คาบติว CALCULUS 1 สัปดาห์ที่ 9

<u>นิยามของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก</u> ให้ $x \in \mathbb{R}$,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

<u>สมบัติของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก</u>

1. $\sinh(-x) = -\sinh x$
2. $\cosh(-x) = \cosh(x)$
3. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

<u>อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก</u>

1. $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
3. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
4. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$
5. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
6. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

1. จงหาค่าของ $\lim_{x\to-\infty} \sinh x$ $= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$$= \frac{e^{-\infty}-e^{\infty}}{2}$$

$$= \frac{0-\infty}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$ Ans..

2. จงหาค่าของ $\lim_{x\to0} \tanh x$ $= \lim_{x\to0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

$$= \frac{e^{0}-e^{-0}}{e^{0}+e^{-0}}$$

$$= \frac{1-1}{1+1} = 0$$ Ans..

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = e^x \sinh x$ ที่ $x = \ln 2$

$$y' = e^{x}(\sinh x)' + \sinh x\,(e^{x})'$$

$$= e^{x}(\cosh x) + \sinh x\,(e^{x})$$

$$= e^{x}(\cosh x + \sinh x)$$

$$= e^{x}\left(\frac{e^{x}+\cancel{e^{-x}}}{2} + \frac{e^{x}-\cancel{e^{-x}}}{2}\right)$$

$$= e^{x}\left(\frac{\cancel{2}e^{x}}{\cancel{2}}\right) = e^{2x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\ln 2} = e^{2(\ln 2)} = e^{\ln 2^{2}} = 2^{2} = 4$$ Ans..

$$y = e^{x}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)$$

$$y = \frac{e^{2x}-1}{2}$$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \tanh\sqrt{x}$ ที่ $x = 1$

$$y' = \operatorname{sech}^2\sqrt{x}\,\frac{d\sqrt{x}}{dx}$$

$$y' = \operatorname{sech}^2\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \operatorname{sech}^2\sqrt{1}\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}\right) \qquad \operatorname{sech} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$= \left(\frac{2}{e^{1}+e^{-1}}\right)^2\left(\frac{1}{2(1)}\right)$$

$$= \frac{\cancel{4}\,2}{\left(e+\frac{1}{e}\right)^2(\cancel{2})} = \frac{2}{\left(\frac{e^2+1}{e}\right)^2} = \frac{2e^2}{(e^2+1)^2} \text{ Ans..}$$

5. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = e^{\cosh 3x}$ ที่ $x = \dfrac{\ln 2}{3}$

$$y' = e^{\cosh 3x}\,\frac{d}{dx}\cosh 3x$$

$$= e^{\cosh 3x}(\sinh 3x)\,\frac{d}{dx}3x$$

$$= e^{\cosh 3x}(\sinh 3x)(3) \Rightarrow *$$

พิจารณา $\cosh\left(\cancel{3}\,\frac{\ln 2}{\cancel{3}}\right) = \cosh(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{2+e^{\ln 2^{-1}}}{2} = \dfrac{2+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{5}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$

$\sinh\left(\cancel{3}\,\frac{\ln 2}{\cancel{3}}\right) = \sinh(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\ln 2}{3}} = e^{\frac{5}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)\cdot(3) = \frac{9}{4}e^{\frac{5}{4}} \text{ Ans..}$$

กฎของโลปิตาล

- ถ้า $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ เป็น**รูปแบบไม่กำหนดแบบ** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

  สามารถใช้กฎของโลปิตาล จะได้ว่า $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ เป็น**รูปแบบไม่กำหนดแบบ** $\infty \cdot 0$

  หรือ $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ เป็น**รูปแบบไม่กำหนดแบบ** $\infty - \infty$

  เราสามารถจัดรูปให้เป็นรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ได้

  แล้วจากนั้นค่อยใช้กฎของโลปิตาล

- ถ้า $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ เป็น**รูปแบบไม่กำหนดแบบ** $1^\infty, 0^0, \infty^0$

  สามารถทำตามขั้นตอนต่อไปนี้

  - **ขั้นตอนที่** 1: กำหนดให้ $y = [f(x)]^{g(x)}$
  - **ขั้นตอนที่** 2: take ln ทั้งสองข้างสมการ จะได้

    $$\ln y = g(x) \cdot \ln[f(x)]$$

  - **ขั้นตอนที่** 3: ใส่ลิมิตทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

    $$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} g(x) \cdot \ln[f(x)]$$

    (ลิมิตขวามือของสมการเป็นรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\infty \cdot 0$

    สามารถหาลิมิตได้โดยการจัดรูปแล้วใช้กฎของโลปิตาล)

