1.3. Función lineal

En la actividad inicial expresábamos el volumen V como una función del tiempo t:

$V(t) = 2t + 3$. Nos ocuparemos ahora de funciones como esa. [1]

> Una función que puede escribirse en la forma $f(x) = mx + b$, donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$ son constantes, es una ***función lineal***. La gráfica de una función lineal es una ***línea recta***.

Algunas características de las funciones lineales las identificaremos considerando los siguientes ejemplos:

***Ejemplo* 1**

Haga la gráfica y determine, para cada una de las siguientes funciones, dominio, rango, cortes con los ejes, intervalos donde es positiva o es negativa e identifique si es creciente, decreciente o constante:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x - 3, \quad h(x) = -\tfrac{2}{3}x, \quad j(x) = 5$$

Solución:

Escribamos la ecuación $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ como $y = \frac{1}{2}x - 3$. Observemos que corresponde a la ecuación de la recta expresada en la forma pendiente–intercepto: $y = mx + b$; m es la pendiente, b es el intercepto con el eje y.

En la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$, el intercepto con el eje y es igual a -3 y la pendiente es igual a $\frac{1}{2}$.

Una forma de hacer la gráfica de esta recta consiste en dibujar primero el punto correspondiente al corte con el eje y: $(0, -3)$; otro punto de la recta lo conseguimos por medio de la pendiente: a partir del punto $(0, -3)$ hacemos un desplazamiento horizontal de 2 unidades a la derecha y luego un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia arriba, llegando al punto $(2, -2)$.

Podemos trazar otros puntos de la recta siguiendo el mismo procedimiento anterior.

Trazamos luego la recta por $(0, -3)$ y $(2, -2)$, figura 1, que es la gráfica de la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

Para hallar el corte con el eje x, algebraicamente, debemos resolver la ecuación$f(x) = 0$, esto es:

$$\frac{1}{2}x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}x = 3$$

$$x = 6$$

---

[1] Antes de continuar con el estudio de las funciones lineales es importante hacer una revisión de cómo trazar la gráfica correspondiente a una ecuación lineal en dos variables y el proceso contrario, cómo conseguir la ecuación correspondiente a una recta del plano, los cuales se encuentran en el Anexo 1, *La Línea Recta*.

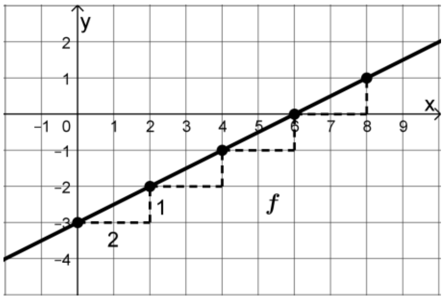


Figura 1

Dominio: números reales; intervalo $(-\infty, \infty)$.
Rango: números reales; intervalo $(-\infty, \infty)$.
Corte con el eje y: $(0, -3)$, ya que $f(0) = -3$
Corte con el eje x: $(6, 0)$.
La función es positiva en el intervalo $(6, \infty)$.
f es una función creciente.

En la función $h(x) = -\frac{2}{3}x$, tenemos que $y = -\frac{2}{3}x + 0$; luego $m = -\frac{2}{3}$, $b = 0$.

Gráfica de la función h (figura 2). Procedemos de la misma forma como en el ejemplo 1.

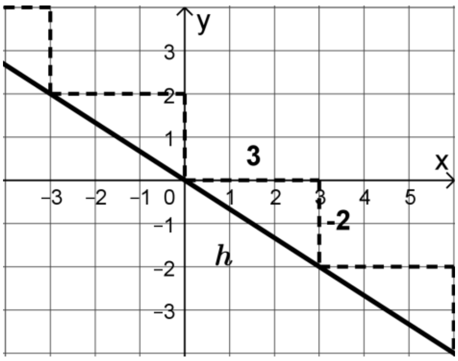


Figura 2

Dominio: números reales; intervalo $(-\infty, \infty)$.
Rango: números reales; intervalo $(-\infty, \infty)$.
Corte con el eje y: $(0, 0)$, ya que $f(0) = 0$
Corte con el eje x: $(0, 0)$
Al resolver la ecuación $f(x) = 0$,
esto es, $-\frac{2}{3}x = 0$ encontramos que $x = 0$.
La función es positiva en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es negativa en el intervalo $(0, \infty)$.
h es una función decreciente.

