



**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

*Калужский филиал федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего профессионального образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)*

**ФАКУЛЬТЕТ** ИУК Информатика и управление

**КАФЕДРА** ИУК4 математика и физика

## **О Т Ч Е Т**

**ДОМАШНЯЯ РАБОТА № 1**

Вариант № \_18\_

**ДИСЦИПЛИНА:** Аналитическая геометрия

**ТЕМА:** Матричное исчисление и системы линейных уравнений

Выполнил студент группы \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Моряков В.Ю. \_\_\_\_\_

ФИО

Проверил:

\_\_\_\_\_

Зенкина И.А. \_\_\_\_\_

ФИО

Дата сдачи (защиты): \_\_\_\_\_

Результаты сдачи(защиты):

Балльная оценка: \_\_\_\_\_

Оценка: \_\_\_\_\_

Калуга, 2022 г.

Вариант 18  
Задача 1

Решить матричное уравнение  $A \cdot X = B$   
если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$|A| = (5 \cdot 3 \cdot 1) + (-1 \cdot 0 \cdot (-2)) + (2 \cdot 1 \cdot (-2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot (-1) \cdot 1) - (-2 \cdot 3 \cdot (-2)) - (1 \cdot 0 \cdot 5) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

невырожденная и имеет обратную.

det вычисляем по правилу Сфурiosa.

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B \Leftrightarrow E X = A^{-1} B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/D_A & A_{12}/D_A & \dots & A_{1n}/D_A \\ A_{21}/D_A & A_{22}/D_A & \dots & A_{2n}/D_A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}/D_A & A_{n2}/D_A & \dots & A_{nn}/D_A \end{pmatrix}$$

где  $D_A = |A|$   
(детерминант)  
 $A_{nm}$  - алгебраическое  
дополнение  $A'$

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A'$  - транспонированная  
матрица  $A$

Найдём алгебраические дополнения  
матрицы  $A'$

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{3,2} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 6 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 17 \cdot 0 & 8 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 17 \cdot 0 & 8 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 17 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 8 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Conclusion:  $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 8 & -3 & 14 \end{pmatrix}$

## Тривиум

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 8 & -3 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot 8 & 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) & 5 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 14 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 8 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 14 \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 8 & (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & -2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 14 \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx B \quad 4T \quad \checkmark$$

## Задача 2

Примерная программа Конкреа - Каренли  
исследовать совместимость и найти  
общее и частное решение системы  
линейных уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + x_4 = 17 \\ 5x_1 + 14x_2 + x_3 - 17x_4 = 39 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 14 \\ x_1 - 2x_2 - 19x_3 - 37x_4 = 27 \end{cases}$$

$$A|B = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & 7 & 1 & 17 \\ 5 & 14 & 1 & -17 & 39 \\ 2 & 6 & 2 & -4 & 14 \\ 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \end{array} \right)$$



Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду для удобства нахождения местами 1 и последней строки.

$$A|B = \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & -13 & -37 & 27 \\ 5 & 14 & 1 & -17 & 39 \\ 2 & 6 & 2 & -4 & 14 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times(-5)+7; \times(-2)+; \times(-3)+ \\ \sim \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & -13 & -37 & 27 \\ 0 & 24 & 96 & 168 & -96 \\ 0 & 10 & 40 & 70 & 40 \\ 0 & 16 & 64 & 112 & -64 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 0,1 \\ \cdot 3 \end{array} \sim$$

пропорциональные строки вычтем

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -13 & -37 & 27 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A|B) = r(A) = 2; \text{ где } r - \text{ ранг матрицы}$$

По теореме Кранкера-Карацци приведенная выше система совместна

$n = 4$ ; где  $n$  - число переменных

$n < r \Rightarrow$  система неопределенная.

