Формальная постановка задачи оптимизации расписания с использованием алгоритма имитации отжига

Варгин Артём Анатольевич

28 октября 2025 г.

Формальная постановка задачи

Дано:

- N – количество работ;
- $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_N\}$ – множество работ;
- $\tau = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ – множество времен выполнения соответстующих заданий j_i, $\forall i \in \overline{1, N}$ $t_i > 0$.
- M – количество процессоров;
- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_M\}$ – множество процессоров, на которых выполняются работы.

Расписание:

Расписанием является булева матрица $HP \in B^{N \times M}$, в которой $hp_{ij} \in \{0, 1\}$, где $i \in \overline{1, N}$, а $j \in \overline{1, M}$. Значение $s_{ij} = 1$ означает, что работа с номером i выполняется на процессоре с номером j, а $hp_{ij} = 0$ – что работа с номером i не выполняется на процессоре с номером j.

Требуется:

Построить расписание $HP^{N \times M}$, при котором будет минизирован критерий, при этом все задания J будут выполнены на множестве процессоров P без прерываний, с учетом ограниченных ресурсов, и не будет пересечений в использовании процессоров, т.е.

$\forall i \in \overline{1, N}$ $\exists! j \in \overline{1, M} : hp_{ij} = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{M} hp_{ij} = N \\ \forall i \in \overline{1, N} \sum\limits_{j=1}^{M} hp_{ij} = 1 \end{cases}$$

Минимизируемый критерий:

В зависимости от остатка от деления на 2 контрольной суммы CRC32 от фамилии и инициалов выбирается один из следующих критериев:

- Критерий K_1 (разбалансированность расписания)
- Критерий K_2 (суммарное время ожидания)

$CRC32 = 42570633$, следовательно выбираем 1 критерий для реализации.

Критерий разбалансированности расписания:

Обозначим G_j - упорядоченное по последовательности выполнения множество индексов работ, которые выполняются j-ым процессором. Тогда $T_j = \Sigma_{i \in G_j} t_i$ – суммароное время выполнения работ, запланированных на j-ый процессор.

$$K_1 = T_{max} - T_{min} \tag{1}$$

где:

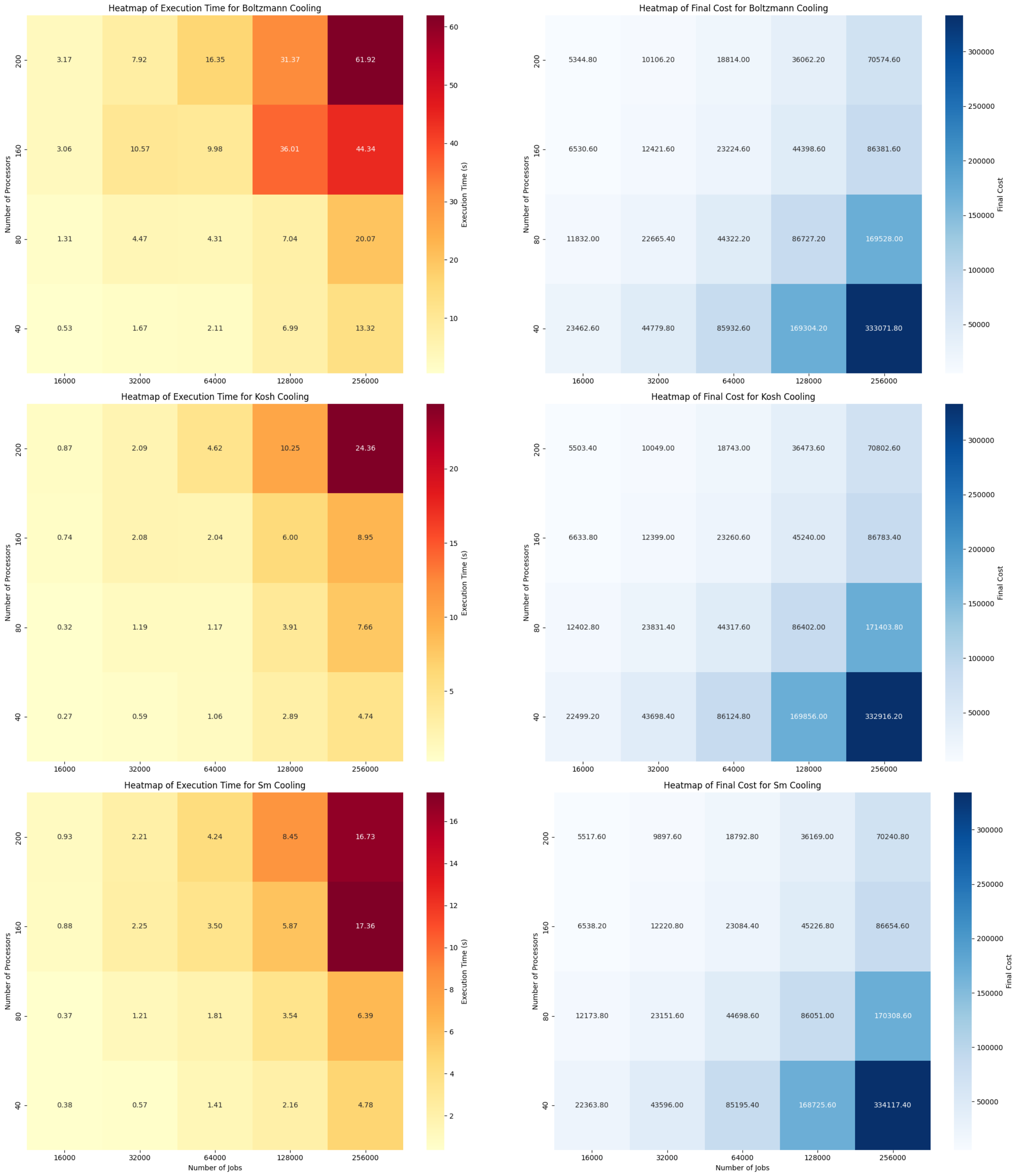
$$T_{max} = \max_{j \in \overline{1,M}} T_j \tag{2}$$

