Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Калужский филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ИУК Информатика и управление

КАФЕДРА ИУК4 Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

О Т Ч Е Т

ДОМАШНЯЯ РАБОТА № 1

Вариант № ___

ДИСЦИПЛИНА: Аналитическая геометрия

ТЕМА: Матричное исчисление и системы линейных уравнений

Выполнил студент группы ___________ ___________ ________________
подпись ФИО

Проверил: ___________ ________________
подпись ФИО

Дата сдачи (защиты): ______________________

Результаты сдачи(защиты):

Балльная оценка: ______________________

Оценка: ______________________

Калуга, 2022 г.

Вариант 12

Задание №1

Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -16 & 11 \\ 7 & 14 & -21 \\ -4 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение</u>

Умножим обе части матричного уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}.

Получим: $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$.

Так как $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X$, то решением матричного уравнения $A \cdot X = B$ будет матрица $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдём для матрицы A обратную матрицу A^{-1}.

Сначала вычислим определитель матрицы A по правило Саррюса:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) \cdot (-5) + 0 \cdot 3 \cdot 1 - (-5) \cdot 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \cdot 0 = 1$$

Определитель матрицы $|A| = 1 \neq 0$, следовательно, матрица A имеет обратную матрицу. Вычислим обратную матрицу для матрицы A методом алгеброических дополнений.

Запишем матрицу, транспонированную матрице A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для каждого элемента матрицы A' найдём алгебраическое дополнение:

$$A'_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) = 6;$$

$$A'_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 0 - (-2) \cdot (-5)) = 10;$$

$$A'_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-5) \cdot (3) = 15;$$

$A'_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -((-2) \cdot 0 - 3 \cdot 1) = 3;$

$A'_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-5) \cdot 1 = 5;$

$A'_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - (-5) \cdot (-2)) = 7;$

$A'_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = 1;$

$A'_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-2) - 0 \cdot 1) = 2;$

$A'_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) = 3;$

Из вычисленных из алгебраических дополнений запишем присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу по формуле$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдём искомую матрицу $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -16 & 11 \\ 7 & 14 & -21 \\ -4 & -5 & 11 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 6 \cdot (-3) + 10 \cdot 7 + 15 \cdot (-4) & 6 \cdot (-16) + 10 \cdot 14 + 15 \cdot (-5) & 6 \cdot 11 + 10 \cdot (-21) + 15 \cdot 11 \\ 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 7 + 7 \cdot (-4) & 3 \cdot (-16) + 5 \cdot 14 + 7 \cdot (-5) & 3 \cdot 11 + 5 \cdot (-21) + 7 \cdot 11 \\ 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-4) & 1 \cdot (-16) + 2 \cdot 14 + 3 \cdot (-5) & 1 \cdot 11 + 2 \cdot (-21) + 3 \cdot 11 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -8 & -31 & 21 \\ -2 & -13 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Проверка</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -31 & 21 \\ -2 & -13 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -16 & 11 \\ 7 & 14 & -21 \\ -4 & -5 & 11 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot(-8)+0\cdot(-2)+(-5)\cdot(-1) & 1\cdot(-31)+0\cdot(-13)+(-5)\cdot(-3) & 1\cdot 21+0\cdot 5+(-5)\cdot 2 \\ -2\cdot(-8)+3\cdot(-2)+3\cdot(-1) & -2\cdot(-31)+3\cdot(-13)+3\cdot(-3) & -2\cdot 21+3\cdot 5+3\cdot 2 \\ 1\cdot(-8)+(-2)\cdot(-2)+0\cdot(-1) & 1\cdot(-31)+(-2)\cdot(-13)+0\cdot(-3) & 1\cdot 21+(-2)\cdot 5+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -16 & 11 \\ 7 & 14 & -21 \\ -4 & -5 & 11 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -16 & 11 \\ 7 & 14 & -21 \\ -4 & -5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -16 & 11 \\ 7 & 14 & -21 \\ -4 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

<u>Ответ</u>: $X = \begin{pmatrix} -8 & -31 & 21 \\ -2 & -13 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

Задание №2

Применяя теорему Кронекера-Капелли, исследовать совместность и найти общее и частное решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 = -7; \\ -5x_1 - 9x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 25; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -8; \\ x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 16x_4 = -29. \end{cases}$$

<u>Решение</u>

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$A|B = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 1 & 0 & -7 \\ -5 & -9 & -7 & 8 & 25 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & -8 \\ 1 & -3 & 11 & -16 & -29 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ :2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 11 & -16 & -29 \\ -5 & -9 & -7 & 8 & 25 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \bullet 5 + \quad \bullet (-1) + \quad \bullet (-3) + \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 11 & -16 & -29 \\ 0 & -24 & 48 & -72 & -120 \\ 0 & 5 & -10 & 15 & 25 \\ 0 & 16 & -32 & 48 & 80 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-24) \\ :5 \\ :16 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 11 & -16 & -29 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 11 & -16 & -29 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг расширенной матрицы системы $r(A|B) = 2$, ранг матрицы системы $r(A) = 2$. $r(A|B) = r(A) = r = 2$ — ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы, то по теореме Кронекера-Капелли система совместная.

