МАТФ
Универзитет у Београду
Математички факултет
11001 БЕОГРАД
Студентски трг 16
П.П. 550
Телефон: 011 20 27 801
Факс: 011 26 30 151
matf@matf.bg.ac.rs
www.matf.bg.ac.rs

NALAŽENJE HAMILTONOVOG PUTA U GRAFOVIMA U OBLIKU DVODIMENZIONALNE MREŽE I SLOVA L, C, F I E

student: Uroš Ševkušić
mentor: dr Mirko Spasić

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

2024

Uvod

- Hamiltonov put u grafu je put koji počinje od nekog čvora s, obilazi sve čvorove tačno jednom, i završava se u čvoru t.
- Hamiltonov ciklus je Hamiltonov put takav da je $s = t$.
- Rešetka je graf kojem su čvorovi iz nekog konačnog skupa $V \subset \mathbb{Z}^2$, a grana između dva čvora postoji ako i samo ako je euklidsko rastojanje tih tačaka 1.
- Ispitivanje postoji li Hamiltonov put u rešetki je, u opštem slučaju, NP-kompletan problem. [Itai et al., 1982]

Uvod - cilj rada

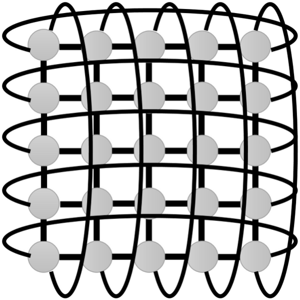
- U nekim tipovima rešetki, postoje polinomijalni algoritmi za nalaženje Hamiltonovog puta.
- U ovom radu bavimo se algoritmima za konstruisanje Hamiltonovog puta i ciklusa na rešetkama u obliku:
  - 2D mreže (pravougaonika) iz rada [Dong Chen et al., 2002]
  - slova L, C, F i E iz rada. [Keshavarz-Kohjerdi and Bagheri, 2012]
- U radu [Dong Chen et al., 2002] prikazani su:
  - sekvencijalni algoritam složenosti $O(|V|)$
  - paralelni algoritam bez međuprocesorke zavisnosti, složenosti $O(1)$ pod uslovom da postoji na računaru $|V|$ procesora.
- U radu [Keshavarz-Kohjerdi and Bagheri, 2012] prikazani su sekvencijalni algoritmi složenosti $O(|V|)$.

Uvod - cilj rada

- Izloženi algoritmi nisu dovoljno precizno definisani i sadrže greške.
- Do sada nije poznata nijedna implementacija navedenih algoritama.
- Paralelni algoritmi za rešetke u obliku slova L, C, F i E nisu do sada definisani.
- Cilj ovog rada je da se:
  - otklone greške i nedostaci
  - dokaže ispravnost algoritama
  - implementiraju sekvencijalni i paralelni algoritmi
  - evaluira vreme izvršavanja algoritama.

Uvod - primene

- Rešavanje problema *All-To-All* na paralelnim računarima sa topologijom 2D i 3D torusa [Plateau and Trystam, 1992]



Slika 1: 2D torus (slika preuzeta od korisnika Hemis62 sa Wikimedia Commons, pod licencom CC BY-SA 4.0)

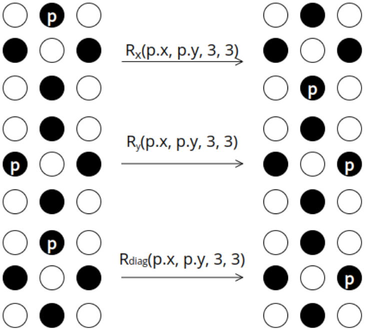
Uvod - primene

- Algoritmi se mogu koristiti kao osnova za konstrukciju Hamiltonovih puteva i ciklusa na drugim rešetkama.
- Algoritam za 2D mrežu se koristi pri definiciji algoritama za L, C, F i E.
- Algoritam za L se koristi u algoritmima za C i F.
- Algoritam za C se koristi u algoritmu za E.

