Master 2 Data Science
TD5 - Cours de Deep Learning
Réseaux récurrents

Repris du cours de T. Artières and S. Ayache
QARMA team - LIS lab

Janvier 2025

I. Nombre de paramètres dans les modèles récurrents

On considère des modèles récurrents *SimpleRNN*, *LSTM*, et *GRU* de *keras* construits pour des données de dimension d'entrée de séquences de 12 vecteurs de dimension 72, et pour la classification des séquences en 8 classes.

(1) On vous donne l'architecture suivante d'un réseau récurrent standard (*SimpleRNN* en *keras*). Dessinez le modèle en indiquant des noms pour les matrices de poids, les représentations dans les couches cachées, etc.

```
_________________________________________________________________
Layer (type)                 Output Shape              Param #
=================================================================
input_41 (InputLayer)        (None, 12, 72)            0
_________________________________________________________________
simple_rnn_23 (SimpleRNN)    (None, 12, 100)           17300
_________________________________________________________________
simple_rnn_24 (SimpleRNN)    (None, 100)               20100
_________________________________________________________________
dense_28 (Dense)             (None, 8)                 808
=================================================================
Total params: 38,208
Trainable params: 38,208
Non-trainable params: 0
```

(2) Expliquez le nombre de paramètres du modelè *SimpleRNN* de la figure précédente.

(3) Expliquez le nombre de paramètres du modelè *LSTM* suivant:

Layer (type)	Output Shape	Param #
input_42 (InputLayer)	(None, 12, 72)	0
lstm_21 (LSTM)	(None, 12, 100)	69200
lstm_22 (LSTM)	(None, 100)	80400
dense_29 (Dense)	(None, 8)	808

Total params: 150,408
Trainable params: 150,408
Non-trainable params: 0

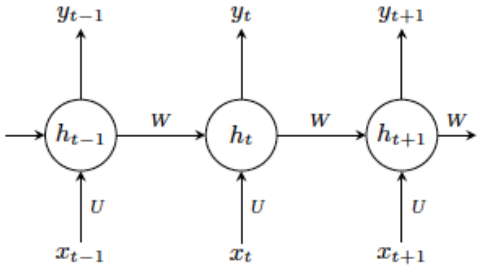
(4) Expliquez le nombre de paramètres du modelè GRU suivant:

Layer (type)	Output Shape	Param #
input_40 (InputLayer)	(None, 12, 72)	0
gru_9 (GRU)	(None, 12, 100)	51900
gru_10 (GRU)	(None, 100)	60300
dense_27 (Dense)	(None, 8)	808

Total params: 113,008
Trainable params: 113,008
Non-trainable params: 0

II. Propagation du gradient dans les RNN standards

On considère le modèle *RNN* suivant. L'état h_t est calculé suivant : $h_t = \sigma(Wh_{t-1} + Ux_t)$ avec $\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$.



Soit L la fonction objectif définie comme la somme des L_t à chaque pas de temps: $L = \sum_{t=1}^{T} L_t$, où L_t est un terme de cout réel dépendant de y_t et donc de h_t (voir figure).

(1) Soit $u = \sigma(A \times v)$ avec $u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^{n \times d}$. Montrez que le Jacobien $\frac{\partial u}{\partial v}$ est égal à $Diag(\sigma') \times A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ où vous expliciterez $Diag(\sigma')$.

(2) Montrer que $\frac{\partial L}{\partial W}$ peut s'exprimer comme : $\frac{\partial L}{\partial W} = \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{t} \frac{\partial L_t}{\partial h_t} \frac{\partial h_t}{\partial h_k} \frac{\partial h_k}{\partial W}$.

III. Evanouissement / explosion du gradient dans les *RNNs*.

On repart de la seconde question de l'exercice précédent pour étudier sous quelles conditions la norme du gradient peut exploser ou s'évanouir si le nombre de couches augmente.

(1) Ré-ecrire $\frac{\partial L}{\partial W}$ en développant dans le cas où $T = 3$. Il devrait apparaître la matrice $[Diag(\sigma') \times W]$ élevée à la puissance. Note : Le diag de σ' n'est pas toujours le meme (abus de notation).

