

1

Développement des mocks

Dans ce chapitre, nous présentons la construction des *mocks* : des spectres de quasars simulés, dont les forêts Ly α sont corrélées entre elles et avec le champ de quasars sous-jacent. Ces mocks visent à reproduire les données d'eBOSS et de DESI. Ils sont nommés **SaclayMocks** et présentés dans ?. Le code est écrit en Python¹ et se trouve en accès libre sur GitHub². L'utilisation de ces mocks et leur validation seront présentés dans les chapitres suivants.

1 Objectifs des mocks

Contrairement à ce qu'on appelle les simulations, les mocks ne contiennent pas de physique à proprement parler : ils ne sont pas utilisés afin de déduire des paramètres astrophysiques. Certaines simulations, les simulations hydrodynamiques, permettent de mesurer des effets astrophysiques, comme par exemple le biais de l'hydrogène ou du Ly α . Mais ces simulations sont très couteuses car elles nécessitent de modéliser les effets physiques qui affectent les paramètres mesurés. Les mocks, quant à eux, sont conçus afin de répliquer rapidement un jeu de données, dans le but de tester l'analyse qui sera appliquée sur ces données. Les mocks sont donc utilisés afin

- de vérifier la mesure des paramètres α_{\parallel} , α_{\perp} : cette mesure est-elle non biaisée ?
- d'identifier les potentielles systématiques : la présence de métaux et d'HCD dans les données est-elle bien modélisée ? Affecte-t-elle la mesure de α_{\parallel} , α_{\perp} ?
- de tester la matrice de distorsion : la distorsion de la fonction de corrélation due à l'ajustement du continuum du quasar est-elle correctement prise en compte par la matrice de distorsion ?
- de vérifier l'estimation de la matrice de covariance : la matrice de covariance, calculée à partir des données, est-elle bien estimée ?

La production et l'analyse d'un grand nombre de mocks permet de répondre précisément à ces questions. Ces mocks sont donc nécessaires pour pouvoir valider l'analyse menée sur les données.

Les mocks décrits dans ce manuscrit s'inscrivent dans les projets eBOSS et DESI. Ils sont utilisés dans l'analyse Ly α des données complète d'eBOSS (?), et seront utilisés dans l'analyse Ly α de DESI. L'objectif de ces mocks est donc de répliquer au mieux les données Ly α d'eBOSS et de DESI. Ces relevés couvrent un volume de plusieurs dizaines de Gpc³, et les échelles sondées grâce au Ly α descendent jusqu'à la centaine de kpc. Les mocks nécessitent donc de reproduire un volume immense, avec une bonne résolution. Les simulations dites *N-corps* sont des simulations qui traitent le problème à N corps. Elles sont initialisées avec une distribution de matière noire, représentée par des macro-particules de masse $\sim 10^9 M_{\odot}$, à un redshift élevé ($z > 100$). Puis, à chaque pas de temps, ces macro-particules sont déplacées en considérant uniquement les interactions gravitationnelles. Le champ de matière initial évolue ainsi jusqu'à $z = 0$. Ces simulations sont très utiles pour étudier les effets de la gravité à grande échelle. Cependant elles ne sont pas adaptées à notre utilisation : afin d'avoir la résolution et le volume requis, la simulation nécessiterait beaucoup trop de macro-particules pour être réalisable dans un temps raisonnable.

Les simulations hydrodynamiques fonctionnent de la même manière que les simulations N-corps. Elles incluent, en plus des macro-particules de matière noire, la physique baryonique présente dans le milieu galactique. Les baryons sont aussi représentés par des macro-particules. Afin de résoudre l'intérieur des galaxies, les macro-particules utilisées possèdent une masse plus faible que dans le cas des simulations N-corps. En contrepartie, le volume simulé est plus petit. Dans le cas des simulations hydrodynamiques, la densité, la pression et la température sont tracées dans chaque cellule. Certains effets astrophysiques, comme les supernovae ou les AGN peuvent aussi être présents. **Ces simulations**

1. <https://www.python.org/>

2. <https://github.com/igmhub/SaclayMocks>

nécessitent encore plus de temps de calcul que les simulations N-corps. Elles ne sont donc pas non plus adaptées à notre utilisation.

seul les GRF

Ainsi, avoir un grand volume et une grande résolution requiert l'utilisation des *champs aléatoires gaussiens* (GRF pour Gaussian Random Field). Ce sont des champs qui en chaque point prennent une valeur aléatoire selon une statistique gaussienne. Une fois générés, il est possible de donner à ces champs n'importe quelle fonction de corrélation, en utilisant la transformation de Fourier. Les GRF sont donc idéaux pour simuler le champ de matière à grande échelle. Ces champs sont utilisés notamment dans les simulations N-corps, afin de fournir les conditions initiales. Cependant, l'utilisation des GRF ne donne pas accès aux non linéarités qui peuvent émerger dans l'évolution des simulations N-corps et hydrodynamiques. La seule information provient de la fonction de corrélation que l'on applique au GRF. Mais cela est entièrement suffisant pour l'utilisation que nous en avons dans ce manuscrit : nous générerons un champ gaussien destiné à simuler le champ d'absorption Ly α et le champ de quasars, dont les fonctions d'auto corrélation et de corrélation croisée sont choisies afin de correspondre à ce qui est observé dans les données.

2 Construction des mocks

Dans cette section, nous détaillons comment les mocks sont générés. Nous présentons d'abord la génération des champs de densité, puis comment les quasars sont tirés à partir de ces champs de densité. Nous expliquons ensuite comment nous calculons la densité le long de la ligne de visée de chaque quasar. Enfin, nous présentons comment la densité le long de la ligne de visée est transformée en fraction de flux transmis, et comment nous tirons les HCD.

2.1 Les champs de densité

La première étape dans la création des mocks est de générer les boîtes qui contiennent le champ de densité δ . D'abord, un GRF est généré dans une boîte de $2560 \times 2560 \times 1536$ voxcells, chaque voxcell faisant $d_{cell}^3 = (2,19 h^{-1} \text{ Mpc})^3$. Afin que le champ δ possède la bonne fonction de corrélation, une transformation de Fourier 3D¹ est appliquée sur la boîte, puis la boîte δ_k ainsi obtenue est multipliée par

$$\sqrt{\frac{P(k)}{d_{cell}^3}}, \quad (1.1)$$

delta a comme

où $P(k)$ est le spectre de puissance désiré. Ce procédé garanti que le champ δ_k suive le spectre de puissance $P(k)$. Il est ensuite possible d'obtenir la boîte δ dans l'espace réel grâce à une transformation de Fourier inverse de la boîte δ_k .