$$T_{min} = \min_{j \in \overline{1,M}} t_{G_j[0]} \tag{3}$$

Ограничения

- Каждый процессор $p_j \in P$ в любой момент времени может выполнять не более одного задания.
- Во время выполнения задания процессором, не возникает прерываний.
- Процессор может мгновенно (без прерывания) переключаться между заданиями.
- Время выполнения $t_i \in \tau$ фиксировано.

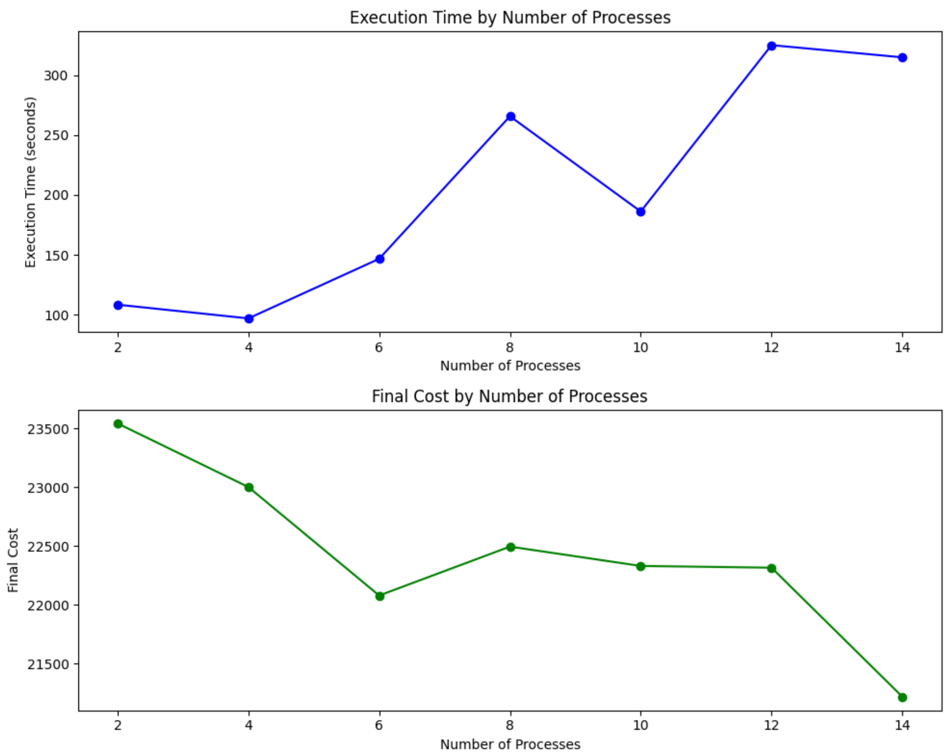
Исследование последовательного алгоритма



Представленные значения получены усреднением 5 запусков последовательного алгоритма имитации отжига.

На основании проведенных исследований можно сделать вывод, что алгоритм понижения температуры на основе модели Больцмана демонстрировал самое длительное время выполнения по сравнению с другими алгоритмами (потому что этот закон понижения температуры самый медленный). Тем не менее, это не отразилось на точности вычислений. Все алгоритмы показали сопоставимые результаты.

Исследование параллельного алгоритма



В графе представлены средние значения метрик за 5 запусков, были взяты данные из 16000 задач и 40 процессоров. На основе полученных данных можно понять, что параллельный алгоритм работает многократно дольше последовательной версии, однако имеет прирост производительности.