Algoritmi - pregled

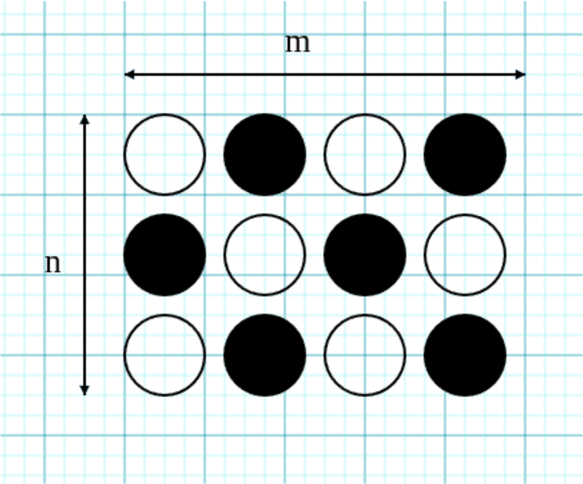
- Osnovna ideja je odrediti funkcije koje računaju sledbenike čvorova na Hamiltonovom putu od s do t tako da je složenost tih funkcija $O(1)$.
- Često je potrebno primeniti izomorfnu transformaciju radi svođenja na jednostavniji slučaj:
  - *refleksija po x-osi*: $R_x(x,\ y,\ m,\ n) = (x,\ n-1-y)$
  - *refleksija po y-osi*: $R_y(x,\ y,\ m,\ n) = (m-1-x,\ y)$
  - *refleksija po dijagonali*: $R_{diag}(x,\ y) = (y,\ x)$.

Algoritmi - pregled



Slika 2: Primeri refleksija

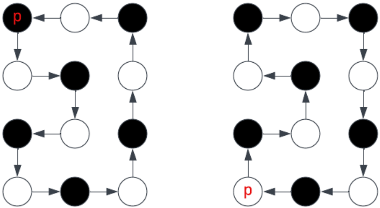
2D mreža



Slika 3: 2D mreža/pravougaoni graf

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov ciklus

- Hamiltonov ciklus postoji u $R(m, n)$ akko je mn paran i $m, n > 1$
- Ciklus je orijentisan: *CCW*, *CW* ili je neorijentisan.



Slika 4: Orijentacija CCW (levo) i orijentacija CW (desno)

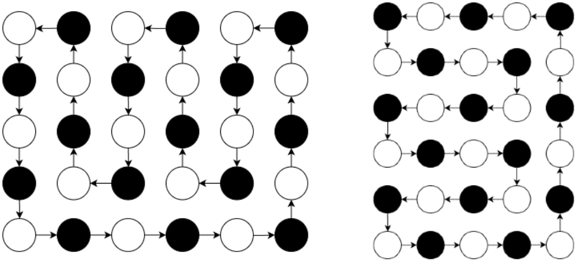
- Primenom refleksije R_x, R_y ili R_{diag} se menja orijentacija orijentisanog ciklusa.
- U literaturi nije bilo pojma orijentacije Hamiltonovog ciklusa, ali je on od velike važnosti zbog ostalih algoritama u radu.

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov ciklus

- Postoje četiri *tipa* Hamiltonovog ciklusa: *M1*, *M2*, *M3*, *M4*.
- Desna ivica u orijentisanom ciklusu tipa M1 je "ravna".
- Leva ivica u orijentisanom ciklusu tipa M2 je "ravna".
- Donja ivica u orijentisanom ciklusu tipa M3 je "ravna".
- Gornja ivica u orijentisanom ciklusu tipa M4 je "ravna".
- Hamiltonov ciklus može istovremeno imati više tipova.

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov ciklus

- Algoritam za Hamiltonov ciklus tipova M1 i M3 i orijentacije CCW ima naredne korake:
  1. Najpre se uključe čvorovi sa donje i sa desne ivice.
  2. Zatim se cik-cak putevima dolazi do čvora $(0, n-1)$ ili $(0, 1)$.
  3. Put se nastavlja pravolinijski od $(0, n-1)$ ili $(0, 1)$ do $(0, 0)$.



