

Математический бой

1. Биссектрисы неравностороннего треугольника ABC пересекаются в точке I . Точки I_A , I_B и I_C симметричны I относительно прямых BC , AC и AB соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников AI_AI , BI_BI , CI_CI лежат на одной прямой.
2. Решите уравнение в целых числах $3x^2 - y^2 = 3^{x+y}$.
3. В команде на ЧГК есть семь человек. Но как мы знаем, в ЧГК можно играть только шестером. Поэтому каждый вопрос они меняют одного игрока на другого и все вместе пересаживаются. Известно, что любых шестерых участников можно посадить по кругу так, чтобы каждый сидел рядом с двумя своими друзьями. Докажите, что можно так посадить всех семерых, что каждый будет сидеть рядом со своими друзьями.
4. Найдите значение выражения

$$\frac{(3^4 + 4) \cdot (7^4 + 4) \cdot \dots \cdot (2019^4 + 4) \cdot (2023^4 + 4)}{(1^4 + 4) \cdot (5^4 + 4) \cdot \dots \cdot (2017^4 + 4) \cdot (2021^4 + 4)}$$

5. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB , а хорда AE делит пополам радиус OC . Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC .
6. Алиса, Вадим и Настя записали на доске 3 числа a , b и c . Затем пришел Матвей и стёр с доски все числа, заменив их на попарные произведения. Из-за этого в классе начался суший кошмар... До наших дней дошла информация от очевидцев, что на доске в итоге было записано два последовательных числа и два числа отличались на 1024. Восстановите числа, которые загадали изначально.

7. Пока Никита разбирался в теории чисел, он заметил, что число

$$\underbrace{1 \dots 1}_p \underbrace{2 \dots 2}_p \underbrace{3 \dots 3}_p \dots \underbrace{9 \dots 9}_p - 123456789$$

делится на p при любом простом p . Докажите это.

8. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «СУ-ПЕРИЗБАЛОВАНАЯ», чтобы никакие две гласные не стояли рядом?