คาบติว CALCULUS 1 สัปดาห์ที่ 8

<u>สมบัติของเลขยกกำลัง</u> ให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ และ $m, n \in \mathbb{R}$

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
5. $(a^m)^n = a^{mn}$

<u>สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม</u>

ให้ $x, y \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}$ และ $a, b > 0, a, b \neq 1$

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$
4. $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \cdot \log_a x$
5. $\log_a a = 1$ และ $\log_a 1 = 0$
6. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
7. $a^{\log_a x} = x$
8. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

$\ln x = \log_e x$

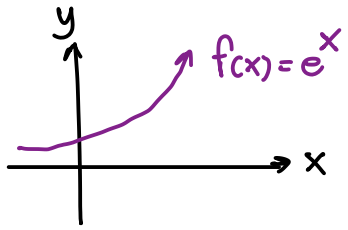
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a|x|) = \frac{1}{x\ln a}$$

<u>จงตอบคำถามต่อไปนี้</u>

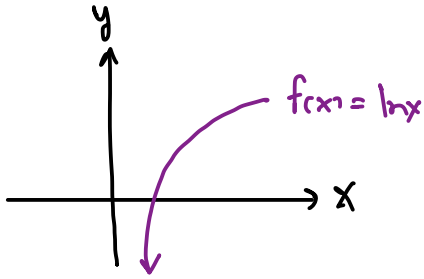
1. จงหาค่าของ $\ln\sqrt{e}$ $= \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}\log_e e = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$ #

2. จงหาค่าของ $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}$ $= e^{\infty} = \infty$



3. จงหาค่าของ $\lim_{x\to2^+} \ln(x-2)$

$= \ln(2-2) = \ln 0^+ = -\infty$



4. จงหาค่าของ $\lim_{x\to0^+} \ln(\sin x)$

$= \ln(\sin 0) = \ln 0 = -\infty$

5. จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}} \cdot \frac{e^{-3x}}{e^{-3x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}\cdot e^{-3x} - e^{-3x}\cdot e^{-3x}}{e^{3x}\cdot e^{-3x} + e^{-3x}\cdot e^{-3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-6x}}{1+e^{-6x}}$$

$$= \frac{1-e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = \frac{1-\frac{1}{e^{\infty}}}{1+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \ \#$$

6. กำหนดให้ $y = e^{-5x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = \dfrac{1}{5}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-5x} \frac{d}{dx}(-5x)$$

$$= e^{-5x}(-5)$$

$$= -5e^{-5x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{5}} = -5e^{-\cancel{5}\left(\frac{1}{\cancel{5}}\right)} = -5e^{-1} = \frac{-5}{e} \quad \#$$

7. จงค่าของอนุพันธ์ของ $y = e^{sinx}$ ที่ $x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \frac{d}{dx} \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \, e^{\sin x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \cos 0 \, e^{\sin 0} = 1 \cdot e^{0} = 1 \cdot 1 = 1 \quad \#$$

8. กำหนดให้ $y = e^{\sin(3x)}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = \dfrac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin(3x)} \frac{d}{dx} \sin 3x$$

$$= \cos 3x \cdot e^{\sin(3x)} \cdot \frac{d}{dx} 3x$$

$$= \cos 3x \cdot e^{\sin(3x)} \cdot 3$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot e^{\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot 3 = \cos \pi \cdot e^{\sin \pi} \cdot 3$$

$$= (-1)(1)(3) = -3 \quad \#$$

9. กำหนดให้ $y = (x^2 - 2x)e^{(3x^2)}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 2$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2-2x)(e^{3x^2})' + e^{3x^2}(x^2-2x)'$$

$$= (x^2-2x)\cdot e^{3x^2}\cdot \frac{d}{dx}3x^2 + e^{3x^2}(2x-2)$$

$$= (x^2-2x)\cdot e^{3x^2}\cdot(6x) + e^{3x^2}(2x-2)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = (2^2-2(2))\cdot e^{3(2)^2}\cdot(6(2)) + e^{3(2)^2}\cdot(2(2)-2)$$

$$= 0 + e^{12}\cdot 2 = 2e^{12} \ \#$$

10. กำหนดให้ $y = 2^{\sec x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = \dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = 2^{\sec x}\cdot \ln 2 \cdot \frac{d}{dx}\sec x$$

$$= 2^{\sec x}\cdot \ln 2 \cdot \sec x \tan x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2^{\sec\frac{\pi}{4}}\cdot \ln 2 \cdot \sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}$$

$$= 2^{\sqrt{2}}\cdot \ln 2\cdot(\sqrt{2})(1) = 2^{\sqrt{2}}\cdot \ln 2\cdot\sqrt{2} \ \#$$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sec\frac{\pi}{4}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{2}$

