

Introduction

Ceci est l'introduction de la thèse.

Table des matières

Introduction	i
1 Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz	1
1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger	1
1.1.1 Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel et Hamiltonien du modèle	1
1.1.2 Opérateurs nombre de particules et moment dans la formulation quantique du gaz de Lieb-Liniger	7
1.1.3 Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à 2 corps	8
1.2 Équation de Bethe et distribution de rapidité	11
1.2.1 Fonction d'onde dans le secteur ordonné et représentation de Gaudin	11
1.2.2 Conditions aux bords périodiques	11
1.2.3 Équations de Bethe exponentielles	11
1.2.4 Équations de Bethe logarithmiques	12
1.2.5 Interprétation physique	12
1.2.6 Thermodynamique du gaz de Lieb–Liniger à température nulle	12
1.2.7 Excitations élémentaires à température nulle	13
2 Dispositif expérimental et méthodes d'analyse	15
2.1 Présentation générale de l'expérience	16
2.1.1 Vue d'ensemble du dispositif	16
2.1.2 Historique et contributions successives	16
2.2 Le dispositif expérimental	16
2.2.1 Système laser et contrôle de fréquence	16
2.2.2 Production et refroidissement des atomes (non détaillé ici, renvoi à d'autres travaux)	17
2.2.3 Piégeage magnétique sur puce	17
2.2.4 Génération de potentiels modulés	19
2.3 Sélection spatiale avec DMD	20
2.3.1 Motivation et principe	20
2.3.2 Mise en place technique (initiée par Léa Dubois)	20
2.3.3 Utilisation dans les protocoles	22
2.4 Techniques d'imagerie et d'analyse	23
2.4.1 Imagerie par absorption	23
2.4.2 Analyse des profils	23
2.5 Expériences et protocoles étudiés	23
2.5.1 Expansion longitudinale	24
2.5.2 Sonde locale de distribution de rapidité	24
2.6 Discussion sur les limites et les perspectives	24
3 Étude du protocole de bi-partition : Mesure de distribution de rapidités locales $\rho(x, \theta)$ pour des systèmes hors équilibre	25

3.1	Dynamique balistique d'un gaz 1D après une coupure bipartite	27
3.1.1	Préparation expérimentale et protocole de coupure	27
3.1.2	Cadre de la GHD et dynamique balistique et	28
3.1.3	Validation expérimentale de la dynamique hydrodynamique	30
3.2	Sondier la distribution locale des rapidités	32
3.2.1	Sélection d'une tranche localisée après déformation du bord	32
3.2.2	Expansion de la tranche et observation d'une asymétrie	33
3.3	Simulations numériques	35
3.3.1	Système homogène à l'équilibre thermique	35
3.3.2	Dynamique du contour dans l'espace des phases (x, θ)	36
3.3.3	Simulation de la déformation du bord	37
3.3.4	Simulation de l'expansion.	37
3.3.5	Comparaison aux données expérimentales et discussion	39
	Conclusion	43
	A Annexes	45

Chapitre 1

Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz

Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons progressivement le modèle de Lieb-Liniger et l'Ansatz de Bethe, outils fondamentaux pour décrire un gaz de bosons unidimensionnel avec interactions delta. L'objectif est d'accompagner pas à pas le lecteur depuis la formulation du problème quantique en champ de bosons jusqu'aux solutions exactes obtenues par l'Ansatz de Bethe.

Nous commençons par écrire l'équation du champ de bosons, exprimée à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation en représentation de position. Pour des raisons pédagogiques, nous abordons d'abord le cas d'une seule particule, sans interaction. Cela permet d'introduire naturellement les états de position et leur évolution sous l'action du Hamiltonien libre.

Ensuite, nous étudions le cas de deux particules, cette fois en tenant compte de l'interaction locale. Cela nous amène à considérer les états de position dans le cas général, y compris lorsque les deux particules peuvent occuper la même position. Cette situation, bien plus subtile qu'il n'y paraît, met en évidence la complexité introduite par l'interaction, et justifie que l'on commence par analyser les configurations où les particules sont à des positions distinctes.

Dans le référentiel du centre de masse, le problème à deux corps avec interaction devient équivalent à un problème à une seule particule en interaction avec une barrière delta au centre. Cette reformulation permet d'interpréter l'effet de l'interaction comme une condition de raccord sur la fonction d'onde, tout en respectant la symétrie bosonique.

Nous revenons ensuite aux coordonnées du laboratoire afin d'introduire naturellement la forme des solutions imposée par l'Ansatz de Bethe. Cela nous conduit aux équations dites de Bethe, qui relient les quasimoments des particules à travers des conditions de périodicité modifiées par l'interaction.

Une fois les notations bien établies, nous généralisons le raisonnement au cas de N particules, pour obtenir l'Hamiltonien de Lieb-Liniger complet ainsi que la forme générale de l'Ansatz de Bethe. Les solutions ainsi construites permettent non seulement de déterminer le spectre de l'Hamiltonien, mais aussi de calculer des observables physiques importantes, telles que l'impulsion totale ou le nombre de particules.

Enfin, nous introduisons la notion de distribution de rapidité, outil essentiel dans l'étude des états d'énergie minimale (états fondamentaux) et dans la description thermodynamique du système. Ce cadre servira de base aux développements ultérieurs sur les gaz intégrables à température finie et les états stationnaires après quench quantique.

1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger

1.1.1 Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel et Hamiltonien du modèle

De la première à la seconde quantification

Introduction. La mécanique quantique se développe historiquement en deux grandes étapes : la *première quantification*, aussi appelée quantification canonique, et la *seconde quantification*. Comprendre ces deux cadres est essentiel pour aborder les systèmes quantiques complexes, en particulier ceux où le nombre de particules peut varier.

Première quantification (quantification canonique, particule unique). La première quantification est la mécanique quantique standard, celle que vous avez rencontrée dès vos premiers cours. Elle consiste à quantifier un

système classique décrit par des variables dynamiques telles que la position x et la quantité de mouvement p . On procède en remplaçant ces variables par des **opérateurs hermitiens** \hat{x} et

$$\hat{p} \doteq -i\hbar\hat{\partial}_x, \quad (1.1)$$

où \hbar est la constante de Planck réduite, satisfaisant la **relation de commutation canonique** fondamentale $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. L'état du système est alors décrit par une **fonction d'onde** $\psi(x, t)$, solution de l'**équation de Schrödinger** indépendante du nombre de particules :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\psi, \quad (1.2)$$

avec $\hat{\mathcal{H}}$ l'opérateur hamiltonien.

Exemple : particule libre en une boîte à une dimension.

Dans le cas d'une particule libre de masse m se déplaçant en une dimension, l'Hamiltonien est constitué uniquement du terme cinétique $\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}^2/2m$. En représentation position, où l'opérateur quantité de mouvement s'écrit comme dans l'équation (1.1), l'Hamiltonien prend alors la forme différentielle :

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2. \quad (1.3)$$

Les états propres stationnaires de (1.2) dépendant du temps sont de la forme $\psi_k(x, t) = \varphi_k(x)e^{-i\varepsilon(k)t/\hbar}$ où $\varphi_k(x)$ est une fonction propre de l'hamiltonien, soit de l'équation stationnaire $\hat{\mathcal{H}}\varphi_k = \varepsilon(k)\varphi_k$ i.e. pour une particule libre :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\varphi_k = \varepsilon(k)\varphi_k, \quad (1.4)$$

avec $\varepsilon(k)$ l'énergie associée à une onde plane de nombre d'onde k

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (1.5)$$

Les fonctions propres spatiales $\varphi_k(x)$ de l'hamiltonien libre s'écrivent comme des combinaisons linéaires d'ondes planes

$$\varphi_k(x) = ae^{-ikx} + be^{ikx}, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{C}^2. \quad (1.6)$$

Périodicité. Si la particule est confinée dans une boîte de longueur L avec des conditions aux limites périodiques (ie $\varphi_k(x+L) = \varphi_k(x)$), alors le spectre de k est quantifié :

$$e^{kL} = 1 \quad \text{ou encore } kL \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Le problème est équivalent à celui d'une particule libre sur un cercle de périmètre L .

La particule est délocalisée sur tout l'espace (le cercle), sans structure particulière i.e. le solutions (1.6) correspondent à des **états non liés** (ou états de diffusion).

Pour $k \neq 0$ (respectivement pour $k = 0$), la fonction propre $\varphi_k(x)$ de l'équation (1.6) appartient à un sous-espace propre associé à k de dimension 2 (respectivement de dimension 1) engendré par $x \mapsto e^{-ikx}$ et $x \mapsto e^{ikx}$ (respectivement par $x \mapsto 1$). L'espace engendré par l'ensemble des sous-espaces propres forme un **espace de Hilbert**, muni du **produit scalaire** défini par :

$$(\varphi_{k'}, \varphi_k) = \int_0^L \varphi_{k'}^*(x)\varphi_k(x) dx. \quad (1.8)$$

Les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux i.e. en utilisant les conséquences de la condition de périodicité (1.8), $(\varphi_{k'}, \varphi_k) = 0$ pour $|k'| \neq |k|$. Pour chaque sous-espace propre on impose que les états propres forment une base orthonormale i.e. en utilisant (1.8), les fonctions propres φ_k écrit sous la forme (1.6), sont orthogonaux avec $\varphi_{\bar{k}}$: $x \mapsto \pm(b^*e^{-ikx} - a^*e^{ikx})$ soit $(\varphi_{\bar{k}}, \varphi_k) = 0$, et on impose que $|a|^2 + |b|^2 = L^{-1}$ pour assurer la normalité de φ_k et de $\varphi_{\bar{k}}$ soit $(\varphi_k, \varphi_k) = (\varphi_{\bar{k}}, \varphi_{\bar{k}}) = 1$.

Les solutions générales de l'équation de Schrödinger s'écrivent alors comme une superposition d'états propres $\psi = c_0\psi_0 + \sum_{|k|>0}(c_k\psi_k + c_{\bar{k}}\psi_{\bar{k}})$.

Il y a deux base de vecteur propre particulier :

i) **Base de chiralité / impulsion :**

$$\varphi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{\pm ikx} \quad (1.9)$$

Ces derniers de plus d'être états propres de l'opérateur énergie $\hat{\mathcal{H}}$, sont des états propres de l'opérateur impulsion \hat{p} , avec valeurs propres opposées $\pm\hbar k$.

ii) **Base symétrique / antisymétrique :** En appliquant la matrice de passage unitaire $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix}$ à la base $\{\varphi_+, \varphi_-\}$, on passer dans la base

$$\begin{cases} \varphi_S = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(kx) & \text{type Neumann : } \varphi'_S(0) = \varphi'_S(L) = 0 \\ \varphi_A = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(kx) & \text{type Dirichlet : } \varphi_A(0) = \varphi_A(L) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Cette condition d'orthonormalité est imposée afin de garantir l'indépendance linéaire des états quantiques, et d'assurer que toute fonction d'onde de l'espace de Hilbert puisse être développée de manière unique sur cette base.

