Exercices du Chapitre 2

Exercice 1. Calculer la vraisemblance et la log-vraisemblance dans les cas ci-dessous. Préciser qui est $\mathscr{T}$ et si les hypothèses de la section 3.3 sont vérifiées.

1. Loi de Poisson : x est une seule observation, modélisée par une loi de Poisson de paramètre θ.
2. Loi exponentielle : x est un échantillon de taille n, $x = (x_1,\dots,x_n)$, et chaque observation est modélisée par une loi exponentielle d'espérance θ.
3. Loi de Cauchy centrée en θ : x est un échantillon de taille n, et chaque coordonnée est modélisée par la loi de Cauchy centrée en θ.
4. Loi géométrique : x est un échantillon modélisé par une loi géométrique de paramètre π.

Exercice 2. À l'aide d'un logiciel, tracer la log-vraisemblance dans le cas de lois exponentielles, ou des lois de Cauchy de l'échantillon $225, 171, 198, 189, 189, 135, 162, 135, 117, 162$, qui représente des moyennes (exprimées milliers de cycles de charge) d'une dizaine de groupe de ressorts avant qu'ils ne s'abiment.

Suivant la valeur de c, quelle est la forme de l'ensemble des valeurs plausibles pour le paramètre, donné par $\{\theta : \ell(\theta) > c\}$.

Exercice 3. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ sur un échantillon de taille n où chaque observation est modélisée par la loi ci-dessous.

1. $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbf{1}\{0 < x < 1\}$, où $\theta > 0$,
2. $f(x|\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}\mathbf{1}\{x > 0\}$, où $\theta > 0$,
3. $f(x|\theta) = (\theta+1)x^{-\theta-2}\mathbf{1}\{x > 1\}$, où $\theta > 0$.

Exercice 4. Calculer l'information de Fisher dans le cas d'un échantillon de taille n :

1. de loi marginale $\mathscr{B}(\pi)$,
2. de loi marginale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$.

Exercice 5. On considère un échantillon $x = (x_1,\dots,x_n)$ où chaque coordonnée est modélisée par une loi de Bernoulli de paramètre π. Montrer que $S = X_1 + \cdots + X_n$ est une statistique exhaustive. Est-elle minimale ?

Même question lorsque chaque coordonnée est modélisée par une gaussienne centrée en θ, de variance 1.

Même question lorsque chaque coordonnée est modélisée par une loi de Poisson de paramètre θ.

Exercice 6. Soit $X = (X_1,\cdots,X_n)$ un échantillon de taille n de la loi uniforme sur $[0;\theta]$. On note $\hat{\theta}_n = \max(X_1,\cdots,X_n)$, et $\tilde{\theta}_n = 2\bar{X}_n$.

1. Montrer que $\tilde{\theta}_n$ est un estimateur sans biais et consistant de θ, et que $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta)$ converge en loi vers $\mathscr{N}(0, \theta^2/3)$.
2. Construire un intervalle de confiance de coefficient de sécurité asymptotique $1-\alpha$, basé sur $\tilde{\theta}_n$.
3. Montrez que $\hat{\theta}_n/\theta$ est un pivot pour l'estimation de θ.
4. Construire un intervalle de confiance pour θ de coefficient de sécurité $1-\alpha$, basé sur $\hat{\theta}_n$.
5. Comparer les deux intervalles.

Exercice 7. Un 25-échantillon d'une population normale de variance $\sigma^2 = 81$ a donné une moyenne empirique de 81.2. Trouver un intervalle de confiance de coefficient de sécurité 0.95 pour la moyenne μ.

Exercice 8. Soit $\bar{X}_n$ la moyenne empirique d'un n-échantillon de la loi $\mathscr{N}(\mu, \sigma = 4)$. Trouver la valeur minimale de n telle que $[\bar{X}_n - 1; \bar{X}_n + 1]$ soit un intervalle de confiance pour μ de coefficient de sécurité 90%.

Exercice 9. Un produit commercialisé est présenté dans des boites sur lesquelles on peut lire : *contenance 500 grammes*. On peut se demander ce que signifie cette donnée car la quantité contenue dans une boite choisie au hasard est une variable aléatoire supposée à densité (et désignée par X). Soit μ la moyenne de la variable X. Les informations recueillies auprès du fabricant permettent d'affirmer que dans ce cas la valeur de μ est censée être égale à 500 grammes.

1. Donner un intervalle de confiance pour μ de coefficient de sécurité 95%.
2. Tester si la norme du fabricant est respectée.

Données (en grammes) : 490 ; 490 ; 490 ; 492 ; 492 ; 495 ; 497 ; 497 ; 502 ; 505.