Двойной подсчёт

1. Можно ли расставить числа в таблице 6×9 так, чтобы в каждом столбце была сумма по 10, а в каждой строке — по 20?

2. В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце — по 10, а в каждой строке — по 20. Сколько в таблице строк?

3. В конференции участвовали 19 ученых. После конференции каждый из них отправил 2 или 4 письма участникам этой конференции. Могло ли получиться так, что каждый участник получил по 3 письма, если письма на почте не теряют?

4. Даны шесть 4-элементных подмножеств множества из 8-ми элементов, причём каждый из этих элементов лежит ровно в m множествах. Найдите m.

5. Дано 25 чисел. Какие бы три из них мы ни выбрали, среди оставшихся найдётся такое четвёртое, что сумма этих четырёх чисел будет положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

6. Несколько восьмиклассников и девятиклассников обменялись рукопожатиями. При этом каждый восьмиклассник пожал руку девяти девятиклассникам, а каждый девятиклассник — восьми восьмиклассникам.

   Кого среди них было больше — восьмиклассников или девятиклассников?

7. Комитет провел 40 заседаний, на каждом было ровно 10 присутствующих. При этом каждые два члена комитета встретились не более чем на одном заседании. Докажите, что в комитете > 60 членов.

8. Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратиках 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.

9. Можно ли занумеровать рёбра куба числами $1, 2, ..., 11, 12$ так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трёх выходящих из неё рёбер была одной и той же.

10. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит с пятью белыми, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

11. В городе от каждой площади отходит ровно 5 улиц. Докажите, что число площадей четно, а число улиц делится на 5. (Улицы соединяют площади.)

12. Взяли несколько одинаковых равносторонних треугольников. Вершины каждого из них пометили цифрами 1, 2 и 3. Затем их сложили в стопку. Могло ли оказаться, что сумма чисел, находящихся в каждом углу, равна 55?

13 Дано 2023 число. Известно, что сумма любых четырёх чисел положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

14 Докажите, что никакой выпуклый многоугольник нельзя порезать на невыпуклые четырёхугольники.

15 Можно ли в таблицу 5×5 записать числа $1, 2, 3, \ldots, 25$ так, чтобы в каждой строке сумма нескольких записанных чисел была равна сумме остальных чисел этой строки?

16 По окружности отметили 40 красных, 30 синих и 20 зеленых точек. На каждой дуге между соседними красной и синей точками поставили цифру 1, на каждой дуге между соседними красной и зеленой – цифру 2, а на каждой дуге между соседними синей и зеленой – цифру 3. (На дугах между одноцветными точками поставили 0.) Найдите максимальную возможную сумму поставленных чисел.

17 В парламенте несколько человек, они образовали несколько комитетов, при этом все комитеты имеют одинаковую численность. Для каждой пары парламентёров количество комитетов, в которые они оба входят, одинаковое, т.е. не зависит от того, какую пару парламентёров мы выбрали. Докажите, что все парламентёры входят в одно и то же число комитетов.

18 Дан набор, состоящий из таких 2021 числа, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.

19 По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.

20 В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

21 В библиотеке на полках стоят книги, ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k+1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.