## Производящие функции

Производящей функцией последовательности  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется формальный степенной ряд.

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

П Дан многочлен f(x) степени не выше n. Докажите, что для любого вещественного  $x_0$  существуют и единственные  $A_1, \ldots, A_n$  такие, что

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_0)^n}.$$

2 Дан многочлен f(x) степени не выше n. Докажите, что для любых различных вещественных чисел  $x_0, x_1, ..., x_n$  существуют и единственные  $A_0, A_1, ..., A_n$  такие, что

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

- $\boxed{3}$  Посчитайте производящую функцию последовательности  $\{1\}_{n=0}^{\infty}.$
- [4] Посчитайте производящую функцию последовательности  $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$  и выведите из неё формулу n-того числа Фибоначчи.

Производной степенного ряда

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

называется

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ng_n x^{n-1} = g_1 + 2g_2 x + 3g_3 x^2 + \dots$$

Тогда заметим, что  $g_n = n! \cdot G^{(n)}(0)$ 

- $\boxed{5}$  Найдите степенной ряд функции  $(1-4x)^{1/2}$ .
- 6 Докажите, что

$$4^{n} = \sum_{i=0}^{n} {2i \choose i} {2(n-i) \choose n-i}$$

- 7 Найдите производящую функцию чисел Каталана.
- 8 Посчитайте количество подмножеств множества из 1000 элементов, количество элементов в которых делится на 5