Avec le formalisme de Dirac, la fonction d'onde φ_k est représentée par le ket $|k\rangle$ normé (*i.e.* $\langle k'|k\rangle = \delta_{k',k}$, où $\delta_{p,q}$ est le symbole de Kronecker), et l'équation de Schrödinger s'écrit : $\hat{\mathcal{H}}|k\rangle = \varepsilon(k)|k\rangle$. En appliquant le bra $\langle x|$ de part et d'autre, on obtient : $\langle x|\hat{\mathcal{H}}|k\rangle = \varepsilon(k)\langle x|k\rangle$, où $|x\rangle$ est normé (*i.e.* $\langle x'|x\rangle = \delta(x' - x)$ avec $\delta(y - x)$ une distribution de Dirac) et $\varphi_k(x) = \langle x|k\rangle$ est la représentation positionnelle de l'état $|k\rangle$.

La base $\{|x\rangle\}$ étant continue, et les états $\{|k\rangle\}$ quantifiés (par exemple dans une boîte de taille finie avec conditions aux limites périodiques), les relations de changement de base s'écrivent :

$$|k\rangle = \int_0^L dx \varphi_k(x) |x\rangle, \quad |x\rangle = \sum_k \varphi_k^*(x) |k\rangle, \quad (1.11)$$

avec $\varphi_k^*(x) = \langle k|x\rangle$. L'état $|x\rangle$ est relié aux états $|k\rangle$ par une transformation de Fourier discrète. Ces formules montrent que les états $|k\rangle$ sont les composantes de Fourier de l'état $|x\rangle$.

De la particule unique aux systèmes à N particules. Pour un système composé de N particules identiques, une approche naturelle consiste à introduire une fonction d'onde $\varphi(x_1, \dots, x_N)$ dépendant de N variables, symétrique pour des bosons ou antisymétrique pour des fermions sous l'échange de deux coordonnées $x_i \leftrightarrow x_j$, solution de l'équation de Schrödinger à N corps. Toutefois, cette description devient rapidement inextricable lorsque le nombre de particules augmente, ou lorsque le système permet la création et l'annihilation de particules, comme dans un milieu ouvert ou en contact avec un bain thermique.

Seconde quantification

Pour dépasser ces limitations, on adopte le **formalisme de la seconde quantification**, dans lequel l'état du système est décrit non plus par une fonction d'onde mais par un vecteur dans un espace de Fock. Les opérateurs de création et d'annihilation remplacent alors les variables dynamiques classiques et permettent une description unifiée et élégante des systèmes à nombre variable de particules.

Structure de l'espace des états de Fock. Dans ce formalisme, l'espace des états est une **somme directe d'espaces à N particules**, et chaque état est décrit par l'occupation des différents modes quantiques. Les opérateurs \hat{a}_k^\dagger et \hat{a}_k créent et annihilent une particule dans l'état d'onde plane de moment k :

$$|k\rangle = \hat{a}_k^\dagger |\emptyset\rangle, \quad (1.12)$$

état avec une particule dans le mode k , où $|\emptyset\rangle$ désigne le vide quantique de Fock, défini par :

$$\forall k \in \mathbb{R}: \quad \hat{a}_k |\emptyset\rangle = 0, \quad \langle \emptyset | \emptyset \rangle = 1. \quad (1.13)$$

Le symbole \hat{a}_λ représente ici de manière générique soit l'opérateur \hat{b}_λ pour les bosons, soit \hat{c}_λ pour les fermions, et satisfait respectivement les relations de commutation (pour les bosons) ou d'anticommulation (pour les fermions). Dans ce qui suit, nous nous restreignons au cas bosonique.

Relations de commutation bosoniques. Les relations de commutation fondamentales pour les bosons sont :

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] = [\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_{k'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \hat{\delta}_{k,k'}, \quad (1.14)$$

où $\hat{\delta}_{k,k'}$ est le symbole de Kronecker, valant 1 si $k = k'$ et 0 sinon.

Nature du champ quantique. La seconde quantification généralise ce cadre en permettant de traiter des systèmes où le nombre de particules n'est pas fixé, ce qui est fréquent en physique des particules, des champs quantiques, ou des gaz quantiques.

L'idée principale est de ne plus quantifier directement les particules, mais le *champ quantique* associé. Les états d'une particule unique deviennent alors des états d'occupation dans un espace de Fock, qui décrit l'ensemble des configurations possibles avec zéro, une, ou plusieurs particules.

Champs de Bose. Le gaz de Bose unidimensionnel est décrit dans le cadre de la théorie quantique des champs par un champ bosonique canonique $\hat{\Psi}(x)$, qui agit sur l'espace de Fock des états du système. Ce champ quantique encode l'annihilation d'une particule en x , et son adjoint $\hat{\Psi}^\dagger(x)$ correspond à la création d'une particule en ce point.

$$|x\rangle = \hat{\Psi}^\dagger(x) |\emptyset\rangle, \quad (1.15)$$

état avec une particule en x et $|\emptyset\rangle$ est le vide quantique de Fock défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{\Psi}(x) |\emptyset\rangle = 0. \quad (1.16)$$

Relations de commutation bosoniques. Ces champs satisfont les relations de commutation canoniques à temps égal :

$$[\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}(y)] = [\hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(y)] = 0, \quad [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(y)] = \hat{\delta}(x - y), \quad (1.17)$$

où $\hat{\delta}(x - y)$ est la fonction delta de Dirac. Ces relations expriment le caractère bosonique des excitations du champ.

État à N particules. Soient N bosons dans les états $\{k_1, \dots, k_N\}$ (un boson dans l'état k_1 , un autre dans k_2 , etc.) et aux positions $\{x_1, \dots, x_N\}$ (un boson en x_1 , un autre en x_2 , etc.). Leurs états s'écrivent alors :

$$|\{k_1, \dots, k_N\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{b}_{k_1}^\dagger \cdots \hat{b}_{k_N}^\dagger |\emptyset\rangle, \quad |\{x_1, \dots, x_N\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |\emptyset\rangle, \quad (1.18)$$

où le facteur $1/\sqrt{N!}$ traduit le caractère d'indiscernabilité des bosons et garantit la symétrisation correcte de l'état.

Changement de base. On peut relier les opérateurs de création/annihilation dans la base des ondes planes aux opérateurs de champ via :

$$\hat{b}_k^\dagger = \int dx \varphi_k(x) \hat{\Psi}^\dagger(x), \quad \hat{\Psi}^\dagger(x) = \sum_k \varphi_k^*(x) \hat{b}_k^\dagger. \quad (1.19)$$

Le champ quantique $\hat{\Psi}(x)$ est relié aux opérateurs de moment \hat{b}_k par une transformation de Fourier. Ces formules montrent que les opérateurs \hat{b}_k sont les composantes de Fourier du champ $\hat{\Psi}(x)$.

Ainsi, un état à N bosons dans la base $|k\rangle^{\otimes N}$ peut s'écrire :

$$|\{k_1, \dots, k_N\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx_1 \cdots dx_N \varphi_{\{k_a\}}(x_1, \dots, x_N) \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |\emptyset\rangle, \quad (1.20)$$

où on note $\{k_a\} \equiv \{k_1, \dots, k_N\}$, et la fonction d'onde symétrisée s'écrit : $\varphi_{\{k_a\}}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in \hat{S}_N} \prod_{i=1}^N \varphi_{k_{\sigma(i)}}(x_i)$, avec \hat{S}_N le groupe symétrique d'ordre N mais aussi :

$$\varphi_{\{k_a\}}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle \emptyset | \hat{\Psi}(x_1) \cdots \hat{\Psi}(x_N) | \{k_1, \dots, k_N\} \rangle. \quad (1.21)$$

Operateur.

Opérateur à un corps.

Dans la base discrètes des modes $\{|k\rangle\}$. Soit \hat{f} un opérateur à une particule, dont les éléments de matrice dans une base orthonormée $\{|k\rangle\}$ sont donnés par $f_{\lambda\nu} = \langle\lambda|\hat{f}|\nu\rangle$. Un opérateur symétrique à N particules correspondant à la somme des actions de \hat{f} sur chacune des particules s'écrit en première configuration : $\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{f}^{(i)}$, où $\hat{f}^{(i)}$ désigne l'action de \hat{f} sur la i^{e} particule uniquement. En base de Dirac, cela donne : $\hat{f}^{(i)} = \sum_{\lambda,\nu} f_{\lambda\nu} |i:\lambda\rangle\langle i:\nu|$, où $|i:\lambda\rangle$ représente un état où seule la i^{e} particule est dans l'état λ . On peut montrer que la somme des projecteurs agissant sur chaque particule s'identifie à une combinaison d'opérateurs de création et d'annihilation : $\sum_{i=1}^N |i:\lambda\rangle\langle i:\nu| = \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\nu$, (où \hat{a}_λ est une notation générique désignant \hat{b}_λ pour les bosons, ou \hat{c}_λ pour les fermions).

On en déduit que l'opérateur à un corps \hat{F} peut se réécrire dans le formalisme de la seconde quantification comme :

$$\hat{F} = \sum_{\lambda,\nu} \langle\lambda|\hat{f}|\nu\rangle \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\nu. \quad (1.22)$$

L'opérateur $\hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\nu$ fait la transition d'une particule de l'état ν à vers l'état λ . Si $\lambda = \nu$ cette opérateur est l'opérateur nombre de particule dans le mode λ .

Exemples d'opérateurs à un corps. Si l'on sait diagonaliser l'opérateur \hat{f} , c'est-à-dire si l'on peut écrire : $\hat{f} = \sum_k f_k |k\rangle\langle k|$, alors l'opérateur à N corps associé s'écrit : $\hat{F} = \sum_k \langle k|\hat{f}|k\rangle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$. On obtient ainsi une forme diagonale de \hat{F} en seconde quantification. Un exemple immédiat est l'énergie des particules libres ; on rappelle que pour une : $\hat{\mathcal{H}}|k\rangle = \varepsilon(k)|k\rangle$, avec $\varepsilon(k)$ l'énergie du mode k (1.5). Alors en injectant $\hat{f} = \hat{\mathcal{H}}$ ($= \frac{\hbar^2 \hat{p}^2}{2m}$) dans (1.22) on obtient l'énergie cinétique totale du système :

$$\hat{K} = \sum_k \varepsilon(k) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (1.23)$$

Et pour N particules, en écrivant l'état sous la forme (1.18), en utilisant les relations de commutation (1.14) et la définition de l'état de Fock (1.13), on trouve que $|\{k_1, \dots, k_N\}\rangle$ est un état propre de \hat{K} associé à l'énergie $(\sum_{i=1}^N \varepsilon(k_i))$, c'est-à-dire :

$$\hat{K} |\{k_1, \dots, k_N\}\rangle = \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon(k_i) \right) |\{k_1, \dots, k_N\}\rangle. \quad (1.24)$$

Dans la base continue des positions $\{|x\rangle\}$. Les opérateurs à plusieurs corps peuvent être exprimés de manière remarquable à l'aide des opérateurs de champ, d'une façon physiquement transparente qui rappelle les formules bien connues du cas à une particule.

