

Аффинная геометрия

- [1] (а) Докажите, что любой треугольник можно спроектировать так, чтобы получился треугольник любой заданной формы, то есть изображением любого треугольника может служить произвольный заданный треугольник.
- (б) Изображаются ли при этом высоты высотами? Медианы — медианами? Биссектрисы — биссектрисами?
- [2] Какие четырехугольники могут служить изображениями квадрата; ромба; дельтоида; равнобокой трапеции; трапеции, отсекаемой от правильного треугольника средней линией? Как описать множество всевозможных изображений произвольного заданного четырехугольника? Применения проекций
- [3] Покажите, что задачу 9 (из листика про площади) достаточно решить для частного случая, когда данный параллелограмм — квадрат. Найдите решение для этого случая.
- [4] В треугольнике ABC провели 3 чевианы AA_0, BB_0, CC_0 так, что $A_0B_0 \parallel AB$ (Используйте центральную проекцию.)
- [5] Докажите теорему Чебы с сведением к частному случаю — теореме о высотах треугольника. Можно ли аналогичным образом использовать медианы? биссектрисы?
- [6] На изображении прямоугольного треугольника ABC , у которого $\angle C = 90^\circ$, $AC:CB = 3:1$, постройте изображение его а) биссектрисы, б) медианы, в) высоты, проведенных из C .
- [7] Дано изображение треугольника ABC . Постройте изображения центров его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $AC = BC$ и высота $CH \perp AB$.
- [8] Известно, что данная трапеция является изображением а) трапеции с острым углом 45° , вписанной в окружность с центром O ; б) прямоугольной трапеции с острым углом 60° , описанной около окружности с центром O . Постройте изображение точки O .
- [9] Дано изображение фигуры, состоящей из прямоугольного треугольника и квадрата, построенного на его катете. Постройте изображение квадрата, построенного а) на другом катете; б) на гипотенузе.
- [10] а) На изображении прямоугольного треугольника ABC , в котором проведен отрезок CD — изображение биссектрисы прямого угла, постройте изображение CH высоты. б) Пусть A_1 и B_1 — точки на продолжениях сторон BC и AC треугольника ABC из п. а),

такие что $AA' \parallel BB' \parallel CC'$. Докажите, что прямая HN (изображение перпендикуляра к AB) делит пополам отрезок $A'B'$.

- 11 Дан треугольник, изображающий некоторый треугольник T . Где могут располагаться изображения а) центроида, б) центра описанной окружности, в) центра вписанной окружности, г) ортоцентра треугольника T ?
- 12 Как изображается правильный шестиугольник? Постройте его изображение, если даны изображения трёх вершин; вершины и середин двух сторон (рассмотрите разные случаи).
- 13 Докажите, что любой пятиугольник, у которого каждая сторона параллельна одной из диагоналей, является изображением правильного пятиугольника.
- 14 Из концов основания треугольника проведены медианы, а из произвольной точки основания - параллельные им прямые. Докажите, что отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с боковыми сторонами, делится медианами на три равные части.
- 15 Каждая диагональ выпуклого пятиугольника, кроме, может быть, одной, параллельна одной из его сторон. Докажите, что а) это верно и для пятой диагонали; б) отношение каждой диагонали к параллельной ей стороне одно и то же; найдите это отношение.
- 16 В выпуклом пятиугольнике проведены «медианы» - прямые, соединяющие каждую вершину с серединой противоположной стороны. Докажите, что если четыре из них проходят через одну точку, то и пятая тоже.
- 17 Докажите, что шестиугольник с вершинами в серединах «малых» диагоналей данного выпуклого шестиугольника имеет в четыре раза меньшую площадь.
- 18 Середины трёх сторон правильного шестиугольника соединены с концами противоположных сторон как на рисунке. Какую часть от площади шестиугольника составляет площадь треугольника, ограниченного проведенными отрезками?
- 19 В шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны параллельны. Докажите, что а) если две пары противоположных сторон параллельны соответствующим диагоналям, то это верно и для третьей пары; б) отрезки, соединяющие середины противоположных сторон шестиугольника, пересекаются в одной точке; в) треугольники ACE и BDF равновелики; г) если противоположные стороны не только параллельны, но и равны, то площадь $DAEC$ равна половине площади шестиугольника.
- 20 Докажите, что в произвольном шестиугольнике условия б) и в) из задачи 6 эквивалентны.

- 21 Докажите, что если каждый из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам, E то эти отрезки пересекаются в одной точке. N
- 22 Докажите, что если каждая из «больших» диагоналей 21 выпуклого шестиугольника делит его площадь пополам, то они F пересекаются в одной точке.
- 23 См. рисунок: даны площади трех треугольников (21, 21, 6); N ? найдите площадь $AAFN$.