число базисных переменных =  $r$  (ранг)  $\Rightarrow$

$n - r = 4 - 2 = 2$  число свободных переменных

Определим базисные переменные по старшим из них от левой матрицы (первую)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Данные переменные  $x_1; x_2$

Свободные переменные  $x_3; x_4$

Обозначим  $x_3 = C_1; x_4 = C_2$  где  $C_1$  и  $C_2$  любые числа

Запишем упрощенную систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 19x_3 - 37x_4 = 27 \\ x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_2 = 4 - 4C_1 - 7C_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 27 + 19C_1 + 37C_2 + 8 - 8C_1 - 14C_2 = \\ &= 35 + 11C_1 + 23C_2 \end{aligned}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 35 + 11C_1 + 23C_2 \\ 4 - 4C_1 - 7C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{] } C_1 = 0 \ C_2 = 0 \text{ тогда } X_0 = \begin{pmatrix} 35 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 35 + 11C_1 + 23C_2 \\ 4 - 4C_1 - 7C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 35 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Задача 3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} x(-2)+; x(-3)+ \\ \sim \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -12 & -6 & 3 \\ 0 & -8 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_4 \\ x_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -24 & -48 & -24 & 12 \\ 0 & -24 & -18 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} x(-1)+ \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -24 & -48 & -24 & 12 \\ 0 & 0 & 30 & 24 & -18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{12} \\ \cdot \frac{1}{6} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\chi(A) = 3$ ; ранг матрицы  $n = 5$ ; число переменных

$\chi < n \Rightarrow$  система неопределенная и имеет нетривиальное решение и тривиальное тоже.

$r(A) = 3 =$  число базисных переменных

$n - r(A) = 2 =$  число свободных переменных

Отмечая от нуля минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -24 & -48 \\ 0 & 12 & 30 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{(-24) \cdot 30}{12} = -10 \neq 0$$

$x_1; x_2; x_3$  — базисные переменные

$x_4; x_5$  — свободные переменные.

$$x_1 = 1 \quad x_4 = C_1$$

$$x_2 = -2 \quad x_5 = C_2$$

$$x_3 = 5$$

Запишем систему в соответствии с матрицей.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$5x_3 + 4C_1 - 3C_2 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{3C_2 - 4C_1}{5}$$

$$-2x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-4x_3 - 2x_4 + x_5}{2} =$$

$$= \frac{-12C_2 + 16C_1}{5} - 2C_1 + C_2 = \frac{6C_1 - 7C_2}{10}$$

$$x_1 = x_5 - x_4 - 2x_2 - 3x_3 = C_2 - C_1 + \frac{7C_2 - 6C_1}{5} + \frac{12C_1 - 9C_2}{5}$$

$$x_1 = \frac{5C_2 - 5C_1 + 7C_2 - 6C_1 + 12C_1 - 9C_2}{5} = \frac{3C_2 + C_1}{5}$$



$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{3C_2 + C_1}{5} \\ \frac{6C_1 - 7C_2}{10} \\ \frac{3C_2 - 4C_1}{5} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$X_0$  - общее решение  
нормальной

Найдем Р.С.Э.

$$E_1 = X(C_1=1; C_2=0) = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = X(C_1=0; C_2=1) \oplus$$

$$\oplus \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,7 \\ 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Общее решение может быть} \\ \text{записано через Р.С.Э.}$$

$$X = C_1 E_1 + C_2 E_2 = C_1 \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,7 \\ 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Общее: } X_0 = \begin{pmatrix} 0,2C_1 + 0,6C_2 \\ 0,6C_1 + -0,7C_2 \\ -0,8C_1 + 0,6C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}; E_1 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,7 \\ 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Проверка

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 8 & -3 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot 8 & 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) & 5 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 14 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 8 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 14 \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 8 & (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & -2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 14 \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \quad 4T \quad 4$$

## Задача 2

Применяя теорему Кронера-Каремана исследовать совместимость и найти общее и частное решения системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + x_4 = 17 \\ 5x_1 + 14x_2 + x_3 - 17x_4 = 39 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 14 \\ x_1 - 2x_2 - 19x_3 - 37x_4 = 27 \end{cases}$$

$$A|B = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & 7 & 1 & 17 \\ 5 & 14 & 1 & -17 & 39 \\ 2 & 6 & 2 & -4 & 14 \\ 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \end{array} \right)$$

## Задача 2 (Правки).

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + x_4 = 17 \\ 5x_1 + 14x_2 + x_3 - 17x_4 = 39 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 14 \\ x_1 - 2x_2 - 19x_3 - 37x_4 = 27 \end{cases}$$

