TD.1 Modèle ARMA

Exercice 1.

Pour chacun des modèles suivants, préciser s'il est causal, inversible, s'il est écrit sous sa forme canonique

$Z_t = 2Z_{t-1} + \varepsilon_t,$
$Z_t = Z_{t-1} - 0.25Z_{t-2} + \varepsilon_t,$
$Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t,$
$Z_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1},$
$Z_t = 0.5Z_{t-1} + \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1}.$

Exercice 2.

On suppose que $(Z_t)_t$ est un MA(2) centré :

$$Z_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2}, \text{ avec } (\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma^2). \tag{1}$$

1) Montrer que $(Z_t)_t$ est stationnaire au second ordre.
2) Calculer sa fonction de corrélation $\rho(k)$.

Exercice 3.

On considère le modèle

$$(1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_2 L)Z_t = \varepsilon_t, \text{ avec } (\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma^2). \tag{2}$$

1) Pour quelles valeurs de α_1 et α_2 $(Z_t)_t$ est stationnaire au second ordre.
2) Pour quelles valeurs de α_1 et α_2 $(Z_t)_t$ est causal.
Dans la suite on suppose que $(Z_t)_t$ est causal.
3) Exprimer $\rho(k)$ en fonction de $\rho(k-1)$, $\rho(k-2)$, α_1 et α_2.
4) On suppose que $\alpha_2 = 0$; exprimer $\rho(k)$ en fonction de α_1 et k.

Exercice 4.

On considère le modèle

$$Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t, Z_0 = 0, \text{ avec } (\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma^2).$$

1) Expliquer pourquoi (Z_t) n'est pas un AR(1).
2) Exprimer Z_n en fonction de $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$, en déduire $E(Z_n)$ et $var(Z_n)$.