Инверсия

Определение *Инверсией* относительно окружности $S(O; R)$ называют преобразование, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A', лежащую на луче OA такую, что $OA \cdot OA' = R^2$.

Отметим, что если при инверсии точка X переходит в точку Y, то Y переходит в X.

Инверсию относительно S будем также называть инверсией с центром O и степенью R^2, а окружность S — *окружностью инверсии.*

$\boxed{1}$ Докажите, что при инверсии относительно окружности ω с центром O

a) точка M, лежащая внутри окружности ω, переходит в точку M', лежащую снаружи;

b) прямая, проходящая через O, переходит в себя.

$\boxed{2}$ Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A', а точка B — в B'. Доказать:

a) треугольники OAB и $OB'A'$ подобны;

b) точки A, B, A' и B' лежат на одной окружности.

$\boxed{3}$ Докажите, что при инверсии с центром O:

a) прямая, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O;

b) окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не про- ходящую через O.

$\boxed{4}$ Точки A и B лежат на окружности ω. Что является образом прямой AB при инверсии относительно ω?

$\boxed{5}$ Докажите, что касающиеся окружности (окружность и прямая) переходят при инверсии в касающиеся окружности или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

$\boxed{6}$ Докажите, что инверсия с центром в вершине A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) и степенью AB^2 переводит основание BC треугольника в дугу BC описанной окружности.

$\boxed{7}$ Точки X' и Y' — образы точек X и Y при инверсии относительно окружности с центром O радиуса R, причём точки X и Y отличны от O. Докажите, что $X'Y' = XY \cdot \dfrac{R^2}{OX \cdot OY}$.

$\boxed{8}$ Пусть окружность ω вписана в угол BAC, B и C — точки касания ω со лучами AB и AC. Докажите, что точка A при инверсии относительно ω переходит в середину отрезка BC.

$\boxed{9}$ Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Окружности, описанные около треугольников AOB и COD, вторично пересекаются в точке Y, прямые AB и CD пересекаются в точке X. Докажите, что точки X, O и Y лежат на одной прямой.

$\boxed{10}$ В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей, и для каждой пары через точки их пересечения проводится прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

$\boxed{11}$ В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей, точки касания отмечаются. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной окружности.

$\boxed{12}$ Что является образом описанной окружности треугольника при инверсии относительно вписанной окружности?

$\boxed{13}$ Две окружности пересекаются в точках A и B. Их общая касательная (та, которая ближе к точке B) касается окружностей в точках E и F. Прямая AB пересекает прямую EF в точке M. На продолжении AM за точку M выбрана точка K так, что $KM = MA$. Прямая KE вторично пересекает окружность, содержащую точку E, в точке C. Прямая KF вторично пересекает окружность, содержащую точку F, в точке D. Докажите, что точки C, D и A лежат на одной прямой.

$\boxed{14}$ Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC, а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Описанная окружность Ω треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром вписанной окружности треугольника PQT.

$\boxed{15}$ Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O, причём O не лежит на диагоналях четырёхугольника. Описанная окружность Ω_1 треугольника AOC проходит через середину диагонали BD. Докажите, что описанная окружность Ω_2 треугольника BOD проходит через середину диагонали AC.

$\boxed{16}$ В угол α вписаны окружности ω и Ω, причём окружность Ω проходит через центр окружности ω и касается сторон угла α в точках P и Q. Докажите, что PQ касается ω.

$\boxed{17}$ В треугольнике $A_1A_2A_3$ провели окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, вписанные в углы $\angle A_1$, $\angle A_2$ и $\angle A_3$ соответственно и проходящие через центр вписанной окружности I. Эти окружности вторично пересекаются в точках B_1, B_2 и B_3 (B_i не лежит на ω_i). Докажите, что центры описанных окружностей треугольников A_iB_iI лежат на одной прямой.

$\boxed{18}$ В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y . Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.

$\boxed{19}$ Пусть O — одна из точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Окружность ω с центром O пересекает ω_1 в точках A и B,а ω_2 — в точках C и D. Пусть X— точка пересечения прямых AC и BD. Докажите, что все такие точки X лежат на одной прямой.

$\boxed{20}$ Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Касательные к описанной окружности треугольника AIC в точках A, C пересекаются в точке X. Касательные к описанной окружности треугольника BID в точках B, D пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, I, Y лежат на одной прямой.

$\boxed{21}$ В четырёхугольнике $ABCD$ вписанная окружность ω касается сторон BC и DA в точках E и F соответственно. Оказалось, что прямые AB, FE и CD пересекаются в одной точке S. Описанные окружности Ω и Ω_1 треугольников AED и BFC, вторично пересекают окружность ω в точках E_1 и F_1. Докажите, что прямые EF и E_1F_1 параллельны.