Le GRF pourrait être tiré directement dans l'espace k . Dans ce cas, il nous faut tirer deux champs gaussiens : un pour la partie réelle, et un autre pour la partie imaginaire. La transformation de Fourier prenant moins de temps que la génération du champ aléatoire, nous préférons générer le champ dans l'espace réel plutôt que dans l'espace k . Dans la suite nous décrivons les différentes boîtes nécessaires à la construction des mocks : les boîtes champs utilisées pour tirer les quasars, la boîte utilisée pour créer l'absorption Ly α , ainsi que les boîtes de vitesse et de gradient de vitesse. Afin de garantir leur corrélation, toutes ces boîtes sont construites à partir de la même boîte initial δ_k .

1. Nous utilisons la librairie pyFFTW (<https://github.com/pyFFTW/pyFFTW>), une adaptation python de la librairie FFTW (<http://www.fftw.org/>).

Les quasars

Afin de construire un relevé de quasars corrélés, nous tirons les quasars selon le champ dans l'espace réel δ_{QSO} , construit à partir de δ_k . Une première solution est de tirer les quasars dans les cellules dont le champ δ_{QSO} est supérieur à un certain seuil. Cette solution produit une fonction de corrélation correcte aux grandes échelles, mais pas aux petites. En effet, comme expliqué précédemment, l'utilisation des GRF ne permet pas de capturer l'évolution non linéaire du champ de matière, qui se manifeste aux petites échelles. Plutôt que de modéliser ces non linéarités, nous considérons une seconde solution : nous considérons que les quasars suivent une distribution log-normale. Ceci permet d'obtenir une meilleure corrélation aux petites échelles. Ce choix est souvent fait pour simuler des relevés de galaxies (Agrawal et al., 2017), et est en accord avec ce qui est observé dans les données (Clerkin et al., 2016). Ainsi, dans chaque voxcell, les quasars sont tirés avec une probabilité

$$P \propto e^{\delta_q}, \quad \text{voxel (mot valise)} \quad (1.2)$$

Ce n'est pas la raison où δ_q est le champ de densité dans le voxcell considéré. Comme montré par ?, afin que les quasars suivent la fonction de corrélation $\xi(r)$, le champ δ_q doit suivre la fonction de corrélation

$$\xi_q(r) = \ln(1 + \xi(r)). \quad (1.3)$$

Nous verrons section 2.2 que, de manière à obtenir un relevé synthétique de quasars dont le biais dépend de z , nous utilisons trois boîtes qui suivent des distributions log-normales, à des redshifts différents. La probabilité pour tirer les quasars dépend de l'interpolation de ces 3 boîtes. Pour chacune des boîtes, nous partons du spectre de puissance de la matière $P_{\text{matière}}(k)$ à $z = 0$, fournit par Camb (Lewis et al., 1999). Nous multiplions ensuite ce spectre de puissance par $(b_{\text{QSO}}(z_i)G(z_i))^2$, où $i \in [1, 2, 3]$. A l'aide de la transformation de Fourier, nous calculons la fonction de corrélation $\xi_i(r)$. Puis, nous déterminons le spectre de puissance $P_{\text{QSO},i}(k)$, à appliquer à la boîte δ_k , comme la transformée de Fourier de $\xi_{\text{QSO},i}(r) = \ln(1 + \xi_i(r))$ (équation ??). Une fois les trois spectres de puissances $P_{\text{QSO},i}(k)$ obtenus, nous construisons 3 boîtes

$$\delta_{k,i}(k) = \delta_k(k) \sqrt{\frac{P_{\text{QSO},i}(k)}{V_{\text{cell}}}}, \quad (1.4)$$

où δ_k est le GRF dans l'espace de Fourier. Une fois ces 3 boîtes construites, nous appliquons à chacune d'entre elle une transformation de Fourier inverse afin d'obtenir les boîtes $\delta_{\text{QSO},i}$. Ces boîtes seront interpolées en z , puis les quasars seront ensuite tirés avec une probabilité $\propto \exp(\delta_{\text{QSO}}(z))$, où δ_{QSO} est la boîte interpolée. Nous expliquons cette étape dans la section 2.2.

Le champ Ly α

Afin de construire le champ d'absorption Ly α , nous avons besoin du champ de densité de l'hydrogène neutre. Comme expliqué dans la section ??, la fraction de flux transmis F est reliée à la profondeur optique τ par

$$F = \exp(-\tau). \quad (1.5)$$

De plus, la formule FGPA (Fluctuating Gunn Peterson Approximation) permet de relier la profondeur optique τ au contraste de densité δ à $z = 0$:

$$\tau(z) = a(z) e^{b(z) G(z) \delta} \quad (1.6)$$

Les paramètres a et b sont des paramètres à ajuster afin d'obtenir le bon biais du Ly α et la bonne transmission moyenne \bar{F} . Leur détermination est décrite dans la section ??.

Le facteur de croissance serait

G prend en compte l'évolution avec le redshift du champ de densité δ . Ainsi il nous suffit de construire un GRF qui suit la fonction de corrélation à $z = 0$ pour simuler le champ d'absorption du Ly α . Pour ce faire, nous partons de la même boîte δ_k utilisée pour construire les 3 boîtes log-normales des quasars. Ceci garantit la corrélation croisée entre les quasars et le champ d'absorption Ly α . Le spectre de puissance de la matière $P_{\text{matière}}(k)$ à $z = 0$ est ensuite appliqué à la boîte δ_k . Enfin, nous obtenons la boîte de densité $\delta_{\text{matière}}$ à $z = 0$ qui servira au calcul du champ d'absorption du Ly α en effectuant la transformée de Fourier de la boîte

$$\delta_{k,\text{matière}}(\vec{k}) = \delta_k(\vec{k}) \sqrt{\frac{P_{\text{matière}}(\vec{k})}{V_{\text{cell}}}}. \quad (1.7)$$

Les champs des vitesses

Afin d'inclure les RSD dans nos mocks, nous simulons aussi le champ des vitesses. À l'ordre linéaire, le champ des vitesses $v_{k,n}$ dans l'espace k selon la direction \vec{u}_n , avec $n \in [\text{X}, \text{Y}, \text{Z}]$, est relié au champ de densité δ_k par la relation (#prov mettre la démo ? voir dodelson)

$$v_{k,n}(\vec{k}) = \frac{ik_n}{k^2} \dot{a} f \delta_k(\vec{k}). \quad (1.8)$$

Il est fréquent (#prov approximation réaliste ? mettre une source) de considérer que le champ de vitesse des traceurs est le même que celui de la matière sous-jacente. Autrement dit, le champ de vitesse des traceurs est non biaisé. En ce qui concerne les quasars, nous simulons les RSD en déplaçant chaque quasar proportionnellement à sa vitesse le long de la ligne de visée (équation ??). Dans ce but, nous calculons les trois boîtes de vitesses $v_{k,\text{X}}$, $v_{k,\text{Y}}$ et $v_{k,\text{Z}}$ à $z = 0$, comme

$$v_{k,n}(\vec{k}) = \frac{-ik_n}{k^2} H_0 \frac{dG}{dz} \delta_{k,\text{matière}}(\vec{k}); \quad n \in [\text{X}, \text{Y}, \text{Z}]. \quad (1.9)$$

Cette équation est équivalente à l'équation 1.8 pour $z = 0$. Comme précédemment, la boîte $\delta_{k,\text{matière}}$ est la même que celle utilisée pour construire les boîtes $\delta_{\text{QSO},i}$ des quasars et la boîte $\delta_{\text{matière}}$ utilisée pour le Ly α , ceci afin de garantir la corrélation entre la densité des traceurs et leurs vitesses particulières. À l'aide d'une transformation de Fourier inverse, nous obtenons les trois boîtes de vitesse à $z = 0$ dans l'espace réel v_{X} , v_{Y} et v_{Z} . Le calcul pour obtenir la vitesse parallèle v_{\parallel} à un redshift z est décrit dans la section 2.2.

