Разнобой УТЮМа 2

$\boxed{1}$ Даны различные ненулевые цифры a, b, c, d. Известно, что ни одно из чисел $\overline{abcd}$, $\overline{bcda}, \overline{cdab}, \overline{dabc}$ не имеет простых делителей, меньших 10. Чему может быть равна сумма этих четырёх четырёхзначных чисел?

$\boxed{2}$ На доске написано несколько различных неотрицательных чисел. Оказалось, что произведение любых двух выписанных чисел также есть на этой доске. Какое наибольшее количество чисел может быть написано?

$\boxed{3}$ Два равных отрезка AB и CD пересекаются в точке P. Точка M — середина отрезка BD. Оказалось, что точка M равноудалена от точек A и C. Докажите, что $AP = CP$.

$\boxed{4}$ Дан клетчатый квадрат 101×101. Внутри него выбирается квадрат 100×100. Внутри этого квадрата выбирается квадрат 99×99, и так далее, пока не будет выбран квадрат 1×1. Оказалось, что выбранный квадрат 1×1 совпадает с центральной клеткой исходного квадрата 101×101. Сколько существует таких последовательностей квадратов? Ответ не должен содержать знака многоточия.

$\boxed{5}$ В стране из 1000 городов некоторые города соединены дорогами, по которым можно двигаться в обе стороны. Известно, что в этой стране нет циклического маршрута. При каком наибольшем k всегда можно выбрать k городов так, чтобы каждый выбранный город был соединен не более чем с двумя из остальных выбранных?

$\boxed{6}$ Серёжа придумал два положительных не целых числа a и b. Затем он подсчитал четыре выражения: $a + b, a - b, a \cdot b, \dfrac{a}{b}$. Докажите, что хотя бы одно из получившихся чисел не целое.

$\boxed{7}$ Даны 36 различных чисел (не обязательно целых). Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 6×6 так, чтобы для любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне ячейках, их разность была не равна 1.

$\boxed{8}$ На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение че- тырёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, на его сумму цифр?

$\boxed{9}$ На плоскости отмечено 10 точек. Докажите, что существует не более 90 равно- бедренных прямоугольных треугольников с вершинами в этих точках.

$\boxed{10}$ В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CF и BE. На отрезке BE нашлась такая точка P, что $BP = AC$. На продолжении отрезка CF за точку F нашлась такая точка Q, что $CQ = AB$. Докажите, что $AP \perp AQ$.