Para la función $j(x) = 5$, tenemos que $y = 0x + 5$; es decir, $m = 0$, $b = 5$ y la gráfica, teniendo en cuenta los ejemplos anteriores, es:

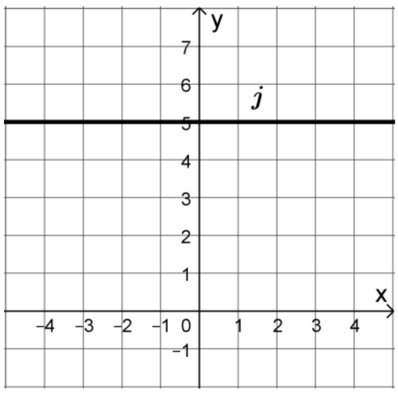


Figura 3

Dominio: números reales.
Rango:$\{5\}$.
Corte con el eje y: $(0, 5)$, ya que $f(0) = 5$
Corte con el eje x: no hay
Al resolver la ecuación $f(x) = 0$,
esto es, $5 = 0$ encontramos que no hay solución.
La función siempre es positiva.
j es una función constante.

- Trace la gráfica de cada función lineal en los planos cartesianos que se encuentran en seguida; determine dominio, rango, cortes con los ejes, y si la función es creciente, decreciente o constante.

1) $g(x) = -x + 2$

2) $k(x) = -4$

3) $l(x) = x$

4) $g(x) = 2x - 3$

1)

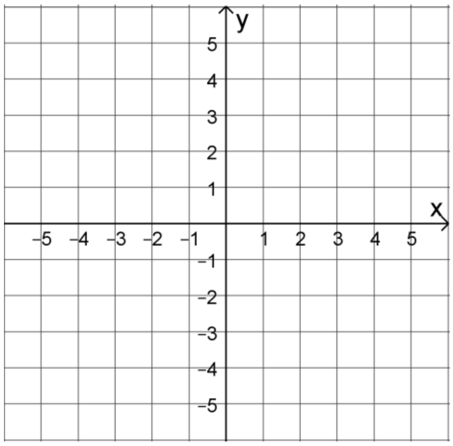


Figura 4

2)

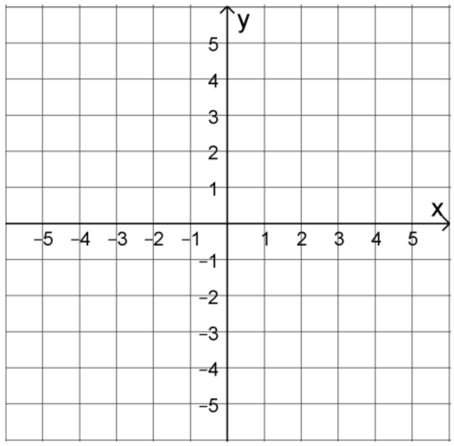


Figura 5

3)

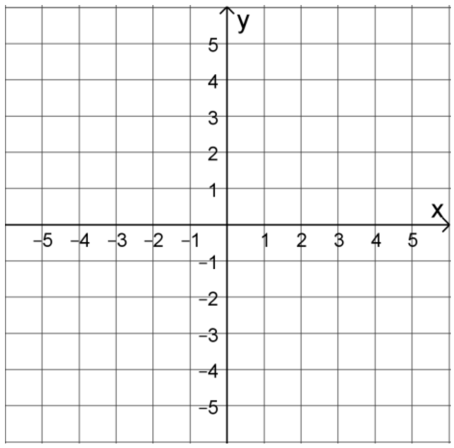


Figura 6

4)

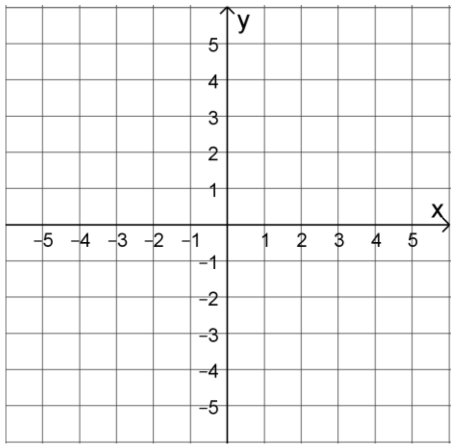


Figura 7

- Escriba las palabras *decreciente*, *creciente* o *constante* en las casillas de la tabla 1, según corresponda.