Concernant le champ d'absorption Ly α , les RSD sont prises en compte par une modification de la formule FGPA. Pour ce faire, nous avons besoin du gradient de vitesse η_{\parallel} à $z = 0$. Le gradient η_{nm} selon la direction \vec{u}_m de la vitesse v_n est défini comme

$$\eta_{nm}(\vec{k}) = \frac{k_n k_m}{k^2} f \delta_k(\vec{k}). \quad (1.10)$$

Cette équation permet de retrouver la formule de kaiser :

$$\begin{aligned} \delta_k^s(\vec{k}) &= \delta_k(\vec{k}) + \eta_{\parallel}(\vec{k}), \\ &= (1 + f \mu_k^2) \delta_k(\vec{k}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

(#prov : mettre la fin de la section dans une footnote ou un appendix?) Nous construisons donc 6 boîtes de gradients de vitesse, à $z = 0$, comme

$$\eta_{nm}(\vec{k}) = \frac{k_n k_m}{k^2} \delta_k(\vec{k}); \quad (n, m) \in [\text{X}, \text{Y}, \text{Z}]^2. \quad (1.12)$$

La boîte δ_k utilisée est le GRF initial, afin de garantir les corrélations entre les différents champs. Nous omettons volontairement le facteur $f(z = 0)$ à ce stade. Il sera pris en compte lors de l'ajout de la dépendance en redshift (voir section 2.4). À l'aide d'une transformation de Fourier, nous obtenons les 6 boîtes de gradients de vitesses à $z = 0$ dans l'espace réel η_{XX} , η_{YY} , η_{ZZ} , η_{XY} , η_{YZ} et η_{XZ} .

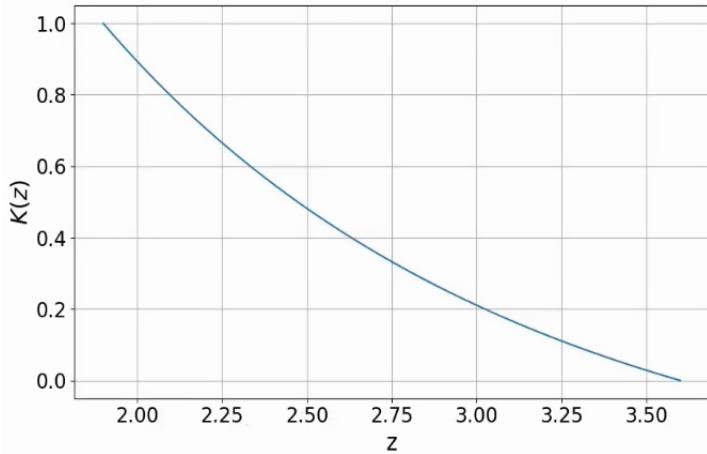


FIGURE 1.1 – Coefficient $K(z)$ défini dans l'équation 1.16.

2.2 Le relevé de quasars

Une fois toutes ces boîtes construites, nous définissons la géométrie du relevé. Les boîtes, d'une taille $2560 \times 2560 \times 1536$ selon les axes X, Y et Z respectivement, sont placées à un redshift central $z_0 = 1.71$, et à une ascension droite α_0 et une déclinaison δ_0 (voir équation 1.17). Leurs dimensions permettent de couvrir les redshifts $1.3 < z < 3.6$. L'observateur est considéré être à $z = 0$, au centre du plan (x, y). Afin de construire le catalogue de quasars, nous utilisons les trois boîtes $\hat{\delta}_{\text{QSO},i}$ construites précédemment, aux redshifts $z_1 = 1.9$, $z_2 = 2.75$, et $z_3 = 3.6$. Dans chaque cas, nous calculons

$$\hat{\delta}_{\text{QSO},i}(z) = \exp\left(\delta_{\text{QSO},i} \frac{b_{\text{QSO}}(z)(1+z_i)}{b_{\text{QSO}}(z_i)(1+z)}\right), \quad i \in [1, 2, 3], \quad (1.13)$$

où b_{QSO} est le biais des quasars. Le redshift dans chaque voxcell est calculé en utilisant l'équation ??.

Les paramètres cosmologiques utilisés sont donnés dans l'équation ??. Toutes les distances sont combinables. Une fois les 3 boîtes $\hat{\delta}_{\text{QSO},i}$ construites, nous construisons les deux boîtes fixés une bonne fois pour toute plus tôt dans le texte ?

$$\hat{\delta}_{\text{QSO},12}(z) = \hat{\delta}_{\text{QSO},1}(z) \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} + \hat{\delta}_{\text{QSO},2}(z) \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad (1.14)$$

$$\hat{\delta}_{\text{QSO},23}(z) = \hat{\delta}_{\text{QSO},2}(z) \frac{z_3 - z}{z_3 - z_2} + \hat{\delta}_{\text{QSO},3}(z) \frac{z - z_2}{z_3 - z_2}, \quad (1.15)$$

puis, nous construisons la boîte interpolée

$$\hat{\delta}_{\text{QSO}}(z) = K(z) (\hat{\delta}_{\text{QSO},12}(z) - \hat{\delta}_{\text{QSO},23}(z)) + \hat{\delta}_{\text{QSO},23}(z), \quad (1.16)$$

où $K(z)$ est un coefficient qui varie entre 0 et 1. Il est représenté sur la figure ???. Les quasars sont ensuite tirés dans chaque voxcell, avec une probabilité $P \propto \hat{\delta}_{\text{QSO}}$. Pour ce faire, nous générerons une variable ϕ aléatoire uniforme entre 0 et 1 dans chaque cellule. Les voxcells pour lesquelles $\phi < N(z)\hat{\delta}_{\text{QSO}}$ hébergent potentiellement un quasar. Le facteur $N(z)$ est un facteur de normalisation. Les quasars dont le redshift est en dehors de l'intervalle $[1.8; 3.6]$ sont écartés. Les quasars dont l'ascension droite et la déclinaison sont en dehors des intervalles $[-\Delta\alpha; \Delta\alpha]$ et $[-\Delta\delta; \Delta\delta]$ sont aussi écartés. L'ascension droite α et la déclinaison δ du point (x, y, z) sont définies comme

