## Симедиана

**Определение:** Прямая, *си*мметричная *медиане* треугольника относительно биссектрисы проведенной из той же вершины, называется *симедианой*.

- 1 Дан треугольник ABC, в котором AC = BC, и точка P внутри такая, что  $\angle PAB = \angle PBC$ . Обозначим середину AB через M. Докажите, что  $\angle APM + \angle BPC = 180^\circ$ .
- $\boxed{2}$  Три различные точки A,B,C расположены на прямой в указанном порядке. Пусть окружность  $\omega$  проходит через A и C, и ее центр не лежит на AC. Обозначим через P точку пересечения касательных к  $\omega$  в точках A и C. Пусть отрезок PB пересекает  $\omega$  в точке Q. Докажите, что основание биссектрисы угла  $\angle Q$  треугольника AQC не зависит от выбора  $\omega$ .
- [3] Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются их общей касательной в точках P и Q. Пусть S точка пересечения касательных в точках P и Q к описанной окружности треугольника APQ, а точка H симметрична B относительно PQ. Докажите, что A, S и H лежат на одной прямой.
- $\boxed{4}$  Дан треугольник ABC. Пусть X центр поворотной гомотетии, переводящей B в A и A в C. Докажите, что AX содержит семидиану треугольника ABC.
- [5] Дан треугольник ABC. На стороне BC выбирается точка P. Точки Q и R на AC и AB соответственно таковы, что  $PQ \parallel AB$  и  $PR \parallel AC$ . Докажите, что описанная окружность треугольника AQR проходит через точку X, не зависящую от выбора точки P.
  - (а) Докажите, что симедиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, совпадает с высотой.
  - (b) Докажите, что если симедиана треугольника совпадает с высотой, то он либо равнобедренный, либо прямоугольный.
- [6] (а) Докажите, что расстояния от любой точки на медиане AM треугольника ABC до сторон AB и AC обратно пропорциональны этим сторонам.
  - (b) Докажите, что расстояния от любой точки на симедиане AL треугольника ABC до сторон AB и AC прямо пропорциональны этим сторонам.
- [7] Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Пусть X и Y проекции P на AB и AC, а M середина BC. Докажите, что
  - (a) M ортоцентр треугольника AXY;
  - (b) AP симедиана треугольника ABC.

- 8 Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.
- [9] Симедиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, пересекает отрезок BC в точке L, а описанную окружность в точке  $D \neq A$ . Докажите, что

(a) 
$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$$
;

(b) 
$$\frac{BL}{LC} = \left(\frac{BA}{AC}\right)^2$$
.

- 10 Четырехугольник ABCD вписан в окружность  $\omega$ . Касательные к  $\omega$  в точках A и C пересекаются на прямой BD. Докажите, что касательные к  $\omega$  в точках B и D пересекаются на прямой AC или параллельны ей.
- [11] Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок AB пополам.
- 12 Дан вписанный четырехугольник ABCD, в котором  $AB^2 + CD^2 = AD^2$ . На стороне AD выбрана точка P такая, что  $\angle APB = \angle CPD$ . Докажите, что точка пересечения диагоналей, середина BC и точка P лежат на одной прямой.
- Пость ABC остроугольный треугольник, M, N, P середины сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают AM в точках D и E соответственно. Прямые BD и CE пересекаются в точке F внутри треугольника ABC. Докажите, что точки A, N, F, и P лежат на одной окружности.
- Треугольник ABC вписан в окружность  $\omega$ . Касательные к  $\omega$  в точках B и C пересекаются в T. Точка S на прямой BC такова, что  $AS \perp AT$ . Точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на прямой ST так, что  $B_1T = BT = C_1T$ . Докажите, что треугольники ABC и  $AB_1C_1$  подобны.
- Пусть A одна из точек пересечения окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Общая касательная к  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касается их в точках B и C. Пусть  $O_3$  центр описанной окружности треугольника ABC. Обозначим через D такую точку, что A середина отрезка  $O_3D$ . Пусть M середина  $O_1O_2$ . Докажите, что  $\angle O_1DM = \angle O_2DA$ .