Изогональное сопряжение 1

Определение: Пусть дан треугольник ABC и точка P. Тогда изогонали к прямым AP, BP, CP относительно соответствующих углов треугольника пересекаются в одной точке или параллельны. Если они пересекаются, то точка их пересечения Q называется изогонально сопряжённой точке P относительно треугольника ABC. Если P лежала не на стороне и не на описанной окружности треугольника, то изогональное сопряжение является взаимно-однозначным соответствием.

Если точку P отразить относительно сторон треугольника, то изогонально сопряжённая ей точка Q будет центром окружности, проходящей через эти три отражения.

$\boxed{1}$ Точка T такова, что все стороны треугольника ABC видны из неё под углами $120°$. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из изогонально сопряжённой ей точки, являются вершинами равностороннего треугольника.

$\boxed{2}$ Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q такова, что четырёхугольник $ABQC$ является параллелограммом. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

$\boxed{3}$ Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle C \neq 90°$. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AB, BC, AC, и середина отрезка AC лежат на одной окружности.

$\boxed{4}$ В треугольнике ABC проведена высота AK. Точка K' симметрична точке K относительно середины стороны BC. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке X. Докажите, что точка K' и основания перпендикуляров, опущенных из точки X на прямые AB, BC и CA, лежат на одной окружности.

$\boxed{5}$ В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

$\boxed{6}$ Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Точка QA симметрична точке Q относительно прямой BC. Тогда точки A и QA изогонально сопряжены относительно треугольника BPC.

$\boxed{7}$ Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами $120°$. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

$\boxed{8}$ Точка M — середина основания AB равнобедренного треугольника ABC. Точка P внутри треугольника такова, что $\angle CAP = \angle ABP$. Докажите, что $\angle APM + \angle CPB = 180°$.

$\boxed{9}$ Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка P. Точки Q_1 и Q_2 расположены внутри $ABCD$ и таковы, что

$$\angle Q_1BC = \angle ABP, \angle Q_1CB = \angle DCP, \angle Q_2AD = \angle BAP, \angle Q_2DA = \angle CDP.$$

Докажите, что $Q_1Q_2 \parallel AB$ тогда и только тогда, когда $Q_1Q_2 \parallel CD$.

$\boxed{10}$ В треугольнике ABC провели высоты AA_0, BB_0, CC_0. Точка M — произвольная точка, A_1 — точка, симметричная M относительно BC, аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

$\boxed{11}$ Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $\angle DAC = 90°$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из A на DC, P — такая точка на прямой AC, что прямая PD касается описанной окружности треугольника ABD. Докажите, что $\angle PBA = \angle DBH$.

$\boxed{12}$ Точки I и I_a являются центрами вписанной и вневписанной (напротив вершины A) окружностей треугольника ABC. Точка A' диаметрально противоположна точке A на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\angle BA'I + \angle CA'I_a = 180°$.

$\boxed{13}$ В треугольнике ABC выполнено неравенство $AB < BC$. Биссектриса угла C пересекает прямую, параллельную AC и проходящую через точку B, в точке P. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведённая в точке B, пересекает ту же биссектрису в точке R. Точка R' симметрична точке R относительно AB. Докажите, что $\angle R'PB = \angle RPA$.

$\boxed{14}$ Пусть P — точка внутри треугольника ABC такая, что

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Докажите, что биссектрисы углов ABP и ACP пересекаются на прямой AP.