Función lineal: $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$

$m > 0$	
$m = 0$	
$m < 0$	

Tabla 1

Hallaremos la expresión algebraica de una función lineal dados dos puntos y con dominio restringido.

***Ejemplo* 2**

Halle la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $(-6, -5)$ y $(6, 3)$, si el dominio de la función es el intervalo $[-6, 9)$.

- La **pendiente** de la recta que pasa por los puntos dados es:

$$\boldsymbol{m}=\frac{-5-3}{-6-6}=\frac{-8}{-12}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

- Los dos puntos dados están en el dominio de la función; ahora, con la pendiente y uno de los puntos hallamos la ecuación; $\boldsymbol{m}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ y el **punto** $(\mathbf{6},\mathbf{3})$:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-3=\frac{2}{3}(x-6)$$

$$y=\frac{2}{3}x-4+3$$

$$y=\frac{2}{3}x-1, \qquad -6\leq x<9$$

Luego la función lineal es: $\boldsymbol{f(x)}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}$, para x en el intervalo $[-\mathbf{6},\mathbf{9})$.

- Para determinar el **rango** tomamos los extremos del intervalo y los remplazamos en la función:

$$f(-\mathbf{6})=\frac{2}{3}(-6)-1=-\mathbf{5}; \qquad f(\mathbf{9})=\frac{2}{3}(9)-1=\mathbf{5}$$

Los puntos extremos son: $(-6,-5)$, incluido; $(9,5)$, sin incluir.

Así el rango es el intervalo $[-\mathbf{5},\mathbf{5})$.

- El **intercepto con el eje $\boldsymbol{x}$** se halla igualando a cero la función lineal:

$$0=\frac{2}{3}x-1$$

$$\frac{2}{3}x=1$$

$$\boldsymbol{x}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

Así, el intercepto de la gráfica de la función lineal con el eje x, es el punto $(\mathbf{1.5},\mathbf{0})$

- Para determinar en qué intervalo la función es **positiva o negativa**, se toma el intercepto con el eje x, se examina si la función es creciente (pendiente positiva) y se concluye que es positiva en el intervalo $(1.5,9)$ y es negativa en el intervalo $[-6,1.5)$.

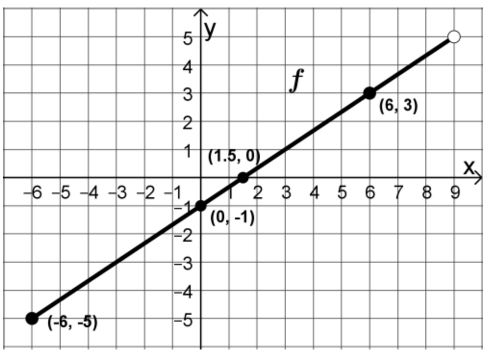


Figura 8

Dominio: intervalo $[-6,9)$.
Rango: intervalo $[-5,5)$.
$f(9)$ no está definido; 9 no está en el dominio.
Corte con el eje y: $(0,-1)$, ya que $f(0)=-1$
Corte con el eje x: $(1.5,0)$.
La función es positiva en el intervalo $(1.5,9)$.
La función es negativa en el intervalo $[-6,1.5)$
f es una función creciente.

***Ejemplo* 3**

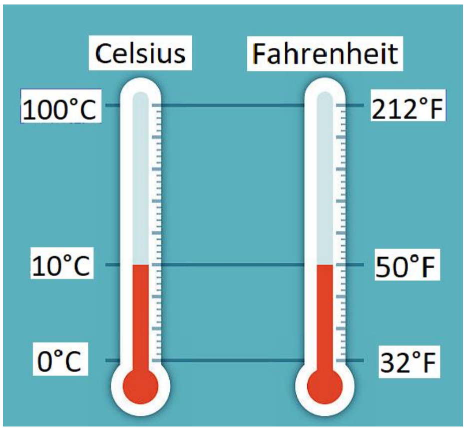
La escala de temperatura Fahrenheit (F) se puede expresar como una función lineal de la escala Celsius (C). Una temperatura de $10°C$ corresponde a $50°F$ y una de $25°C$ corresponde a $77°F$.

a) Escriba a F como una función de C.

b) ¿Qué interpretación puede darse a la pendiente y al intercepto con el eje F?

c) La temperatura de ebullición del agua es de $100°C$, ¿a cuántos $°F$ equivale?

d) ¿A qué temperatura las dos escalas marcan el mismo número?