Slika 5: Ciklusi dobijeni primenom algoritma

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

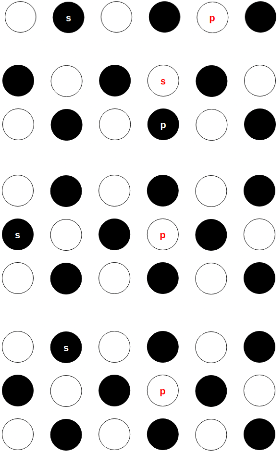
- $R(m, n)$ je *paran* ako je mn paran broj, a inače je $R(m, n)$ *neparan* [Itai et al., 1982]
- Čvor v je *bele boje* ako je $v_x + v_y \equiv_2 0$, a inače je *crne boje* [Itai et al., 1982]
- Čvorovi s i t su *kompatibilnih boja* ako važi:
  - s i t su bele boje i $R(m, n)$ je neparan
  - s i t su različitih boja i $R(m, n)$ je paran. [Itai et al., 1982]

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

- Hamiltonov put između s i t postoji u $R(m, n)$ ako i samo ako su s i t kompatibilnih boja i ne važi:
  1. $R(m, n)$ je izomorfan sa $R'(m', 1)$, $s'_x \neq 0, m' - 1$ ili $t'_x \neq 0, m' - 1$
  2. $R(m, n)$ je izomorfan sa $R'(m', 2)$, $s'_x = t'_x$ i $0 < s'_x, t'_x < m - 1$
  3. $R(m, n)$ je izomorfan sa $R'(m', 3)$, m' je paran, s' je crna, t' je bela i važi:
     - 3.1 $s'_x < t'_x$, kada je $s'_y = 1$
     - 3.2 $s'_x < t'_x - 1$, kada je $s'_y \neq 1$

     ili je $R(m, n)$ izomorfan sa $R'(m', 3)$, m' je paran, s' je bela, t' je crna i važi:
     - 3.1 $t'_x < s'_x$, kada je $t'_y = 1$
     - 3.2 $t'_x < s'_x - 1$, kada je $t'_y \neq 1$[Itai et al., 1982]

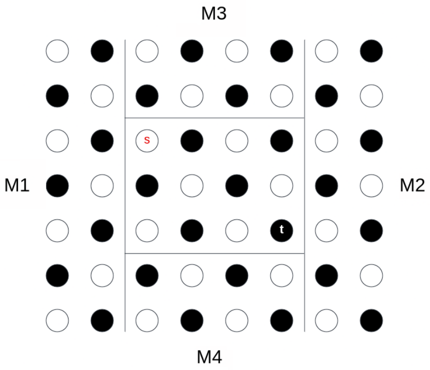
Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put



Slika 6: Primer svakog od slučajeva u kojem Hamiltonov put od *s* do *p* ne postoji, redom: slučaj 1, slučaj 2, slučaj 3.1) i slučaj 3.2).

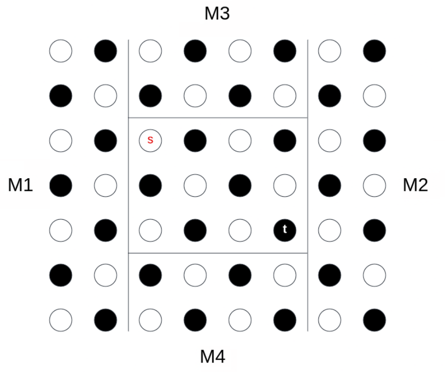
Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

- Čvorovi s i t su antipodi ako je $min(s_x, t_x) \leq 1$, $max(s_x, t_x) \geq m - 2$, $min(s_y, t_y) \leq 1$, $max(s_y, t_y) \geq n - 2$. [Dong Chen et al., 2002]
- [Dong Chen et al., 2002] definišu raslojavanje pravougaonog grafa:



Slika 7: Raslojavanje: M_5 se nalazi u centru i u njemu su s i t antipodi. U ostalim M_i je moguće napraviti Hamiltonov ciklus.

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put



Slika 8: Raslojavanje: M_5 se nalazi u centru i u njemu su s i t antipodi. U ostalim M_i je moguće napraviti Hamiltonov ciklus.

- Raslojavanje nije jedinstveno.
- Inicijalno se bira raslojavanje u kojem su svi m_i i n_i (za koje je to moguće) parni, za $1 \leq i \leq 4$.