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\cos(\alpha_0)x - \sin(\delta_0)\sin(\alpha_0)y + \cos(\delta_0)\sin(\alpha_0)z}{-\sin(\alpha_0)x - \sin(\delta_0)\cos(\alpha_0)y + \cos(\delta_0)\cos(\alpha_0)z}\right), \quad (1.17)$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{\cos(\delta_0)y + \sin(\delta_0)z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right). \quad (1.18)$$

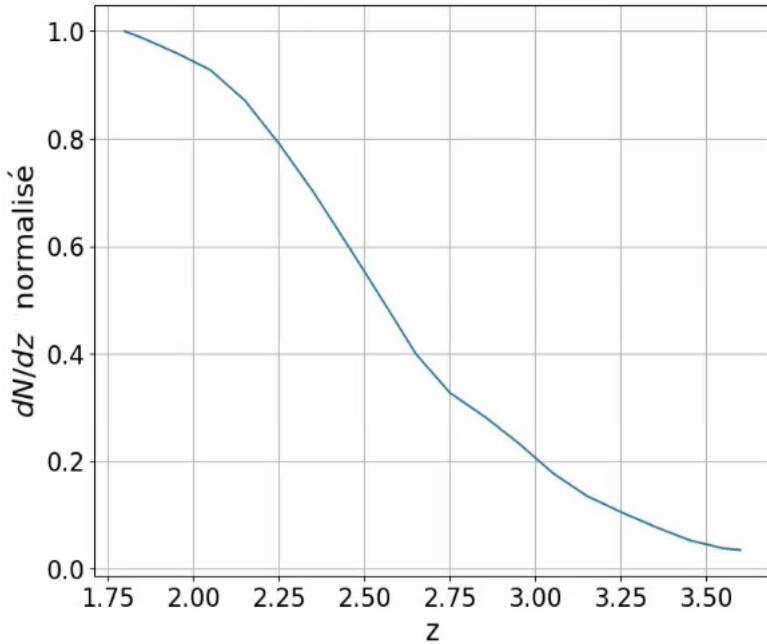


FIGURE 1.2 – Distribution **normalisée** en redshift des quasars tirés dans les mocks.
intégrale = 1 ?

Enfin, grâce au facteur de normalisation $N(z)$, les quasars sont tirés selon la distribution en z **normalisée** prédite pour DESI. Cette distribution est présentée sur la figure ???. Cependant, nous dirons environ deux fois plus de quasars, afin de pouvoir simuler, entre autre, la sélection des cibles à l'aide du code **quickquasars** (présenté dans la section ??). A la fin, nous obtenons environ 100 quasars à $z > 2,1$ par degré carré. Permettra d'être utilisé par Weave

Une fois les quasars tirés, nous les déplaçons proportionnellement à leur vitesse v_{\parallel} le long de la ligne de visée. Celle ci est définie comme

$$v_{\parallel} = \frac{v_x X + v_y Y + v_z Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} . \quad (1.19)$$

Ainsi, un quasar situé à une distance R sera remplacé le long de la ligne de visée à une distance

$$R \rightarrow R + \frac{1}{H(z)} v_{\parallel}(z) , \quad (1.20)$$

avec

$$v_{\parallel}(z) = (1+z) \frac{dG}{dz} \frac{H(z)}{H_0 \frac{dG}{dz}(z=0)} v_{\parallel} . \quad (1.21)$$

Le facteur $(1+z)$ vient de la conversion des distances en distances comobiles. Une fois tous les quasars déplacés, leur redshift est recalculé, puis ils sont stockés dans un catalogue. Pour chaque quasar, le catalogue contient leur position dans le ciel (α, δ) , leur redshift avec et sans RSD, ainsi qu'un identifiant unique.

2.3 Création des lignes de visée

A cette étape, nous disposons d'un catalogue de quasars, corrélé avec le champ de densité $\delta_{matière}$ qui sera utilisé pour construire l'absorption Ly α . Nous pouvons donc créer les lignes de visées à partir de chaque quasar, et interpoler la boîte contenant le champ de densité, le long de ces lignes de visée. Dans un premier temps, nous commençons par créer le vecteur en longueurs d'onde observées, sur lequel

sera interpolé la boîte de densité. Nous choisissons une taille de pixel $d_{pix} = 0,2 h^{-1}$ Mpc. Les limites $1,8 < z < 3,6$ en redshift se traduisent par des limites¹ $3403,876 < \lambda < 5592,082$ Å sur la longueur d'onde observée pour le Ly α . Nous ajoutons la limite basse des spectrographes de DESI : $\lambda_{min} = 3530$ Å, que nous réduisons afin d'inclure certains métaux dans les forêts (voir ??). Les longueurs d'onde observées couvrent donc $3476,1877 < \lambda < 5591,566$ Å à l'aide de 6524 pixels. cela sera expliqué

Une fois ce vecteur en longueur d'onde obtenu, nous le positionnons dans les boîtes afin de construire la ligne de visée à partir de chaque quasar. D'abord, le pixel $\lambda_{QSO} = (1 + z_{QSO})\lambda_{Ly\alpha}$ est placé à la position $(x_{QSO}, y_{QSO}, z_{QSO})$ du quasar, et le vecteur est dirigé vers l'observateur. Puis, pour chaque pixel i entre $\lambda_{min} = 3476,1877$ et λ_{QSO} , la position (x_i, y_i, z_i) du pixel est déterminée. Une moyenne pondérée avec un lissage gaussien est alors appliquée à la boîte. Pour chaque pixel, nous considérons les voxcells appartenant au cube de 7 voxcells de côté, centré sur le voxcell dans lequel se trouve le pixel. Ce cube correspond à considérer les voxcells compris à $\pm 3\sigma$ du voxcell central, avec $\sigma = d_{cell}$ (#prov validé par le plot, demander à JM). Ceci représente donc, pour chaque pixel, une moyenne de 343 voxcells. Le pixel i est donné par

$$\delta_i = \frac{\sum_{j=0}^{342} \delta(\vec{r}_j) w_{ij}}{\sum_{j=0}^{342} w_{ij}}, \quad \text{delta_j} \quad (1.22)$$

champ dans le

(#prov c'est pas beau les limites des sommes qui sont pas au dessus/en dessous) avec

$$w_{ij} = \exp\left(\frac{-(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2}{\sigma^2}\right), \quad \text{2 sigma}^2 \quad (1.23)$$

où \vec{r}_j est la position du voxcell j , \vec{r}_i celle du pixel i , δ est la boîte à interpoler. Ce lissage est nécessaire afin d'éviter le crénelage (aliasing) aux petites échelles. Ce calcul est effectué pour tous les pixels qui vérifient $\lambda_i < \lambda_{QSO}$, pour chaque quasar. Les boîtes interpolées sont la boîte $\delta_{matière}$ utilisée pour construire l'absorption Ly α , les trois boîtes de vitesse utilisées pour ajouter les RSD aux HCD tirés dans chaque ligne de visée (voir section 2.5), et les six boîtes de gradient de vitesse afin d'ajouter les RSD au champ Ly α .

