

## Индукция

Не забывайте про **3** составляющие индукции:

- 1) *База* - показываем, что утверждение верно для простых частных случаев (Например при  $n = 1$ );
- 2) *Предположение* - предполагаем, что утверждение доказано для первых  $k$  случаев;
- 3) *Переход* - используя предположение, доказываем утверждение для случая  $n = k + 1$ .

Потеряете хотя бы одну из них — индукция перестанет работать!

1] Докажите, что  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

2] Докажите по индукции, что

a)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

\*с)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

3] Докажите, что любую сумму начиная с 8 копеек можно уплатить монетами 3 и 5 копеек

4] Докажите, что  $\underbrace{111\dots 111}_{3^n} : 3^n$  для любого натурального  $n$

5] Для натуральных  $n$  докажите, что  $2^n > n$

6] Для натуральных  $n > 2$  докажите, что  $2^n > n^2$

7] Для натуральных  $n > 2$  докажите, что  $n! > 2^n$

8] Несколько (а) прямых (б) оркужностей (с) прямых и оркужностей делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части были разного цвета

9] На плоскости проведены  $n$  прямых *общего положения* (никакие 2 из них не параллельны, и никакие 3 не пересекаются в одной точке). На сколько частей делят плоскость

10] *Неравенство Бернулли*:  $(1 + a)^n > 1 + an$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > -1$

11] Известно, что  $x + \frac{1}{x}$  — целое число. Докажите, что  $x^n + \frac{1}{x^n}$  — также целое при любом натуральном  $n$ .

12] Докажите, что  $n^n > (n+1)^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$