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

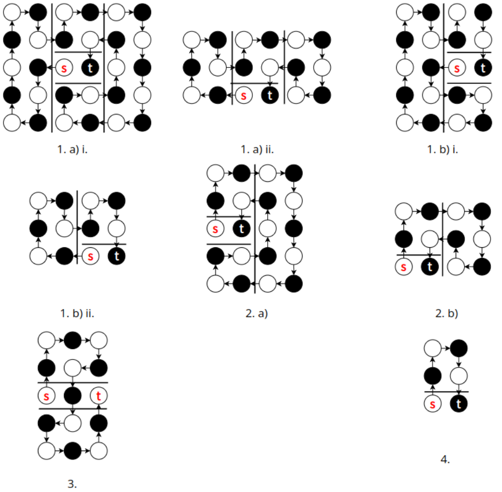
- Algoritam za nalaženje Hamiltonovog puta:
  1. ako Hamiltonov put postoji u M_5:
     1.1 konstruiši Hamiltonov put u M_5
     1.2 konstruiši Hamiltonove cikluse u M_i, $1 \leq i \leq 4$
     1.3 spoji put sa ciklusima
  2. ako Hamiltonov put ne postoji u M_5:
     2.1 modifikuj podelu tako da su s i t u M'_5
     2.2 konstruiši Hamiltonov put u M'_5
     2.3 konstruiši Hamiltonove cikluse u M'_i, $1 \leq i \leq 4$
     2.4 spoji put sa ciklusima. [Dong Chen et al., 2002]

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

- Osim koraka povezivanja, svi koraci su urađeni, bez većih izmena, kao u [Dong Chen et al., 2002].
- Korak povezivanja Hamiltonovog puta sa Hamiltonovih ciklusima nije precizno definisan u literaturi.
- Pokazaćemo kako korak funkcioniše i dokazujemo ispravnost algoritma.
- Osnovna ideja je da se Hamiltonov put iz jednog pravougaonog grafa podeli na dva dela između kojih se umetne Hamiltonov ciklus iz drugog, tako da rezultat bude Hamiltonov put u uniji.

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

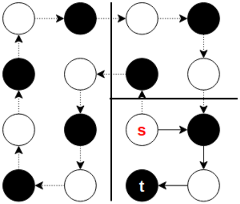
- Ako je $n_5 = 1$, refleksijama se povezivanje svodi na neki od slučajeva sa slike:



Slika 9: Primer svakog od slučaja povezivanja kada je $n_5 = 1$

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

- Ako je $n_5 > 1$, refleksijama svodimo algoritam na slučaj gde je M_1 neprazan i moguće je povezati Hamiltonov put u M_5 sa Hamiltonovim ciklusom u M_1.
- Moguće je povezati Hamiltonov put u M_5 sa Hamiltonovim ciklusom M_1 akko ne važi $n_5 = 2$ i $s_x, t_x = 0$, $s \neq t$.



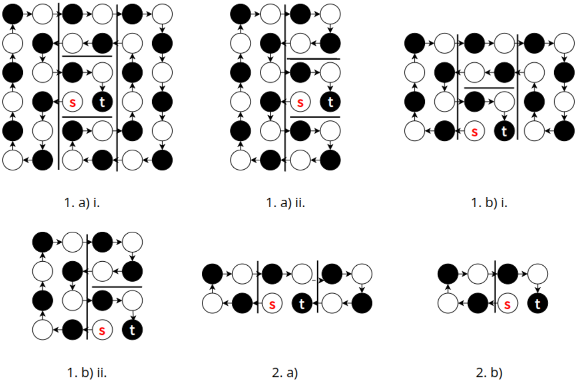
Slika 10: Nije moguće povezivanje puta u M_5 i ciklusa u M_1

