Телескопические суммы

Слагаемые разных знаков могут компенсировать друг друга или давать более простую разность. То же верно и для сомножителей.

-2 $(1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + 99 \cdot 101) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2)$.

Взаимно уничтожающиеся слагаемые можно получить, заменив каждое слагаемое на разность.

-1 $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1) \cdot n}$.

Разность может отличаться от члена суммы в несколько раз или содержать дополнительное слагаемое. Но и общий множитель, и лишние слагаемые часто удаётся учесть или сосчитать отдельно.

0 $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{97 \cdot 100}$.

Если мы «подозреваем» формулу $F(n)$ для суммы n первых членов, это немедленно дает нам представление n-го члена как разности $F(n) - F(n-1)$. Для подозрений есть основания: сумма линейных выражений (арифметической прогресии) всегда квадратична, квадратичных – кубична, и т.д. Коэффициенты можно подобрать.

1 $(1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + 99 \cdot 101) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2)$.

2 $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \dfrac{1}{100}\right)$.

3 $1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \ldots + 100! \cdot 100$.

4 $\dfrac{2^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{4^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{100^2}{99 \cdot 101}$.

5 $3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 3 \cdot 99 \cdot 100$.

6 $\dfrac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \dfrac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \ldots + \dfrac{50}{99^2 \cdot 101^2}$.

Найдите формулу, зависящую от n

7 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

8 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

9 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$

10 Для каждого натурального $n \geq 2$ вычислите сумму

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}.$$