Степени вхождения простых чисел

Определение: Степенью вхождения простого числа p в натуральное число n будем называть наибольшее такое k, что n делится на p^k. Обозначать для краткости будем $\nu_p(n)$ (это греческая буква “ню”)

Факт: $\nu_p(a+b) \geq \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, причём если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то $\nu_p(a+b) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$.

$\boxed{1}$ Докажите **формулу Лежандра**: $\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$

$\boxed{2}$ Докажите, что $n!$ не делится на 2^n.

$\boxed{3}$ Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}$ целая. Докажите, что оба слагаемых целые.

$\boxed{4}$ Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b, c удовлетворяют условию $ab = ac + bc$. Докажите, что abc — точный квадрат.

$\boxed{5}$ Натуральные числа a, b, c таковы, что число $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ является целым. Верно ли, что abc — точный куб?

$\boxed{6}$ Докажите, что если числа ab, cd и $ac + bd$ делятся на k то ac и bd делятся на k.

$\boxed{7}$ Даны натуральные числа a и b, причем $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

$\boxed{8}$ Натуральные числа m, n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ кратно mn. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

$\boxed{9}$ Докажите, что наименьшее общее кратное чисел от n до $2n+1$ делится на $\frac{(2n+1)!}{n! \cdot n!}$

$\boxed{10}$ Докажите, что не существует трёх различных натуральных чисел, каждое из которых равно наименьшему общему кратному своих разностей с двумя другими.

$\boxed{11}$ Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Положим

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_n).$$

Докажите, что наименьшее общее кратное $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ делится на $(n-1)!$

$\boxed{12}$ Решите в натуральных числах уравнение $x^y = y^x$ при $x \neq y$.

$\boxed{13}$ Найдите все натуральные x, y и простые p такие что:

$$x^5 + y^4 = pxy$$