Десятичные дроби

Здесь и далее, число b – знаменатель дроби, а a –числитель.

$\boxed{1}$ Докажите, что дробь является конечной тогда и только тогда, когда b имеет вид $2^n 5^m$.

В дальнейшем считаем, что $b \neq 2^n 5^m$.

Вспомним **алгоритм деления столбиком**.

При правильном взгляде на вещи он состоит в следующем. Полагаем $r_0 = a$ и считаем рекуррентно $10 \cdot r_{i-1} = bq_i + r_i$ (деление с остатком). При этом q_i – i-тая цифра после запятой в равенстве $\frac{a}{b} = 0, q_1 q_2 q_3 \ldots$.

$\boxed{2}$ (a) Докажите, что при делении в столбик получается периодическая дробь с периодом не более $b - 1$;

(b) и даже сумма длин периода и предпериода не более $b - 1$.

Еще одно понимание алгоритма деления столбиком состоит в следующем. Делим с остатком: $a \cdot 10^k = bQ_k + r_k$. Тогда Q_k — число, образованное первыми k цифрами после запятой, r_k — то же самое, что ранее (тем самым r_k оказывается остатком при делении $a \cdot 10^k$ на b).

$\boxed{3}$ (a) Докажите, что если $(b, 10) = 1$, то $(r_i, b) = 1$.

(b) Докажите, что длина периода не превосходит $\varphi(b)$.

$\boxed{4}$ Докажите, что если $(b, 10) = 1$, то зацикливание происходит без предпериода. При этом длина периода не зависит от a и равна наименьшему t, для которого $10^t - 1 \,\vdots\, b$, то есть показателю числа 10 по модулю b.

$\boxed{5}$ Пусть наименьший период некоторой последовательности равен ℓ, а L — некоторый другой период. Докажите, что $L \,\vdots\, \ell$.

$\boxed{6}$ Докажите, что дробь $0, RTTT\ldots$ (R — из k цифр, T — из t цифр) равна $\frac{R}{10^k} + \frac{T}{10^k(10^t - 1)}$.

$\boxed{7}$ Докажите, что если $(b, 10) \neq 1$, то в десятичной записи $\frac{a}{b}$ обязательно есть предпериод.

$\boxed{8}$ Пусть $a < b$, $(a, b) = 1$, $b = 2^x \cdot 5^y \cdot b'$, $\ell = \max\{x, y\}$. Докажите, что период дроби $\frac{a}{b}$ равен периоду дроби $\frac{1}{b'}$, а предпериод в точности равен ℓ, и не может быть меньше.

$\boxed{9}$ Каково наибольшее значение длины предпериода среди всех несократимых дробей со знаменателем не превосходящим 2024?

$\boxed{10}$ Приведите пример дробей с предпериодами, при сложении которых предпериод исчезает, а период меньше, чем оба периода слагаемых.

$\boxed{11}$ Докажите, что период суммы (разности) двух дробей является делителем НОКа периодов, а предпериод не превосходит максимума предпериодов.

$\boxed{12}$ Пусть $p > 5$ — простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $1/p$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два n-значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна $99\dots9$ (n девяток). Например, $1/7 = 0.(142857)$, $142 + 857 = 999$.