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

- U tom slučaju, važi bar jedno od narednih tvrđenja na Hamiltonovom putu u M_5:
  - čvoru $(0,0)$ je sledbenik $(0,1)$
  - čvoru $(0,1)$ je sledbenik $(0,0)$
  - čvoru $(0,1)$ je sledbenik $(0,2)$
  - čvoru $(0,2)$ je sledbenik $(0,1)$.
- Prvi od čvorova kome je sledbenik ispod ili iznad njega se naziva *čvor povezivanja*.
- Iz prethodnog je jasno da se taj čvor može naći u vremenu $O(1)$.
- Algoritam za povezivanje Hamiltonovog puta M_5 sa Hamiltonovim ciklusom u M_1:
  1. čvoru povezivanja se sledbenik preusmeri levo
  2. konstruiše se ciklus u M_1 tipa M_1, sa orijentacijom CCW, ako je originalni sledbenik čvora povezivanja bio ispod njega, a inače sa orijentacijom CW
  3. Hamiltonov put u M_5 nastavlja od originalnog sledbenika čvora povezivanja do čvora t.

Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

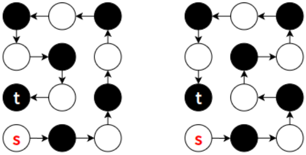
- Nakon spajanja sa M_1, potrebno je spojiti dobijeni put i sa ostalim Hamiltonovim ciklusima.
- Do na izomorfizam, postoji samo šest slučajeva koje treba obraditi:



Slika 11: Primeri svakog od slučaja povezivanja Hamiltonovog puta u M_5 sa Hamiltonovim ciklusima u M_i, $1 \leq i \leq 4$

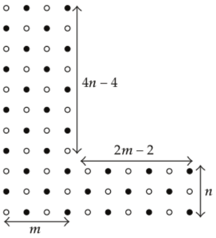
Algoritmi za 2D mrežu - Hamiltonov put

- Pokazujemo da Hamiltonov put konstruisan algoritmom iz ovog rada ima jednu lepu osobinu, koja će biti korisna za naredne algoritme.
- Osim ako je n parno, $m > 2$ neparno, $s = (0,0)$ i $t = (0,1)$, važi bar jedno od narednih tvrđenja na Hamiltonovom putu u $R(m,n)$, za $n > 2$:
  - čvoru $(0,0)$ je sledbenik $(0,1)$
  - čvoru $(0,1)$ je sledbenik $(0,0)$
  - čvoru $(0,1)$ je sledbenik $(0,2)$
  - čvoru $(0,2)$ je sledbenik $(0,1)$
- Algoritam je moguće modifikovati da važi tvrđenje i u tom spornom slučaju:

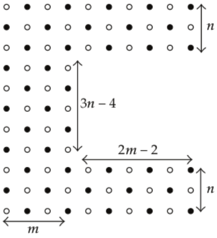


Slika 12: Rezultat algoritma pre modifikacije (levo) i posle modifikacije (desno)

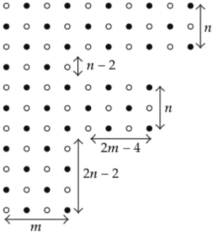
Grafovi u obliku slova L, C, F i E - uvod



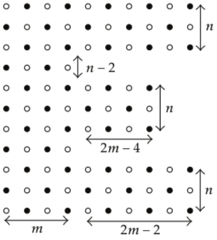
(a) $L(m,n),\ m,n > 2$



(b) $C(m,n),\ m,n > 2$



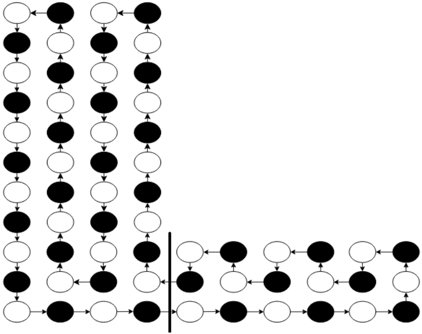
(c) $F(m,n),\ m,n > 2$



(d) $E(m,n),\ m,n > 2$

Hamiltonovi ciklusi na L, C, F i E

- Hamiltonov ciklus postoji akko je *mn* paran broj.



Slika 14: Hamiltonov ciklus u $L(4,3)$

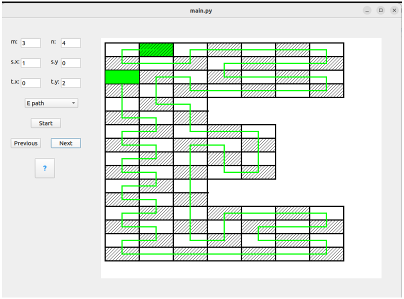
- Slično kao u $L(m,n)$ se mogu konstruisati Hamiltonovi ciklusi u ostalim slovima.

