求解封闭形式

常见的母函数

$\sum\limits_{i=0} x^i = \dfrac{1}{1-x}$，$\sum\limits_{i=0} (i+1)x^i = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，$\sum\limits_{i=0} p^i x^i = \dfrac{1}{1-px}$。

递推式得到恒等式

根据递推式得到一个方程，并求解出封闭形式。

如果有 $a_n = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i a_{n-i}, n \geq k$。

记 $F(x) = \sum\limits_{i=0} a_i x^i$

则有 $F(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} p_i x^i\right) F(x) + G(x)$，其中 $G(x)$ 次数 $< k$，目的为补齐前 k 位。

可以解出 $F(x) = \dfrac{G(x)}{1 - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i x^i}$。

例:

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$，$f_0 = f_1 = 1$，有 $F(x) = (x + x^2)F(x) + 1$，得到 $F(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$。

$f_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f_i f_{n-i-1}$，$f_0 = 1$，有 $F(x) = xF^2(x) + 1$，得到 $F(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$，但注意到有 $F(0) = f_0 = 1$，所以有 $F(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$。

求导

对等式两侧进行求导来得到结果。

知道 $\sum\limits_{i=1} i x^i = \dfrac{x}{(1-x)^2}$，

所以 $\sum\limits_{i=1} i^2 x^{i-1} = \dfrac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$。

因此 $\sum\limits_{i=1} i^2 x^i = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$。

使用这种方式一般处理的是形如数列 ia_i 的生成函数，其中 a_i 是一个封闭形式已知的母函数。

通过封闭形式求解通项公式

只讨论 $F(x) = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i}$ 的形式。

如果已知 $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i = \prod\limits_{i=0}^{t} (1-p_i x)^{k_x}$，其中 $\sum\limits_{i=0}^{t} k_i = k$。

通过待定系数法可以解得：

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i} = \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{i,j}}{(1-p_i x)^j}。$$

已知 $\dfrac{1}{(1-px)^k} = \sum\limits_{i=0} \dbinom{n-1+i}{i} p^i x^i$。

因此有 $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{t}\sum\limits_{j=1}^{k_i} \dfrac{A_{i,j}}{(1-p_i x)^j} = \sum\limits_{i=0}^{t}\sum\limits_{j=1}^{k_i} A_{i,j} \sum\limits_{n=0} \dbinom{j-1+n}{n} p_i^n x^n$。

那么就有 $f_n = \sum\limits_{i=0}^{t}\sum\limits_{j=1}^{k_i} A_{i,j} \dbinom{j-1+n}{n} p_i^n$

例：

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$，$f_0 = f_1 = 1$，已知 $F(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$。

$$F(x) = \frac{1}{(1-\frac{1+\sqrt5}{2}x)(1-\frac{1-\sqrt5}{2}x)} = \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{\frac{1+\sqrt5}{2}}{1-\frac{1+\sqrt5}{2}x} - \frac{\frac{1-\sqrt5}{2}}{1-\frac{1-\sqrt5}{2}x}\right)。$$

因此 $f_n = \dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}$。

其他利用生成函数求数列的方法

$F(x) = \sqrt{G(x)}$，即 $F(x) = G^{\frac12}(x)$。

$F'(x) = \dfrac12 G'(x) G^{-\frac12}(x)$。

$F'(x)G(x) = \dfrac12 G'(x)F(x)$。

$\sum\limits_{i=0}^{n}(i+1)f_{i+1}g_{n-i} = \dfrac12 \sum\limits_{i=0}^{n}(i+1)g_{i+1}f_{n-i}$。

$(n+1)f_{n+1}g_0 = \dfrac12 \sum\limits_{i=0}^{n}(i+1)g_{i+1}f_{n-i} - \sum\limits_{i=0}^{n}(i+1)f_{i+1}g_{n-i}$。

如果 $G(x)$ 项数较少可以 $O(nk)$ 求出 f_n 前 n 位，其中 k 为 G 的项数。

分拆数

将自然数 n 写成递降正整数和的表示的方案数 p_n。

k 部分拆数

将 n 分成恰有 k 个部分的分拆，称为 k 部分拆数，记作 $p(n,k)$。

$p(n,k) = \sum\limits_{j=0}^{k} p(n-k,j)$，$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$。

生成函数

$\sum_{i=0} p_i x^i = \prod_{i=1} \frac{1}{1-x^i}$。$\prod_{i=1}(1-x^i) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k x^{\frac{k(3k-1)}{2}}$。（五边形数定理）

$\sum_{n,k\geq 0} p(n,k)x^n y^k = \prod_{i=1} \frac{1}{1-x^i y}$。

Ferrers 图

将分拆的每个部分用点组成的行表示。每行点的个数为这个部分的大小。

最大 k 分拆数与 k 部分分拆数相同。

互异拆分数

pd_n，自然数 n 的各部分互不相同的分拆方法数。

同理定义互异 k 部分拆数，$pd(n,k)$。有 $pd(n,k) = pd(n-k,k-1) + pd(n-k,k)$。

$\sum_{i=0} pd_i x^i = \prod_{i=1}(1+x^i)$。

$\sum_{n,k\geq 0} pd(n,k)x^n y^k = \prod_{i=1}(1+x^i y)$。

奇拆分数

po_n，自然数 n 的各部分都是奇数的分拆方法数。同理定义互异 k 部分拆数。

$\sum_{i=0} po_i x^i = \prod_{i=1} \frac{1}{(1-x^{2i-1})} = \frac{\prod_{i=1}(1-x^{2i})}{\prod_{i=1}(1-x^i)} = \prod_{i=1}(1+x^i)$。所以 $po_n = pd_n$。