Solución:

a) $F = mC + b$

Los puntos $(10, 50)$ y $(25, 77)$ pertenecen a la gráfica de F

Pendiente:

$$m = \frac{77 - 50}{25 - 10} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5}$$

Remplazamos $F = 50,\ C = 10$ y $m = \frac{9}{5}$ en $F = mC + b$:

$$50 = \frac{9}{5}10 + b$$

$$50 - 18 = b$$

$$b = 32$$

Luego:

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

b) La pendiente $\frac{9}{5}$ indica que por cada 5 grados de aumento en temperatura medidos en la escala Celsius, la medición en la escala Fahrenheit aumenta 9 grados.

El intercepto con el eje F es $(0, 32)$ lo cual indica que 0 grados centígrados corresponden a 32 grados Fahrenheit.

c) $C = 100°C$

$$F = \frac{9}{5}100 + 32$$

$$F = 180 + 32 = 212$$

Luego, $100°C$ corresponden a $212°F$; el punto de ebullición del agua es de $212°F$.

d) Hacemos $F = C$ y remplazamos en $F = \frac{9}{5}C + 32$.

$$C = \frac{9}{5}C + 32$$

$$C - \frac{9}{5}C = 32$$

$$-\frac{4}{5}C = 32$$

$$C = -40$$

Por tanto, una temperatura de $-40°C$ corresponde a $-40°F$.

- De acuerdo con la Ley de Charles, la presión P, medida en pascales, de un volumen fijo de gas, está relacionada linealmente con la temperatura T, medida en grados Celsius. En un experimento se encontró que cuando $T = 30$, $P = 80$ y cuando $T = 60$, $P = 100$.

  a) Exprese la presión P como función de la temperatura T.

  b) Haga la gráfica de la función.

1.3.1. Variación directa

Una persona camina en línea recta, con rapidez uniforme, a razón de 2 metros por segundo a partir de cierto lugar. La distancia que la separa de ese lugar la podemos expresar como una función del tiempo en la forma $d = 2t$. Es frecuente expresar la relación entre distancia y tiempo diciendo que la distancia varía en forma *directa* con respecto al tiempo; con esto se quiere decir que si el tiempo (transcurrido desde que sale de ese lugar) se duplica, entonces la distancia recorrida se duplica, si el tiempo se triplica la distancia se triplica, etc.

- Haga la gráfica de la función $d = 2t,\ t \geq 0$

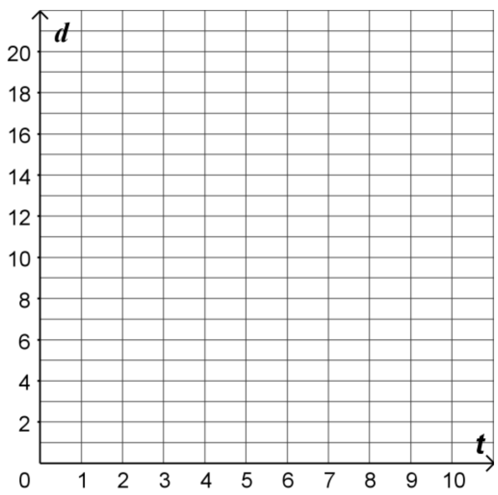


Figura 9

Si una función lineal es de la forma $y = mx$ entonces decimos que y varía en forma ***directa*** con respecto a x o que y es ***directamente proporcional*** a x; $\boldsymbol{m}$ es la ***constante de proporcionalidad***.
La gráfica es una recta que ***pasa por el origen***.

***Ejemplo* 4**

Los siguientes son ejemplos de magnitudes que son directamente proporcionales:

- El peso de un producto y su precio. Si pesa 0 libras, se paga 0 pesos.

  Si 5 libras de ciruelas cuestan $\$4000$, ¿cuál es el costo de comprar 9 libras del mismo tipo de ciruelas?

  $$y = mx$$

  $$4000 = m(5) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m = 800}$$

  Entonces: $y = 800(9) = \$7200$

  El precio a pagar por las 9 libras de ciruelas es de $\$7200$.

- El número de cajas y la cantidad de vasos que se empacan en cada caja. Si en 7 cajas se empacan 84 vasos, ¿cuántas cajas del mismo tipo se requieren para empacar 264 vasos del mismo tamaño y forma?

  $$y = mx$$

  $$84 = m(7) \quad \rightarrow \quad m = 12$$

  La constante de proporcionalidad en este caso es el número de vasos que caben en cada caja.

