UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
INGENIERÍA DE SISTEMAS
CURSO DE CÁLCULO II
DOCENTE: LEIDY CAROLINA PERDOMO

INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

Definición de integral definida: Si f es una integral definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la integral definida de f de a a b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, está dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$$

Si el límite existe.

La notación de la integral $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ es el integrando, a el límite inferior y b el límite superior.

Teorema 1: Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

Definición 1: Si $a > b\ \ y\ \int_a^b f(x)dx$ existe, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Definición 1.1: Si $f(a)$ existe, entonces:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Teorema 2: Si Δ es una partición del intervalo cerrado $[a, b]$, entonces:

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$

Teorema 3: Si k es cualquier constante, entonces:

$$\int_a^b k\ dx = \mathrm{k(b - a)}.$$

Teorema 4: Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si k es cualquier constante:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \mathrm{k}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema 5: Si las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema 6: Si las funciones f es integrable en los intervalos cerrados $[a, b], [a, c]\ y\ [b, c]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Donde $a < c < b$.

Ejemplo 1: Solucionar la siguiente integral

$$\int_{-3}^{5} 4\,dx = 4\int_{-3}^{5} dx$$

$$= 4x$$

$$= 4[5 - (-3)]$$

$$= 4[8]$$

$$= 32$$

Ejemplo 2: Solucionar la siguiente integral

$$\int_3^4 3x\,dx = 3\int_3^4 x\,dx$$

$$= \frac{3x^2}{2}$$

$$= \frac{3}{2}[4^2 - 3^2]$$

$$= \frac{3}{2}[16 - 9]$$

$$= \frac{3}{2}[7] = \frac{21}{2} = 10{,}5$$

Ejemplo 3: Solucionar la siguiente integral

$$\int_0^3 (4x^2 - 2x + 5)\,dx = \int_0^3 4x^2\,dx - \int_0^3 2x\,dx + \int_0^3 5\,dx$$

$$= 4\int_0^3 x^2\,dx - 2\int_0^3 x\,dx + 5\int_0^3 dx$$

$$= \frac{4x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x$$

$$= \frac{4}{3}[3^3 - 0] - [3^2 - 0] + 5[3 - 0]$$

$$= \frac{4}{3}[27] - [9] + 5[3]$$

$$= 36 - 9 + 15 = 42$$

- Para complementar y reforzar la integral definida, leer la sección 4.5 (Integración definida) del Capítulo 4 del libro guía (El Cálculo de Lois Leithold).

EJERCICIOS DE REPASO:

a. $\int_1^3 (x - 1)\, dx$

b. $\int_{-2}^3 (x + 2)\, dx$

c. $\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx$

d. $\int_{-1}^2 (5 - 2x)\, dx$

e. $\int_{-1}^2 (2x + 5)\, dx$

f. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \ dx$

g. $\int_{\pi/2}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x \ dx$

h. $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \ dx$

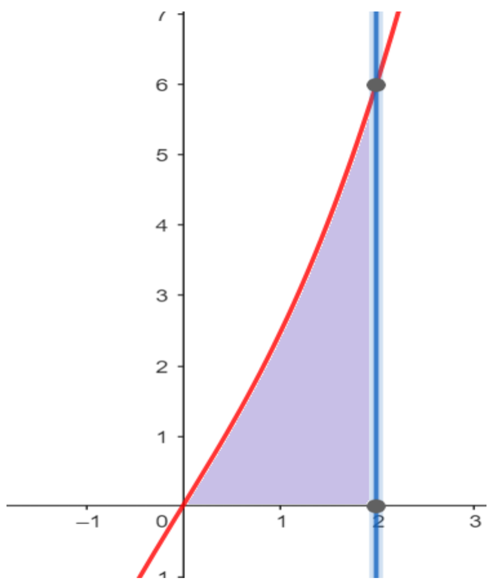
Área de una región plana: Teniendo en cuenta la integración definida vista en la sección anterior, podemos decir que se define el área de una región plana como es el límite de una suma de Riemann, se dice que dicho límite es simplemente una integral.