La forme générale d'un opérateur à un corps s'écrit :

$$\hat{F} = \int dx dx' \hat{\Psi}^\dagger(x) \langle x|\hat{f}|x'\rangle \hat{\Psi}(x'). \quad (1.25)$$

Énergie cinétique totale. Pour des particules non relativistes, l'énergie cinétique élémentaire s'écrit $\hat{f} = \frac{\hbar^2 \hat{p}^2}{2m}$. À l'échelle du champ quantique, l'énergie cinétique totale prend la forme opératorielle :

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \int dx \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \cdot \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x). \quad (1.26)$$

Le champ quantique $\hat{\Psi}(x)$ est relié aux opérateurs de moment \hat{b}_k par une transformation de Fourier. En injectant l'expression (1.19) dans (1.26), on retrouve la forme discrète (1.23), cette fois exprimée en termes des opérateurs \hat{b}_k .

Lorsque cet Hamiltonien agit sur l'état de Fock à N particules $|\{k_1, \dots, k_N\}\rangle$, les règles de commutation (1.17) ainsi que la définition des états de Fock (1.16) impliquent (cf. Annexe ??) :

$$\hat{K} |k_1, \dots, k_N\rangle = \int d^N z \hat{\mathcal{K}}_N \varphi_{\{k_a\}}(z_1, \dots, z_N) \hat{\Psi}(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad (1.27)$$

avec :

$$\hat{\mathcal{K}}_N = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m},$$

où \hat{p}_i désigne l'opérateur impulsion de la $i^{\text{ème}}$ particule.

Opérateurs à deux corps Nous considérons à présent les termes d'interaction impliquant deux particules , \hat{v} , dont les éléments de matrices sont donnés par $v_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle 1 : \alpha; 2 : \beta | \hat{v} | 1 : \gamma; 2 : \delta \rangle$, où $|i : \gamma; j : \delta\rangle$ représente l'état où la i^{e} particule est dans l'état γ et la j^{e} dans l'état δ . Ceux-ci correspondent à des opérateurs de la forme : $\hat{V} = \sum_{j < i} \hat{v}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \hat{v}^{(i,j)}$. avec $\hat{v}^{(i,j)}$ désigne l'interaction à deux corps entre les i^{e} et j^{e} particules , exprimés dans la base à deux états : $\hat{v}^{(i,j)} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} |i : \alpha; j : \beta\rangle v_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle i : \gamma; j : \delta|$. On peut réécrire l'opérateur \hat{V} en termes d'opérateurs de création et d'annihilation comme suit :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} v_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\delta \hat{a}_\gamma. \quad (1.28)$$

Cette forme est particulièrement utile pour le traitement des interactions dans l'espace de Fock, notamment en théorie des champs et en physique des gaz quantiques.

Expression générale d'un terme à deux corps. Un terme d'interaction à deux corps général peut s'écrire :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 \langle 1 : x_1, 2 : x_2 | \hat{v} | 1 : x'_1, 2 : x'_2 \rangle \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x'_2) \hat{\Psi}(x'_1) \quad (1.29)$$

Interactions ponctuelles. Dans le cas d'une interaction ne dépendant que de la distance relative entre deux particules, cette expression se simplifie : $\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \hat{v}(x_i - x_j) = \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 v(x_1 - x_2) \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x_2) \hat{\Psi}(x_1)$ soit pour des interactions ponctuelles :

$$\hat{V} = \frac{g}{2} \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \quad (1.30)$$

et quand on l'applique à l'état $|\{k_1, \dots, k_N\}\rangle$, les règles de commutations (1.17) et la définition d'état de Fock (1.16) impliquent que (cf Annex ??)

$$\hat{V} |\{k_1, \dots, k_N\}\rangle = \int d^N z \hat{\mathcal{V}}_N \varphi_{\{k_a\}}(z_1, \dots, z_N) \hat{\Psi}(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad (1.31)$$

avec $\hat{\mathcal{V}}_N = g \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(x_i - x_j)$ où g est la constante de couplage.

Expression de l'Hamiltonien. L'hamiltonien dans ce formalisme s'écrit en termes des opérateurs de champ, par exemple pour l'énergie cinétique et les interactions ponctuelles avec $\hbar = m = 1$:

$$\hat{H} = \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \left[-\frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 + \frac{g}{2} \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \right] \hat{\Psi}(x). \quad (1.32)$$

Quand on l'applique à l'état $|\{\theta_1, \dots, \theta_N\}\rangle$, avec θ_i homogène à des nombres d'onde ou à des vitesses , il vient que

$$\hat{H} |\{\theta_1, \dots, \theta_N\}\rangle = \int d^N z \hat{\mathcal{H}}_N \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) \hat{\Psi}(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad (1.33)$$

avec $\hat{\mathcal{H}}_N = \hat{\mathcal{K}}_N + \hat{\mathcal{V}}_N$.

Ce formalisme est ainsi adapté pour décrire des condensats de Bose, des gaz quantiques, ou la création/annihilation de particules dans les champs quantiques.

Équation du mouvement associée. L'équation du mouvement du champ $\Psi(x)$ est obtenue à partir de l'équation de Heisenberg :

$$i \hat{\partial}_t \hat{\Psi} = [\hat{\Psi}, \hat{H}] \quad (1.34)$$

ce qui, après évaluation explicite du commutateur (1.17), conduit à :

$$i \hat{\partial}_t \hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi} + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \quad (1.35)$$

est appelée l'équation de Schrödinger non linéaire (NS).

Pour $g > 0$, l'état fondamental à température nulle est une sphère de Fermi. Seul ce cas sera considéré par la suite.

Conclusion

La première quantification est la base indispensable qui permet de comprendre le comportement quantique d'un nombre fixé de particules. La seconde quantification en est une extension naturelle, nécessaire pour décrire des systèmes plus complexes où le nombre de particules peut varier. Elle repose sur la quantification des champs, et l'introduction d'opérateurs créant ou détruisant ces particules, ouvrant ainsi la voie à la physique quantique des champs et à de nombreuses applications modernes.

1.1.2 Opérateurs nombre de particules et moment dans la formulation quantique du gaz de Lieb-Liniger

Dans cette section, nous nous intéressons aux opérateurs fondamentaux que sont le *nombre total de particules* \hat{Q} et le *moment total* $\hat{\mathbf{P}}$, dans le cadre du gaz de bosons unidimensionnel décrit par l'Hamiltonien de Lieb-Liniger. Après avoir introduit ces opérateurs dans le langage de la seconde quantification, nous montrons qu'ils sont *conservés* par la dynamique, et qu'ils admettent les *mêmes états propres* que l'Hamiltonien. Nous donnons ensuite leur expression dans la représentation à N particules, ainsi que la forme explicite de leurs valeurs propres en fonction des *rapidités* θ_a , illustrant la structure polynomiale typique des intégrales du mouvement dans les systèmes intégrables.

Définition en seconde quantification

Les opérateurs du nombre total de particules \hat{Q} et du moment total $\hat{\mathbf{P}}$ s'écrivent en seconde quantification comme suit :

$$\hat{Q} = \int \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) dx, \quad \hat{\mathbf{P}} = -\frac{i}{2} \int \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x) - \left[\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \right\} dx \quad (1.36)$$

Ces deux opérateurs sont *hermitiens*, et représentent des observables physiques fondamentales : le nombre de particules et la quantité de mouvement du système.

Conservation et commutation

Ces opérateurs commutent avec l'Hamiltonien $\hat{\mathbf{H}}$ du modèle de Lieb-Liniger :

$$[\hat{\mathbf{H}}, \hat{Q}] = 0, \quad [\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{P}}] = 0. \quad (1.37)$$

Ils constituent ainsi des intégrales du mouvement. Cette propriété est une manifestation de la symétrie translationnelle du système (pour $\hat{\mathbf{P}}$) et de la conservation du nombre total de particules (pour \hat{Q}).

Nous verrons au chapitre 2 que cette situation s'étend à une *infinité d'intégrales du mouvement* dans les systèmes intégrables, ce qui permettra de construire l'ensemble de Gibbs généralisé (GGE).

États propres et valeurs propres

Les états propres $|\{\theta_a\}\rangle$, construits dans le cadre de la seconde quantification à partir de la solution du modèle de Lieb-Liniger, sont simultanément fonctions propres des opérateurs \hat{Q} , $\hat{\mathbf{P}}$ et $\hat{\mathbf{H}}$:

$$\hat{Q} |\{\theta_a\}\rangle = N |\{\theta_a\}\rangle, \quad \hat{\mathbf{P}} |\{\theta_a\}\rangle = \left(\sum_{a=1}^N \theta_a \right) |\{\theta_a\}\rangle, \quad \hat{\mathbf{H}} |\{\theta_a\}\rangle = \left(\frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \theta_a^2 \right) |\{\theta_a\}\rangle. \quad (1.38)$$

Autrement dit, les valeurs propres associées à ces trois opérateurs sont données par :

$$N = \sum_{a=1}^N \theta_a^0, \quad p = \sum_{a=1}^N \theta_a, \quad e = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \theta_a^2. \quad (1.39)$$

Cela illustre que les trois premières intégrales du mouvement du système — nombre, moment, énergie — peuvent être exprimées comme des *moments successifs* des rapidités.

Forme en première quantification

En utilisant la représentation en espace de configuration $\{z_a\} \equiv \{z_1, \dots, z_N\}$, les opérateurs \hat{Q} et $\hat{\mathbf{P}}$ agissent comme suit sur les fonctions d'onde $\varphi_{\{\theta_a\}}(\{z_a\})$:

$$\hat{Q} |\{\theta_a\}\rangle = \sqrt{N!} \int d^N z \hat{\mathcal{N}} \varphi_{\{\theta_a\}}(\{z_a\}) |\{z_a\}\rangle, \quad \hat{\mathbf{P}} |\{\theta_a\}\rangle = \sqrt{N!} \int d^N z \hat{\mathcal{P}}_N \varphi_{\{\theta_a\}}(\{z_a\}) |\{z_a\}\rangle \quad (1.40)$$

où les opérateurs associés agissant sur les fonctions d'onde à N particules sont :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{k=1}^N 1 = N, \quad \hat{\mathcal{P}}_N = -i \sum_{k=1}^N k = -i \sum_{k=1}^N \hat{\boldsymbol{\partial}}_{z_k} \quad (1.41)$$

Ces formes découlent directement des règles de commutation canonique (1.17) et de la définition des opérateurs en seconde quantification (1.16) (cf. annexes ??).

Conclusion

Ainsi, les opérateurs $\hat{\mathbf{Q}}$, $\hat{\mathbf{P}}$ et $\hat{\mathbf{H}}$ possèdent une structure diagonale commune dans la base des états propres $|\{\theta_a\}\rangle$, révélant la nature intégrable du modèle de Lieb-Liniger. Leurs valeurs propres sont respectivement les 0e, 1er et 2e moments des rapidités. Cette structure permet de généraliser la construction à une hiérarchie complète d'observables conservées, qui seront présentées au chapitre suivant.

