by-part

สัปดาห์ที่ 2 การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

แบบฝึกหัดที่ 1 หน้า 13 เลือก u ก่อน นอกนั้น คือ dv

1. $\int xe^{4x}\,dx$

กำหนดให้ $u =$ x และ $\int dv = \int e^{4x}\,dx$

จะได้ $du =$ dx และ $v =$ $\frac{e^{4x}}{4}$

ดังนั้น $\int xe^{4x}\,dx$ $= \frac{xe^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4}\,dx$

$= \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{1}{4}\int e^{4x}\,dx$

$= \frac{xe^{4x}}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)\frac{e^{4x}}{4} + C$

$= \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + C$ #

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \frac{\sin(2\theta)}{2} = \sin\theta\cos\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

2. $\int \theta \sin\theta\cos\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int \theta \sin(2\theta)\, d\theta$

กำหนดให้ $u = \theta$ และ $dv = \sin(2\theta)\, d\theta$

จะได้ $du = d\theta$ และ $v = \frac{-\cos(2\theta)}{2}$

ดังนั้น **จากโจทย์** $= \frac{1}{2}\left[-\theta\frac{\cos(2\theta)}{2} - \int -\frac{\cos(2\theta)}{2}\, d\theta\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\theta\cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2\theta)\, d\theta\right]$

$= \frac{1}{4}\left[-\theta\cos(2\theta) + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right] + C$

$= -\frac{\theta\cos(2\theta)}{4} + \frac{\sin(2\theta)}{8} + C$ #

3. $\int x\ln x \, dx$

กำหนดให้ $u = \ln x$ และ $dv = x\, dx$

จะได้ $du = \frac{1}{x}\, dx$ และ $v = \frac{x^2}{2}$

ดังนั้น **จากโจทย์** $= (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{\cancel{x^2}^{\,x}}{2}\frac{1}{\cancel{x}}\, dx$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$ #

แบบฝึกหัดที่ 2 หน้า 14

1. $\int x^3 e^{x^2}\, dx = \int x^2 e^{x^2} \cdot x\, dx$

กำหนดให้ $z = x^2$ จะได้ $dz = 2x\, dx$

$\frac{dz}{2} = x\, dx$

ดังนั้น $\int x^3 e^{x^2}\, dx = \int z e^z \frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int z e^z dz$ --- (*)

กำหนดให้ $u = z$ และ $dv = e^z dz$

จะได้ $du = dz$ และ $v = e^z$

ดังนั้น **จาก** (*) $= \frac{1}{2}\left[ze^z - \int e^z dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[ze^z - e^z\right] + C$

แทนค่ากลับ

$= \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right] + C$

$= \frac{e^{x^2}}{2}\left[x^2 - 1\right] + C$ #

2. $\int \sin\left(\sqrt{x}\right)\, dx$

กำหนดให้ $z =$ $\sqrt{x}$ จะได้ $dz =$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$2z\,dz = 2\sqrt{x}\,dz = dx$

ดังนั้น $\int \sin\left(\sqrt{x}\right)\, dx$ $= \int \sin(z) \cdot 2z\, dz$ --- (*)

$= 2\int z \cdot \sin(z)\, dz$

กำหนดให้ $u =$ z และ $dv =$ $\sin(z)\, dz$

จะได้ $du =$ dz และ $v =$ $-\cos(z)$

ดังนั้น **จาก** (*) $= 2\left[-z\cos(z) + \int \cos(z)\, dz\right.$

$= 2\left[-z\cos(z) + \sin(z)\right] + C$

แทนค่ากลับ

$= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}) + C$

$\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(x)$ ※ ไม่ใช่ลน แต่คือ กฎของ log

3. $\int_1^9 \ln(\sqrt{x})\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\ln x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^9 \ln x\,dx$

