Отчёт по лабораторной работе №5

Модель хищник-жертва.

Волков Тимофей Евгеньевич

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Цель данной работы — рассмотреть модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» — модель Лотки-Вольтерры.

2 Задание

2.1 Вариант 17

Для модели «хищник-жертва»:

$$dx/dt = -0.69x(t) + 0.068x(t)y(t)$$

$$dy/dt = 0.67y(t) - 0.066x(t)y(t)$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 4$, $y_0 = 11$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Постановка задачи

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$dx/dt = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$dy/dt = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

(1)

В этой модели x — число жертв, y — число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c —

естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy и dxy в правой части уравнения).

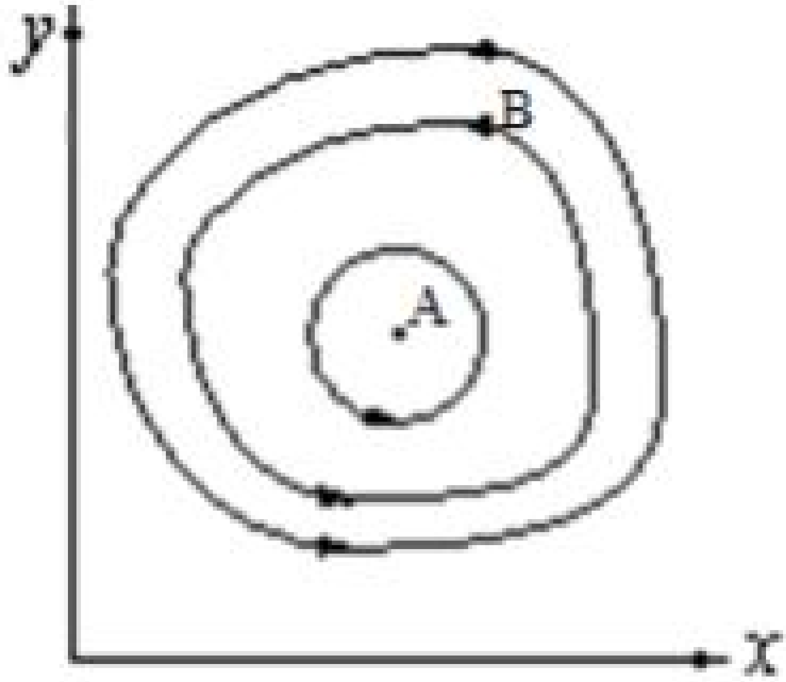

Figure 3.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры.

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на fig. 3.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = c/d$, $y_0 = a/b$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей x(0), y(0). Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

$$dx/dt = ax(t) - bx(t)y(t) + \epsilon f(x, y)$$

$$dy/dt = -cy(t) + dx(t)y(t) + \epsilon g(x, y), \epsilon << 1$$

(2)

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 (fig. 3.2).

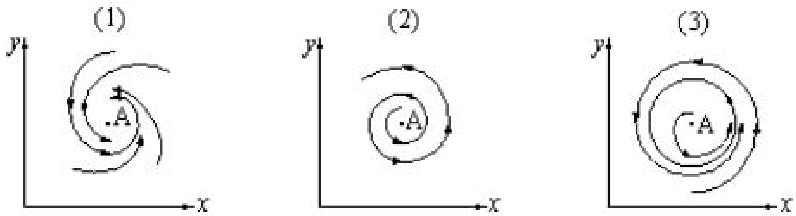

Figure 3.2: Мягкая модель борьбы за существование.

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости.

3.2 Построение графиков

Дано:

$$dx/dt = -0.69x(t) + 0.068x(t)y(t)$$

$$dy/dt = 0.67y(t) - 0.066x(t)y(t)$$

Тогда начальные условия:

a = 0.69 — коэффициент естественной смертности хищников

b = 0.068 — коэффициент увеличения числа хищников

$c = 0.67$ — коэффициент естественного прироста жертв

$d = 0.066$ — коэффициент смертности жертв

$x_0 = 4$

$y_0 = 11$

Код программы в Python (fig. 3.3).