11. กำหนดให้ $y = \ln(2x+1)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x+1}\cdot\frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$= \frac{1}{2x+1}(2)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2(2)+1}(2) = \frac{1}{5}(2) = \frac{2}{5} \ \#$$

12. กำหนดให้ $y = \ln(\tan x)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = \dfrac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x}\frac{d}{dx}\tan x$$

$$= \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} \cdot \sec^2\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2)^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \#$$

13. กำหนดให้ $y = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\ln x)(1+\ln x)' - (1+\ln x)(1-\ln x)'}{(1-\ln x)^2}$$

2 #

14. กำหนดให้ $f(x) = \log_3(1+3^x)$ จงหาค่าของ $f'(2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+3^x)\ln 3} \cdot \frac{d}{dx}(1+3^x)$$

$$= \frac{1}{(1+3^x)\cancel{\ln 3}} \cdot \left(3^x \cancel{\ln 3}\right)$$

$$= \frac{3^x}{1+3^x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{3^2}{1+3^2} = \frac{9}{1+9} = \frac{9}{10} \ \#$$

15. กำหนดให้ $y = \dfrac{(3x-1)(x^2-2x+5)}{(2x+3)}$ จงหาค่าของ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

take ln : $\ln y = \ln \dfrac{(3x-1)(x^2-2x+5)}{2x+3}$

$$= \ln(3x-1) + \ln(x^2-2x+5) - \ln(2x+3)$$

diff :

$\dfrac{61}{9}$

16. กำหนดให้ $f(x) = x^{3x}$ จงหาค่าของ $f'(2)$

take ln : $\ln y = \ln x^{3x}$

$\ln y = 3x \ln x$

diff.

$192(1+\ln 2)$ #

17. ฟังก์ชัน $f(x) = xe^x$ มีค่าวิกฤตที่ x มีค่าเท่าใด

คำนวณ $f'(x) = x(e^x)' + e^x(x)'$

$= xe^x + e^x$

$= e^x(x+1)$

$f'(x) = 0$

$e^x(x+1) = 0$

$e^x > 0$ เสมอ

$x+1 = 0$

$x = -1$

$\therefore$ ค่าวิกฤตของ $f(x)$ คือ $x = -1$ #

18. ให้ $y = \ln(144x^3)$ จงหาค่าของ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3}$

$$y = \ln(144x^3)$$

$$= \ln 144 + \ln x^3$$

$$= \ln 144 + 3\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = \frac{3}{3} = 1 \ \#$$

19. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = e^x \sin x$

$$e^x(\sin x + \cos x) \ \#$$

20. จงหาอนุพันธ์ของ $y = 7^{\tan x}$

$$\frac{dy}{dx} = 7^{\tan x} \cdot \ln 7 \, \frac{d}{dx} \tan x$$

$$= 7^{\tan x} \cdot \ln 7 \cdot \sec^2 x \quad \#$$

21. กำหนดให้ $f(x) = \ln|\sec x|$ จงหาค่าของ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x} \frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sec x}} \cdot \cancel{\sec x} \tan x$$

$$= \tan x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \#$$

22. จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{e^{-2x} + e^{2x}} \cdot \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}}$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-2x} \cdot e^{-2x} - e^{2x} \cdot e^{-2x}}{e^{-2x} \cdot e^{-2x} + e^{2x} \cdot e^{-2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-4x} - 1}{e^{-4x} + 1} = \frac{e^{-4\infty} - 1}{e^{-4\infty} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1 \ \#$$

23. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 3^+} \ln(\ln(x-2))$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$= \ln(\ln(3-2))$$

$$= \ln(\ln 1)$$

$$= \ln 0$$

$$= -\infty \ \#$$

24. กำหนดให้ $y = \ln(3x-1)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่ $x = 1$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x-1)$$

$$= \frac{3}{3x-1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{3}{3(1)-1} = \frac{3}{2} \ \#$$

25. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 3^x + \log_5 x^2$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x^2 \ln 5} \cdot \frac{d}{dx} x^2$$

$$= 3^x \ln 3 + \frac{2x}{x^2 \ln 5} \quad \#$$

26. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 e^{3x}$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$f'(x) = x^3 (e^{3x})' + (e^{3x})(x^3)'$$

$$= x^3 \cdot e^{3x} \cdot \frac{d}{dx} 3x + e^{3x} \cdot (3x^2)$$

$$= x^3 \cdot e^{3x} \cdot 3 + e^{3x} \cdot (3x^2) \quad \#$$

$$= 3x^2 e^{3x} (x+1) \quad \text{Ans..}$$

27. จงหาค่าของ $\frac{d}{dx} e^{(3x^2+3x-2)}$ ณ $x = -1$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x^2+3x-2)} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2+3x-2)$$

$$= e^{3x^2+3x-2} \cdot (6x+3)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = e^{3(-1)^2+3(-1)-2} \cdot (6(-1)+3)$$

$$= e^{-2} \cdot (-3) = -3e^{-2} = \frac{-3}{e^2} \quad \#$$

28. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}(\log_2 x^2)$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$\log_2 (0)^2 = \log_2 0 = -\infty \quad \#$$

29. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^{\cos x}$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

take ln : $\ln y = \ln x^{\cos x}$

$$\ln y = \cos x \ln x$$

diff : $(\ln y)' = \cos x \cdot (\ln x)' + \ln x (\cos x)'$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\cos x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(-\sin x)\right] = x^{\cos x}\left[\cos x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(-\sin x)\right]$$

30. จงหาค่าของอนุพันธ์ของ $y = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ ณ $x = 4$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

take ln : $\ln y = \ln (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

$$\ln y = \sqrt{x}\ln\sqrt{x} = \sqrt{x}\ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\ln x$$

diff : $(\ln y)' = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{x})(\ln x)' + (\ln x)(\sqrt{x})'\right]$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{x})\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right]\right] = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right]\right]$$

$$\cancel{4}^{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left[\frac{2}{4} + \frac{\ln 4}{4}\right]$$

$$\cancel{2}\left[\frac{2 + \ln 2^2}{\cancel{4}\,2}\right]$$

$$\frac{2 + 2\ln 2}{2} = \frac{\cancel{2}(1 + \ln 2)}{\cancel{2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \sqrt{4}^{\sqrt{4}}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{4}}{4} + \frac{\ln 4}{2\sqrt{4}}\right]\right] = 2^{2}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{2}{4} + \frac{\ln 4}{2(2)}\right]\right] = 1 + \ln 2 \quad \#$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

   (a) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}$

   (b) $\lim_{x\to\infty} 1.2^x$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \log_3(|\sin x|)$

   (d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{-4x}+e^{4x}}{e^{-4x}-e^{4x}}$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (a) $f(x) = xe^{2x}$

   (b) $f(x) = x\ln x - x$

   (c) $f(x) = 4^{\tan x}$

   (d) $f(x) = e^x \cos x$

   (e) $f(x) = 2^{\tan x}$

   (f) $f(x) = \ln(\sin^2 x)$

   (g) $f(x) = \ln(xe^{-2x})$

   (h) $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

   (i) $f(x) = \log_2(x\log_5 x)$

   (j) $f(x) = 2^x \log_2 x$

   (k) $f(x) = \ln \dfrac{(2x+1)^5}{\sqrt{y^2+1}}$

   (l) $f(x) = (x^2+2)^2(x^4+4)^4$

   (m) $f(x) = \dfrac{e^{-x}\cos^2 x}{x^2+x+1}$

   (n) $f(x) = \sqrt{x}^x$

   (o) $f(x) = (\sin x)^{\ln x}$

   (p) $f(x) = (\tan x)^{1/x}$

   (q) $f(x) = (\ln x)^{\cos x}$

3. จงหาค่าของ $\dfrac{d}{dx}e^{-2x}$ ณ $x = \dfrac{1}{2}$

4. กำหนดให้ $f(x) = e^{\cos x}$ จงหาค่าของ $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

5. ให้ $y = \ln(158x^4)$ จงหาค่าของ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$

6. จงหาค่าวิกฤติทั้งหมดของฟังก์ชัน $f(x) = (x-1)^2 e^{(1-x^2)/2}$

7. ถ้า $\ln(xy^2)+1 = (y-x+1)^3$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $(x,y) = (1,1)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด