

## Дискретная непрерывность

- 0 В ряд сидят 10 мальчиков и 10 девочек.
- (а) Докажите, что можно выбрать 8 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
  - (б) Всегда ли из них можно выбрать 16 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
- 1 Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Налево!» некоторые из них повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?
- 2 По кругу сидят 25 мальчиков и 25 девочек.
- (а) Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
  - (б) Докажите, что для каждого чётного  $n$  от 2 до 50 можно выбрать  $n$  школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
- 3 (а) На плоскости есть  $2n$  точек. Докажите, что можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться  $n$  точек.
- (б) На плоскости есть  $2n + 1$  точка, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что через любую из них можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться  $n$  точек.
- 4 Вася и Петя играют в игру. На доске написаны два числа:  $\frac{1}{2022}$  и  $\frac{1}{2023}$ . На каждом ходу Вася называет любое число  $x$ , а Петя увеличивает любое из чисел на доске на  $x$ . Вася выигрывает, если когда-то одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Вася выиграть, как бы ни действовал Петя?
- 5 За круглым столом сидит 100 дедов, причем у любых двух соседей число волос в бороде отличается не больше чем на 100. Докажите, что найдется пара дедов, сидящих друг напротив друга, у которых число волос в бородах тоже отличается не больше, чем на 100.
- 6  $2n$  радиусов разделили круг на  $2n$  равных секторов:  $n$  синих и  $n$  красных, чередующихся в произвольном порядке. В синие сектора, начиная с некоторого, записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до  $n$  по порядку. В красные сектора, начиная с некоторого, записывают те же числа, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до  $n$ .