1.1.3 Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à 2 corps

Introduction au système de deux bosons avec interaction de contact. Considérons maintenant un système de deux bosons quantiques confinés dans une boîte unidimensionnelle de longueur L , avec des conditions aux limites périodiques. Contrairement au cas à une seule particule, une interaction de contact intervient ici dans la dynamique. L'Hamiltonien à deux particules s'écrit :

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = \hat{\mathcal{K}}_2 + \hat{\mathcal{V}}_2, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{K}}_2 = -\frac{1}{2} \partial_{z_1}^2 - \frac{1}{2} \partial_{z_2}^2, \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{V}}_2 = g \delta(z_1 - z_2). \quad (1.42)$$

On rappelle que, pour des particules de masse unitaire (i.e., $\hbar = m = 1$), les énergies propres de l'opérateur cinétique $\hat{\mathcal{K}}_2$, associées aux fonctions d'onde symétrisées $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}$, sont données par :

$$\varepsilon(\theta_1) + \varepsilon(\theta_2) = \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}. \quad (1.43)$$

Afin de simplifier le problème, nous nous plaçons dans le référentiel du centre de masse.

Changement de variables : coordonnées du centre de masse et relative. En première quantification, on introduit les nouvelles variables : $Z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ (centre de masse), $Y = z_1 - z_2$ (coordonnée relative). Dans ce changement de variables, l'opérateur laplacien total devient : $\partial_{z_1}^2 + \partial_{z_2}^2 = \frac{1}{2} \partial_Z^2 + 2 \partial_Y^2$. L'Hamiltonien (1.42) se décompose alors en la somme de deux Hamiltoniens agissant respectivement sur Z et Y :

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = -\frac{1}{4} \partial_Z^2 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{rel}}, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{H}}_{\text{rel}} = -\partial_Y^2 + g \delta(Y). \quad (1.44)$$

Résolution du problème du centre de masse et de la coordonnée relative. L'Hamiltonien du centre de masse, $-\frac{1}{4} \partial_Z^2$, décrit une particule de masse totale $\tilde{m} = 2$. Ses états propres sont des ondes planes associées à une énergie $\tilde{\theta}^2$, avec : $\tilde{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, jouant ici un rôle analogue à celui d'un pseudo-moment associé dans le référentiel de laboratoire. Le Hamiltonien relatif, $\hat{\mathcal{H}}_{\text{rel}}$, correspond quant à lui à une particule de masse réduite $\tilde{m} = \frac{1}{2}$ soumise à un potentiel delta centré en $Y = 0$. Son équation propre s'écrit :

$$-\partial_Y^2 \tilde{\varphi}(Y) + g \delta(Y) \tilde{\varphi}(Y) = \tilde{\varepsilon} \tilde{\varphi}(Y), \quad (1.45)$$

où $\tilde{\varepsilon}$ désigne l'énergie associée au mouvement relatif.

Forme symétrique de la fonction d'onde pour bosons. Dans le référentiel du centre de masse. Le système est le même que celui d'un particules de masse $\tilde{m} = \frac{1}{2}$. Le système étant composé de particules bosoniques, on cherche une solution symétrique que l'on écrit sous la forme :

$$\tilde{\varphi}(Y) = a e^{i \frac{1}{2} \tilde{\theta}|Y|} + b e^{-i \frac{1}{2} \tilde{\theta}|Y|} \propto \sin \left(\frac{1}{2} (\tilde{\theta}|Y| + \Phi) \right). \quad (1.46)$$

Le paramètre $\tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_2$ joue ici un rôle analogue à celui d'un pseudo-moment associé à la coordonnée relative, est la phase s'écrit

$$\Phi(\tilde{\theta}) = 2 \arctan \left(\frac{1}{i} \frac{a+b}{a-b} \right), \quad (1.47)$$

car $a \exp(ix) + b \exp(-ix) = 2\sqrt{ab} \sin\left(x + \arctan\left(-i \frac{a+b}{a-b}\right)\right)$. Pour $\tilde{\theta} < 0$, les termes exponentiels $\exp(i\tilde{\theta}|Y|/2)$ et $\exp(-i\tilde{\theta}|Y|/2)$ correspondent aux paires de particules entrantes et sortantes d'un processus de diffusion à deux corps.

En réinjectant l'ansatz (1.46) dans l'équation relative (1.45), on obtient l'énergie propre $\tilde{\varepsilon}$ du problème réduit. Elle prend la forme cinétique usuelle $\frac{1}{2} \times \text{masse} \times \text{vitesse}^2$. La masse réduite vaut ici $\tilde{m} = \frac{1}{2}$ et le paramètre $\tilde{\theta}$ joue le rôle d'une impulsion ; ainsi

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \tilde{m} \tilde{\theta}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \tilde{\theta}^2 = \frac{\tilde{\theta}^2}{4}. \quad (1.48)$$

Cette énergie gouverne la décroissance exponentielle de la fonction d'onde dans la coordonnée relative : plus $\tilde{\theta}$ est grand, plus l'état est localisé autour de $Y = 0$, signe d'une interaction attractive plus forte entre les deux bosons.

L'énergie totale se décompose enfin en la somme du mouvement du centre de masse et du mouvement relatif : $\bar{\theta}^2 + \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) = \varepsilon(\theta_1) + \varepsilon(\theta_2)$, où $\bar{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ et $\varepsilon(\theta) = \theta^2/2$.

Condition de discontinuité à cause du potentiel delta. En raison de la présence du potentiel delta centré en $Y = 0$, la dérivée première de la fonction d'onde $\tilde{\varphi}(Y)$ présente une discontinuité en ce point. En effet, le potentiel étant infini en $Y = 0$, la phase Φ du régime symétrique est déterminée en intégrant l'équation du mouvement autour de la singularité. En intégrant entre $-\epsilon$ et $+\epsilon$ et en faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient la condition de saut de la dérivée :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} -\partial_Y^2 \tilde{\varphi}(Y) + g\delta(Y)\tilde{\varphi}(Y) dY &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) dY, \\ \tilde{\varphi}'(0^+) - \tilde{\varphi}'(0^-) - g\tilde{\varphi}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Détermination de la phase Φ . Et en évaluant la discontinuité de sa dérivée au point $Y = 0$, on trouve que la phase Φ satisfait la condition :

$$\Phi(\tilde{\theta}) = 2 \arctan(\tilde{\theta}/g) \in [-\pi, +\pi]. \quad (1.49)$$

Cette relation exprime l'impact de l'interaction de type delta sur le déphasage de la fonction d'onde liée. On en déduit que plus le couplage g est fort ($g \rightarrow \infty$), plus la phase Φ se rapproche de zéro. Cela correspond à une fonction d'onde qui s'annule en $Y = 0$, caractéristique d'un régime d'imperméabilité totale.

À l'inverse, dans la limite d'une interaction faible ($g \rightarrow 0$), la phase Φ tend vers π (ou $-\pi$, selon le signe de $\tilde{\theta}$). Dans ce cas, la discontinuité de la dérivée de la fonction d'onde au point $Y = 0$ devient négligeable, ce qui traduit une interaction presque absente entre les deux particules.

Phase de diffusion à deux corps. En combinant les équations (1.47) et (1.49) avec l'identité analytique valable pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $2 \arctan(z) = i \ln\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) \Leftrightarrow e^{2i \arctan(z)} = \frac{1+iz}{1-iz}$, on obtient que le rapport des amplitudes a et b de la fonction d'onde relative (1.46) définit la *phase de diffusion* $\Phi(\tilde{\theta}) = i \ln\left(-\frac{b}{a}\right)$. On introduit alors la *matrice de diffusion* (ou facteur de diffusion)

$$S(\tilde{\theta}) \doteq e^{i\Phi(\tilde{\theta})} = -\frac{a}{b} = \frac{1 + i\tilde{\theta}/g}{1 - i\tilde{\theta}/g}. \quad (1.50)$$

Cette expression, unitaire et analytique, caractérise entièrement la diffusion élastique à deux corps dans le modèle considéré.

Lien entre phase de diffusion et décalage temporel : interprétation semi-classique. (à revoir) Il a été souligné par Eisenbud (1948) et Wigner (1955) que la phase de diffusion peut être interprétée, de manière semi-classique, comme un *décalage temporel*. Esquissons brièvement l'argument de Wigner (1955). Tout d'abord, notons que, pour une particule unique, une approximation simple d'un paquet d'ondes peut être obtenue en superposant deux ondes planes avec des moments $\tilde{\theta}/2$ et $\tilde{\theta}/2 + \delta\tilde{\theta}$, respectivement :

$$\tilde{\varphi}_{\text{inc}}(Y) \propto e^{i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} + e^{i\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|}. \quad (1.51)$$

Cette superposition évolue dans le temps comme :

$$\tilde{\varphi}_{\text{inc}}(Y, t) \propto e^{i(\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y| - t\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}))} + e^{i(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y| - t\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta}))}. \quad (1.52)$$

Le centre de ce 'paquet d'ondes' se situe à la position où les phases des deux termes coïncident, c'est-à-dire au point où $|Y|\delta\tilde{\theta} - t[\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta} + 2\delta\tilde{\theta}) - \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta})] = 0$, ce qui donne $|Y| \simeq \tilde{\theta}t$ avec la vitesse réduite $\tilde{\theta} = 1/2\varepsilon'(\tilde{\theta})$. Selon les équations (1.46) et (??), l'état sortant de la diffusion correspondant serait :

$$\tilde{\varphi}_{outc}(Y, t) \propto -e^{i\Phi(\tilde{\theta})}e^{-i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} - e^{i\Phi(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})}e^{-i\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|}. \quad (1.53)$$

En répétant l'argument précédent de la stationnarité de phase, on trouve que la coordonnée relative est à la position $|Y| \simeq \tilde{\theta}t - 2\Phi'(\tilde{\theta})$ au moment t .

$$|Y| \simeq \tilde{\theta}t - 2\Delta(\tilde{\theta}) \quad (1.54)$$

où le déplacement de diffusion $\Delta(\theta)$ est donné par la dérivée de la phase de diffusion,

$$\Delta(\theta) \doteq \frac{d\Phi}{d\theta}(\theta) = \frac{2g}{g^2 + \theta^2}. \quad (1.55)$$

Retour aux coordonnées du laboratoire. En revenant aux coordonnées du laboratoire, la fonction d'onde à deux corps s'écrit $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) = \langle \emptyset | \hat{\Psi}(z_1) \hat{\Psi}(z_2) | \{\theta_1, \theta_2\} \rangle / \sqrt{2}$, dans le cas $z_1 < z_2$, c'est-à-dire pour une séparation relative $Y = z_1 - z_2 < 0$ (on pourra symétriser ultérieurement). Dans le référentiel du laboratoire, le centre de masse évolue selon $Z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \bar{\theta}t$. Ainsi, la position semi-classique des deux particules après la collision s'écrit

$$z_1 = Z + \frac{Y}{2} \simeq \theta_1 t - \Delta(\theta_1 - \theta_2), \quad z_2 = Z - \frac{Y}{2} \simeq \theta_2 t + \Delta(\theta_1 - \theta_2), \quad (1.56)$$

On peut vérifier les identités utiles suivantes :

$$z_1\theta_1 + z_2\theta_2 = 2Z\bar{\theta} + \frac{1}{2}Y\tilde{\theta}, \quad z_1\theta_2 + z_2\theta_1 = 2Z\bar{\theta} - \frac{1}{2}Y\tilde{\theta},$$

ce qui est en accord avec les masses associées : masse totale $\bar{m} = 2$, masse réduite $\tilde{m} = \frac{1}{2}$.

