

### Лемма о трезубце

**Лемма о трезубце.** Середина дуги  $AC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  равноудалена от вершин  $A$ ,  $C$  и центров  $I$  вписанной и  $I_B$  вневписанной окружностей.

- [1] Точки  $O$  и  $I$  – центры описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ ,  $M$  – середина дуги  $AC$  описанной окружности (не содержащей точки  $B$ ). Докажите, что  $MI = MO$  тогда и только тогда, когда  $\angle ABC = 60^\circ$ .
- [2] Вписанная окружность треугольника  $ABC$  с центром в точке  $I$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Точка  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $BIC$ . Докажите, что  $\angle BDO = \angle CEO$ .
- [3] Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг  $AB$  и  $AC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Точка  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $APIQ$  – ромб.
- [4] Вокруг прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  описана окружность. На меньших дугах  $AC$  и  $BC$  взяты их середины –  $K$  и  $P$  соответственно. Отрезок  $KP$  пересекает катет  $AC$  в точке  $N$ . Центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  – точка  $I$ . Найдите угол  $NIC$ .
- [5] Биссектрисы равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$  пересекаются в точке  $I$ . Точка  $E$  – середина дуги  $BC$  описанной окружности. На плоскости отметили точку  $S$  так, что  $ABSI$  – параллелограмм. Докажите, что  $\angle BES = \angle ABC$ .
- [6] Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ . В треугольники  $ABC$  и  $ABD$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Докажите, что прямая  $O_1O_2$  перпендикулярна  $BC$ .
- [7] В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол при вершине  $A$  равен  $60^\circ$ . Точки  $I$ ,  $H$ ,  $O$  – центр вписанной окружности, ортоцентр и центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $IH = IO$ .
- [8] Окружность, проходящая через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$ , пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. При этом центр вневписанной окружности треугольника  $XYS$ , касающейся стороны  $XY$ , лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что отрезок  $XY$  проходит через центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .
- [9] Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  пересекают описанную окружность этого треугольника в точках  $A_0$  и  $C_0$  соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  параллельно стороне  $AC$ , пересекается с прямой  $A_0C_0$  в точке  $P$ . Докажите, что прямая  $PB$  касается описанной окружности треугольника  $ABC$ .