Математический бой за славу и честь

1. На многопрофильную школу «Стратегия» приехали 20 *физматов*, из которых 10 математиков и 10 физиков. Каждый физмат знаком с 12-ю физматами, и при этом все математики друг с другом знакомы. Докажите, что физматов можно разделить на две группы так, что в каждой группе все со всеми знакомы.

2. Биссектрисы неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I. Точки I_A, I_B и I_C симметричны I относительно прямых BC, AC и AB соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников AI_AI, BI_BI, CI_CI лежат на одной прямой.

3. Для положительных чисел x, y, z, сумма которых равна 1, докажите неравенство

$$\frac{xy}{z+xy}+\frac{yz}{x+yz}+\frac{zx}{y+zx}\leqslant 1.$$

4. Верно ли, что найдётся бесконечно много пар натуральных чисел a и b, для которых

$$\frac{\text{НОД}(a,b)+\text{НОК}(a,b)}{a+b}=2019?$$

5. Шахматная доска разрезана по границам клеток на n прямоугольников. При каком наименьшем n среди них обязательно найдутся два прямоугольника одинакового периметра?

6. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие при любых x и y равенству

$$f(x^2+xy)=f(x)f(y)+yf(x)+xf(x+y).$$

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. На продолжении стороны AD за точку D дана такая точка E, что $\angle ABE=\angle ADC$. Точка K симметрична точке C относительно точки A. Докажите, что $\angle ADB=\angle AKE$.

8. Вася выписал на доске числа $1,2,\ldots,n$ в ряд к каком-то порядке. Получился ряд $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Оказалось, что для всех $k=1,2,\ldots,n-1$ выполнено неравенство $\dfrac{a_k^2}{a_{k+1}}\leqslant k+2$. Докажите, что выписанные числа идут в порядке возрастания.

9. Найдите все натуральные n такие, что $4^n+6^n+9^n$ — квадрат натурального числа.

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac12-x_1}+\sqrt{\dfrac12-x_2}+\ldots+\sqrt{\dfrac12-x_{10}}=6;\\ \sqrt{\dfrac12+x_1}+\sqrt{\dfrac12+x_2}+\ldots+\sqrt{\dfrac12+x_{10}}=8.\end{cases}$$