$*\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\div \cos^2\theta \quad \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

สัปดาห์ที่ 4 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

อะไรเลขชี้เป็นคี่ หา จะเลือก u เป็นอีกตัว

ค่า m	ค่า n	เปลี่ยนตัวแปร	สูตรที่ใช้จัดรูป
คี่	อะไรก็ได้	ให้ $u = \cos x$	ใช้ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
อะไรก็ได้	คี่	ให้ $u = \sin x$	ใช้ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
คู่	คู่	จัดรูปเพื่อลดดีกรี	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$*$

บุบ2เท่า

$\sin^2(2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4x))$

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$

ค่า m	ค่า n	เปลี่ยนตัวแปร	สูตรที่ใช้จัดรูป
คี่	อะไรก็ได้	ให้ $u = \sec x$	ใช้ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
อะไรก็ได้	คู่	ให้ $u = \tan x$	ใช้ $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
คู่	คี่	integrate by part	ใช้ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left(\sin(A-B) + \sin(A+B)\right)$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) - \cos(A+B)\right)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right)$$

แบบฝึกหัดที่ 1 หน้า 21

จงหา $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

วิธีคิด สมมติให้ $u = \sin x$ จะได้ว่า $du = \cos x \, dx$

$dx = \frac{du}{\cos x}$

และใช้เอกลักษณ์ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2$

จากโจทย์ $= \int u^4 \cancel{\cos^3 x}^{\cos^2 x} \frac{du}{\cancel{\cos x}} = \int u^4 \cos^2 x \, du$

$= \int u^4 (1 - u^2) \, du$

$= \int (u^4 - u^6) \, du$

$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C$

$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

$x=0 \Rightarrow u=\cos 0=1$

$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\cos\frac{\pi}{2}=0$ จงหา $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \sin x\, dx$

อย่าลืม $-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

วิธีคิด สมมติให้ $u =$ $\cos x$ จะได้ว่า $du =$ $-\sin x\, dx$

$dx = \frac{du}{-\sin x}$

และใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x =$ $1-\cos^2 x = 1-u^2$

จากโจทย์ $= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \frac{du}{-\sin x} = -\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, du$

$= \int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=0} (\sin^2 x)^2\, du$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= \int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=0} (1-u^2)^2\, du$

$= \int_0^1 \left(1^2 - 2(1)(u^2) + (u^2)^2\right) du$

$= \int_0^1 (1-2u^2+u^4)\, du$

$= \left(u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right)\Big|_{u=0}^{1}$

$$= \left(1 - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{1^5}{5}\right) - (0 - 0 + 0)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15 - 10 + 3}{15}$$

$$= \frac{8}{15}$$

แบบฝึกหัดที่ 3 หน้า 21

จงหา $\int \sin^3(3x)\cos^3(3x)\,dx$

วิธีคิด สมมติให้ $u = \sin(3x)$ จะได้ว่า $du =$ $3\cos(3x)\,dx$

$dx = \dfrac{du}{3\cos(3x)}$

และใช้เอกลักษณ์ $\cos^2(3x) =$ $1 - \sin^2(3x) = 1 - u^2$

จากโจทย์ $= \int u^3 \cdot \cos^{\cancel{3}\,2}(3x)\,\dfrac{du}{3\cancel{\cos(3x)}}$

$= \dfrac{1}{3}\int u^3 \cos^2(3x)\,du$

$= \dfrac{1}{3}\int u^3(1-u^2)\,du$

$= \dfrac{1}{3}\int (u^3 - u^5)\,du$

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u^4}{4} - \dfrac{u^6}{6}\right) + C$

$= \dfrac{\sin^4(3x)}{12} - \dfrac{\sin^6(3x)}{18} + C$

หากเลือกสมมติตัวแปรใหม่ $\int \sin^3(3x)\cos^3(3x)\,dx$

สมมติให้ $u = \cos(3x)$ จะได้ว่า $du = -3\sin(3x)\,dx$

$dx = \dfrac{du}{-3\sin(3x)}$

และใช้เอกลักษณ์ $\sin^2(3x) = 1-\cos^2(3x) = 1-u^2$

จากโจทย์ $= \int \cancel{\sin^3(3x)} \cdot u^3 \dfrac{du}{-3\cancel{\sin(3x)}}$ $\quad \sin^2(3x)$

$= -\dfrac{1}{3}\int \sin^2(3x)\, u^3\, du$

$= -\dfrac{1}{3}\int (1-u^2)\, u^3\, du$

$= -\dfrac{1}{3}\int (u^3 - u^5)\, du$

$= -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u^4}{4} - \dfrac{u^6}{6}\right) + C$

$= -\dfrac{u^4}{12} + \dfrac{u^6}{18} + C$

$= -\dfrac{\cos^4(3x)}{12} + \dfrac{\cos^6(3x)}{18} + C$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

แบบฝึกหัดที่ 4 หน้า 22

จงหา $\int \cos^4(2x)\,dx$

วิธีคิด ใช้เอกลักษณ์ $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$ จะได้ว่า

$$\cos^4(2x) = (\cos^2(2x))^2 = \left(\frac{1}{2}(1+\cos(4x))\right)^2$$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$= \frac{1}{4}(1+\cos(4x))^2 = \frac{1}{4}\left(1^2+2(1)(\cos(4x)) + \cos^2(4x)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos(4x) + \frac{1}{2}(1+\cos(8x))\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos(4x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8x)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2} + 2\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(8x)\right]$$

$$= \dots$$

$$\int \cos^4(2x)\,dx = \frac{1}{4}\int\left[\frac{3}{2} + 2\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(8x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} + \cancel{2}^{1}\left(\frac{1}{\cancel{4}_2}\sin(4x)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin(8x)\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{1}{16}\sin(8x)\right] + C$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{64}\sin(8x) + C \#$$

sin cos tan หาคี่
sec หาคู่

แบบฝึกหัดที่ 7 หน้า 23

จงหา $\int \tan^4 x \sec^4 x \, dx$

วิธีคิด สมมติให้ $u =$ $\tan x$ จะได้ว่า $du =$ $\sec^2 x \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

และใช้เอกลักษณ์ $\sec^2 x =$ $\tan^2 x + 1 = u^2 + 1$

จากโจทย์ $= \int u^4 \cancel{\sec^4 x}^{\sec^2 x} \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$

$= \int u^4 \sec^2 x \, du$

$= \int u^4 (u^2 + 1) \, du$

$= \int (u^6 + u^4) \, du$

$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$

แบบฝึกหัดที่ 10 หน้า 23

จงหา $\int \sin x \sin 3x \; dx$

วิธีคิด เนื่องจาก $\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) - \cos(A+B)\right)$

จะได้ว่า $\underset{A}{\sin x}\,\underset{B}{\sin 3x} = \frac{1}{2}\left(\cos(x-3x) - \cos(x+3x)\right)$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$= \frac{1}{2}\left(\cos(-2x) - \cos(4x)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \cos(4x)\right)$

ดังนั้น จากโจทย์ $= \frac{1}{2}\int \left(\cos(2x) - \cos(4x)\right) dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{4}\sin(4x)\right) + C$

$= \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x) + C$