Определение 1

Топологическое пространство — это пара (X, Ω), где $\Omega \subset 2^X$ и выполнено 3 свойства:

1) $\varnothing, X \in \Omega$,
2) $A, B \in X \Rightarrow A \cap B \in X$,
3) $A_i \in X, i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in X$.

Элементы множества Ω называются ***открытыми*** множествами.
Если A — *открыто*, то $X \setminus A$ — ***замкнуто***.

Задача 1

Переформулируйте аксиомы для замкнутых множеств.

Пример 1. Топология называется *тривиальной*, если $\Omega = \varnothing, X$.

Задача 2

Докажите, что *тривиальная* топология — топология.

Пример 2. Топология называется *дискретной*, если $\Omega = 2^X$.

Задача 3

Докажите, что *дискретная* топология — топология.

Определение 2

Метрическое пространство — это пара (X, d), где $d : X \times X \to R_+$ и выполнено 3 свойства:

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$,
3) Неравенство треугольника $\forall x, y, z$

$$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z).$$

d называется ***метрикой*** или ***расстоянием***

Пример 3. $\left(\mathbb{R}^n, \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i))}\right)$ — *Евклидово расстояние*

Задача 4

Докажите, что *Евклидово расстояние* — метрика

Пример 4. $(X, d), d = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$ — *метрика лентяя, дискретная метрика*

Задача 5

Докажите, что *дискретная метрика* — метрика

Определение 3

$\|x\|_p = p^{-\nu_p(x)}$ — *p-адическая норма*

Пример 5. $(\mathbb{Q}, d), d(r, s) = \|r - s\|_p$ — *p-адическая метрика*

Задача 6

Докажите, что *p-адическая метрика* — метрика

Определение 4

(X, d) — метрическое пространство.
Открытый шар — $B_r(x_0) = \{y \in X \mid d(y, x_0) < x\}$.
Замкнутый шар — $\overline{B_r(x_0)} = \{y \in X \mid d(y, x_0) \leqslant x\}$.

Задача 7

Как устроены шары в *метрике лентяя*?

Задача 8

Как устроены шары в *p-адической метрике*?

Определение 5

(X, d) — метрическое пространство.
Топология Ω_d ***индуцированная*** метрикой определяется так:
$A \in \Omega_d$, если A представляется как объединение открытых шаров в X.

Задача 9

Проверьте корректность определения *индуцированной* топологии.

Пример 6. $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой.
Открытые шары = открытые интервалы.
Примеры замкнутых множеств: $[0,1], \{2,3,9\}$;

Задача 10

Докажите, что $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ *замкнутым* не является, а $A \cup \{0\}$ — *замкнуто*

Задача 11

(X,d) — метрическое пространство.
$U \subset X$ — *открыто* $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon : B_\varepsilon(x) \subset U$