

Математический бой за славу и честь

Вам предложено решить 10 задач. Это всего лишь в два раза больше, чем в одном туре на регионе!

Всего доброго, хорошего настроения и здоровья!

1. Докажите для положительных чисел a, b, c неравенство:

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1$$

2. При каких m квадрат $2m \times 2m$ можно разбить на равное количество квадратов 2×2 и 1×1 ?

3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что для некоторых различных чисел α, β, γ выполняются равенства $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \gamma$ и $f(\gamma) = \alpha$. Докажите, что уравнение $f(f(f(x))) = x$ имеет хотя бы 1 решение.

4. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH . F — точка пересечения прямых EH и AC . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB .

5. Существует ли такое натуральное число N , что и у числа N , и у числа $N^2 - 1$ сумма цифр равна 2018?

6. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что

$$a^2 + b^2 = a + b + ab.$$

7. Вася вычислил $(\sqrt{2} + 1)^{100}$ с точностью до тридцати знаков после запятой. Докажите, что все эти тридцать знаков — девятки.

8. В перерыве футбольного матча каждый болельщик Спартака съел в буфете FixPrice 2 бутерброда, 4 порции мороженого и выпил 4 стакана пепси-колы, а болельщик Динамо — 5 бутербродов, 4 порции мороженого и 6 стаканов пепси-колы. Рассчитайте выручку буфета, если известно, что всего было выпито 20000 стаканов пепси-колы (порция любого продукта стоит 50 рублей).

9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено равенство $AB = BD + CD$. Пусть E — середина диагонали AC . Докажите, что $\angle BED = 90^\circ$.

10. Из клетчатого квадрата 2018×2018 вырезали угловой квадрат 2×2 . Можно ли оставшуюся фигуру разрезать на прямоугольники 1×5 ?

Математический бой за славу и честь

Вам предложено решить 10 задач. Это всего лишь в два раза больше, чем в одном туре на регионе!

Всего доброго, хорошего настроения и здоровья!

1. Докажите для положительных чисел a, b, c неравенство:

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1$$

2. При каких m квадрат $2m \times 2m$ можно разбить на равное количество квадратов 2×2 и 1×1 ?

3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что для некоторых различных чисел α, β, γ выполняются равенства $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \gamma$ и $f(\gamma) = \alpha$. Докажите, что уравнение $f(f(f(x))) = x$ имеет хотя бы 1 решение.

4. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH . F — точка пересечения прямых EH и AC . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB .

5. Существует ли такое натуральное число N , что и у числа N , и у числа $N^2 - 1$ сумма цифр равна 2018?

6. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что

$$a^2 + b^2 = a + b + ab.$$

7. Вася вычислил $(\sqrt{2} + 1)^{100}$ с точностью до тридцати знаков после запятой. Докажите, что все эти тридцать знаков — девятки.

8. В перерыве футбольного матча каждый болельщик Спартака съел в буфете FixPrice 2 бутерброда, 4 порции мороженого и выпил 4 стакана пепси-колы, а болельщик Динамо — 5 бутербродов, 4 порции мороженого и 6 стаканов пепси-колы. Рассчитайте выручку буфета, если известно, что всего было выпито 20000 стаканов пепси-колы (порция любого продукта стоит 50 рублей).

9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено равенство $AB = BD + CD$. Пусть E — середина диагонали AC . Докажите, что $\angle BED = 90^\circ$.

10. Из клетчатого квадрата 2018×2018 вырезали угловой квадрат 2×2 . Можно ли оставшуюся фигуру разрезать на прямоугольники 1×5 ?