Hamiltonovi putevi na L, C, F i E

- Algoritmi su opisani bez većih izmena, kao u radu [Keshavarz-Kohjerdi and Bagheri, 2012].
- Korak povezivanja je obrađen kao u pravougaonom grafu.
- Funkcije *next* za računanje sledbenika su implementirane na sličan način kao u pravougaonom grafu.

Implementacija

- Sekvencijalni i paralelni algoritmi implementirani su na programskom jeziku *C++*.
- Implementiran je i grafički interfejs, koji iscrtava Hamiltonove puteve i cikluse, u programskom jeziku *Python* i biblioteci *PyQt5*.



Slika 15: GUI za iscrtavanje Hamiltonovih puteva i ciklusa

Implementacija

- Paralelizacija je implementirana na sledeći način:
  1. indeksiranje čvorova - svaki čvor dobija indeks, pri čemu se definiše funkcija indeksiranja i njoj inverzna funkcija, koje rade u vremenu $O(1)$
  2. paralelni algoritam:
     - 2.1 inicijalizuje se prazan niz čvorova X dužine $|V|$. Na kraju izvršavanja algoritma, $X[i]$ će biti sledbenik čvora sa indeksom i na Hamiltonovom putu. $X[t] = (-1, -1)$
     - 2.2 ako imamo p procesora/niti, definišemo q i $r < p$ tako da je $|V| = pq + r$. Prvih $p - 1$ procesora/niti dobija po q indeksa, a poslednji dobija preostale
     - 2.3 svaki od procesora računa sledbenika za čvorove koje je dobio

Evaluacija

- Mereno je vreme izvršavanja paralelnog algoritma sa 1, 2, 4 i 8 procesora/niti.
- Dimenzije pravougaonog grafa birane nasumično na intervalu $[1000, 9999]$.
- Za slova: $m \in [334, 3334]$, $n \in [200, 1800]$.
- s i t birani nasumično tako da postoji Hamiltonov put/ciklus u grafu.

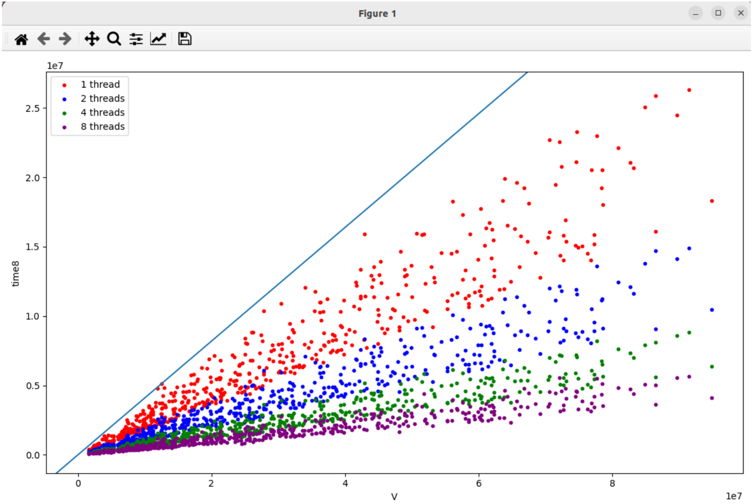
Evaluacija

- Rezultat 1: postoji prava $y = kx$ takva da nijedna tačka nije iznad nje, gde je x broj čvorova grafa, a y vreme izvršavanja sekvencijalnog algoritma u mikrosekundama.
- Odavde zaključujemo da je vreme izvršavanja $O(|V|)$.

tip grafa	problem	k
pravougaoni	ciklus	0.03
pravougaoni	put	0.41
L	ciklus	0.05
L	put	0.99
C	ciklus	0.06
C	put	3.04
F	ciklus	0.19
F	put	4.16
E	ciklus	0.12
E	put	10.51

Tabela 1: Koeficijent k prave najgoreg slučaja za izvršavanje sekvencijalnog algoritma u zavisnosti od tipa grafa i problema

Evaluacija



Slika 16: Zavisnost vremena izvršavanja sekvencijalnog algoritma za Hamiltonov put u odnosu na broj čvorova u pravougaonom grafu. Plava linija je prava najgoreg slučaja.

