Отчёт по лабораторной работе №6

Задача об эпидемии.

Волков Тимофей Евгеньевич

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Цель данной работы — рассмотреть простейшую модель эпидемии.

2 Задание

2.1 Вариант 17

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове (N=10 300) в момент начала эпидемии (t=0) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) I(0)=55, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни R(0)=27. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени S(0)=N-I(0)- R(0).

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) <= I^*$
2. если $I(0) > I^*$

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через S(t). Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их I(t). А третья группа, обозначающаяся через R(t) – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа S(t) меняется по следующему закону:

$$dS/dt = \begin{cases} -\alpha S, I(t) > I^* \\ 0, I(t) <= I^* \end{cases}$$

(1)

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$dI/dt = \begin{cases} \alpha S - \beta I, I(t) > I^* \\ -\beta I, I(t) <= I^* \end{cases}$$

(2)

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$dR/dt = \beta I$$

(3)

Постоянные пропорциональности α, β — это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия .Считаем, что на начало эпидемии в момент времени t = 0 нет особей с иммунитетом к болезни R(0) = 27, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей I(0) и S(0) соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) <= I^*$ и $I(0) > I^*$

3.2 Построение графиков

Т.к. коэффициент заболеваемости и выздоровления не даны, будем считать, что они равны 0.01 и 0.02 соответственно.

Тогда начальные условия:

a = 0.01 — коэффициент заболеваемости

b = 0.02 — коэффициент выздоровления

N = 10300 — общая численность популяции

I0 = 55 — количество инфицированных особей в начальный момент времени

R0 = 27 — количество здоровых особей с иммунитетом в начальный момент времени

S0 = N - I0 - R0 — количество восприимчивых к болезни особей в начальный момент времени

3.2.1 Для $I(0) <= I^*$

Дано:

$$dS/dt = 0$$

$$dI/dt = -\beta I$$

$$dR/dt = \beta I$$

Код программы в Python (fig. 3.1).

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import math

a = 0.01
b = 0.02
N = 10300
I0 = 55
R0 = 27
S0 = N - I0 - R0

x0 = [S0, I0, R0]
t = np.arange(0, 200, 0.01)

def dx(x, t):
    dx1 = 0
    dx2 = - b*x[1]
    dx3 = b*x[1]
    return dx1, dx2, dx3

y = odeint(dx, x0, t)

y1 = y[:, 0]
y2 = y[:, 1]
y3 = y[:, 2]

plt.plot(t, y1, label = 'S(t)')
plt.plot(t, y2, label = 'I(t)')
plt.plot(t, y3, label = 'R(t)')
plt.legend()
plt.grid('axis = "both"')
```

Figure 3.1: Код программы

График (fig. 3.2).

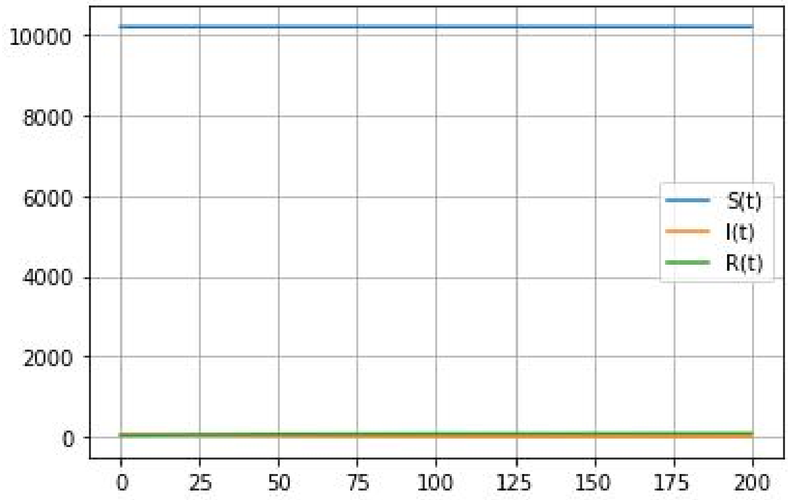

Figure 3.2: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, когда $I(0) <= I^*$

3.2.2 Для $I(0) > I^*$

Дано:

$$dS/dt = -\alpha S$$

$$dI/dt = \alpha S - \beta I$$

$$dR/dt = \beta I$$

Код программы в Python (fig. 3.3).

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import math

a = 0.01
b = 0.02
N = 10300
I0 = 55
R0 = 27
S0 = N - I0 - R0

x0 = [S0, I0, R0]
t = np.arange(0, 200, 0.01)

def dx(x, t):
    dx1 = - a*x[0]
    dx2 = a*x[0] - b*x[1]
    dx3 = b*x[1]
    return dx1, dx2, dx3

y = odeint(dx, x0, t)

y1 = y[:, 0]
y2 = y[:, 1]
y3 = y[:, 2]

plt.plot(t, y1, label = 'S(t)')
plt.plot(t, y2, label = 'I(t)')
plt.plot(t, y3, label = 'R(t)')
plt.legend()
plt.grid('axis = "both"')
```

Figure 3.3: Код программы

График (fig. 3.4).

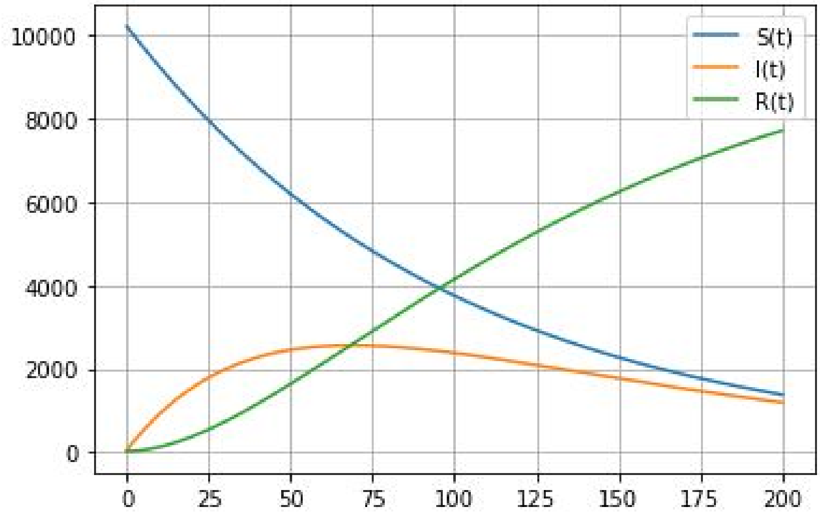

Figure 3.4: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, когда $I(0) > I^*$

4 Выводы

Рассмотрел простейшую модель эпидемии.