



КАФЕДРА **ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ,**
информационные технологии»

ДОМАШНЯЯ РАБОТА № 1

Вариант №18

ДИСЦИПЛИНА: «Аналитическая геометрия»

ТЕМА: «Матричное исчисление и системы линейных уравнений»

Проверил _____ (подпись) _____ (Ф.И.О)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга, 2022

Вариант 18
Задача 1

Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$
если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$|A| = (5 \cdot 3 \cdot 1) + (-1 \cdot 0 \cdot (-2)) + (2 \cdot 1 \cdot (-2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot (-1) \cdot 1) - (-2 \cdot 3 \cdot (-2)) - (1 \cdot 0 \cdot 5) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

невырожденная и имеет обратную.

det вычисляем по правилу Сфурiosa.

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B \Leftrightarrow E X = A^{-1} B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/D_A & A_{12}/D_A & \dots & A_{1n}/D_A \\ A_{21}/D_A & A_{22}/D_A & \dots & A_{2n}/D_A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}/D_A & A_{n2}/D_A & \dots & A_{nn}/D_A \end{pmatrix}$$

где $D_A = |A|$
(детерминант)
 A_{nm} - алгебраическое
дополнение A'

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A' - транспонированная
матрица A

Найдем алгебраические дополнения
матрицы A'

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{3,2} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 6 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 17 \cdot 0 & 8 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 17 \cdot 0 & 8 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 17 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 8 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Conclusion: $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 8 & -3 & 14 \end{pmatrix}$

Тривиум

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 8 & -3 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot 8 & 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) & 5 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 14 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 8 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 14 \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 8 & (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & -2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 14 \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \quad 4T \quad \checkmark$$

Задача 2

Примерная программа Коннора-Каренли
исследовать совместимость и найти
общее и частное решение системы
линейных уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + x_4 = 17 \\ 5x_1 + 14x_2 + x_3 - 17x_4 = 39 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 14 \\ x_1 - 2x_2 - 19x_3 - 37x_4 = 27 \end{cases}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & 7 & 1 & 17 \\ 5 & 14 & 1 & -17 & 39 \\ 2 & 6 & 2 & -4 & 14 \\ 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \end{array} \right)$$

Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду для удобства нахождения местами 1 и последней строки.

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \\ 5 & 14 & 1 & -17 & 39 \\ 2 & 6 & 2 & -4 & 14 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times(-5)+7; \times(-2)+; \times(-3)+ \\ \sim \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \\ 0 & 24 & 96 & 168 & -96 \\ 0 & 10 & 40 & 70 & 40 \\ 0 & 16 & 64 & 112 & -64 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 0,1 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \begin{array}{l} \text{пропорциональные} \\ \text{строки вычтем}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A|B) = r(A) = 2; \text{ где } r - \text{ ранг матрицы}$$

По теореме Кранкера-Карацци приведенная выше система совместна

$n = 4$; где n - число переменных

$n < r \Rightarrow$ система неопределенная.

число базисных переменных = r (ранг) \Rightarrow

$n - 2 =$ число свободных переменных

Определим базисные переменные по отношению от нуля минору (первую)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Данные переменные $x_1; x_2$

Свободные переменные $x_3; x_4$

Обозначим $x_3 = C_1; x_4 = C_2$ где C_1 и C_2 любые числа

Запишем упрощенную систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 19x_3 - 37x_4 = 27 \\ x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_2 = 4 - 4C_1 - 7C_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 27 + 19C_1 + 37C_2 + 8 - 8C_1 - 14C_2 = \\ &= 35 + 11C_1 + 23C_2 \end{aligned}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 35 + 11C_1 + 23C_2 \\ 4 - 4C_1 - 7C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{]} C_1 = 0 \ C_2 = 0 \text{ тогда } X_2 = \begin{pmatrix} 35 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 35 + 11C_1 + 23C_2 \\ 4 - 4C_1 - 7C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 35 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{x(-2)+; x(-3)+} \\ \sim \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -12 & -6 & 3 \\ 0 & -8 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times 4 \\ \times 3 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -24 & -48 & -24 & 12 \\ 0 & -24 & -18 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times (-1)+ \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -24 & -48 & -24 & 12 \\ 0 & 0 & 30 & 24 & -18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{12} \\ \cdot \frac{1}{6} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\chi(A) = 3$; ранг матрицы $n = 5$; число переменных

$\chi < n \Rightarrow$ система неопределенная и имеет нетривиальное решение и тривиальные тоже.

$r(A) = 3 =$ число базисных переменных

$n - r(A) = 2 =$ число свободных переменных

Отмечая от нуля минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -24 & -48 \\ 0 & 12 & 30 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{(-24) \cdot 30}{12 \cdot 6} = -10 \neq 0$$

$x_1; x_2; x_3$ — базисные переменные

$x_4; x_5$ — свободные переменные.

$$x_1 = 1 \quad x_4 = C_1$$

$$x_2 = -2 \quad x_5 = C_2$$

$$x_3 = 5$$

Запишем систему в соответствии с матрицей.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$5x_3 + 4C_1 - 3C_2 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{3C_2 - 4C_1}{5}$$

$$-2x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-4x_3 - 2x_4 + x_5}{2} =$$

$$= \frac{-12C_2 + 16C_1}{5} - 2C_1 + C_2 = \frac{6C_1 - 7C_2}{10}$$

$$x_1 = x_5 - x_4 - 2x_2 - 3x_3 = C_2 - C_1 + \frac{7C_2 - 6C_1}{5} + \frac{12C_1 - 9C_2}{5}$$

$$x_1 = \frac{5C_2 - 5C_1 + 7C_2 - 6C_1 + 12C_1 - 9C_2}{5} = \frac{3C_2 + C_1}{5}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{3C_2 + C_1}{5} \\ \frac{6C_1 - 7C_2}{10} \\ \frac{3C_2 - 4C_1}{5} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

X_0 - общее решение
нормальной

Найдем Р.С.Э.

$$E_1 = X(C_1=1; C_2=0) = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = X(C_1=0; C_2=1) \oplus$$

$$\oplus \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,7 \\ 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение может быть
записано через Р.С.Э.

$$X = C_1 E_1 + C_2 E_2 = C_1 \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,7 \\ 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее: $X_0 = \begin{pmatrix} 0,2C_1 + 0,6C_2 \\ 0,6C_1 + -0,7C_2 \\ -0,8C_1 + 0,6C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}; E_1 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,7 \\ 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$