กำหนดให้ $u = \ln x$ และ $dv = dx$

จะได้ $du = \frac{1}{x}\,dx$ และ $v = x$

ดังนั้น **จากโจทย์** $= \frac{1}{2}\left[x\ln x\Big|_1^9 - \int_1^9 \cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}\,dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(9\ln 9 - \underbrace{\cancel{1\ln 1}}_{0}) - \int_1^9 1\,dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[9\ln 9 - x\Big|_1^9\right]$

$= \frac{1}{2}\left[9\ln 9 - (9-1)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[9\ln 9 - 8\right]$

$= \frac{9\ln 9}{2} - 4$

$= \frac{9\ln 3^2}{2} - 4$

$= \frac{\cancel{2}(9)\ln 3}{\cancel{2}} - 4 = 9\ln 3 - 4$ #

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

ดิฟไปจนเจอ 0 ได้

อินทิเกรตไปเรื่อย ๆ ได้

จงหา $\int x^3 e^{-2x}\, dx$

วิธีคิด ใช้การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน ด้วยวิธีการจัดเป็นตาราง

อนุพันธ์	ปริพันธ์
x^3	e^{-2x}
$3x^2$	$\frac{e^{-2x}}{-2}$
$6x$	$\frac{e^{-2x}}{-2(-2)} = \frac{e^{-2x}}{4}$
6	$\frac{e^{-2x}}{4(-2)} = \frac{e^{-2x}}{-8}$
0	$\frac{e^{-2x}}{-8(-2)} = \frac{e^{-2x}}{16}$

* ระวังเครื่องหมาย

คำตอบ $= -\frac{x^3 e^{-2x}}{2} - \frac{3x^2 e^{-2x}}{4} - \frac{\cancel{6}^{3} x e^{-2x}}{\cancel{8}\,4} - \frac{\cancel{6}^{3} e^{-2x}}{\cancel{16}\,8} + C$

$= -\frac{x^3 e^{-2x}}{2} - \frac{3x^2 e^{-2x}}{4} - \frac{3x e^{-2x}}{4} - \frac{3e^{-2x}}{8} + C$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหา $\int x^3 \cos(2x)\, dx$

วิธีคิด ใช้การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน ด้วยวิธีการจัดเป็นตาราง

อนุพันธ์	ปริพันธ์
x^3	$\cos(2x)$
$3x^2$	$\frac{\sin(2x)}{2}$
$6x$	$-\frac{\cos(2x)}{4}$
6	$-\frac{\sin(2x)}{8}$
0	$\frac{\cos(2x)}{16}$

+ − + −

* ระวังเครื่องหมาย

จากโจทย์ $= \frac{x^3 \sin(2x)}{2} + \frac{3x^2 \cos(2x)}{4} - \frac{\cancel{6}^{3} x \sin(2x)}{\cancel{8}\ 4} - \frac{\cancel{6}^{3} \cos(2x)}{\cancel{16}\ 8} + C$

$$\left(1-\frac{3}{x^3}\right)' = \left(1-3x^{-3}\right)' = \left(-3\left(-3x^{-4}\right)\right)$$

$$= 9x^{-4} = \frac{9}{x^4}$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

จงหา $\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}}\,dx$

HINT : จัดรูป แล้วเลือกแทนค่าตัวแปรที่เหมาะสม

จัดรูป

$$\sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}} = \sqrt{\frac{x^3-3}{x^3 \cdot x^8}} = \sqrt{\frac{x^3-3}{x^3}\left(\frac{1}{x^8}\right)} = \frac{1}{x^4}\sqrt{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3}{x^3}}$$

$$= \frac{1}{x^4}\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x^3}}$$

ให้ $u = 1-\frac{3}{x^3} \Rightarrow du = \frac{9}{x^4}\,dx$

$\Rightarrow \frac{du}{9} = \frac{1}{x^4}\,dx$

ดังนั้น

$$\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}}\,dx = \int \frac{1}{x^4}\sqrt{1-\frac{3}{x^3}}\,dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,\frac{du}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + C$$

$$= \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{27} + C = \frac{2}{27}\left(1-\frac{3}{x^3}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$