Число переменных n = 4. Ранг матрицы меньше числа переменных $r < n$, следовательно, в соответствии с критерием определённости, система является неопределённой.

Число базисных переменных равно рангу матрицы системы, в данном случае их две. Число свободных переменных равно $n - r = 4 - 2 = 2$. Для определения базисных переменных возьмем отличный от нуля базисный минор. Его можно взять следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -16 & -29 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Значит, переменные x_1, x_2 — базисные, а переменные x_3, x_4 — свободные.

Запишем укороченную систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 16x_4 = -29; \\ \qquad x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Обозначим свободные переменные: $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$.

Найдём базисные переменные:

$x_2 - 2C_1 + 3C_2 = 5$, $x_2 = 2C_1 + 5 - 3C_2$

$x_1 - 3(2C_1 + 5 - 3C_2) + 11C_1 - 16C_2 = -29$, $x_1 = 7C_2 - 5C_1 - 14$

$$X_{\text{о}}=\begin{pmatrix}7C_2-5C_1-14\\2C_1+5-3C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}\text{— общее решение.}$$

Зададим константам произвольные значения: $\text{C}_1=1$, $C_2=1$, подставим их в общее решение и получим частное решение системы:

$$X_{\text{ч}}=\begin{pmatrix}-12\\4\\1\\1\end{pmatrix}\text{— частное решение}$$

<u>Ответ:</u> $X_{\text{о}}=\begin{pmatrix}7C_2-5C_1-14\\2C_1+5-3C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$ — общее решение, $X_{\text{ч}}=\begin{pmatrix}-12\\4\\1\\1\end{pmatrix}$ — частное решение.

Задание №3

Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0;\\x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0;\\2x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=0.\end{cases}$$

<u>Решение</u>

$$A=\begin{pmatrix}7&2&-1&-2&2\\1&-3&1&-1&-1\\2&3&2&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-3&1&-1&-1\\7&2&-1&-2&2\\2&3&2&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-7)+\quad\cdot(-2)+\\ \\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-3&1&-1&-1\\0&23&-8&5&9\\0&9&0&3&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot 3\\ \div 3\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-3&1&-1&-1\\0&3&0&1&1\\0&69&-24&15&27\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-23)+\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-3&1&-1&-1\\0&3&0&1&1\\0&0&-24&-8&4\end{pmatrix}$$

Ранг матрицы системы $r(A)=3$, число переменных $n=5$. Ранг матрицы меньше числа переменных $r<n$, следовательно, в соответствии с критерием определённости, система является неопределённой и имеет не только тривиальное решение.

Число базисных переменных равно $r(A)=3$, а число свободных переменных равно $n-r(A)=5-3=2$. Так как минор при переменных x_1, x_2 и x_3 отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = 1 \bullet 3 \bullet (-24) = -72 \neq 0$$

то эти переменные можно принять за базисные, свободными переменными будут x_4 и x_5.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 0; \\ -24x_3 - 8x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Обозначим свободные переменные: $x_4 = C_1, x_5 = C_2$.

Найдём базисные переменные:

$-24x_3 - 8C_1 + 4C_2 = 0, -24x_3 = 8C_1 - 4C_2, x_3 = -\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{6}C_2,$

$3x_2 + C_1 + C_2 = 0, x_2 = -\frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2,$

$x_1 - 3\left(-\frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) - \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{6}C_2 - C_1 - C_2 = 0, x_1 + C_1 + C_2 - \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{6}C_2 - C_1 - C_2 = 0, x_1 = \frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{6}C_2.$

Общее решение системы примет вид:

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{6}C_2 \\ -\frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2 \\ -\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{6}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Найдем нормальную фундаментальную систему решений:

$$E_1 = X(C_1 = 1;\ C_2 = 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = X(C_1 = 0;\ C_2 = 1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение может быть записано через ФСР следующим образом:

$$X = C_1E_1 + C_2E_2 = C_1\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Ответ:</u> $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{6}C_2 \\ -\frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2 \\ -\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{6}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

ФСР: $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$