

**Квадратный трёхчлен**

- [1] Решите уравнение: а)  $x^2 + 2023x + 2022 = 0$ ; б)  $1999x^2 + 1000x - 2999 = 0$ .
- [2] При каких значениях  $a$  уравнение  $2x^2 + (a - 3)x + 81 = 0$  имеет 1 корень?
- [3] Пусть  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ . Выразите через  $p$  и  $q$  следующие выражения:

(а)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

(б)  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

- [4] Докажите, что при любых  $a$  и  $b$  уравнение имеет решение:

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0.$$

- [5] Рассматриваются квадратичные функции  $y = x^2 + px + q$ , для которых  $p + q = 2021$ . Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.
- [6] Сумма четырех корней двух квадратных трехчленов  $f(x)$  и  $g(x)$  с одинаковыми старшими коэффициентами равна нулю. Известно, что квадратный трехчлен  $f(x) + g(x)$  имеет корни. Докажите, что их сумма также равна нулю.
- [7] Два различных числа  $x$  и  $y$  (не обязательно целых) таковы, что

$$x^2 - 2000x = y^2 - 2000y$$

. Найдите сумму чисел  $x$  и  $y$ .

- [8] Докажите, что если  $x_1, x_2$  корни приведенного квадратного трехчлена, то выполнено равенство  $(x_2 - x_1)^2 = D$ , где  $D$  — его дискриминант.
- [9] Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.
- [10] Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет корень, а сумма любых двух из них корней не имеет?
- [11] Квадратный трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$  не имеет корней и  $a + b + c > 0$ . Найдите знак коэффициента  $c$ .
- [12] Ненулевые числа  $a$  и  $b$  таковы, что уравнение  $a(x - a)^2 + b(x - b)^2 = 0$  имеет единственное решение. Докажите, что  $|a| = |b|$ .

- 13] Квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  принимает в точках  $\frac{1}{a}$  и  $c$  значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена  $f(x)$  имеют разные знаки.
- 14] Верно ли, что если  $b > a + c > 0$ , то квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два корня?
- 15] Про действительные числа  $a, b, c$  известно, что  $(a + b + c) \cdot c < 0$ . Докажите, что  $b^2 - 4ac > 0$ .
- 16] Найдите все целые  $a$ , при которых уравнение  $x^2 + ax + a = 0$  имеет целый корень.