

Принцип Дирихле

Принцип Дирихле — если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

1. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1×1 , не содержащий внутри дырок? (Дырки считаются точечными).
2. В лагере "Стратегия" учатся 38 человек. Докажите, что среди них найдутся четверо, родившихся в один месяц.
3. Даны n точек. Некоторые из них соединены отрезками. Докажите, что найдутся две точки, из которых выходит поровну отрезков.

Основные задачи

4. Обязательно ли среди двадцати пяти монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей найдётся семь монет одинакового достоинства?
5. В мешке лежат 16 шариков черного цвета и 8 белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?
6. В квадрат со стороной 2 метра бросили 76 точек. Докажите, что какие-то четыре из них можно накрыть квадратом со стороной 40 см.
7. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
8. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа $-1, 0, 1$. Докажите, что какие-то две из восьми сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.
9. В мешке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 синих, 20 жёлтых, остальные — чёрные и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 10 шаров одного цвета?

Посложнее

10. В каждой вершине куба написано число 1 или число 0. На каждой грани куба написана сумма четырёх чисел, написанных в вершинах этой грани. Может ли оказаться, что все числа, написанные на гранях, различны?

11. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей (из этой компании).

12. Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.