  En este caso se quiere averiguar el número de cajas, o sea x:

  $$264 = 12x$$

  $$\boldsymbol{x = 22}$$

  Se necesitan 22 cajas para empacar 264 vasos.

En una variación directa se cumple que:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

O lo que es equivalente:

$y_1x_2 = y_2x_1$, si ninguno de ellos es $(0, 0)$

En el ejemplo anterior se tiene:

$(7, 84)$ y $(22, 264)$: $\dfrac{84}{7} = \dfrac{264}{22} = \boldsymbol{12}$

$$84 \times 22 = 7 \times 264 = 1848$$

- Nota obtenida en una prueba y número de respuestas correctas.
- El volumen de un objeto y su peso; si el objeto pesa el doble el peso será el doble, siempre que esté hecho del mismo material. Para un volumen de $0\ cm^3$, su peso es $0\ g$.

EJERCICIOS

I. De las siguientes funciones, identifique cuáles son lineales; para las que lo sean, haga su gráfica, determine el dominio, rango, cortes con los ejes, si es una función creciente, decreciente o constante, y en qué intervalos es positiva y cuál es negativa.

1) $f(x) = x - 2$	2) $g(x) = 3$
3) $g(x) = -x$	4) $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$
5) $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$	6) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$, si $-3 \leq x \leq 6$
7) $f(x) = -2x + 1$	8) $g(x) = cos\,x$
9) $g(x) = \sqrt{x-3}$	10) $f(x) = 0$ si $-2 \leq x \leq 5$
11) $h(x) = e^{2x}$	12) $h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, si $-3 \leq x \leq 3$
13) $m(x) = log\ (2x + 1)$	14) $g(x) = -3x + 4$, si $0 < x \leq 6$

II. Forme las parejas correspondientes a la ecuación y su gráfica:

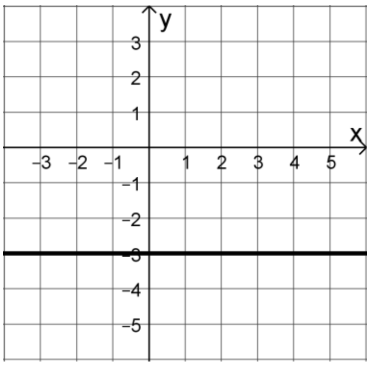
1) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 3$ ( )

2) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ ( )

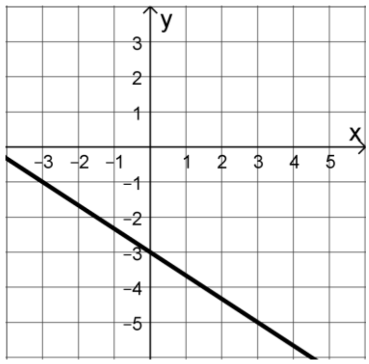
3) $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$ ( )

4) $f(x) = -3$ ( )

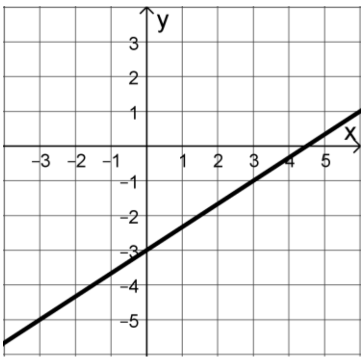
a)



b)



c)



d)

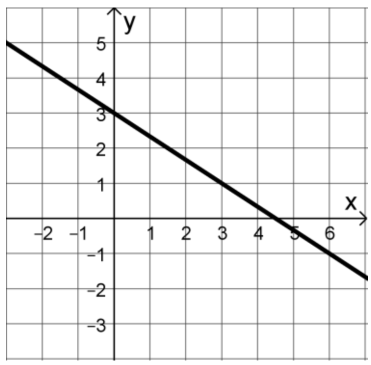


Figura 10

III. Problemas sobre variación directa:

1) Suponga que y varía directamente con x. Cuando $x = 3$, $y = 9$. Halle y cuando $x = 12$.

2) Tres galones de gasolina cuestan $\$24\ 000$. Exprese el costo C de una compra de gasolina como una función de la cantidad x de galones comprados.

3) Considere latas cilíndricas con la misma base. El volumen de una lata es proporcional a la altura de la misma. Si el volumen de una lata es $300\ cm^3$ cuando su altura es $11\ cm$, halle el volumen de una lata de $16\ cm$ de altura.