Cela nous motive à multiplier l'ansatz dans le référentiel du centre de masse (équation (1.46)) par un facteur de phase globale $\exp(2iZ\bar{\theta})$ pour revenir à la représentation dans le laboratoire. On obtient alors l'expression de la fonction d'onde :

$$\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) \propto \begin{cases} (\theta_2 - \theta_1 - ig)e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2} - (\theta_1 - \theta_2 - ig)e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1} & \text{si } z_1 < z_2 \\ (z_1 \leftrightarrow z_2) & \text{si } z_1 > z_2 \end{cases} \quad (1.57)$$

Pour $\theta_1 > \theta_2$, les deux termes exponentiels $e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2}$ et $e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1}$ correspondent respectivement aux ondes entrantes et sortantes dans le canal de diffusion à deux corps. Le rapport de leurs amplitudes définit la phase de diffusion / matrice diffusion $e^{i\Phi(\tilde{\theta})}$ à deux corps (??), reste inchangé :

$$S(\theta_1 - \theta_2) \doteq e^{i\Phi(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\theta_1 - \theta_2 - ig}{\theta_2 - \theta_1 - ig}. \quad (1.58)$$

Cette phase caractérise entièrement le processus de diffusion dans le modèle de Lieb-Liniger à deux particules.

Conditions périodiques et équations de Bethe pour deux bosons (à révoir).

Périodicité en z_2 . On impose une condition de périodicité sur la fonction d'onde obtenue par ansatz de Bethe (voir équation (1.57)) : $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2 = L) = \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2 = 0)$, avec $0 < z_1 < z_2 = L$. Au point $z_2 = L$, la configuration reste dans le secteur $z_1 < z_2$, tandis qu'à $z_2 = 0$, on entre dans le secteur $z_2 < z_1$. La continuité de la fonction d'onde impose alors d'échanger les coordonnées $z_1 \leftrightarrow z_2$: $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, L) = \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(0, z_1)$. En utilisant l'expression explicite de l'ansatz dans les deux secteurs, on obtient l'égalité suivante :

$$a e^{i\theta_1 z_1 + i\theta_2 L} + b e^{i\theta_2 z_1 + i\theta_1 L} = a e^{i\theta_2 z_1} + b e^{i\theta_1 z_1}.$$

Cette relation, valable pour tout $z_1 \in (0, L)$, fixe une contrainte sur le rapport b/a . En utilisant l'expression de la phase de diffusion introduite en (1.58) pour $z_1 < z_2$:

$$-\frac{b}{a} = e^{i\Phi(\theta_1 - \theta_2)},$$

on obtient une condition quantique sur les phases θ_1 et θ_2 , cœur de la quantification imposée par le formalisme de Bethe.

En identifiant les coefficients de $e^{i\theta_1 z_1}$ et $e^{i\theta_2 z_1}$ indépendamment, on obtient $e^{i\theta_2 L} a = b$, $e^{i\theta_1 L} b = a$, c'est-à-dire l'équations de Bethe

$$e^{i\theta_1 L} e^{i\Phi(\theta_1 - \theta_2)} = -1, \quad e^{i\theta_2 L} e^{i\Phi(\theta_2 - \theta_1)} = -1.$$

En prenant le logarithme on obtient les *équations de Bethe à deux particules* :

$$\theta_1 L + \Phi(\theta_1 - \theta_2) = 2\pi I_1, \quad \theta_2 L + \Phi(\theta_2 - \theta_1) = 2\pi I_2, \quad (1.59)$$

où $I_1, I_2 \in \mathbb{Z}$ sont les nombres quantiques entiers (caractère bosonique).

Périodicité sur z_1 . Le raisonnement symétrique conduit exactement aux mêmes égalités (1.59). Les équations (1.59) constituent la quantification complète du gaz de Lieb–Liniger à deux bosons sur un cercle de longueur L et elles seront le point de départ pour l'étude de l'état fondamental et des excitations.

1.2 Équation de Bethe et distribution de rapidité

1.2.1 Fonction d'onde dans le secteur ordonné et représentation de Gaudin

Dans le domaine $z_1 < z_2 < \dots < z_N$, la fonction d'onde pour un état de Bethe à N particules s'écrit (Gaudin 2014, Korepin et al. 1997, Lieb et Liniger 1963) :

$$\begin{aligned} \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle \emptyset | \hat{\Psi}(z_1) \cdots \hat{\Psi}(z_N) | \{\theta_a\} \rangle \\ &\propto \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \left(\prod_{1 \leq a < b \leq N} (\theta_{\sigma(b)} - \theta_{\sigma(a)} - ig) \right) e^{i \sum_{j=1}^N z_j \theta_{\sigma(j)}}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

où la somme s'étend sur toutes les permutations σ de $\{1, \dots, N\}$. Le facteur $(-1)^{|\sigma|}$ est la signature de la permutation, et les amplitudes dépendent des différences de quasi-moments θ_j ainsi que du couplage c . Cette fonction d'onde est ensuite étendue par symétrie aux autres domaines du type $z_{\pi(1)} < z_{\pi(2)} < \dots < z_{\pi(N)}$ via des propriétés d'échange symétriques.

1.2.2 Conditions aux bords périodiques

Les équations précédentes ont été établies pour un système défini sur la droite réelle. Cependant, dans une perspective thermodynamique, il est essentiel de considérer une densité finie N/L . Cela peut être obtenu en compactifiant l'espace sur un cercle de longueur L , i.e. en imposant les *conditions aux bords périodiques*.

Concrètement, cela consiste à identifier $x = 0$ et $x = L$ et à exiger que la fonction d'onde soit périodique lorsqu'une particule fait le tour du système :

$$\varphi_{\{\theta_a\}}(x_1, \dots, x_{N-1}, L) = \varphi_{\{\theta_a\}}(0, x_1, \dots, x_{N-1}). \quad (1.61)$$

Cette condition doit être satisfaite pour chaque particule. Or, déplacer la j -ième particule de x_j à $x_j + L$ revient à la faire passer devant toutes les autres : cela introduit un facteur de diffusion à chaque croisement.

1.2.3 Équations de Bethe exponentielles

En imposant les conditions de périodicité sur la fonction d'onde de type Bethe (1.60), on obtient que chaque moment θ_a doit satisfaire l'équation :

$$e^{i\theta_a L} \prod_{b \neq a} S(\theta_a - \theta_b) = (-1)^{N-1}, \quad a = 1, \dots, N, \quad (1.62)$$

où la matrice diffusion $S(\theta) = \frac{\theta - ig}{-\theta - ig} = e^{i\Phi(\theta)}$ est l'amplitude de diffusion à deux corps, et $\Phi(\theta) = 2 \arctan \left(\frac{\theta}{c} \right)$ est la phase associée (??). Le signe $(-1)^{N-1}$ vient du fait que chaque permutation change la signature du déterminant dans la représentation de Gaudin.

1.2.4 Équations de Bethe logarithmiques

En prenant le logarithme du membre gauche et du membre droit de l'équation (1.62), on obtient :

$$L\theta_a + \sum_{b=1}^N \Phi(\theta_a - \theta_b) = 2\pi I_a, \quad a = 1, \dots, N, \quad (1.63)$$

où les $I_a \in \mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$) sont des nombres quantiques entiers (ou demi-entiers). Dans la configuration d'état fondamental (ou de type "mer de Fermi"), ces nombres sont pris de manière symétrique autour de zéro :

$$I_a = a - \frac{N+1}{2}, \quad \text{pour } a \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Ce choix garantit une distribution uniforme des θ_a à l'état fondamental.

1.2.5 Interprétation physique

Les équations de Bethe (1.63) représentent une *quantification des pseudo-impulsions* θ_a des particules en interaction, résultant d'un *interféromètre multi-corps sur le cercle* : chaque particule accumule une phase $e^{i\theta_a L}$ due au mouvement libre, ainsi que des phases de diffusion lorsqu'elle croise les autres.

Ce système d'équations détermine les états propres du système de Lieb–Liniger en volume fini, et joue un rôle fondamental dans la description exacte de ses propriétés thermodynamiques et dynamiques.

1.2.6 Thermodynamique du gaz de Lieb–Liniger à température nulle

Dans la limite thermodynamique, le nombre de particules N et la longueur L du système tendent vers l'infini de telle sorte que leur rapport reste fini :

$$\lim_{N, L \rightarrow \infty} \frac{N}{L} = D < \infty,$$

où D désigne la densité linéique de particules.

Considérons désormais le système à température nulle. L'état fondamental dans le secteur à nombre de particules fixé correspond à la configuration d'énergie minimale parmi les solutions des équations de Bethe (1.63).

Dans la limite thermodynamique, les valeurs de θ_a deviennent quasi-continues, avec un espacement $\theta_{a+1} - \theta_a = \mathcal{O}(1/L)$, et se condensent dans un intervalle symétrique autour de zéro :

$$\theta_a \in [-K, K],$$

où K est le paramètre de Fermi (ou rapidité maximale), défini par $K = \theta_N$. En supposant l'ordre $I_a \geq I_b \Rightarrow \theta_a \geq \theta_b$, cet intervalle constitue ce qu'on appelle la *mer de Dirac* (ou sphère de Fermi en dimension un).

Nous introduisons la densité d'états $\rho_s(\theta)$, définie par

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = \frac{2\pi}{L} \lim_{\text{therm}} \frac{|I_{a+1} - I_a|}{|\theta_{a+1} - \theta_a|} = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta_a),$$

où $I(\theta_a) = I_a$. L'application des équations de Bethe sous forme logarithmique conduit alors à

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = 1 + \frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b),$$

ce qui relie ρ_s à la fonction d'interaction Δ entre les rapidités.