2.4 De la densité à l'absorption

Une fois les lignes de visés interpolées, nous pouvons transformer le champ de densité en absorption Ly α . Ceci est fait via la formule FGPA :

$$F = \exp(-a(z)e^{b(z)G(z)\delta_{matière}}). \quad (1.24)$$

Les petites échelles

La boîte $\delta_{matière}$, utilisée dans l'équation 1.24, contient le champ de matière à grand échelle. Elle est construite grâce à la transformation de Fourier de la boîte δ_k . Cependant, ce champ est construit sur une grille de taille $d_{cell} = 2,19 h^{-1}$ Mpc. Par conséquent, la plus petite échelle accessible est

$$k_N = \frac{2\pi}{d_{cell}} \sim 2,87 h \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.25)$$

Nous manquons donc toutes les fluctuations pour lesquelles $k > k_N$. Sans ces fluctuations le spectre de puissance à une dimension, défini comme

$$P^{1D}(k_{||}) = \frac{1}{2\pi} \int_{k_{||}}^{\infty} k P(k) dk, \quad (1.26)$$

1. Ces limites sont aussi choisies afin de garantir un nombre entier de pixels.

ne possède pas la bonne amplitude. De plus, ce sont ces fluctuations aux petites échelles qui contribuent principalement à la variance du champ. Le champ F construit ne possède donc pas le bon niveau de bruit. Pour palier ce problème, nous rajoutons indépendamment sur chaque ligne de visée un champ δ_s (*small scales* : petites échelles) au champ $\delta_{\text{matière}}$ que nous appelons désormais δ_l (*large scales* : grandes échelles) :

$$F = \exp(-a(z)e^{b(z)G(z)(\delta_l + \delta_s)}); \quad (1.27)$$

Du fait que ce champ ne soit pas corrélé d'une ligne de visée à une autre, il ne participe pas à la fonction de corrélation à trois dimensions¹. Afin d'ajouter la bonne quantité de fluctuations aux petites échelles, pour chaque ligne de visée nous générerons un GRF à une dimension $\delta_{k,s}$, de la taille de la forêt. Puis, nous multiplions $\delta_{k,s}$ par

$$\sqrt{\frac{P_{\text{miss}}(k)}{d_{\text{pix}}}}, \quad (1.28)$$

où P_{miss} est le spectre de puissance qu'il faut appliquer à $\delta_{k,s}$ afin que F possède le bon P^{1D} . Le calcul de P_{miss} est détaillé dans la section ???. Enfin, nous obtenons δ_s à l'aide de la transformation de Fourier de $\delta_{k,s}$.

Les RSD

Une fois les petites échelles ajoutées, nous obtenons un champ d'absorption F qui possède le bon spectre de puissance à 3 dimension pour les échelles $k_N < k < k_{\max}$, avec

$$k_{\max} = \frac{2\pi}{1536d_{\text{cell}}} \sim 1,9 \times 10^{-3} h \text{ Mpc}^{-1}, \quad (1.29)$$

ainsi que le bon spectre de puissance à une dimension. Cependant, le champ d'absorption F ne possède pas de RSD pour l'instant, car il est construit à partir du spectre de puissance $P_{\text{matière}}(k)$ qui est isotrope. Initialement, nous pensions ajouter les RSD au niveau du spectre de puissance : multiplier le GRF initial par $(1 + \beta\mu^2)P_{\text{matière}}(k, \mu)$, avec $\mu = k_z/k$. Cependant, du fait que les lignes de visées ne sont pas parrallèles (elles l'étaient pour les mocks précédents, développés pour BOSS), nous ne pouvons pas confondre l'axe k_z avec l'axe de la ligne de visée k_{\parallel} . Nous avons alors choisi d'utilisé le champ de gradient de vitesse η_{\parallel} , présenté dans la section 2.1. Plusieurs essais (#prov les détailler ?) ont été menés afin de savoir comment inclure correctement le champ η_{\parallel} dans FGPA. Nous présentons dans les lignes qui suivent la solution retenue. Le champ η_{\parallel} est ajouté, en plus du champ δ_s , au champ δ_l . Ceci nous permet de retrouver la formule de Kaiser (équation 1.11). Afin de gérer la quantité de RSD, nous ajoutons un coefficient c , qui dépend de z . L'ajustement de ce paramètre nous permet d'obtenir la bonne dépendance en z pour $\beta_{\text{Ly}\alpha}$. La formule FGPA devient donc

$$F = \exp(-a(z)e^{b(z)G(z)(\delta_l + \delta_s + c(z)\eta_{\parallel})}); \quad (1.30)$$

Les champs δ_l , δ_s et η_{\parallel} sont calculés à $z = 0$, la dépendance en z étant prise en compte par le facteur $G(z)$. De plus, le facteur f que nous avons laissé de coté dans la section 2.1 n'est pas explicité ici : pour les redshifts $z > 2$, l'univers est dominé par la matière et donc, en bonne approximation, nous avons $f(z) \sim 1$. Les paramètres $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, ainsi que $P_{\text{miss}}(z)$ sont ajustés afin d'obtenir le bon $b_{\text{Ly}\alpha}(z)$, $\beta_{\text{Ly}\alpha}(z)$, $\bar{F}(z)$ et $P_{\text{Ly}\alpha}^{1D}(z)$. L'ajustement est décrit dans la section ??.

1. Lors du calcul de la fonction de corrélation à 3 dimensions, nous ne considérons pas les paires de pixels issues de la même forêt (voir ??)

La prédition

Il aurait été possible d'implémenter les RSD différemment. Une solution serait, par exemple, de déplacer chaque pixel d'absorption proportionnellement à la vitesse particulière du gaz dans la cellule considérée, puis de modifier l'absorption en fonction de gradient de vitesse dans cette cellule. En effet, si le gradient de vitesse est non nul, le gaz se retrouve comprimé par endroit, et détendu dans d'autres, modifiant l'absorption dans chaque cellule. Cette méthode pour ajouter les RSD dans des mocks Ly α est la méthode choisie par ?. La méthode que nous utilisons, décrite dans la section précédente, a l'avantage d'avoir une fonction de corrélation prédictible. C'est pour cela que nous avons fait le choix de cette méthode. Dans les lignes qui suivent, nous expliquons comment calculer la prédition de la fonction de corrélation. Comme décrit par ?, il est possible de relier la fonction de correlation ξ_F du champ F à la fonction de corrélation ξ_g du champ δ_g . Ces deux fonctions de corrélations sont reliées par