IV. Para los ejercicios del 1) al 3) tenga en cuenta:

Si 1 y 2 son correctos marque A
Si 2 y 3 son correctos marque B
Si 3 y 4 son correctos marque C
Si 2 y 4 son correctos marque D

1) De la función $f(x) = -2x + 5$, es correcto afirmar:

1. la gráfica de f es una recta.
2. f es positiva en el intervalo $(-\infty, 2.5)$.
3. es una función creciente.
4. $f\left(\frac{3}{2}\right) = -1$.

2) De la función $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$, es cierto que:

1. $g(x) = -5$ para $x = 8$.
2. la gráfica de g es una recta cuya pendiente es $m = \frac{3}{2}$
3. la gráfica corta al eje x en el punto $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$
4. es una función creciente.

3) Dados los puntos $(-2, 2)$, $(4, -2)$, y h la función cuya gráfica es la recta que los une, es correcto afirmar que:

1. la función es negativa en el intervalo $(-\infty, 1)$.
2. $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.
3. la pendiente de la recta es $\frac{2}{3}$.
4. la función h es decreciente.

Tabla de respuestas

Pregunta	A	B	C	D
1				
2				
3				

V. Dada la función $p(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, para x en el intervalo $(-8, 12]$, escriba **V** o **F**, según si el enunciado relacionado con p, sea verdadero o falso.

1) La gráfica de p es una recta con pendiente: $m = 2$ ____

2) El dominio de la función p es el intervalo $(-8, 12]$ ____

3) El intercepto con el eje x, es el punto $(-6, 0)$ ____

4) El rango de p es el intervalo, $[-3, 7)$ ____

5) La función es positiva en el intervalo, $(-8, 6)$ ____

6) El intercepto con el eje y, es -3 ____

7) El punto $(-6, 6)$, está en la gráfica de p ____

8) p es una función creciente ____

9) La imagen de -12 es 9 ____

VI. Problemas

1) Al ascender, el aire seco se enfría y expande. A nivel del suelo la temperatura es de $24°C$, y a una altura de 800 $metros$ es de $16°C$.

a) Escriba la expresión que modela la temperatura T (en $°C$) como función de la altura h (en kilómetros). Suponga que la relación entre T y h es lineal.

b) ¿Qué representa la pendiente?

c) Haga la gráfica de la función T.

d) ¿Cuál es la temperatura a una altura de 1.5 km?

e) ¿Cuál es la altura si la temperatura es de $4°C$?

2) Un antropólogo puede usar la función lineal para estimar la estatura de un hombre o de una mujer, dada la longitud del húmero, el hueso del codo al hombro.

La estatura, en centímetros, de un hombre adulto con un húmero de longitud x, en centímetros, está dada por la función:

$$H(x) = 2.89x + 70.64$$

La estatura, en centímetros, de una mujer adulta con un húmero de longitud x, en centímetros, está dada por la función:

$$M(x) = 2.75x + 71.48$$

Un húmero de 26 cm fue encontrado en unas ruinas. Asumiendo que era de una mujer, ¿qué estatura tenía ella? Compare el resultado si se asume que era de un hombre. ¿Cuál es el dominio de la función M?

3) Desde la cima de una carretera montañosa, un topógrafo realiza varias mediciones horizontales, x, y las respectivas mediciones verticales, y, las cuales se registran en la siguiente tabla (x y y están en metros).

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
y	−1.5	−3	−4.5	−6	−7.5	−9	−10.5	−12

a) Ubique los puntos en el plano cartesiano; ¿es posible unir todos los puntos con una sola recta?

b) En caso de unir todos los puntos, halle la función lineal cuya gráfica sea la recta trazada.

c) ¿Qué significa la pendiente de la recta del inciso b) en el contexto del problema?

d) Si se quiere poner una señal de tránsito en la carretera, indicando la inclinación del camino, por ejemplo "pendiente del 12%", ¿qué debe indicar la señal en este problema?

Para los problemas 4, 5 y 6 tenga en cuenta la siguiente información:

Costo fijo (gastos generales): es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, por ejemplo, alquiler y seguros. Este costo se debe pagar independientemente de que se produzca o no.

Costo variable: es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, por ejemplo, salarios y materiales.

Costo total: es la suma de los costos variable y fijo:

Costo total = Costo variable + Costo fijo

Ingreso total: es el dinero que se recibe por la venta de un producto.

