Мешанина

1. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

2. Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

3. Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L. Отрезок AK пересекает ω второй раз в точке M. Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности ω.

4. В треугольнике ABC AH_1 и BH_2 – высоты; касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке S_1, а касательная в точке B пересекает AC в точке S_2; T_1 и T_2 – середины отрезков AS_1 и BS_2. Докажите, что T_1T_2, AB и H_1H_2 пересекаются в одной точке.

5. На диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K, что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' – центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X. Докажите, что точки A, X, I, D лежат на одной окружности.

6. Окружность S находится внутри треугольника ABC. Каждая из окружностей S_1, S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

7. Точка X, лежащая вне непересекающихся окружностей ω_1 и ω_2, такова, что отрезки касательных, проведённых из X к ω_1 и ω_2, равны. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, образованного точками касания, совпадает с точкой пересечения общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2.

8. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O. Пусть M и N – центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ADE и ODE. Докажите, что середина меньшей дуги DE лежат на прямой MN.

9. На стороне BC треугольника ABC взята точка A'. Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AB в точке M, а серединный перпендикуляр к отрезку $A'C$ пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что точка, симметричная

точке A' относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

$\boxed{10}$ На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, пересекаются в одной точке.

$\boxed{11}$ Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, внешние биссектрисы его углов B и C пересекаются в точке J. Окружность ω_b с центром в точке O_b проходит через точку B и касается прямой CI в точке I. Окружность ω_c с центром в точке O_c проходит через точку C и касается прямой BI в точке I. Отрезки O_bO_c и IJ пересекаются в точке K. Найдите отношение $\dfrac{IK}{KJ}$.