

Лемма о трезубце

Лемма о трезубце. Середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC равноудалена от вершин A , C и центров I вписанной и I_B вневписанной окружностей.

- [1] Точки O и I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC , M – середина дуги AC описанной окружности (не содержащей точки B). Докажите, что $MI = MO$ тогда и только тогда, когда $\angle ABC = 60^\circ$.
- [2] Вписанная окружность треугольника ABC с центром в точке I касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Точка O – центр описанной окружности треугольника BIC . Докажите, что $\angle BDO = \angle CEO$.
- [3] Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC , пересекает стороны AB и AC в точках P и Q . Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $APIQ$ – ромб.
- [4] Вокруг прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. На меньших дугах AC и BC взяты их середины – K и P соответственно. Отрезок KP пересекает катет AC в точке N . Центр вписанной окружности треугольника ABC – точка I . Найдите угол NIC .
- [5] Биссектрисы равнобедренного треугольника ABC с основанием AC пересекаются в точке I . Точка E – середина дуги BC описанной окружности. На плоскости отметили точку S так, что $ABSI$ – параллелограмм. Докажите, что $\angle BES = \angle ABC$.
- [6] Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна BC .
- [7] В остроугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 60° . Точки I , H , O – центр вписанной окружности, ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $IH = IO$.
- [8] Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC , пересекает стороны AC и BC в точках X и Y соответственно. При этом центр вневписанной окружности треугольника XYC , касающейся стороны XY , лежит на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что отрезок XY проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC .
- [9] Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC , пересекается с прямой A_0C_0 в точке P . Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC .