

## Рациональность

- [1] Числа  $x, y$  и  $z$  таковы, что все три числа  $x + yz, y + zx$  и  $z + xy$  рациональны, а  $x^2 + y^2 = 1$ . Докажите, что число  $xyz^2$  также рационально.
- [2] Один из корней уравнения  $x^2 + ax + b = 0$  равен  $1 + \sqrt{3}$ . Найдите  $a$  и  $b$ , если известно, что они рациональны.
- [3] Олег нарисовал пустую таблицу  $50 \times 50$  и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 – иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца ("таблица умножения"). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
- [4] Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для каждой двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение – рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.
- [5] Докажите, что если выражение  $\frac{x}{x^2 + x + 1}$  принимает рациональное значение, то и выражение  $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$  также рационально.
- [6] Числовое множество  $M$ , содержащее 2023 различных положительных числа, таково, что для любых трех различных элементов  $a, b, c$  из  $M$  число  $a^2 + bc$  рационально. Докажите, что можно выбрать такое натуральное  $n$ , что для любого  $a$  из  $M$  число  $a\sqrt{n}$  рационально.
- [7] Пусть  $A$  и  $B$  – два прямоугольника. Из прямоугольников, равных  $A$ , сложили прямоугольник, подобный  $B$ . Докажите, что из прямоугольников, равных  $B$ , можно сложить прямоугольник, подобный  $A$ .