

## Периодические функции

[1] Функции  $f$  и  $g$  определены на всей числовой прямой и взаимно обратны. Известно, что  $f$  представляется в виде суммы линейной и периодической функций:  $f(x) = kx + h(x)$ , где  $k$  — число,  $h$  — периодическая функция. Доказать, что  $g$  также представляется в таком виде.

[2] Функция  $f(x)$ , определённая при всех действительных  $x$ , является чётной. Кроме того, при любом действительном  $x$  выполняется равенство

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

(а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.

(б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

[3] Найдите все периодические функции  $y = f(x)$ , удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0,5f(x - \pi) = \sin x.$$

[4] Показать, что если функция  $f(x)$  определена при всех действительных  $x$  и

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

при некотором  $a > 0$ , то эта функция — периодическая, и найти ее период.

[5] Доказать, что производная периодической функции — периодическая функция.

[6] Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырёх. Докажите, что последовательность периодическая (возможно, с предпериодом), причём длина периода не больше (а) 10000; (б) 625.

[7] Дана бесконечная последовательность чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Известно, что для любого номера  $k$  можно указать такое натуральное число  $t$ , что  $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \dots$ . Обязательно ли тогда эта последовательность периодическая?

[8] Дана бесконечная вправо последовательность букв русского алфавита. Известно, что в ней различных подслов длины 100 столько же, сколько различных подслов длины 101. Докажите, что последовательность периодична, возможно, с предпериодом.

[9] На проволоку в форме окружности насажено несколько разноцветных шариков. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями: некоторые по часовой стрелке, а некоторые против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что рано или поздно расположение шариков на окружности повторится с исходным.