$$\xi_F(r_{12}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\delta_{g1} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta_{g2} \frac{\exp\left[-\frac{\delta_{g1}^2 + \delta_{g2}^2 - 2\delta_{g1}\delta_{g2}\xi_g(r_{12})}{2(1-\xi_g^2(r_{12}))}\right]}{2\pi\sqrt{1-\xi_g^2(r_{12})}} \delta_F(\delta_{g1})\delta_F(\delta_{g2}), \quad (1.31)$$

où δ_g est un GRF de variance 1, δ_F est le champ d'absorption calculé à partir du champ gaussien, et r_{12} est la distance qui sépare les deux points où sont évalués les champs δ_g et δ_F . Dans notre cas, le champ δ_g représente le champ $G(z)(\delta_l + \delta_c + c(z)\eta_{||})$. Ce champ est un champ gaussien, de valeur moyenne nulle et de variance σ_g^2 . Nous compensons le fait que $\sigma_g^2 \neq 1$ en remplaçant ξ_g par ξ_g/σ_g^2 dans l'équation précédente. L'équation 1.31 ne dépendant que de la valeur de ξ_g , nous construisons une table qui permet de relier chaque valeur de $\xi_g \in [-1; 1]$ à la valeur ξ_F correspondante. De plus, nous pouvons relier la fonction de corrélation dans l'espace des redshifts $\xi_g(r, \mu)$, à la fonction de corrélation $\xi(r)$ que suit le champ δ_l :

$$\xi(r, \mu) = \xi_0(r) + \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) \xi_2(r) + \frac{1}{8} (35\mu^4 - 30\mu^2 + 3) \xi_4(r), \quad (1.32)$$

avec

$$\xi_0(r) = \left(1 + \frac{2}{3}f + \frac{1}{5}f^2\right) \xi(r), \quad (1.33)$$

$$\xi_2(r) = \left(\frac{4}{3}f + \frac{4}{7}f^2\right) [\xi(r) - \bar{\xi}(r)], \quad (1.34)$$

$$\xi_4(r) = \frac{8}{35}f^2 \left[\xi(r) + \frac{5}{2}\bar{\xi}(r) - \frac{7}{2}\bar{\bar{\xi}}(r)\right], \quad (1.35)$$

et

$$\bar{\xi}(r) = 3r^{-3} \int_0^r \xi(s)s^2 ds, \quad (1.36)$$

$$\bar{\bar{\xi}}(r) = 5r^{-5} \int_0^r \xi(s)s^4 ds. \quad (1.37)$$

Ces équations sont décrites dans ?. Afin d'obtenir la prédition $\xi_F^{pred}(r, \mu)$, nous commençons par calculer le spectre de puissance que suit la boîte δ_l :

$$P(k) = W^2(k) P_{matière}(z=0), \quad (1.38)$$

où W est le terme représentant le lissage gaussien appliqué à la boîte δ_l (voir section 2.3) :

$$W(k) = e^{-\frac{k^2 d_{cell}^2}{2}}. \quad (1.39)$$

(#prov il y a pas un facteur $\frac{1}{2}$ en trop ? on a $\sigma_{smooth}^2 = 2d_{cell}^2$)

A l'aide d'une transformation de Fourier, nous obtenons la fonction de corrélation $\xi(r)$ que suit la boîte interpolée δ_l . Puis, nous calculons la fonction de corrélation dans l'espace des redshifts $\xi_g(r, \mu)$ que suit le champ δ_g grâce à l'équation 1.32. Enfin, pour tous les couples (r, μ) nécessaires, nous obtenons la fonction de corrélation $\xi_F(r, \mu)$ du champ F comme la valeur correspondante à la valeur tabulée $\xi_g(r, \mu)/\sigma_g^2$ pour ξ_g . (#prov un plot de la prédiction ?)

2.5 Ajout des HCD

Les HCD ont un effet important dans les fonctions de corrélation, nous simulons donc aussi leur présence. De manière à avoir une corrélation entre les HCD et les autres traceurs des mocks, nous utilisons la boîte de densité δ_l pour tirer les HCD. Nous ne considérons pas la somme $\delta_l + \delta_s$ car les HCD sont des surdensités à grandes échelles : une résolution de $2,19 h^{-1}$ Mpc est suffisante. De plus, l'ajout de δ_s bruitterait la corrélation entre les HCD et les autres traceurs.

Contrairement aux quasars, les HCD sont tirés proportionnellement au champ δ_l . Nous identifions les cellules dans lesquelles δ_l est au dessus d'un certain seuil, puis les HCD sont tirés dans ces cellules selon une loi de Poisson. Le seuil ν est défini en fonction du biais souhaité pour les HCD. Pour un seuil ν , le biais obtenu est donné par

$$b_\nu = \frac{pdf(\nu)}{cdf(-\nu)}, \quad (1.40)$$

où $pdf(\nu)$ donne la densité de probabilité de ν , et $cdf(-\nu)$ est la fonction de répartition : la probabilité d'être au dessus du seuil ν . Ainsi, pour avoir un biais de 2, il faut que la probabilité que le champ prenne la valeur ν soit 2 fois plus grande que la probabilité que le champ soit au dessus du seuil ν . Afin d'obtenir le seuil pour un biais donné, nous calculons b_ν pour une large gamme de seuils ν puis nous interpolons b_ν sur ν . Ainsi, pour un biais b , nous connaissons le seuil $\nu(b)$ à choisir. Dans notre cas, le champ δ_l suit une densité de probabilité gaussienne. Cependant, sa variance n'est pas égale à 1. De plus, le champ δ_l interpolé le long des lignes de visée correspond au champ de matière à $z = 0$. Ainsi, pour obtenir un biais b_{HCD} , pour chaque redshift nous calculons le seuil ν comme si nous visions un biais $b = b_{HCD}\sigma_l G(z)$. Le terme σ_l prend en compte la variance du champ δ_l , et $G(z)$ le fait que δ_l soit construit à $z = 0$. Une fois les cellules pouvant héberger un HCD identifiées, nous tirons dans chacune d'entre elles les HCD avec une loi de poisson de paramètre

$$\lambda(z) = \frac{N(z)}{cdf(-\nu(z))}, \quad (1.41)$$

où $N(z)$ donne le nombre moyen de HCD attendu par cellule et $\nu(z)$ le seuil au redshift z . Le nombre de HCD attendu est donné par la librairie pyigm¹. La distribution en redshift des HCD est présenté sur le graphique de gauche de la figure 1.3. Une fois tous les HCD tirés, nous leur assignons une densité de colonne dans la gamme $17,2 < \log(n_{HI}) < 22,5$, selon la distribution donnée par pyigm. Cette distribution est présentée sur le graphique de droite de la figure 1.3. Enfin, nous ajoutons les RSD aux HCD tirés. Chaque HCD tiré est déplacé le long de la ligne de visée proportionnellement à la vitesse

$$v_{\parallel} = \frac{v_X X + v_Y Y + v_Z Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad (1.42)$$

où v_X , v_Y et v_Z sont les boîtes de vitesse interpolées le long de la ligne de visée. Ainsi, un HCD à un redshift z sera déplacé à un redshift

$$z \rightarrow z + (1+z)H(z) \frac{dG}{dz} \frac{1}{H_0 \frac{dG}{dz}(z=0)} v_{\parallel}. \quad (1.43)$$