(2) Faire apparaître la matrice $[Diag(\sigma') \times W]$ élevée à la puissance dans le cas général de la seconde question de l'exercice précédent.

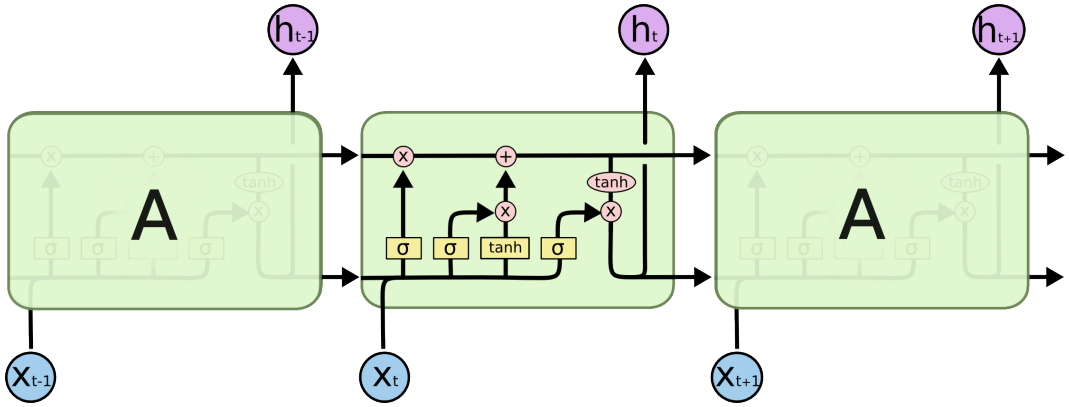
(3) On rappelle que toute matrice carrée diagonalisable M peut s'exprimer, par décomposition en vecteurs propres, sous la forme $M = Q\Lambda Q^{-1}$ où Q est une matrice dont la i^{ime} colonne est le i^{ime} vecteur propre de M et Λ est la matrice dans laquelle les valeurs propres correspondantes occupent la diagonale. Montrer que $M^n = Q\Lambda^n Q^{-1}$.

(4) Qu'en déduisez vous sur le calcul du gradient dans un *RNN* si la longueur de la séquence d'entrée T est grande ? Que se passe-t-il si les valeurs propres sont (en valeur absolue) égales à 1, inférieures à 1, supérieures à 1 ?

IV. LSTMs

On rappelle ci-dessous les équations régissant les cellules *LSTM* :

$$
\begin{aligned}
f_t &= \sigma(W_f h_{t-1} + U_f x_t) \\
i_t &= \sigma(W_i h_{t-1} + U_i x_t) \\
o_t &= \sigma(W_o h_{t-1} + U_o x_t) \\
\tilde{c}_t &= tanh(W_c h_{t-1} + U_c x_t) \\
c_t &= f_t \odot c_{t-1} + i_t \odot \tilde{c}_t \\
c_t &= f_t \odot c_{t-1} + i_t \odot \tilde{c}_t \\
h_t &= o_t \odot tanh(c_t)
\end{aligned}
$$



(1) Que représentent:

- La forget gate: f_t?
- L'input gate: i_t ?
- L'output: o_t ?

(2) Pour calculer le gradient du loss L en sortie du réseau par rapport aux paramètres du réseau (W_c, W_i, W_o, ...) il faut pouvoir calculer, comme dans le cas du RNN simple le gradient par rapport à l'état c_t, qui dépend des valeurs de l'état aux instant précédents. Montrer que pour une des matrices de poids W on peut obtenir:

$$\frac{\partial L}{\partial W} \approx \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{t} \frac{\partial L_t}{\partial c_t} \frac{\partial c_t}{\partial c_k} \frac{\partial c_k}{\partial W}$$

(3) Supposons que $\forall t, f_t = 1$ et $i_t = 0$. Que vaut $\frac{\partial c_t}{\partial c_k}$ dans ce cas ? Et que vaut le gradient précédent ?

(4) Exprimez dans le cas général $\frac{\partial c_t}{\partial c_{t-1}}$.