

Тождественные преобразования

- [1] Раскройте скобки в выражении $(a + b)^4$.
- [2] Раскройте скобки в выражении $(a - b)^5$.
- [3] Раскройте скобки в выражении $(a - b)^n$.
- [4] Разложите на скобки выражение $a^4 - b^4$.
- [5] Разложите на скобки выражение $a^n - b^n$.
- [6] Раскройте скобки в выражении $(a + b + c)^3$.
- [7] Раскройте скобки в выражении $(x - y)(y - z)(z - x)$.
- [8] Докажите, что если $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, то $a = b = c$.
- [9] Числа a, b, c, d таковы, что $a + b = c + d$ и $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Докажите, что $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.
- [10] Действительные числа x и y таковы, что $x^3 + y^3 + 3xy = 1$. Докажите, что или $x + y = 1$, или $x = y = -1$.

- [11] Целые числа x, y, z таковы, что

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = xyz$$

Докажите, что $x^3 + y^3 + z^3$ делится на $x + y + z + 6$.

- [12] Пусть a, b, c - целые числа. Докажите, что если $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$, то $a = b = c = 0$.
- [13] Для каждого натурального $n \geq 2$ вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n - 1) \cdot n}$$

.

- [14] Докажите, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c},$$

то сумма каких-то двух из них равна 0.

- [15] Для каждого натурального $n \geq 2$ вычислите сумму

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n - 1) \cdot n} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$$

.

- [16] Пусть a, b, c — попарно различные числа. Докажите, что выражение

$$a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$$

не равно нулю.