Гомотетия (поворотная)

Основные свойства поворотной гомотетии:

1. Если на плоскости даны непараллельные отрезки AB и $A'B'$, то поворотная гомотетия, переводящая A в A', а B в B', определяется однозначно. Если обозначить точку пересечения прямых AB и $A'B'$ за X, то центр искомой поворотной гомотетии лежит на втором пересечении окружностей, описанных около треугольников $AA'X$ и $BB'X$.

2. Если точка O является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в CD, то она является и центром поворотной гомотетии, переводящей AC в BD.

3. Пусть две окружности пересекаются в точках P и Q. Пусть два велосипедиста A и B одновременно выезжают из точки P, один по первой окружности, а другой по второй, причем их угловые скорости на соответствующих окружностях совпадают. Тогда прямая AB всегда будет проходить через точку Q.

4. Докажите, что середины отрезков AB лежат на одной окружности.

5. Докажите, что существует точка, равноудалённая от точек A и B в каждый момент времени.

Задачи:

1. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причём $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что $\angle DHQ = 90^\circ$.

2. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$; CE — высота треугольника. Докажите, что угол LEM прямой.

3. Прямые, содержащие стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точке O. Точка M — середина AB, N — середина CD. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCO, ADO и MNO лежат на одной прямой.

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Описанная окружность треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD, в точке K. Точка M — середина BC, N — середина AD. Докажите, что точки B, M, N и K лежат на одной окружности.

5. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ повернули относительно их середин на 90° против часовой стрелки, получились отрезки A_0B_0 и C_0D_0. Докажите, что $B_0C_0 = A_0D_0$.

$\boxed{6}$ Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. На прямой AB отмечена такая точка X, что $A_1X \perp B_1C_1$. Окружности, описанные около треугольников ABC и AB_1C_1, пересекаются второй раз в точке Z. Докажите, что $\angle XZC_1 = 90°$.

$\boxed{7}$ Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник такой, что $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ и $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP делит отрезок CD пополам.

$\boxed{8}$ Имеется два правильных пятиугольника с одной общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются по часовой стрелке цифрами от 1 до 5, причём в общей вершине ставится цифра 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Доказать, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.

$\boxed{9}$ a) Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 проходят через точку O. Окружности ω_1 и ω_2 повторно пересекаются в точке A_1, окружности ω_2 и ω_3 — в точке A_2, окружности ω_3 и ω_1 — в точке A_3. На окружности ω_1 выбрана произвольная точка X_1. Прямая X_1A_1 повторно пересекает окружность ω_2 в точке X_2, прямая X_2A_2 повторно пересекает окружность ω_3 в точке X_3, прямая X_3A_3 повторно пересекает окружность ω_1 в точке X_1'. Докажите, что $X_1 = X_1'$.

b) Докажите аналогичное утверждение для n окружностей.

$\boxed{10}$ Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO — прямой.

$\boxed{11}$ Окружность с центром O проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC повторно в точках K и N соответственно. Пусть M — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и KBN (отличная от B). Докажите, что $\angle OMB = 90°$.

$\boxed{12}$ $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, X — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку X, пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках N_1 и N_2, и окружности, описанные около треугольников ABX и CDX, в точках M_1 и M_2. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

$\boxed{13}$ Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $BD = CD$, $\angle BDC = 120°$. Вне треугольника ABC взята такая точка E, что $AE = CE$, $\angle AEC = 60°$ и точки B и E находятся в разных полуплоскостях относительно AC. Докажите, что $\angle AFD = 90°$, где F — середина отрезка BE.

$\boxed{14}$ На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCA = \angle LBA = \alpha$. Из точки A опущены перпендикуляры AE и AF на прямые BL и CK соответственно. Точка D — середина стороны BC. Найдите углы треугольника DEF.

$\boxed{15}$ На сторонах треугольника ABC во внутреннюю сторону построены такие треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1, что $\angle AC_1B + \angle BA_1C + \angle CB_1A = 360°$ и $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle BAC_1 + \angle BCA_1$.

$\boxed{16}$ На сторонах четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построили правильные треугольники ABK, BCL, CDM и DAN. X и Y — середины отрезков BL и AN, Z — центр треугольника CMD.

a) Докажите, что $XY \perp KZ$.

b) Найдите отношение $XY : KZ$.

$\boxed{17}$ AB — хорда окружности, M и N — середины дуг на которые делят окружность точки A и B. При повороте вокруг точки A на некоторый угол точка B переходит в B', а точка M — в M'. Докажите, что отрезки, соединяющие середину отрезка BB' с точками M' и N, перпендикулярны.