Intéressons-nous maintenant à la *densité de particules dans l'espace des moments*, notée $\rho(\theta)$, définie par

$$\rho(\theta_a) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\theta_{a+1} - \theta_a} > 0.$$

Dans l'état fondamental, toutes les positions disponibles dans l'intervalle $[-K, K]$ sont occupées. On a donc :

$$\rho(\theta) = \rho_s(\theta). \quad (1.64)$$

La quantité $L\rho(\theta)d\theta$ représente le nombre de rapidités dans la cellule infinitésimale $[\theta, \theta + d\theta]$, tandis que $N = L \int_{-K}^K \rho(\theta) d\theta$ donne le nombre total de particules dans le système. Le passage de la somme discrète à l'intégrale dans le second membre de l'équation de Bethe permet d'écrire :

$$\frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b) \longrightarrow \int_{-K}^K \Delta(\theta_a - \theta) \rho(\theta) d\theta.$$

Ainsi, l'équation pour la densité d'états devient :

$$2\pi\rho_s(\theta) = 1 + \int_{-K}^K \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') d\theta', \quad (1.65)$$

et, comme $\rho = \rho_s$, on obtient l'équation linéaire intégrale satisfaite par la densité de rapidités :

$$\rho(\theta) - \int_{-K}^K \frac{\Delta(\theta - \theta')}{2\pi} \rho(\theta') d\theta' = \frac{1}{2\pi}. \quad (1.66)$$

1.2.7 Excitations élémentaires à température nulle

Chapitre 2

Dispositif expérimental et méthodes d'analyse

Contents

1.1	Description du modèle de Lieb-Liniger	1
1.1.1	Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel et Hamiltonien du modèle	1
1.1.2	Opérateurs nombre de particules et moment dans la formulation quantique du gaz de Lieb-Liniger	7
1.1.3	Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à 2 corps	8
1.2	Équation de Bethe et distribution de rapidité	11
1.2.1	Fonction d'onde dans le secteur ordonné et représentation de Gaudin	11
1.2.2	Conditions aux bords périodiques	11
1.2.3	Équations de Bethe exponentielles	11
1.2.4	Équations de Bethe logarithmiques	12
1.2.5	Interprétation physique	12
1.2.6	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	12
1.2.7	Excitations élémentaires à température nulle	13

Introduction

- Objectif du chapitre : présentation synthétique de l'expérience
- Distinction claire des contributions : mise en place initiale (précédents doctorants), développement (travail de Léa Dubois), contribution personnelle (prise de données, analyses spécifiques, participation à certaines manipulations)
- Rôle de l'expérience dans l'étude de la dynamique des gaz de Bose 1D

Ce chapitre présente l'expérience utilisée pour étudier les gaz unidimensionnels de rubidium ultra-froids. Nous décrivons l'architecture du dispositif, les méthodes d'imagerie et d'analyse, ainsi que les protocoles expérimentaux auxquels j'ai participé. Le développement initial du refroidissement et du piégeage avant la puce a été réalisé par d'anciens doctorants. La mise en place du piégeage sur la puce et du système de sélection spatiale à l'aide d'un DMD a été initiée par Léa Dubois, alors en première année de doctorat à mon arrivée. Mon travail s'est concentré principalement sur la prise de données, l'analyse et la participation à certaines expériences spécifiques telles que l'expansion longitudinale et la mesure locale de la distribution de rapidité.

Objectif du chapitre Ce chapitre a pour objectif de fournir une présentation synthétique et structurée du dispositif expérimental utilisé pour étudier la dynamique de gaz de Bose unidimensionnels ultra-froids. Il constitue un socle indispensable pour comprendre les protocoles expérimentaux développés au cours de ma thèse et les analyses présentées dans les chapitres suivants.

Architecture générale Nous présentons d'abord l'architecture complète de l'expérience, depuis la production des atomes jusqu'à leur imagerie, en passant par les étapes de refroidissement, de piégeage magnétique sur puce, de manipulation optique, et de génération de potentiels. Cette description s'accompagne d'une mise en contexte des contributions historiques au dispositif.

Contributions successives et personnelles Une attention particulière est portée à la répartition chronologique des contributions. Les étapes initiales (source atomique, MOT, piégeage 1D) ont été développées par d'anciens doctorants. La mise en place du piégeage 1D sur puce ainsi que l'utilisation du DMD pour la sélection spatiale ont été réalisées au cours de la thèse de Léa Dubois. Mon travail s'inscrit dans cette continuité et concerne principalement la prise de données, l'analyse de protocoles dynamiques, ainsi que la participation à certaines opérations de maintenance et d'optimisation du système.

Rôle du dispositif dans la thèse Ce dispositif permet d'explorer des phénomènes hors équilibre dans des gaz quantiques 1D. Il constitue une plateforme particulièrement adaptée à l'étude de protocoles d'expansion, de sondes locales, ou de dynamiques guidées par la théorie hydrodynamique généralisée (GHD), qui sont au cœur de cette thèse.

2.1 Présentation générale de l'expérience

2.1.1 Vue d'ensemble du dispositif

- Architecture générale : production, piégeage, manipulation et imagerie.
- Systèmes étudiés : gaz de rubidium 87 dans des pièges 1D.
- Objectifs : exploration de dynamiques hors équilibre.

2.1.2 Historique et contributions successives

- Étapes de refroidissement et piégeage initial : travaux antérieurs (voir thèses citées).
- Développement du piégeage 1D sur puce et du DMD : thèse de Léa Dubois.
- Contributions personnelles : prise de données, protocoles dynamiques, analyse.

2.2 Le dispositif expérimental

2.2.1 Système laser et contrôle de fréquence

Laser maître 1 : référence de fréquence La référence principale de fréquence pour l'ensemble des faisceaux utilisés dans l'expérience est fournie par un laser à cavité étendue, développé au SYRTE. Ce laser est asservi par spectroscopie d'absorption saturée sur la transition D2 du ^{87}Rb , au croisement des transitions $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2, 3\rangle$. Ce signal de référence est utilisé pour verrouiller les autres sources laser par battement optique.

Laser repompeur Un laser DFB (Distributed Feedback Diode) est utilisé pour produire le faisceau repompeur, permettant de transférer les atomes retombés dans l'état $|F = 1\rangle$ vers l'état $|F = 2\rangle$. Ce laser est asservi à une fréquence distante de 6 GHz de celle du maître 1, en utilisant un montage de battement optique et mélange avec un oscillateur à 6.6 GHz. Une diode Fabry-Perot injectée par la DFB permet d'amplifier la puissance au-delà de 100 mW.

Laser maître 2 : laser principal de manipulation Un second laser à cavité étendue, identique au maître 1, est asservi par battement optique à la fréquence du maître 1. Il est amplifié par un amplificateur à semi-conducteur évasé (Tapered Amplifier), permettant d'atteindre une puissance de sortie supérieure à 1 W. Ce faisceau est ensuite divisé en plusieurs branches pour alimenter :

- le Piège Magnéto-Optique (PMO),
- la mélasse optique,
- le pompage optique,
- l'imagerie par absorption,
- le faisceau de sélection.

Contrôle de fréquence et polarisation Les fréquences des différents faisceaux sont ajustées via des Modulateurs Acousto-Optiques (AOM), tandis que leur polarisation et leur intensité sont contrôlées à l'aide de cubes PBS en combinaison avec des lames demi-onde motorisées ou fixes. Cette configuration assure une grande flexibilité dans la mise en œuvre des différentes phases expérimentales.

Remarque Une description plus détaillée du montage laser et de son verrouillage peut être trouvée dans la thèse de A. Johnson [1]. L'ensemble a été maintenu et utilisé sans modifications majeures au cours de ma thèse.

2.2.2 Production et refroidissement des atomes (non détaillé ici, renvoi à d'autres travaux)

- Source chaude de rubidium, MOT, molasses optique.
- Refroidissement à des températures sub- μK Refroidissement sub-Doppler (détails renvoyés aux travaux précédents).

Le dispositif expérimental permet de produire des gaz de rubidium ultra-froids, avec pour objectif final l'obtention de gaz unidimensionnels dans le régime quantique dégénéré. La production suit une séquence expérimentale déjà bien établie, initialement développée par d'anciens doctorants (voir par exemple la thèse d'A. Johnson [1]), puis réoptimisée au début de la thèse de Léa-Dubois [2] sous la supervision d'I. Bouchoule.

Libération des atomes de rubidium Les atomes de rubidium 87 sont libérés à partir d'un *dispenser*, placé directement dans l'enceinte à vide, sur le côté de la monture de la puce atomique. Ce composant, parcouru par un courant de 4.5 A pendant environ 4.8 s, émet un flux d'atomes thermiques dans la chambre à vide.

Capture par piège magnéto-optique (PMO) Les atomes thermiques sont ralentis et piégés à l'aide d'un piège magnéto-optique. Celui-ci utilise quatre faisceaux laser (dont deux sont réfléchis par la puce) et un champ quadrupolaire magnétique généré par des bobines. Le nuage ainsi formé se situe à quelques millimètres de la surface de la puce.

Rapprochement vers la puce Pour rapprocher les atomes de la puce, on transfère le champ quadrupolaire depuis les bobines vers un champ généré par le fil en forme de U de la puce (fil bleu dans la Fig. ??). Ce fil est parcouru par un courant variant de 3.6 A à 1.5 A, ce qui rapproche le nuage à quelques centaines de micromètres de la surface.

Mélasse optique Une phase de mélasse optique permet un refroidissement sub-Doppler des atomes capturés. Un système d'imagerie provisoire est utilisé à cette étape pour visualiser le nuage atomique, dont la taille dépasse le champ d'observation du système d'imagerie final.

Pompage optique Afin de polariser les atomes dans l'état magnétique $|F = 2, m_F = 2\rangle$, un pompage optique est effectué avec un faisceau circulairement polarisé σ^+ , résonant sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$.

2.2.3 Piégeage magnétique sur puce

- Présentation de la puce atomique.
- Confinement transverse et longitudinal.
- Régime 1D : conditions d'accès ($\hbar\omega_{\perp} \gg k_B T$).
- Problèmes de rugosité, stabilité magnétique.

Piégeage magnétique sur puce

Principe général Les atomes de rubidium sont piégés grâce à une puce atomique intégrée dans l'enceinte à vide. Une puce atomique est un circuit microfabriqué contenant des micro-fils dans lesquels circulent des courants permettant de générer des champs magnétiques à géométrie contrôlée. Ce dispositif, développé dans les années 1990, permet une miniaturisation du système de piégeage et un accès à des confinements forts, particulièrement adaptés à l'étude de gaz de Bose unidimensionnels.

Structure de la puce utilisée La puce utilisée au cours de cette expérience a été conçue en collaboration avec S. Bouchoule, A. Durnez et A. Harouri (C2N). Elle repose sur un substrat de carbure de silicium sur lequel est déposé le circuit électrique. Ce dernier est recouvert d'une couche de résine BCB, aplatie par des cycles d'enduction et d'attaque plasma. Une fine couche d'or (~ 200 nm) est finalement évaporée afin de permettre l'utilisation de la puce comme miroir pour l'imagerie à 780 nm. La puce est soudée à l'indium sur une monture en cuivre inclinée à 45° par rapport à l'axe optique.

