Комбинаторика

$\boxed{1}$ **(a)** Сколькими способами из 15 человек можно выбрать босса и заместителя? **(b)** Сколькими способами из 15 преподавателей можно выбрать двоих для работы в группе "Олимпиадная математика - 4"?

$\boxed{2}$ **(a)** Сколькими способами можно распределить золотые, серебряные и бронзовые медали среди 15 команд? **(b)** Сколькими способами можно из 15 команд выбрать три в одну подгруппу?

$\boxed{3}$ В группе 15 человек: 4 девочки и 11 мальчиков. Для участия в конкурсе нужно выбрать: **(a)** пять человек; **(b)** пять человек, среди которых ровно одна девочка; **(c)** пять человек, среди которых хотя бы одна девочка.

Определение 1 *Количество способов выбрать k предметов из n имеющихся называется числом сочетаний из n элементов по k и обозначается* $C_n^k = \binom{n}{k}$.

$\boxed{4}$ Докажите, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\boxed{5}$ У семиклассника Пети есть 7 детективов, а у восьмиклассника Васи – 8 книг по математике. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

$\boxed{6}$ 15 человек нужно разбить на баскетбольную, волейбольную и футбольную команды по пять человек. Сколькими способами это можно сделать?

$\boxed{7}$ **(a)** Что можно выбрать большим числом способов: двух преподавателей из 15 для работы в группе "Олимпиадная математика - 4"или 13 преподавателей, которые не решаются работать с группой "Олимпиадная математика - 4"? **(b)** Докажите тождество алгебраически и комбинаторно. $C_n^k = C_n^{n-k}$

$\boxed{8}$ **(a)** В группе 15 человек. Сколькими способами из них можно выбрать шестерых, которые пойдут на лекцию, если Даниил категорически отказывается туда идти, так как ему нужно дорешать задачи? **(b)** Для проведения матбоя нужна команда из шести человек, в которой Саша будет капитаном. Сколькими способами можно собрать такую команду из группы в 15 человек? **(c)** Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

$\boxed{9}$ **(a)** У акулы было 100 зубов. Сколько различных улыбок могло у неё остаться после встречи с катером? **(b)** Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

$\boxed{10}$ **(a)** Сколькими способами из 15 человек можно выбрать команду из шести человек, возглавляемую капитаном? **(b)** Сколькими способами можно выбрать из n человек k человек в парламент, возглавляемого президентом парламента? **(c)** Докажите тождество двумя способами – комбинаторно и алгебраически: $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$

$\boxed{11}$ В коробке лежат n синих и n красных шариков (все шарики разные). Сформулируйте вопрос, позволяющий доказать, что $C_n^0 \cdot C_n^k + C_n^1 \cdot C_n^{k-1} + \ldots + C_n^i \cdot C_n^{k-i} + \ldots + C_n^k \cdot C_n^0 = C_{2n}^k$