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import math

a = 0.69
b = 0.68
c = 0.67
d = 0.066

def dx(x, t):
    dx1 = - a*x[0] + b*x[0]*x[1]
    dx2 = c*x[1] - d*x[0]*x[1]
    return dx1, dx2

x0 = [4, 11]

t = np.arange(0, 150, 0.1)

y = odeint(dx, x0, t)

y1 = y[:, 0]
y2 = y[:, 1]

plt.plot(t, y1, label = 'хищники')
plt.plot(t, y2, label = 'жертвы')
plt.legend()
plt.grid('axis = "both"')

#plt.plot(y1, y2)
#plt.grid('axis = "both"')
```

Figure 3.3: Код программы

График зависимости (fig. 3.4).

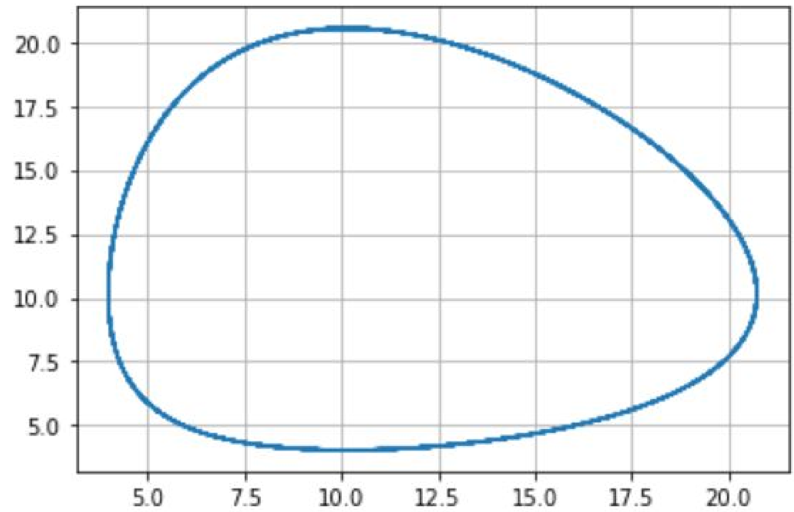

Figure 3.4: График зависимости численности хищников от численности жертв

Графики изменения (fig. 3.5).

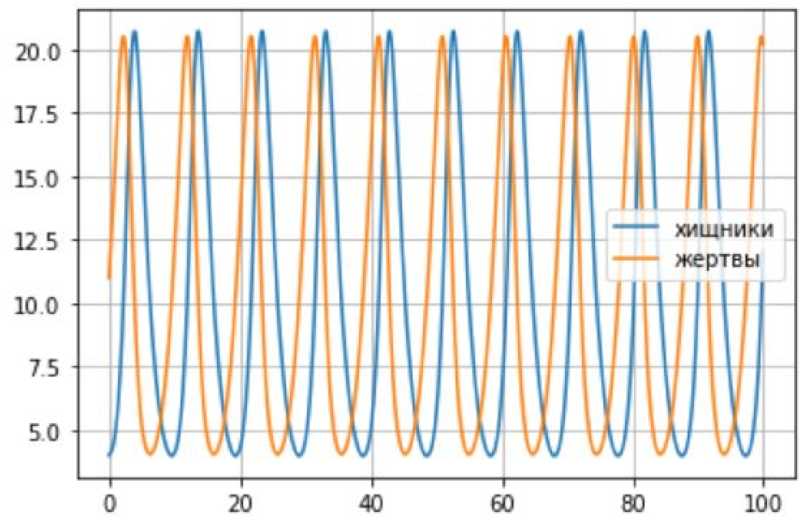

Figure 3.5: Графики изменения численности хищников и численности жертв

4 Выводы

Рассмотрел модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» — модель Лотки-Вольтерры.