

Рекурренты

- [1] Найдите формулу n -го члена для последовательностей, заданных условиями ($n \geq 0$):
- (a) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;
 - (b) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;
 - (c) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$;
 - (d) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.
- [2] Сколько существует способов разрезать доску 2×10 на доминошки?
- [3] Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ является целым и не делится на 5.
- [4] Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}, a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 a_n$. Найдите формулу общего члена.
- [5] Последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ задана рекуррентно: $a_0 = a, a_{n+1} = 2^n - 3a_n$. При каких значениях a последовательность является монотонно возрастающей?
- [6] Последовательность a_0, a_1, a_2, \dots такова, что для всех неотрицательных $m \geq n$ выполняется условие $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2022} , если $a_1 = 1$.
- [7] На какую наибольшую степень двойки может делиться число вида $[3 + \sqrt{10}]^{2n-1}$?
- [8] Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз на одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A ровно за n прыжков?
- [9] Найдите количество функций $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, удовлетворяющих неравенству $|f(k+1) - f(k)| \geq 3$ при всех $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
- [10] Сколько n -разрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля, удовлетворяют условиям:
- (a) не содержат в своей записи двух стоящих рядом четных цифр;
 - (b) не содержат в своей записи цифры 5 после цифры 2.
- [11] Сколько существует несамопересекающихся ломаных длины n , начинающихся в начале координат $(0, 0)$, каждое звено которых совпадает с одним из векторов $r = (1, 0)$, $u = (0, 1)$, $d = (0, -1)$?
- [12] Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Составьте рекуррентное соотношение для количества неправильных шеренг из n солдат разного роста.

- 13 На клетчатой доске размером $2 \times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной. Пусть A_n — количество правильных раскрасок с четным числом закрашенных клеток, B_n — количество правильных раскрасок с нечетным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения $A_n - B_n$.