Fils de piégeage et géométrie des champs Plusieurs fils sont intégrés à la puce pour assurer les différentes étapes du piégeage et du transport des atomes : un fil en forme de Z est utilisé pour le piégeage initial (DC), tandis que trois micro-fils (symétriques et parallèles) sont utilisés pour former un guide unidimensionnel par courants alternatifs (AC). La géométrie des fils a été optimisée pour minimiser la dissipation de chaleur, limiter les couplages parasites et améliorer la symétrie du piège. Dans la zone d'intérêt, les atomes sont piégés à environ $15 \mu m$ au-dessus des fils, soit à $8 \mu m$ au-dessus de la surface de la puce.

Confinement transverse et longitudinal Le confinement transverse est assuré principalement par la géométrie des fils et la présence de champs magnétiques externes. Sa fréquence élevée permet d'atteindre des énergies de confinement $\hbar\omega_{\perp}$ bien supérieures aux énergies thermiques et chimiques du système, condition nécessaire à l'accès au régime 1D :

$$k_B T, \mu \ll \hbar\omega_{\perp}.$$

Le confinement longitudinal, plus faible, est modulable par combinaison de champs magnétiques externes et courants dans les fils additionnels.

Avantages du piégeage sur puce Comparé aux systèmes utilisant des réseaux optiques 2D, le piégeage sur puce ne fournit qu'un seul tube, ce qui permet un meilleur accès aux fluctuations locales de densité et aux observables résolues spatialement. Ce type de dispositif est ainsi particulièrement adapté à l'étude de la thermodynamique et de la dynamique de gaz 1D isolés.

Limitations et effets parasites Parmi les limitations spécifiques au piégeage sur puce figurent la rugosité des potentiels magnétiques due aux imperfections des fils, qui peut induire des modulations parasites du confinement longitudinal. De plus, la stabilité du dispositif est sensible aux champs parasites magnétiques externes ainsi qu'aux échauffements dus aux courants continus.

Chargement dans le piège DC Après le pompage optique, les atomes sont transférés dans un piège magnétique combinant un courant continu circulant dans le fil en forme de Z de la puce (fil orange dans la Fig. ??) et un champ magnétique externe. Ce piège, noté *piège DC*, permet un confinement transverse important. Un refroidissement par évaporation radiofréquence est alors réalisé pendant environ 2.3 s, ce qui abaisse la température du nuage à environ $1 \mu\text{K}$, pour un nombre d'atomes typiquement autour de 2.5×10^5 .

Imagerie finale À l'issue de ce refroidissement, les atomes sont observés avec le système d'imagerie final (voir Fig. ??), adapté aux tailles caractéristiques du gaz dans le piège. Une image typique de ce nuage est présentée en Fig. ??.

Transfert vers le guide unidimensionnel À la suite du premier refroidissement, les atomes sont transférés du piège DC vers un guide unidimensionnel produit par des courants alternatifs circulant dans trois micro-fils intégrés à la puce (fils jaunes dans la Fig. ??). Ce transfert permet de réaliser un piège de type "guide 1D", où la dynamique longitudinale est découpée du confinement transverse.

Ce dispositif a été mis en place au cours de la thèse de Léa Dubois [?]. J'ai utilisé ce guide dans le cadre des protocoles expérimentaux sur l'expansion longitudinale et les sondes locales de distribution de rapidité.

Rampes de courant et compensation du mouvement Pour effectuer un transfert adiabatique, cinq rampes de courant linéaires d'une durée de 50 à 60 ms chacune sont appliquées successivement. Pendant cette opération :

- les courants dans le fil Z (piège DC) diminuent progressivement ;
- les courants dans les micro-fils du guide augmentent jusqu'à atteindre environ 50 mA ;
- un courant initial de 0.5 A est appliqué dans deux autres fils notés *D* et *D'* (fils vert et bleu sur la Fig. ??), puis ajusté pendant les rampes afin de maintenir fixe la position du centre de masse du nuage.

Ce protocole précis a permis d'optimiser la stabilité du transfert, en minimisant les oscillations résiduelles dans le guide 1D.

Refroidissement final et accès au régime unidimensionnel Une dernière phase de refroidissement par évaporation radiofréquence est ensuite réalisée dans le guide AC. Ce refroidissement, mené dans le piège à forte anisotropie, permet d'atteindre le régime unidimensionnel, caractérisé par la hiérarchie d'énergies :

$$k_B T, \mu \ll \hbar\omega_{\perp}$$

où ω_{\perp} est la fréquence de confinement transverse, μ le potentiel chimique et T la température du gaz.

Les gaz obtenus contiennent typiquement entre 3×10^3 et 1.5×10^4 atomes, pour des températures de l'ordre de 50 à 200 nK. La Fig. ?? montre un exemple de tel gaz observé avec le système d'imagerie final.

Remarques expérimentales Lorsque j'ai rejoint l'équipe, la première année thèse de Léa Dubois touchait à sa fin et le dispositif expérimental était en fonctionnement stable. Les différentes étapes du cycle (dispenser, PMO, mélasse, pompage optique, piège DC, transfert vers le guide, évaporation finale) avaient été mises en place et optimisées pendant les premières années de sa thèse, sous la supervision d'I. Bouchoule. Le cycle expérimental complet dure environ 15 secondes. Une description plus détaillée peut être trouvée dans la thèse d'A. Johnson [1].

Pendant ma première année, j'ai principalement participé à la prise de données en collaboration avec Léa. Grâce à la qualité de son travail, le dispositif était globalement très fiable, ce qui a permis de mener des campagnes expérimentales riches sans intervention lourde. Néanmoins, cette stabilité avait pour contrepartie que je n'ai pas été directement impliqué dans la résolution des pannes complexes ou dans le reconditionnement complet de la manipulation, ce qui a limité ma formation sur les aspects de maintenance approfondie du dispositif.

En revanche, peu avant la fin de la thèse de Léa et au début de ma troisième année, nous avons observé une chute significative du nombre d'atomes capturés. Sous la supervision d'I. Bouchoule, une intervention lourde a alors été décidée : nous avons cassé le vide pour diagnostiquer le problème. Il s'est avéré que les connecteurs du dispenser étaient endommagés. L'opération a été mise à profit pour installer un nouveau dispenser et remplacer la puce atomique.

Cette opération a mobilisé plusieurs personnes du laboratoire et de ses partenaires : S. Bouchoule (C2N) et Anne [Nom complet à préciser] ont participé à la manipulation et à la pose de la puce, tandis que j'ai pu assister à l'étuvage de l'enceinte à vide avec F. Nogrette. Après cette intervention, j'ai suivi avec I. Bouchoule le réajustement progressif de la séquence de refroidissement : alignement des faisceaux, réglages de la mélasse, optimisation du chargement dans le piège DC, puis dans le guide.

Cet épisode m'a permis de me confronter plus directement aux paramètres critiques du cycle d'évaporation et à la reprise d'une séquence complète. Toutefois, le départ de Léa, qui maîtrisait tous les aspects de la manipulation, a marqué une rupture importante dans la continuité des savoir-faire pratiques liés à cette expérience.

(fig :puce — Schéma de la puce atomique avec fils U, Z, AC, D et D').

(fig :imagerieFinale — Schéma optique du système d'imagerie final)

[fig :nuageDC — Image du gaz dans le piège DC après évaporation]

[fig :gaz1D — Image typique d'un gaz dans le régime 1D]

2.2.4 Génération de potentiels modulés

- Courants modulés pour créer des pièges harmoniques ou quartiques.
- Découplage transverse/longitudinal.

Caractérisation des potentiels longitudinal et transverse Pour atteindre le régime unidimensionnel, les potentiels de piégeage doivent être très asymétriques : un confinement transverse fort et un confinement longitudinal faible. La fréquence transverse ω_{\perp} doit être suffisamment élevée pour geler les degrés de liberté dans cette direction, avec la condition $\mu, k_B T \ll \hbar\omega_{\perp}$.

Potentiel longitudinal Le confinement longitudinal est produit par des courants continus ou modulés dans certains fils. Dans certains protocoles spécifiques, on utilise un potentiel quartique $V_{\parallel}(x) = c_4 x^4$. Le système reste dans le régime 1D tant que la longueur caractéristique longitudinale reste beaucoup plus grande que la transverse.

Potentiel transverse Le confinement transverse est réalisé à l'aide de trois micro-fils parallèles situés sur la puce : un fil central parcouru par un courant I , et deux fils latéraux par des courants opposés $-I$. Cette configuration crée un piège transverse harmonique avec une fréquence ω_{\perp} contrôlable par la valeur du champ B_0 et le courant. Les atomes sont piégés à environ $d = 15 \mu\text{m}$ au-dessus de la puce. La fréquence maximale accessible expérimentalement est de l'ordre de $\sim 100 \text{ kHz}$.

Effet de rugosité et suppression par modulation La rugosité des micro-fils induit des fluctuations parasites du champ magnétique le long du guide. Pour supprimer cet effet, les courants sont modulés à haute fréquence (environ 400 kHz). Grâce à cette modulation rapide, les atomes ne ressentent que le potentiel moyen, dans lequel la composante parasite longitudinale du champ s'annule. Ce procédé permet d'obtenir un potentiel transverse régulier et stable, avec une fréquence efficace

$$f_{\perp} = \frac{f_{\perp}^{(0)}}{\sqrt{2}}.$$

Découplage des confinements transverse et longitudinal. Dans notre dispositif, le confinement transverse est assuré par les micro-fils modulés, tandis que le confinement longitudinal est généré par quatre fils extérieurs (D, D', d, d'). L'analyse du potentiel magnétique moyen montre que, sous l'hypothèse d'un champ de bobine homogène et dominant, les contributions transverse et longitudinale du potentiel sont découpées. Cette propriété est cruciale pour nos expériences : elle permet de modifier la géométrie du potentiel longitudinal sans perturber le confinement transverse, facilitant ainsi l'exploration de différentes configurations dynamiques.

Piégeage longitudinal harmonique. Un piège longitudinal harmonique est réalisé en appliquant des courants égaux dans les fils D et D', disposés de manière symétrique. Le champ magnétique longitudinal produit conduit à un potentiel quadratique local :

$$V_{\parallel}(x) = V_0 + \frac{1}{2}m\omega_{\parallel}^2x^2,$$

avec une fréquence ω_{\parallel} contrôlée par le courant et la géométrie de la puce. En pratique, des fréquences jusqu'à 150 Hz sont atteintes pour des courants de 4 A. Une correction peut être nécessaire pour prendre en compte un champ magnétique résiduel B_{0v} , responsable d'un déplacement du centre du nuage atomique.

Piégeage longitudinal quartique. L'ajout de deux fils supplémentaires (d et d') permet de modifier la forme du potentiel longitudinal jusqu'à l'ordre 4. En ajustant les courants dans les quatre fils, on peut annuler le terme quadratique et obtenir un potentiel quartique :

$$V_{\parallel}(x) = a_0 + a_4x^4.$$

Cette configuration est particulièrement adaptée pour générer des profils de densité homogènes, comme requis dans certaines expériences de transport. Le transfert des atomes du piège harmonique vers le piège quartique est réalisé de manière diabatique (changement rapide du potentiel), car un transfert adiabatique entraînait des pertes importantes.

