

## Праздничный математический бой

1. Алиса очень хочет на день рождения найти все многочлены  $f(x)$  с целыми коэффициентами такие, что  $f(n)$  и  $f(2^n)$  взаимно просты при любом натуральном  $n$ . Помогите ей!
2. Парты в конференц зале в ЦРОДе расположены так, что образуют таблицу  $8 \times 8$ . В момент, когда Тимофей отвернулся, каждый ребенок решил подойти к парте своего друга. Чтобы не быть замеченными, ученики дошли лишь до соседней по стороне парты (в таблице  $8 \times 8$  каждый попал в соседнюю по стороне клетку). Когда преподаватель посмотрел обратно в зал, он заметил, что занято минимально возможное количество парт. Сколько парт оказалось занято?
3. Федя записал себе в тетрадку подряд 100 чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ . Вадим заметил, что первое число последовательности равно 1, а  $x_{n+m} = 2^n x_m + 3^m x_n$ . Выясните, чему равно  $x_{100}$ .
4. На сторонах  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  лежат точки  $D$  и  $E$  соответственно. Прямые  $BD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $S$ ,  $M$  — середина отрезка  $CS$ . Прямая  $BM$  пересекает отрезок  $CD$  в точке  $T$ . Известно, что  $BE = ES = 1$  и  $CD = DS = 2$ . Докажите, что  $AB = AT$ .
5. После пары по целым и дробным частям Алина очень захотела найти все функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что  $f([x]y) = f(x)[f(y)]$ . Здесь  $[x]$  — целая часть числа  $x$ . Помогите ей решить эту задачу!
6. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BM$  и  $CN$ , которые пересекаются в точке  $H$ . На описанной окружности треугольника  $ABC$  выбрана точка  $K$  такая, что  $AK \perp KH$ . Оказалось, что прямая  $AB$  делит отрезок  $KH$  пополам. Докажите, что  $KH = AM$ .
7. Миша разбил квадрат  $40 \times 40$  на L-тетраминошки, так как это вторая буква в имени "Алиса". Докажите, что Настя сможет жестко провести прямую так, чтобы она разрежала не менее шести тетрамишек на доминошки.
8. Натуральные числа  $p$  и  $q$  отличаются на 2. Саша утверждает, что числа  $p^4 + 4$  и  $q^4 + 4$  всегда имеют общий делитель. Прав ли он?

