Exercices du Chapitre 4

Exercice 1 (Modèle binomial)**.** Soient $\alpha, \beta > 0$. La loi Beta de paramètres (α, β), notée Beta(α, β) est la loi sur $[0;1]$ de densité

$$\theta \mapsto \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}.$$

Sa constante de normalisation vaut $B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \Big/ \Gamma(\alpha+\beta)$. Son espérance vaut $\alpha \big/ (\alpha+\beta)$, et sa variance vaut

$$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

En particulier, la loi Beta$(1,1)$ est la loi uniforme sur $[0;1]$.

On considère un échantillon $X_{1:n} \sim \mathscr{B}(\theta)^{\otimes n}$, et on s'intéresse au paramètre $\theta \in [0;1]$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. En utilisant une approximation gaussienne de la loi de $\hat{\theta}_n = S_n / n$, les livres de statistique propose un intervalle de confiance approché de niveau $(1-\alpha)$ pour θ avec les formules

$$\left[\hat{\theta}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}} \ ; \ \hat{\theta}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}} \right]$$

   où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.
   Que pensez-vous de cet intervalle de confiance approché si $x_{\text{obs}} = (1,1,\ldots,1)$ de taille n ? Et si $x_{\text{obs}} = (0,0,\ldots,0,1)$?
2. Quelle est la loi a posteriori de Θ lorsque la loi a priori est la loi Beta(α,β) ?
3. Quelle est l'espérance et la variance de cette loi a posteriori ?
4. L'espérance a posteriori, vue comme une fonction de X, est-elle un estimateur consistant de θ ?
5. Des intervalles de crédibilité pour θ lorsque x_{obs} est le même que dans la question 1 ont-ils les mêmes défauts que les intervalles de confiance asymptotiques fournis par la réponse à cette question ?

Exercice 2 (Loi géométrique)**.** On s'intéresse à X, un échantillon $X_{1:n} | \Theta = \theta \sim \mathscr{G}(\theta)^{\otimes n}$, et au paramètre θ de cette loi.

On considère la loi a priori $\Theta \sim$ Beta(α,β).

1. Calculer la loi a posteriori de Θ, et l'espérance a posteriori.
2. Cette espérance a posteriori, vue comme une fonction de X, est-elle un estimateur consistant du paramètre d'intérêt ?

Exercice 3 (Modèle gaussien à variance fixé)**.** On s'intéresse au modèle gaussien d'un échantillon $X = X_{1:n} \sim \mathscr{N}(\mu,\sigma^2)^{\otimes n}$, où l'on suppose la variance σ^2 connue. Le paramètre est donc $\theta = \mu$. On notera $x_{1:n} = (x_1,\ldots,x_n)$ l'observation.

1. Calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne des deux estimateurs X_1 et $\bar{X}_n = n^{-1}(X_1 + \cdots X_n)$ de μ. Lequel a l'erreur la plus faible ?
2. On suppose que l'on dispose de l'information a priori que $\mu \sim \mathscr{N}(m,\tau^2)$. Calculer la loi a posteriori.
3. Calculer l'estimateur de Bayes pour l'erreur quadratique. Quel est son rique ?

Exercice 4. On s'intéresse au paramètre θ d'un échantillon $X_{1:n} \sim \mathscr{B}(\theta)^{\otimes n}$. En utilisant différentes lois a priori, proposer toute une famille d'estimateurs admissibles pour θ. Quels sont leurs risques quadratiques moyens ?

Exercice 5. On partionne l'espace des paramètres en deux : $\mathscr{T} = \mathscr{T}_0 \cup \mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_0 \cap \mathscr{T}_1 = \emptyset$. On s'intéresse à $\Psi(\Theta) \in \{0,1\}$ défini par $\Psi(\theta) = \mathbf{1}\{\theta \in \mathscr{T}_1\}$. Et on utilise la fonction de perte $d(\hat{\psi},\psi) = \mathbf{1}\{\hat{\psi} = \psi\}$ (on remarquera que l'on cherche alors à maximiser $\mathbb{E}_\theta(d(\hat{\psi},\psi))$.)

1. Calculer le risque d'un estimateur $s(X)$ à valeurs dans $\{0,1\}$.
2. Si on se donne une loi a priori sur $\mathscr{T}$, quel est l'estimateur bayésien associé à ce coût ?

Exercice 6. On s'intéresse au cas où $\mathscr{T}$ est un ensemble fini, et où on veut estimer $\theta \in \mathscr{T}$ à partir d'une observation x à valeur dans un ensemble fini $\mathscr{X}$. On fixe une loi a priori, et on introduit le coût $d(\hat{\theta},\theta) = \mathbf{1}\{\hat{\theta} = \theta\}$. Montrer que l'estimateur de Bayes est l'estimateur du maximum a posteriori $s(X) = \mathrm{argmax}_\theta\, \pi(\theta|X)$, où $\pi(\theta|x)$ est la fonction de masse a posteriori $(= \mathbb{P}(\Theta = \theta | X = x))$.