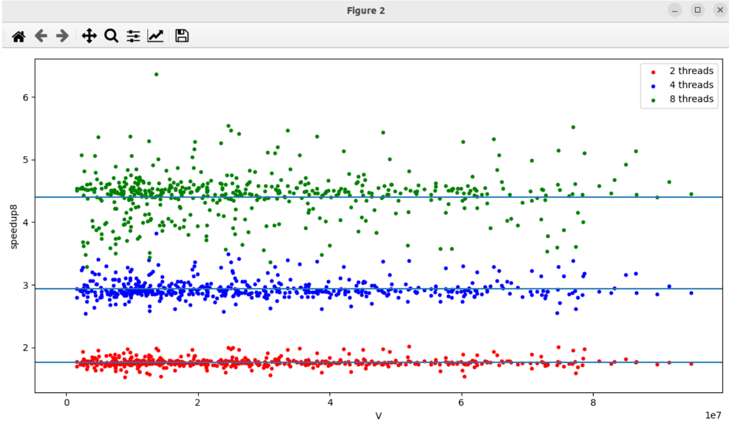
Evaluacija

- Rezultat 2: prosečno ubrzanje ne zavisi od broja čvorova u grafu i rast prosečnog ubrzanja opada sa povećanjem broja procesora.

tip grafa	problem	2 procesora	4 procesora	8 procesora
pravougaoni	ciklus	1.94	3.49	5.54
pravougaoni	put	1.76	2.93	4.40
L	ciklus	1.55	2.58	4.21
L	put	1.65	2.73	4.26
C	ciklus	1.70	2.79	4.48
C	put	1.70	2.79	4.31
F	ciklus	1.78	2.94	4.54
F	put	1.75	2.83	4.41
E	ciklus	1.77	2.91	4.50
E	put	1.76	2.85	4.43

Tabela 2: Prosečna ubrzanja za svaki od grafova, problema i broja procesora

Evaluacija



Slika 17: Zavisnost ubrzanja od broja čvorova u pravougaonom grafu tokom izvršavanja algoritma za traženje Hamiltonovog puta. Plave linije su dobijene linearnom regresijom.

Zaključak

- Nedostaci u postojećim algoritmima iz literature su otklonjeni.
- Definisani su paralelni algoritmi za konstrukciju Hamiltonovih puteva i ciklusa u slučaju grafova u obliku slova L, C, F i E.
- Pokazano je da funkcije *next* za traženje sledbenika rade u vremenu $O(1)$.
- Evaluacijom izmereno prosečno ubrzanje za 2, 4 i 8 procesora.
- Evaluacijom potvrđena složenost $O(|V|)$ kod sekvencijalnih algoritama.
- Moguće polje daljeg napretka: odrediti proceduru za spajanje koja će zahtevati manje od 2 poziva odgovarajuće *next* funkcije.

Hvala na pažnji!

Pitanja?

Literatura I

[cyt,] https://cython.org/.

[pyq,] https://pypi.org/project/pyqt5/.

[Dong Chen et al., 2002] Dong Chen, S., Shen, H., and Topor, R. (2002).
An efficient algorithm for constructing hamiltonian paths in meshes.
Parallel Computing, 28(9):1293–1305.

[Itai et al., 1982] Itai, A., Papadimitrou, C. H., and Szwarcfiter, J. L. (1982).
Hamilton paths in grid graphs.
Society for Industrial and Applied Mathematics, 11.

[Keshavarz-Kohjerdi and Bagheri, 2012] Keshavarz-Kohjerdi, F. and Bagheri, A. (2012).
Hamiltonian paths in some classes of grid graphs.
Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics, 2012.

Literatura II

[Plateau and Trystam, 1992] Plateau, B. and Trystam, D. (1992).
Optimal total exchange for a 3-D torus of processors.
42(2):95–102.

[Salman, 2005] Salman, A. N. M. (2005).
Contributions to graph theory.
Ph.D. thesis, University of Twente.