачи пусть $H = BH_1 \cap CH_2$. Докажите, что A, H, H_1, H_2 лежат на одной окружности.
- [6] Рассмотрим вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть дуга $\overset{\frown}{AB} = \alpha$, дуга $\overset{\frown}{CD} = \beta$. O - точка пересечения диагоналей. Докажите, что $\angle AOB = \frac{\alpha + \beta}{2}$.
- [7] Дана точка O и окружность ω , так что $O \notin \omega$. Через O провели 2 прямые, которые пересекают ω в точках A, B и C, D . Докажите, что $OA \cdot OB = OC \cdot OD$
- [8] На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону треугольника построен квадрат с центром в точке O . Докажите, что CO — биссектриса угла ACB .
- [9] В остроугольном треугольнике ABC на высоте, проведённой из вершины C , выбрана точка X . Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров из точки X на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что точки A, B, B_1, A_1 лежат на одной окружности.
- [10] Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что основания перпендикуляров из точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.
- [11] Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырёхугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.
- [12] Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из A . На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω , описанную около треугольника ABC , в точке Q . Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.