

Теорема Чевы

Теорема Фалеса: Пусть даны две прямые a и b . Их пересекают три параллельные прямые — первая в точках A_1 и A_2 , вторая в точках B_1 и B_2 , третья в точках C_1 и C_2 . Тогда высекаемые отрезки пропорциональны, то есть выполнено

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}.$$

- [1] Прямая l пересекает стороны AB, AD и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\frac{AB}{AX} + \frac{AD}{AY} = \frac{AC}{AZ}$.
- [2] В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 и на стороне BC отмечена точка X . На сторонах AB, AC отмечены точки M и N соответственно так, что $MX \parallel CC_1, NX \parallel BB_1$. Докажите, что отрезок MN медианами BB_1 и CC_1 разбивается на три равные части.
- [3] На продолжении стороны AB квадрата $ABCD$ за вершину B отложен отрезок $BP = 2AB$. Точка M — середина стороны CD , а отрезки BM и AC пересекаются в точке Q . В каком отношении прямая PQ делит сторону BC ?

Теорема Чевы: На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

Определение: Отрезок, соединяющий вершину треугольника с произвольной точкой на противоположной стороне (или её продолжении), называется *чевианой*.

Теорема Менелая: На сторонах AB, BC и продолжении CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

- [4] Докажите обратное следствие в теореме (а) Чевы и (b) Менелая.
- [5] Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Точку A_1 отразили симметрично относительно середины отрезка BC и получили точку A_2 . Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 тоже пересекаются в одной точке.
- [6] Дан треугольник ABC . На стороне AB отмечена точка D , а на стороне AC — точка E так, что $BC \parallel DE$. Докажите, что точка пересечения отрезков CD и BE лежит на медиане, проведенной из вершины A .
- [7] Точка K лежит на стороне AB , а точка M — на стороне AC треугольника ABC , причем $AK : KB = 3 : 2, AM : MC = 4 : 5$. Прямая, проходящая через точку K параллельно BC , пересекает отрезок BM в точке P . Найдите отношение $BP : PM$.

- [8] На чевиане AA_1 треугольника ABC выбирается переменная точка X . Лучи BX и CX пересекают стороны AC и AB в точках Y и Z соответственно. Докажите, что все построенные таким образом прямые YZ пересекают прямую BC в одной и той же точке, либо все этой прямой параллельны.
- [9] Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC опущена высота CK , и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE . Прямая, проходящая через точку B параллельно CE , пересекает прямую CK в точке F . Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.
- [10] В треугольнике ABC на сторонах AB , AC и BC выбраны точки D , E и F соответственно так, что $BF = 2CF$, $CE = 2AE$ и угол DEF — прямой. Докажите, что DE — биссектриса угла ADF .
- [11] Через вершину A и середину медианы BM треугольника ABC провели прямую. В каком отношении она делит сторону BC ?
- [12] Пусть AL — биссектриса треугольника ABC , точка D — ее середина, E — проекция D на AB . Известно, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL равнобедренный.
- [13] Точки M и K делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношении $2 : 3$ и $4 : 1$, считая от их общей вершины. В каком отношении делится отрезок MK медианой треугольника, проведенной к стороне AC ?
- [14] Дан треугольник ABC , в котором BM — медиана. Точка P лежит на стороне AB , точка Q — на стороне BC , причем $AP : PB = 2 : 5$, $BQ : QC = 6$. Отрезок PQ пересекает медиану BM в точке R . Найдите $BR : RM$.
- [15] В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 . Прямые A_1C_1 и AC пересекаются в точке D . Докажите, что BD — внешняя биссектриса угла AB