отсчитываем строки  
по 1-му элементу  
в порядке убывания

$$A|B = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \\ 2 & 6 & 2 & -4 & 14 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 17 \\ 5 & 14 & 1 & -17 & 39 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow x(-2)+; \quad x(-3)+; \quad x(-5)+ \\ \leftarrow \sim \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \\ 0 & 10 & 40 & 70 & -40 \\ 0 & 16 & 64 & 112 & -64 \\ 0 & 24 & 96 & 168 & -96 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 0,1 \\ \cdot 1,5 \end{array} \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & -4 \\ \hline 0 & 24 & 96 & 168 & -96 \\ 0 & 24 & 96 & 168 & -96 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -19 & -37 & 27 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A) = 2$ ; где  $\text{rank}$  — ранг матрицы

$n = 4$ ; где  $n$  — число переменных

По теореме Кронекера-Капелли при  
заданной системе система совместна

$n - 2 =$  число свободных переменных

$n < \text{rank} \Rightarrow$  система неопределима

Определим базисные переменные по перво-  
му отличаясь от нуля минору

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Базисные переменные  $x_1; x_2$

Свободные переменные  $x_3; x_4$

Обозначим  $x_3 = C_1; x_4 = C_2$  где  $C_1$  и  $C_2$  любое число.

Затем упрощенную систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 19x_3 - 37x_4 = 27 \\ x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -4 \end{cases}$$

$$x_2 = -4 - 4C_1 - 7C_2$$

$$x_1 = 2(4 + 4C_1 + 7C_2) + 19C_1 + 37C_2 + 27 =$$

$$= \underline{-8} - \underline{8C_1} - \underline{14C_2} + \underline{19C_1} + \underline{37C_2} + \underline{27} = 19 + 23C_2 + 11C_1$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 19 + 11C_1 + 23C_2 \\ -4 - 4C_1 - 7C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$] C_1 = 0, C_2 = 0 \text{ тогда } X_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } X_0 = \begin{pmatrix} 19 + 11C_1 + 23C_2 \\ -4 - 4C_1 - 7C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



### Задача 3 (Триверно).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{x(-2)^+; \\ x(-3)^+;}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -12 & -6 & 3 \\ 0 & -8 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{x_4 \\ x_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -24 & -48 & -24 & 12 \\ 0 & -24 & -18 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

|| Добавили строку 2 на (-1) и прибавили к 3-ей строке

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -24 & -48 & -24 & 12 \\ 0 & 0 & 30 & 24 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{x \frac{1}{12} \\ x \frac{1}{6}}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3$  || ранг матрицы;  $n = 5$  || число переменных

$r < n \Rightarrow$  система неопределенная по критерию неопределенности и имеет как тривиальное, так и не-тривиальное решение.

$r(A) = 3 =$  число базисных переменных

$n - r(A) = 2 =$  число свободных переменных

любой отличный от нуля

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

$x_1; x_2; x_3$  - базисные переменные

$x_4; x_5$  - свободные переменные

$x_4 = C_1; x_5 = C_2$  где  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Запишем систему в соответствии с канонической матрицей

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 + (-2x_4) + x_5 = 0 \\ 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x_3 = \frac{C_2 - 4C_1}{5} \\ x_2 = \frac{6C_1 + C_2}{10} \end{array} \right.$$

$$x_1 = \frac{5C_2 - 5C_1 - 3C_2 + 12C_1 - 6C_1 - C_2}{5} = \frac{C_2 + C_1}{5}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{C_1 + C_2}{5} \\ \frac{6C_1 + C_2}{10} \\ \frac{C_2 - 4C_1}{5} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Найдем Р.С.Д.

$$E_1 = X(C_1=1; C_2=0) = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = X(C_1=0; C_2=1) = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение может быть записано через Р.С.Д.

$$X = C_1 E_1 + C_2 E_2 = C_1 \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } X_0 = \begin{pmatrix} \frac{C_1 + C_2}{5} \\ \frac{6C_1 + C_2}{10} \\ \frac{C_2 - 4C_1}{5} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}; E_1 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; E_2 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$