1. <https://github.com/pyigm>

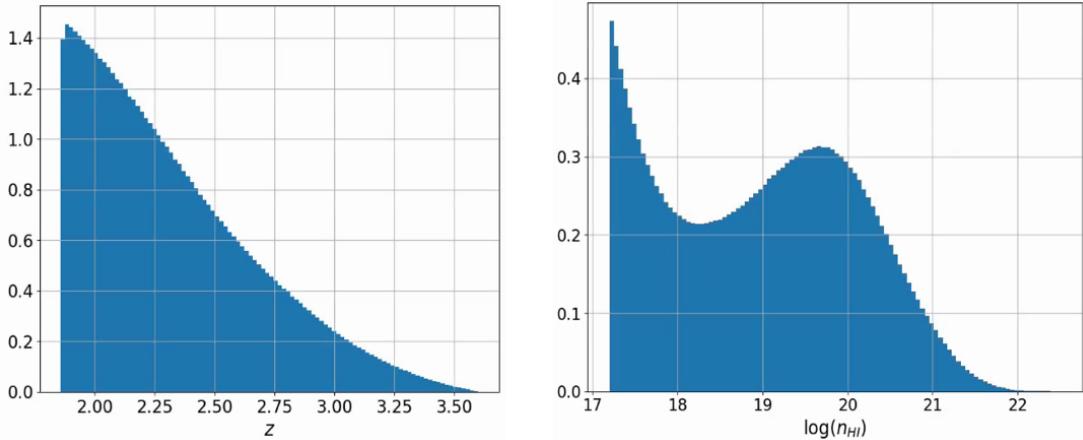


FIGURE 1.3 – Gauche : distribution normalisée en redshift des HCD. Droite : distribution normalisée de $\log(n_{HI})$ des HCD. Ces distributions proviennent de la librairie pyigm.

Dans les mocks que nous décrivons ici, le profil d'absorption des HCD n'est pas ajouté dans les forêts. Nous produisons uniquement un catalogue qui regroupe tous les HCD tirés. Le profile d'absorption est ajouté au spectre de chaque quasar par le code `quickquasars`, qui utilise le catalogue de HCD que nous produisons.

3 Production des mocks

montrer que $2560 \times 2560 \times 1536$ tient juste avec 128 Go

Comme expliqué au début de ce chapitre, l'objectif des mocks est de reproduire les données d'eBOSS et de DESI. Etant donné que le relevé d'eBOSS est contenu dans le relevé de DESI, nous simulons directement le relevé DESI. Ainsi, lorsque nous avons besoin de simuler le relevé d'eBOSS, nous retirons les quasars qui ne sont pas contenu dans ce relevé. La taille des boîtes choisie ($2560 \times 2560 \times 1536$ voxcells) et leur résolution ($2,19 h^{-1}$ Mpc) ne suffisent pas à couvrir les 14 000 degrés carrés de DESI. Pour palier ce problème, nous construisons sept *chunks* indépendants, que nous assemblons pour former le relevé de DESI. Le découpage du relevé en sept chunks est montré sur la figure ?? (#prov faire une figure). Ce choix d'assembler sept boîtes de densité plutôt que d'en utiliser une seule a été contraint par la mémoire maximale des noeuds. Les mocks ont été produit grâce au centre de calcul NERSC¹, avec la machine Cori. Sur cette machine, nous avons utilisé les noeuds “Haswell”, au nombre de 2388. Chaque noeud possède 32 coeurs, chacun possédant 2 hyper-threads. Chaque noeud peut donc gérer 64 tâches simultanément. De plus, ces noeuds possèdent 128Go de mémoire vive. De manière à créer nos boîtes de densité, via la transformation de Fourier à trois dimensions, il faut, pour chaque boîte, que l'intégralité de son contenu soit accessible depuis un même endroit. Nous pourrions distribuer la mémoire et effectuer la transformation de Fourier sur plusieurs noeuds à l'aide de la librairie MPI. Cependant nous avons choisi de ne pas utiliser cette librairie et d'effectuer les transformations de Fourier sur un seul noeud, ce qui explique le découpage du relevé en sept chunks indépendants. Nous profitons néanmoins des 64 threads de chaque noeud pour paralléliser notre code.

Dans les lignes qui suivent, nous détaillons les différents éléments du code. Le schéma ?? résume la situation (#prov faire le schéma). Le première module, `interpolate_pk.py` permet de calculer puis d'interpoler les quatres spectres de puissance $P_{QSO,i}$ et $P_{matière}$ sur la grille $2560 \times 2560 \times 1536$. Le code est lancé séparément sur 16 morceaux de la boîte, puis le code `merge_pk.py` permet de rassembler des 16 morceaux des spectres de puissance interpolés et de les sauver au format FITS (Flexible Image

¹. National Energy Research Scientific Computing Center (NERSC), a U.S. Department of Energy Office of Science User Facility operated under Contract No. DE-AC02-05CH11231.

prévoir remerciement

secondaire
+ loin

Nous n'avions pas l'expertise de Fourier sur un seul noeud, ce qui explique le découpage du relevé en sept chunks indépendants. Nous profitons néanmoins des 64 threads de chaque noeud pour paralléliser notre code.

dans l'espace k

bilan du nombre de boite

Transport System). Cette étape est effectuée une seule fois, car les spectres de puissance sont communs à toutes les réalisations. Le module suivant est `make_boxes.py`. Ce code lit les spectres de puissance interpolés puis construit les différentes boîtes de densité, de vitesse et de gradient de vitesse décrits dans la section 2.1. Ce code est lancé sept fois, afin de produire les boîtes pour les sept chunks. Une fois toutes les boîtes produites, les quasars sont tirés (section 2.2) grâce au code `draw_qso.py`. Afin d'accélérer la production des mocks, les boîtes sont partagées en 512 tranches selon l'axe x. Ces tranches, de taille $5 \times 2560 \times 1536$, sont traitées séparément. Ce code est donc tourné en parallèle 512 fois, sur 16 noeuds \times 32 threads. Une fois les quasars tirés, les lignes de visée sont interpolées (section 2.3) avec le code `make_spectra.py`. De la même manière que le code précédent, il tourne en parallèle 512 fois, sur 16 noeuds \times 32 threads. Une fois tous les quasars traités, les morceaux de ligne de visée sont mis bout à bout grâce au code `merge_spectra.py`. Encore une fois, le code tourne en parallèle 512 fois. Lorsque les lignes de visée sont reconstruites, la formule FGPA est appliquée afin d'obtenir le champ de transmission F pour chaque ligne de visée. La dernière étape consiste à regrouper le résultat de chaque chunk. Le module `merge_qso.py` permet de lire tous les quasars tirés dans chaque tranche de chaque chunk et de créer un catalogue global appelé `master.fits`. Une fois le catalogue construit, le code `dla_saclay.py` tire les HCD le long de dans chaque ligne de visée. Le code est tourné sur les sept chunks en parallèle. Puis le module `merge_dla.py`, comme pour les quasars, permet de regrouper tous les HCD tirés et de construire le catalogue global `master_DLA.fits`. Enfin le code `make_transmissions.py` permet de mettre les fichiers contenant les forêts au bon format : les forêts sont regroupées par HEALPix pixel (#prov expliquer ou mettre une ref?) et sont stockées dans les fichiers