Ingreso total = (precio por unidad) (número de unidades)

Utilidad (o ganancia): es el ingreso total menos el costo total.

Utilidad = ingreso total – costo total

4) El costo de cada camisa es de $\$2\ 000$ y los *costos fijos* de producción son $\$800\ 000$. La capacidad máxima de producción de la fábrica es de 1500 camisas.

a) Escriba una función que modele el costo de producción C de n camisas.

b) Determine el dominio de C.

c) Halle $C(570)$.

d) ¿Cuántas camisas se producen si el costo es de $\$2\ 670\ 000$?

Los costos de capital de una empresa son altos por los elementos que duran más de un año y pierden el valor o se desgastan con el tiempo. Ejemplos de estos son los equipos y muebles.

El valor de estos declina o deprecia (baja), con el paso del tiempo. Una forma de calcular la depreciación es con el método de la línea recta, usando el valor inicial y estimando la vida útil del activo (en una gráfica corresponde al intercepto con el eje x).

5) En un restaurante se compra un horno por 3750 dólares. Al cabo de 6 años, tendrá que ser remplazado.
   a) Escriba una función lineal que relaciones el valor, V, del horno durante los 6 años que estará en uso.
   b) ¿Cuál es el valor del horno al cabo de 2 años?
   c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido si el valor del horno es de 1562.5 dólares?

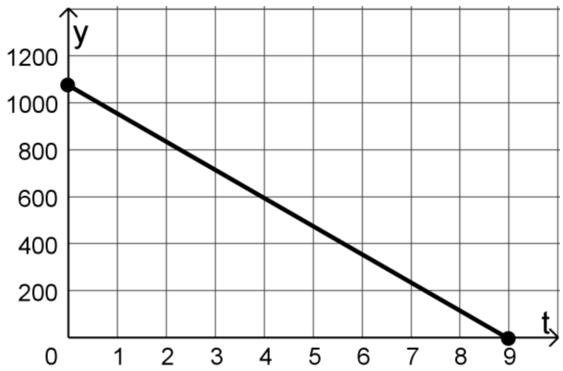
6) Suponga que un software adquirido en enero de 2008 por un valor de $\$1\ 500\ 000$, en noviembre de 2008 se estimó su valor en $\$850\ 000$.
   a) ¿Cuál es el valor con que se deprecia por mes dicho software?
   b) Escriba la expresión que modela el costo C del software en función de t, medido en meses.
   c) Encuentre el intercepto con el eje horizontal (t). ¿Qué significa?
   d) Haga el gráfico de la función $C(t)$.

7) Un vendedor gana un salario básico mensual de $\$650\ 000$ y obtiene una bonificación del 25% de las ventas realizadas.
   a) Indicar cuáles son la variable independiente y la variable dependiente en la situación planteada.
   b) Escriba una función que exprese el salario, $\boldsymbol{S}$, del vendedor en términos de las ventas realizadas $\boldsymbol{x}$.
   c) ¿Cuál es el salario del vendedor si realiza, en un mes, ventas por un valor de $\$2\ 800\ 000$?
   d) Si el salario del mes es de $\$1\ 712\ 500$, ¿cuánto dinero por ventas realizó el vendedor?

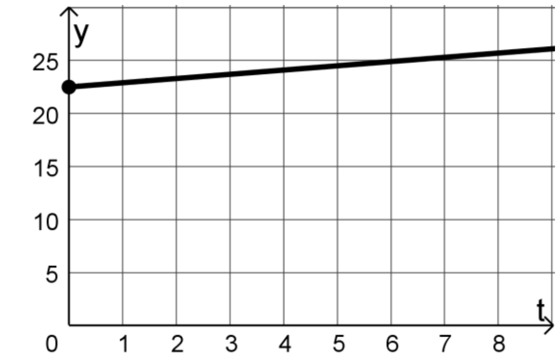
8) Relacione cada situación descrita con la gráfica correspondiente.
   a) Una persona cancela mensualmente a una cooperativa una cuota de $\$120$ para liquidar un préstamo de $\$1080$.
   b) El empleado de una tienda recibe $\$22.5$ por día más el 40% de las ventas realizadas.
   c) Una impresora comprada por $\$850$ se deprecia $\$125$ por año.
   d) Un fabricante recibe $\$8.50$ por hora más $\$1.5$ por cada artículo producido por hora.

Gráfica 1

Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

Figura 11