Теорема Чевы, Менелая, Фалеса

Теорема Фалеса: Пусть даны две прямые a и b. Их пересекают три параллельные прямые — первая в точках A_1 и A_2, вторая в точках B_1 и B_2, третья в точках C_1 и C_2. Тогда высекаемые отрезки пропорциональны, то есть выполнено

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}.$$

$\boxed{1}$ Прямая l пересекает стороны AB, AD и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\dfrac{AB}{AX} + \dfrac{AD}{AY} = \dfrac{AC}{AZ}$.

$\boxed{2}$ В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 и на стороне BC отмечена точка X. На сторонах AB, AC отмечены точки M и N соответственно так, что $MX \parallel CC_1, NX \parallel BB_1$. Докажите, что отрезок MN медианами BB_1 и CC_1 разбивается на три равные части.

$\boxed{3}$ На продолжении стороны AB квадрата $ABCD$ за вершину B отложен отрезок $BP = 2AB$. Точка M — середина стороны CD, а отрезки BM и AC пересекаются в точке Q. В каком отношении прямая PQ делит сторону BC?

Теорема Чевы: На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CA_1}{A_1B} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} = 1$

Определение: Отрезок, соединяющий вершину треугольника с произвольной точкой на противоположной стороне (или её продолжении), называется *чевианой.*

Теорема Менелая: На сторонах AB, BC и продолжении CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CA_1}{A_1B} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} = 1$

$\boxed{4}$ Докажите обратное следствие в теореме (a) Чевы и (b) Менелая.

$\boxed{5}$ Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Точку A_1 отразили симметрично относительно середины отрезка BC и получили точку A_2. Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 тоже пересекаются в одной точке.

$\boxed{6}$ Дан треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка D, а на стороне AC — точка E так, что $BC \parallel DE$. Докажите, что точка пересечения отрезков CD и BE лежит на медиане, проведенной из вершины A.

$\boxed{7}$ Точка K лежит на стороне AB, а точка M — на стороне AC треугольника ABC, причем $AK : KB = 3 : 2, AM : MC = 4 : 5$. Прямая, проходящая через точку K параллельно BC, пересекает отрезок BM в точке P. Найдите отношение $BP : PM$.

$\boxed{8}$ На чевиане AA_1 треугольника ABC выбирается переменная точка X. Лучи BX и CX пересекают стороны AC и AB в точках Y и Z соответственно. Докажите, что все построенные таким образом прямые YZ пересекают прямую BC в одной и той же точке, либо все этой прямой параллельны.

$\boxed{9}$ Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC опущена высота CK, и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE. Прямая, проходящая через точку B параллельно CE, пересекает прямую CK в точке F. Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.

$\boxed{10}$ В треугольнике ABC на сторонах AB, AC и BC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $BF = 2CF, CE = 2AE$ и угол DEF — прямой. Докажите, что DE — биссектриса угла ADF.

$\boxed{11}$ Через вершину A и середину медианы BM треугольника ABC провели прямую. В каком отношении она делит сторону BC?

$\boxed{12}$ Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, точка D — ее середина, E — проекция D на AB. Известно, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL равнобедренный.

$\boxed{13}$ Точки M и K делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношении $2 : 3$ и $4 : 1$, считая от их общей вершины. В каком отношении делится отрезок MK медианой треугольника, проведенной к стороне AC?

$\boxed{14}$ Дан треугольник ABC, в котором BM — медиана. Точка P лежит на стороне AB, точка Q — на стороне BC, причем $AP : PB = 2 : 5, BQ : QC = 6$. Отрезок PQ пересекает медиану BM в точке R. Найдите $BR : RM$.

$\boxed{15}$ В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1. Прямые A_1C_1 и AC пересекаются в точке D. Докажите, что BD — внешняя биссектриса угла AB