`N/PIX/transmission-nside-PIX.fits.gz`,

1 fichier FITS par healpix pixel et les fichiers regroupés par 100 dans des répertoires

où `nside` = 16 est la résolution du schéma HEALPix utilisé, `PIX` donne le numéro du pixel HEALPix, et `n` est le résultat de la division euclidienne de `PIX` par 100. Cette dernière étape est effectuée sur un noeud, `make_transmissions.py` étant lancé en parallèle sur 64 sous-échantillons des HEALPix pixels.

Pour les analyses Ly α d'eBOSS et de DESI, nous avons décidé de produire 100 réalisations des mocks, afin d'avoir suffisamment de statistique pour étudier finement les potentielles systématiques. Nous avons organisé la production de ces 100 réalisations en deux étapes. Premièrement, nous avons effectué la *pré-production*. Cette étape consiste à créer les boîtes contenant les différents GRF, puis à tirer les quasars et enfin reconstruire la densité, les vitesses et gradients de vitesse, le long de chaque ligne de visée. Ceci correspond aux codes `make_boxes.py`, `draw_qso.py` et `make_spectra.py`. Cette étape est la plus coûteuse en temps de calcul : environ 43 heures CPU sur un noeud de Cori pour produire les sept chunks d'une réalisation. L'ensemble des fichiers temporaires propres à une réalisation pré-produite est estimé à $\sim 7 \times 550$ Go sur disque. Cependant, nous stockons uniquement les lignes de visée interpolées, et la boîte δ_k , ce qui représente ~ 340 Go sur disque, par réalisation.

Une certain nombre de problèmes informatiques, liés au centre de calcul NERSC, ont ralenti la phase de pré-production. Le principal problème venait du temps de lecture et d'écriture, qui par moment pouvait être multiplié par un facteur cent. Plus de trentes secondes étaient parfois nécessaires pour accéder à un simple fichier. Ce problème a été identifié comme venant du transfert des *meta data* sur le centre de calcul. Le code le plus affecté est `make_boxes.py`, car il écrit énormément de fichiers différents, correspondant aux différents slices des boîtes, et destinés à être lus par les codes `draw_qso.py` et `make_spectra.py`. Pour palier ce problème, nous avons décidé d'essayer de faire tourner les codes sur les noeuds de Cori appelés *Burst Buffer*. Ces noeuds possèdent des disques SSD (Solid-State drive), ce qui permet une lecture et une écriture très rapide. Une fois les codes exécutés, les données produites sont déplacées sur les disques durs habituels. Les noeuds Burst Buffer ont permis d'accélérer l'exécution du code `make_boxes.py` par un facteur ~ 2 , passant d'environ deux heures à une heure seulement. Une vingtaine de réalisations ont été produites en utilisant ces noeuds. Cependant, ils sont devenus instables au cours de la production. D'autre part, les problèmes liés aux transferts des

expliquer

meta data avaient été stabilisés entre temps. Nous sommes donc retournés à l'utilisation des noeuds classiques de Cori pour finir la production. Pour les 40 dernières réalisations, le temps d'exécution de `make_boxes.py` variait entre trois et quatres heures.

Le temps laissé par les six mois nécessaires à la production nous a permis de choisir les paramètres Ly α souhaités, et d'ajuster les paramètres de la formule FGPA (équation 1.30) en conséquence (voir section ??). Une fois ces paramètres ajustés et la phase de pré-production terminée, nous avons mené la phase de *post-production*. Cette phase consiste à créer les spectres d'absorption à partir des densités interpolées le long des lignes de visée, puis à regrouper tous les fichiers de sortie afin de les mettre au format décrit précédemment. Cette étape est beaucoup plus rapide, elle prend l'équivalent d'environ 6 heures CPU sur un noeud de Cori. Une fois la production complète effectuée, la place sur disque d'une réalisation, sans compter les fichiers temporaires, correspond à environ 15 Go sur disque.

en tout ou par réa ?

expliquer

Bibliographie

- Aniket Agrawal, Ryu Makiya, Chi-Ting Chiang, Donghui Jeong, Shun Saito, and Eiichiro Komatsu. Generating {Log}-normal {Mock} {Catalog} of {Galaxies} in {Redshift} {Space}. *arXiv :1706.09195 [astro-ph]*, jun 2017. URL <http://arxiv.org/abs/1706.09195>.
- L. Clerkin, D. Kirk, M. Manera, O. Lahav, F. Abdalla, A. Amara, D. Bacon, C. Chang, E. Gaztañaga, A. Hawken, B. Jain, B. Joachimi, V. Vikram, T. Abbott, S. Allam, R. Armstrong, A. Benoit-Lévy, G. M. Bernstein, E. Bertin, D. Brooks, D. L. Burk, A. Carnero Rosell, M. Carrasco Kind, M. Crocce, C. E. Cunha, C. B. D’Andrea, L. N. da Costa, S. Desai, H. T. Diehl, J. P. Dietrich, T. F. Eifler, A. E. Evrard, B. Flaugher, P. Fosalba, J. Frieman, D. W. Gerdes, D. Gruen, R. A. Gruendl, G. Gutierrez, K. Honscheid, D. J. James, S. Kent, K. Kuehn, N. Kuropatkin, M. Lima, P. Melchior, R. Miquel, B. Nord, A. A. Plazas, A. K. Romer, E. Sanchez, M. Schubnell, I. Sevilla-Noarbe, R. C. Smith, M. Soares Santos, F. Sobreira, E. Suchyta, M. E. C. Swanson, G. Tarle, and A. R. Walker. Testing the lognormality of the galaxy and weak lensing convergence distributions from Dark Energy Survey maps. may 2016. doi : 10.1093/mnras/stw2106. URL <http://arxiv.org/abs/1605.02036> <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stw2106>.
- Antony Lewis, Anthony Challinor, and Anthony Lasenby. Efficient Computation of CMB anisotropies in closed FRW models. nov 1999. doi : 10.1086/309179. URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9911177> <http://dx.doi.org/10.1086/309179>.