

Квадратный трёхчлен

- [1] Решите уравнение: а) $x^2 + 2023x + 2022 = 0$; б) $1999x^2 + 1000x - 2999 = 0$.
- [2] При каких значениях a уравнение $2x^2 + (a - 3)x + 81 = 0$ имеет 1 корень?
- [3] Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Выразите через p и q следующие выражения:

(а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

(б) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

- [4] Докажите, что при любых a и b уравнение имеет решение:

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0.$$

- [5] Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2021$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.
- [6] Сумма четырех корней двух квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ с одинаковыми старшими коэффициентами равна нулю. Известно, что квадратный трехчлен $f(x) + g(x)$ имеет корни. Докажите, что их сумма также равна нулю.
- [7] Два различных числа x и y (не обязательно целых) таковы, что

$$x^2 - 2000x = y^2 - 2000y$$

. Найдите сумму чисел x и y .

- [8] Докажите, что если x_1, x_2 корни приведенного квадратного трехчлена, то выполнено равенство $(x_2 - x_1)^2 = D$, где D — его дискриминант.
- [9] Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.
- [10] Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет корень, а сумма любых двух из них корней не имеет?
- [11] Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Найдите знак коэффициента c .
- [12] Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение $a(x - a)^2 + b(x - b)^2 = 0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

- 13] Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $\frac{1}{a}$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.
- 14] Верно ли, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?
- 15] Про действительные числа a, b, c известно, что $(a + b + c) \cdot c < 0$. Докажите, что $b^2 - 4ac > 0$.
- 16] Найдите все целые a , при которых уравнение $x^2 + ax + a = 0$ имеет целый корень.