Ejemplo 1: Calcule el área de la región del primer cuadrante limitado por la curva

$$f(x) = x\sqrt{x^2 + 5}$$

El eje x y la recta $x = 2$.

En primer lugar, se grafica la función en el plano cartesiano limitado por los valores que nos dan.



Finalmente, encontramos la integral de la función para hallar el área de la región sombreada.

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2 + 5}\,dx$$

Aplicando el método de integración por sustitución obtenemos:

$$u = x^2 + 5$$

$$du = 2x\,dx \implies \frac{du}{2} = x\,dx$$

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+5}\,dx = \int_0^2 (u)^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 u^{1/2} du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(u)^{\frac{3}{2}} \Big/_0^2$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+5)^{3/2} \Big/_0^2$$

$$= \frac{1}{3}[9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}]$$

$$= \frac{1}{3}\left[27 - \sqrt{125}\right] \approx 5{,}27$$

Conclusión: el área de la región sombreada es aproximadamente 5,27 unidades cuadradas.

En el ejemplo anterior se consideró el área de una región para la cual los valores de la función en $[a,b]$ son no negativos. Supongamos ahora que $f(x) < 0$ para toda $x\ en\ [a,b]$.

Entonces cada $f(w_i)$ es un número negativo; por lo que se define el número de unidades cuadradas del área de la región limitada por $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$; $x = b$, como:

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(w_i)]\,\Delta_i x$$

Lo cual es igual a

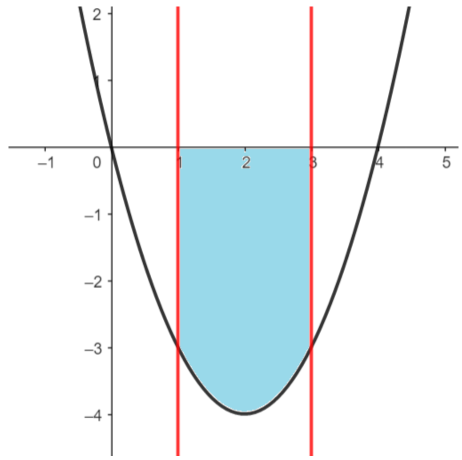
$$-\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 2: Calcule el área de la región limitada por la curva

$$f(x) = x^2 - 4x$$

El eje x y la recta $x = 1$; $x = 3$.

En primer lugar, se grafica la función en el plano cartesiano limitado por los valores que nos dan.



Finalmente, encontramos la integral de la función para hallar el área de la región sombreada, recordemos que como el área esta en la parte negativa del plano cartesiano debemos anteponer el signo negativo a la integral.

$$-\int_1^3 (x^2-4x)\,dx = -\left[\int_1^3 x^2 dx - 4\int_1^3 x\,dz\right]$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right] \Big/_1^3$$

$$= -\left[\frac{27}{3} - 18\right] - \left[\frac{1}{3} - 2\right]$$

$$= -\left\{[-9] + \left[\frac{5}{3}\right]\right\} \approx \frac{22}{3} = 7{,}333$$

Conclusión: El área de la región sombreada es aproximadamente 7,333 unidades cuadradas.

- Para complementar y reforzar la integral el área de una región plana, leer la sección 4.8 (Área de una región plana) del Capítulo 4 del libro guía (El Cálculo de Lois Leithold).

EJERCICIOS DE REPASO:

a. Determine el área de la región limitada por la curva

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

El eje x y las rectas $x = -1$; $x = 2$.

b. Determine el área de la región limitada por la curva

$$f(x) = 4 - x^2$$

El eje x.

c. Determine el área de la región limitada por la curva

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

El eje x y las rectas $x = -2;\ \ x = 1$.

d. Determine el área de la región limitada por la curva

$$f(x) = 4x - x^2$$

El eje x y las rectas $x = 1;\ \ x = 3$.

e. Determine el área de la región limitada por la curva

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

El eje x; eje y; la recta $x = 8$.