Неравенство о средних

Неравенство о средних — это неравенство между *средним квадратическим, средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим*:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причём равенство достигается тогда и только тогда,когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Частный случай,

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

$\boxed{1}$ $1+x \geq 2\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$ через неравенство о средних.

$\boxed{2}$ $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geqslant 2$ при $x, y > 0$ через неравенство о средних.

$\boxed{3}$ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{4}{x+y}$ при $x, y > 0$ через неравенство о средних.

$\boxed{4}$ $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geq 3$ при $a, b, c > 0$.

$\boxed{5}$ $2(x^2+y^2) \geqslant (x+y)^2$ при любых x и y через неравенство о средних.

$\boxed{6}$ $\dfrac{a+3b}{4} \geqslant \sqrt[4]{ab^3}$, при $a, b \geqslant 0$

$\boxed{7}$ $\dfrac{a^6+b^9}{4} \geqslant 3a^2b^3-16$, при $b \geqslant 0$.

$\boxed{8}$ $2x+\dfrac{3}{8} \geqslant \sqrt[4]{x}$, при $x \geqslant 0$.

$\boxed{9}$ $(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27$, если $xyz = 1$ и $x, y, z > 0$.

$\boxed{10}$ $\dfrac{a}{b+c+d}+\dfrac{b}{a+c+d}+\dfrac{c}{a+b+d}+\dfrac{d}{a+b+c} \geqslant \dfrac{4}{3}$, при положительных a, b, c, d.

$\boxed{11}$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ac$, если $a+b+c = 3$.