

## Числа Каталана

**Определение 1.** Правильной скобочной последовательностью длины  $2n$  называется последовательность, состоящая из  $n$  открывающихся и  $n$  закрывающихся скобок, такая что среди любых первых  $k$  скобок открывающихся скобок не меньше чем закрывающихся.

Пример 1. При  $n = 3$  существует 5 таких последовательностей

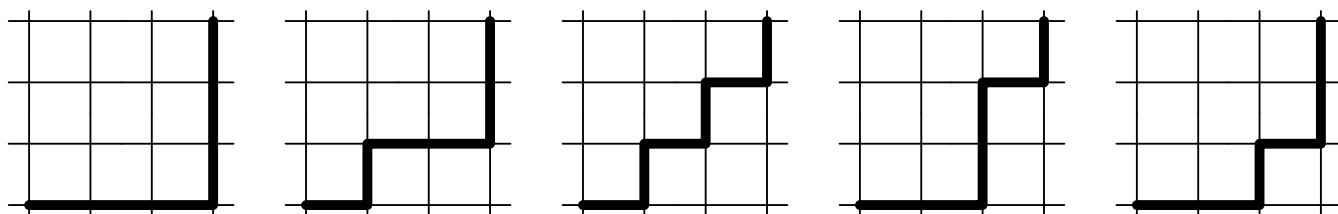
$$()()(), ((\ ))(), ()(()), (())(), (((\ ))).$$

1 Докажите рекуррентную формулу для чисел Каталана

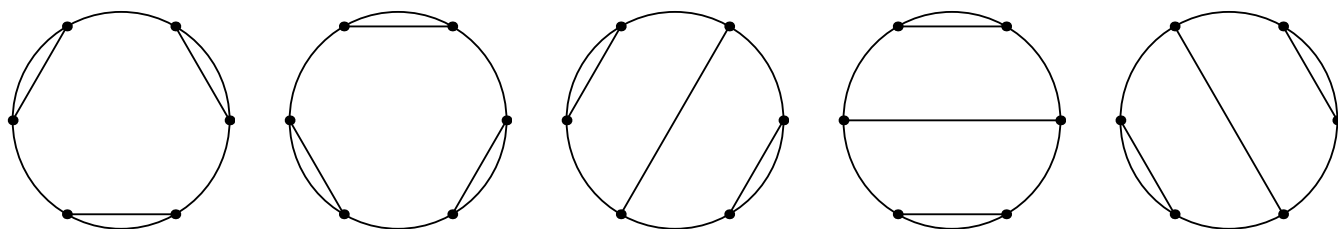
$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$$

2 Найти количество:

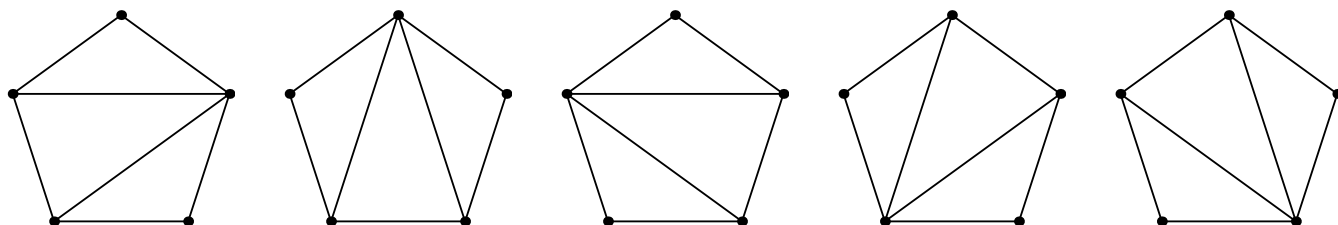
(а) путей из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, n)$  по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, и не поднимающихся выше прямой  $y = x$ ;



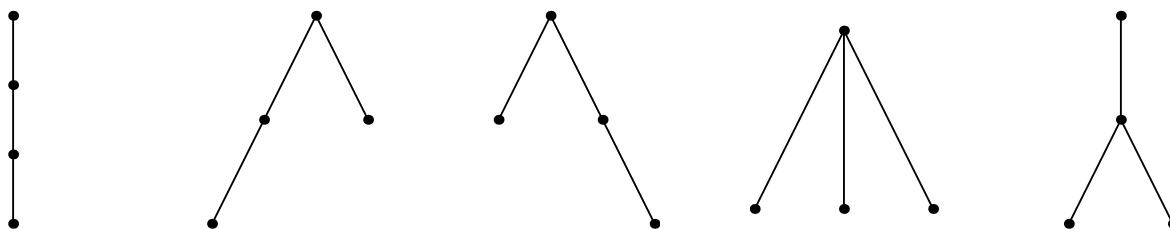
(б) способов соединить  $2n$  точек на окружности  $n$  непересекающимися хордами;



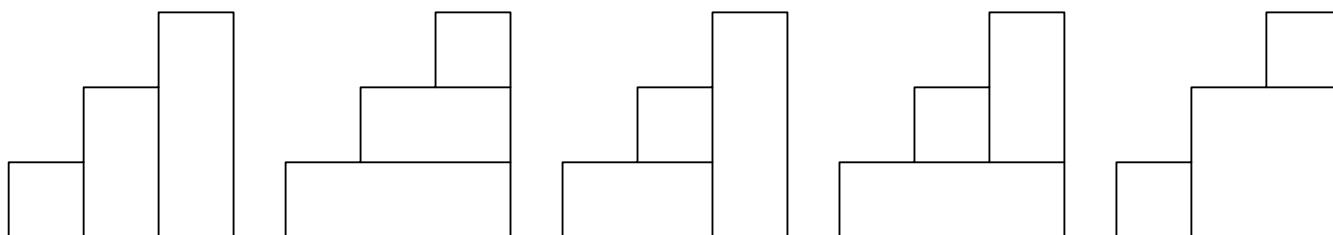
(с) способов разбить выпуклый  $n$ -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями;



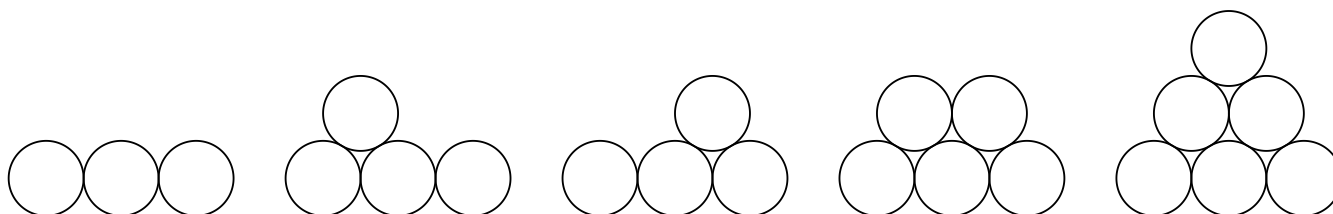
- (d) упорядоченных корневых деревьев (то есть деревьев, у которых задан корень и для каждой вершины задан порядок ее потомков) с  $n + 1$  вершинами;



- (e) способов разбить на  $n$  прямоугольников лестницу ширины и высоты  $n$ ;



- (f) способов разложить монеты на плоскости так, чтобы в нижнем ряду было  $n$  монет;



- (g) последовательностей натуральных чисел таких, что  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , где  $a_i \leq i$ ;

1 1 1

1 1 2

1 1 3

1 2 2

1 2 3

- (h) последовательностей целых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , таких что  $a_1 = 0$  и  $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$

0 0 0

0 0 1

0 1 0

0 1 1

0 1 2