  - **ขั้นตอนที่** 4: หาค่า $\lim_{x\to a} y = e^{(\lim_{x\to a} \ln y)}$

จงหาลิมิตต่อไปนี้ โดยใช้กฎของโลปิตาล

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\infty}} = 0 \quad \text{Ans..}$$

7. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$ $\Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x \cos x}{1}$$

$$= -(2\sin 0 \cos 0)$$

$$= -(2(0)(1))$$

$$= 0 \quad \text{Ans..}$$

8. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ $\quad 0\cdot\infty$ $\quad x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$= -2(0)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0 \quad \text{Ans..}$$

9. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ $\quad \infty - \infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x\sin x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x\cos x + \sin x}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(-\sin x) + \cos x(1) + \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-x\sin x + 2\cos x}$$

$$= \frac{\sin 0}{-0(\sin 0) + 2\cos(0)}$$

$$= \frac{0}{0+2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{Ans..}$$

10. $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

step1 : let $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

step2 : take ln ; $\ln y = \ln (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

step3 : take $\lim_{x\to 0^+}$; $\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}(1)}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

step4 : $\lim_{x\to 0^+} y = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$ Ans..

11. $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

1 #

12. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

Step 1 : let $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

Step 2 : take ln ; $\ln y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

$$\ln y = 2x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Step 3 : $\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} 2x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\qquad x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

$$\overset{L}{=} 2\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad 1+\frac{1}{x} = \frac{x}{x}+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= 2\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= 2\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}$$

$$\overset{L}{=} 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+0} = 2\lim_{x\to\infty} 1 = 2(1) = 2$$

Step 4 : $\lim_{x\to 0} y = e^{2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{2}$ Ans..

13. จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{e^x}$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$\frac{1}{2}$

14. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sec^{-1}(\cosh x)$ สำหรับ $x \in (0, \infty)$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$y' = \frac{1}{|\cosh x|\sqrt{\cosh^2 x - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(\cosh x)$$

$$= \frac{1}{|\cosh x|\sqrt{\cosh^2 x - 1}} (\sinh x)$$

$$= \frac{1}{|\cosh x|\sqrt{\sinh^2 x}} (\sinh x)$$

$$= \frac{\sinh x}{|\cosh x|(\sinh x)} = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$

15. กำหนดให้ $f(x) = \sinh 2x$ จงหาค่าของ $f'(\ln 2)$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$\frac{17}{4}$ #

16. กำหนดให้ $e^{2y} - \sinh x = x^2 + 1$ โดย y เป็นฟังก์ชันของ x โดยปริยาย จงหาค่าของ $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 0$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$\frac{de^{2y}}{dx} - \frac{d\sinh x}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$e^{2y} \cdot \frac{d2y}{dx} - \cosh x = 2x$$

$$e^{2y} \cdot 2\frac{dy}{dx} - \cosh x = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + \cosh x}{2e^{2y}} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2(0) + \cosh(0)}{(2)e^{2(0)}} = \frac{0+1}{2(1)} = \frac{1}{2} \text{ Ans.}$$

แทน $x = 0$ ในสมการเดิมก่อน

$$e^{2y} - \sinh 0 = 0^2 + 1$$

$$e^{2y} - 0 = 1$$

$$e^{2y} = 1$$

$$2y = 0$$

$$y = 0 \quad \star$$

17. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x+x^2}$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

0

18. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x - \sin 2x}{3x}$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

1

19. จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

0

20. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$\frac{1}{2}$

21. จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}$$

-2 #

22. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

1 #

23. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ [ข้อสอบเก่า Cal 1 (1/66)]

$y = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

take ln ; $\ln y = \ln (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$\ln y = \frac{1}{x} \ln (1-2x)$

$\lim_{x\to 0} \ln y \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-2x}(-2)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{1-2x} = \frac{-2}{1-0} = -2$

$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} e^{\lim_{x\to 0} \ln (1-2x)^{\frac{1}{x}}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ #

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. จงแสดงว่า $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sinh x}{e^x}$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (a) $y = \sinh^2 x$

   (b) $y = \sinh(x^2)$

   (c) $y = \ln(\sinh x)$

   (d) $y = \sinh(\ln x)$

   (e) $y = (\operatorname{sech} x)(1 + \ln(\operatorname{sech} x))$

   (f) $y = \dfrac{1+\sinh x}{1-\sinh x}$

4. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x+x^2}$

   (e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec x}{1+\tan x}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^x-x}{x^2}$

   (h) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

   (i) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}e^{-x/2}$

   (j) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x \csc 3x$

   (l) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

   (m) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

   (n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

   (o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$

   (p) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\ln x)$

   (q) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

   (r) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$

   (s) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

   (t) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$

   (u) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

   (v) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{e^{-x}}$