线性代数

线性代数源于人们的观察。人们发现，很多对象都拥有相似的性质，比如：

- 力可以被分解、合成。
- 对于任意的 k, x_0，$k\sin{(x-x_0)}$可以分解成 $k_1\sin x + k_2\cos x$。

这些性质与所描述对象的 **缩放**、**分解**、**叠加** 等有关。线性代数把这些性质从具体对象中抽象出来，作为一个独立的学科来研究。

点积

点积对任意维数的向量都使用。

已知两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$，他们的夹角为 θ，那么 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$。

若 $\mathbf{a} = (x_1, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2)$，那么 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2$。

叉积

叉积是三维向量特有的运算。（其实七维也存在叉积）。

已知两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$，他们的夹角为 θ，那么他们的叉积记为 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，其满足：

1. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$。
2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都垂直，且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 满足右手法则。

对于向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ 叉积的结果可以使用行列式表示：

$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$，其中 e_x, e_y, e_z 分别是 x, y, z 轴的单位向量。

对于二维向量，虽然没有叉积，但是可以拓展：

即 $\mathbf{a} = (x_1, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2)$，我们可以拓展成 $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0)$，叉积结果为 $(0, 0, x_1y_2 - x_2y_1)$。由此，可以推断出 $\mathbf{b}$ 相对于 $\mathbf{a}$ 的方向，若在逆时针方向 $x_1y_2 - x_2y_1$ 为正值，反之为负值，简记为**顺负逆正**。可以用于极角排序。

矩阵

矩阵的引入来源于线性方程组，例如对于线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 7 \\ -x_1 & +3x_2 & & = 5 \end{cases}$$

将上面的系数和未知数分开，可以被写成矩阵运算的性质：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列的矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵。为表示它是一个整体，可以在其两侧加一对小括号或中括号，并用大写字母表示，记作：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

这 $m \times n$ 个数称为矩阵 A 的元素，简称为元。其中第 i 行第 j 列的元素可以记作 A_{ij}。

- 行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**。大部分 OI 问题研究矩阵的都是方阵。
- 只有主对角线（所有 a_{ii}）为 1，其余位置为 0 的方阵称为**单位矩阵**，一般记为 E 或 E_n。
- 只有主对角线上有非零值，其余为主均为 0 的方阵称为**对角矩阵**。
- 如果方阵主对角线下方均为 0，称为**上三角矩阵**；如果方阵主对角线上方均为 0，称为**下三角矩阵**。
- 只有一行的矩阵称为**行矩阵**或**行向量**。
- 只有一列的矩阵称为**列矩阵**或**列向量**。

对于矩阵的加法、减法和数乘，都是简单的对位运算。

矩阵乘法只有在第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数的情况下才有意义。

对于一个 $m \times n$ 矩阵 A 和一个 $n \times l$ 矩阵 B，记 C 为矩阵 A 与 B 的乘积，则有：

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

矩阵乘法满足结合律和对矩阵加法的分配律，**不满足交换律**。

行列式

对于一个矩阵 A，我们定义它的行列式 $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$。

它等于 $\sum_{p} (-1)^{t(p)} \prod_{i=1}^{n} a_{ip_i}$，其中 p 为枚举前排列，$t(p)$ 为排列 p 的逆序对数。

行列式有如下几条性质：

1. 对换行列式的两行（列），行列式变号。
2. 行列式的某一行（列）中的所有元素都乘同一个数 k，等于用数 k 乘此行列式。
3. 把行列式的某一行（列）的各元素乘同一数然后加到另一行（列）对应元素上去，行列式不变。

事实上这三个性质也就对应了矩阵的三种初等行（列）变换。

同时，对于一个上三角矩阵 A 的行列式，由于主对角线下方都是 0，因此它的值就等于 $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$。因此，如果能够通过上面的三种操作，将普通的行列式变成上三角行列式，就可以直接求值。

可以通过高斯消元法来实现这一点：

找到第一列非零的一行（如果不存在说明行列式的值为 0），通过 1 性质将其与第一行交换，并通过 2 性质将第一项的系数变为 1。然后通过 3 性质将其余行的第一列都变为 0。

此时第一列只有第一行非零，暂时将第一行和第一列除去，递归处理规模为 $n-1$ 的子问题。总时间复杂度为 $O(n^3)$。

行列式可以用于解决一些计数类问题，例如 **LGV 引理**和**矩阵树定理**。

矩阵的逆

如果矩阵 A 可逆，则可以通过初等行变换来是的其变成单位矩阵 E。而初等行变换的作用相当于矩阵，也就意味着上文操作中若干初等行变换的作用等价于乘上 A^{-1}。

则对单位矩阵 E 进行同样的初等行变换就可以将矩阵变为 A^{-1}。

使用高斯消元法实现这一个过程：同时维护两个 n 阶矩阵，其中第一个矩阵的初值为 A，第二个矩阵的初值为 E。使用高斯消元法将第一个矩阵消成 E，同时对第二个矩阵进行相同的初等行变换，最终第二个矩阵的值即为 A^{-1}。

线性基

这里给出的是比较通俗的定义。

称一个向量组 $\{\mathbf{a}_i\}$ 是**线性无关**的，当且仅当不存在不全为零的一组数 c_i，使得 $\sum c_i\mathbf{a}_i=\mathbf{0}$。

而线性基认为是一个向量集合中极大的**线性无关**向量子集。可以证明任何向量集合存在线性基，且一个向量集合的线性基大小相同。

线性基的构造方法

显然，线性基最多只会有 n 个元素，其中 n 是向量的维数。我们维护一个向量数组 $\mathbf{a}_i, i=1,2\dots n$ 来表示我们最终得到的线性基。

我们依次加入每一个向量 v，从高到低扫描每一位。如果第 x 位非零，那么就检查 $\mathbf{a}_i$：

- 如果 $\mathbf{a}_i$ 不存在，那么令 $\mathbf{a}_i \leftarrow v$，结束循环。
- 如果 $\mathbf{a}_i$ 存在，那么令 $v \leftarrow v-\dfrac{v_x}{\mathbf{a}_{i,x}}\mathbf{a}_i$，继续循环。

异或线性基

一般情况下，相较于 n 维实线性空间 $\mathbb{R}^n$ 下的**实数线性基**，OI 中研究的更多的是 n 维布尔域线性空间 $\mathbf{Z}_2^n$ 下的**异或线性基**。

在布尔域线性空间中，一个向量等价于一个 $[0,2^n)$ 内的整数，加法等价于异或，数乘等价于且。

在 n 维布尔域线性空间下，一个数能够被线性基表示，等价于可以被表示成数集中若干个数的异或和，也就是数集的子集异或和。

利用异或线性基，能够解决如下的问题：

- 检验一个数是否能表示成某个数集的子集异或和，以及方案数。
- 一个数集能够表示的子集异或和的数量/第 k 大值。

时间戳线性基

在维护线性基的同时额外维护一个时间维度 t_i，保证线性基中尽可能选择时间更晚的向量，所以上面的过程需要修改。

在 $\mathbf{a}_i$ 存在的情况下，如果 t_i 比当前向量的时间维度 T 小，就将 v 和 a_i 交换。然后令 $v \leftarrow v - \frac{v_x}{\mathbf{a}_{i,x}}\mathbf{a}_i$。

这样操作可以保证线性基组合是时间最晚的。

时间戳线性基可以解决区间线性基问题（CF1100F）：我们依次将第 $1, 2 \ldots n$ 个区间加入时间戳线性基，在加入了第 r 个元素之后，提取出线性基中所有时间戳 $\geq l$ 的时刻。这就是对应区间 $[l, r]$ 向量的的线性基。

发现这个问题可以拓展到**最小/最大线性基**，即每一个元素都有一个权值 val_i，要找到 $\sum val_i$ 最小/大的线性基。同时，如果由一个向量的权值被修改了，如果它在线性基内我们需要**重新**将它加入，否则不能够保证线性基结构的正确性。

LGV引理

有空就讲。