2.3 Sélection spatiale avec DMD

2.3.1 Motivation et principe

- Besoin de préparer des tranches homogènes.
- Intérêt dans les protocoles hors équilibre.

Objectif du dispositif de sélection L'outil de sélection spatiale a été conçu pour permettre une action locale sur le gaz atomique. Il présente deux objectifs principaux. D'une part, il permet de mesurer la distribution de rapidité localement résolue, en sélectionnant une tranche du gaz avant de la libérer et de suivre son expansion. D'autre part, il offre la possibilité de créer des situations hors équilibre en retirant une partie du gaz à l'équilibre, ce qui perturbe la configuration initiale et initie une dynamique.

Intérêt pour les protocoles hors équilibre Ce dispositif permet ainsi de générer des protocoles analogues à des configurations classiques comme le pendule de Newton, ou de sonder directement la dynamique d'un gaz de Lieb-Liniger dans des conditions contrôlées. Il constitue une brique essentielle pour les expériences de dynamique et de transport quantique.

2.3.2 Mise en place technique (initiée par Léa Dubois)

- Dispositif optique de projection.
- Contrôle numérique des motifs.
- Calibration et stabilité.

Principe de sélection par pression de radiation La sélection repose sur l'illumination d'une zone définie du gaz avec un faisceau quasi-résonant avec la transition cyclique $F = 2 \rightarrow F' = 3$ de la ligne D2 du rubidium. Les atomes subissent une pression de radiation due aux cycles absorption/émission spontanée, ce qui les pousse hors du piège ou les amène dans un état non piégé.

Façonnage spatial du faisceau La sélection doit être spatialement résolue. Le profil d'intensité dans le plan des atomes est de type binaire :

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ I_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui permet de préserver ou d'éjecter les atomes selon leur position longitudinale.

Utilisation du DMD Pour générer ce profil, un DMD (Digital Micromirror Device) est utilisé. Il s'agit d'une matrice de 1024×768 micro-miroirs orientables individuellement ($\pm 12^\circ$). En inclinant ces miroirs, on contrôle localement la réflexion de la lumière. L'image du DMD est projetée directement sur le plan des atomes, en imagerie directe.

Avantages du DMD Le DMD permet une reconfiguration rapide et programmable du motif de lumière. Cette technologie est largement utilisée dans les expériences d'atomes froids pour produire des potentiels structurés, homogénéiser un faisceau ou adresser localement les atomes.

Alternatives possibles Il est possible, en théorie, d'atteindre un effet similaire par un transfert cohérent des atomes vers un état anti-piégié via un pulse micro-onde ou une transition Raman. Cependant, la méthode par pression de radiation est plus simple à mettre en œuvre et adaptée à nos objectifs expérimentaux.

Principe de l'expulsion par pression de radiation Un atome illuminé par un faisceau proche de la résonance peut être expulsé du piège soit par transition vers un état anti-piégié, soit par effet de pression de radiation. Cette dernière génère une accélération suffisante pour fournir une énergie cinétique supérieure à la profondeur du puits magnétique. Le nombre de photons diffusés nécessaire peut être estimé à partir de la conservation de l'impulsion : une vingtaine de photons suffisent typiquement à extraire un atome du piège dans nos conditions.

Modèle de diffusion et estimation du seuil Le taux de diffusion de photons est modélisé à l'aide d'un taux Γ_{sc} , dépendant de l'intensité I , de l'intensité de saturation I_{sat} , d'un paramètre α (lié à la polarisation et au champ magnétique) et du désaccord δ . À résonance, et pour un temps d'illumination τ_p , on peut estimer le nombre total de photons diffusés par atome par $N_{\text{sc}} = \tau_p \Gamma_{\text{sc}}$.

Mesures expérimentales de la puissance nécessaire La puissance minimale nécessaire pour éjecter tous les atomes d'une zone illuminée est déterminée en fixant un temps d'illumination donné, puis en variant l'intensité du faisceau. L'analyse est réalisée après un délai d'attente de ~ 10 ms, pour s'assurer que seuls les atomes encore piégés soient détectés. Il est observé que 99% des atomes sont retirés à partir d'un rapport $I/I_{\text{sat}} \simeq 0.12$.

Mesures de photons diffusés par fluorescence La quantité de photons diffusés est également mesurée par l'analyse du signal de fluorescence capté par la caméra. En calibrant le rapport entre photons détectés et photons diffusés (en tenant compte de l'efficacité optique du système), le nombre moyen de photons nécessaires pour éjecter un atome est confirmé expérimentalement autour de 20. Un ajustement du modèle de diffusion permet d'estimer le paramètre $\alpha \simeq 0.4$.

Saturation et effets Doppler À fort temps d'illumination ($\tau_p > 150 \mu\text{s}$), une saturation du nombre de photons diffusés est observée, interprétée comme un effet géométrique : les atomes accélérés atteignent physiquement la puce atomique et cessent de contribuer au signal. Une correction Doppler peut être introduite dans le modèle, mais reste négligeable (< 5%) dans les régimes expérimentaux utilisés.

Limitations expérimentales de la sélection Plusieurs effets peuvent limiter l'efficacité ou la propreté de la sélection :

- La diffraction liée à la taille finie de l'objectif entraîne un flou de l'ordre de $1\text{--}2 \mu\text{m}$ au bord des zones éclairées.
- Une diffusion parasite par la puce peut se produire à forte intensité si tout le DMD est illuminé ; cela est évité en réduisant la taille transverse du faisceau à quelques micro-miroirs seulement.
- Des inhomogénéités d'éclairement dues à la gaussienne du faisceau et au speckle peuvent conduire à une sur-illumination de certaines zones. Un effort a été fait pour homogénéiser l'intensité en sortie de fibre.
- La réabsorption des photons diffusés pourrait entraîner un échauffement du gaz restant. Un désaccord en fréquence de 15 MHz a été testé pour éviter ce phénomène, sans effet visible sur la température du gaz.

Mesures de l'impact sur le gaz restant La température du gaz sélectionné est comparée avant et après sélection via l'analyse des fluctuations de densité après temps de vol. Aucun changement significatif de température ni d'élargissement n'a été observé. Ces résultats suggèrent que, dans les conditions expérimentales utilisées, la sélection ne perturbe pas significativement les atomes restants.

2.3.3 Utilisation dans les protocoles

- Formes utilisées : boîtes, barrières, coupures.
- Préparation initiale contrôlée du gaz.
- Exemples de protocoles expérimentaux utilisant le DMD

Sélection locale et mesure de rapidité En sélectionnant une tranche du gaz, on peut ensuite couper le confinement longitudinal et laisser cette tranche s'étendre. Le profil de densité asymptotique obtenu après un long temps d'expansion est proportionnel à la distribution de rapidité locale du gaz initial. Ce protocole permet ainsi une mesure résolue de $\rho(x, t \rightarrow \infty) \sim \rho(v)$.

Génération d'états hors équilibre La sélection permet également de créer des discontinuités dans le profil de densité, et donc d'initier une dynamique hors équilibre. Par exemple, on peut ne conserver que deux paquets séparés de gaz, qui vont alors osciller l'un vers l'autre. Cette configuration est analogue à un pendule de Newton quantique.

Formes utilisées Les motifs projetés par le DMD peuvent prendre différentes formes : boîtes, barrières, coupures, etc. Cette flexibilité rend l'outil extrêmement précieux pour explorer diverses configurations initiales et protocoles dynamiques.

Contrôle logiciel du DMD Le pilotage du DMD repose sur l'utilisation d'un module intégré fourni par Vialux (V7001-SuperSpeed), qui comprend les bibliothèques logicielles ALP-4. Plusieurs configurations du DMD peuvent être chargées en mémoire au début de chaque cycle expérimental, puis sélectionnées en cours de séquence à l'aide d'un signal digital. Le temps de commutation des miroirs est inférieur à $30\,\mu\text{s}$, ce qui est compatible avec les protocoles étudiés.

Partage du faisceau avec la voie d'imagerie Le faisceau utilisé pour la sélection spatiale est prélevé à partir du faisceau sonde déjà accordé sur la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ de la raie D2. Le partage est réalisé à l'aide d'un cube séparateur de polarisation placé en aval d'une lame demi-onde, permettant de contrôler la puissance injectée dans la fibre optique. Ce choix simplifie la mise en œuvre en évitant d'ajouter une source laser supplémentaire.

Blocage du faisceau de sélection Deux systèmes permettent de couper le faisceau de sélection pendant le cycle expérimental :

- un cache mécanique (type électro-aimant), utilisé pour un blocage longue durée ;
- un modulateur acousto-optique (AOM), permettant de produire des impulsions brèves de quelques dizaines de μs , en amont du séparateur.

Pour garantir que le faisceau ne perturbe pas l'imagerie, le cache mécanique reste fermé pendant l'utilisation du faisceau sonde.

Montage optique de projection Le faisceau façonné par le DMD est projeté dans le plan des atomes à l'aide d'un système optique permettant de sélectionner l'ordre 0 de diffraction. L'ensemble des optiques est dimensionné (diamètre 50 mm) pour limiter la diffraction. L'alignement est effectué en superposant le faisceau de sélection à la voie d'imagerie.

Grandissement et champ couvert Le montage permet de couvrir une zone de l'ordre de $600\,\mu\text{m}$ dans le plan des atomes, soit plus que la longueur typique d'un nuage ($\sim 400\,\mu\text{m}$ pour $f_{\parallel} = 5\,\text{Hz}$). Le grandissement est déterminé par les focales utilisées : une focale $f_1 = 750\,\text{mm}$ du côté du DMD, et $f = 32\,\text{mm}$ pour l'objectif côté atomes, donnant $G = f/f_1 \approx 0.043$.

Visualisation et interface Le contrôle du DMD s'effectue via une interface graphique permettant de prévisualiser les configurations de miroirs. Une capture d'écran de cette interface est présentée dans la Fig. ??, où la zone active réfléchie est visualisée en rouge. Cette interface est pilotée de manière automatisée pendant le déroulement de la séquence expérimentale.

2.4 Techniques d'imagerie et d'analyse

2.4.1 Imagerie par absorption

- Imagerie *in situ* et après temps de vol.
- Résolution, limites instrumentales.

Système d'imagerie par absorption L'imagerie est réalisée à l'aide d'une caméra CCD à déplétion profonde, optimisée pour une grande efficacité quantique à la longueur d'onde de 780 nm. On utilise des techniques d'imagerie par absorption permettant d'extraire la densité optique $D(x, z)$, elle-même reliée à la densité atomique 3D via la loi de Beer-Lambert. Le profil de densité linéaire $n(x)$ est obtenu par intégration sur les directions transverses.

Imagerie après temps de vol En appliquant un champ magnétique vertical ($B = 8$ G), la polarisation du faisceau peut être rendue circulaire (σ^+) pour adresser la transition fermée $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3, m'_F = 3\rangle$. Cette configuration assure une meilleure définition de la section efficace d'absorption. Un temps de vol de quelques ms est utilisé avant l'imagerie, permettant également de décompresser le nuage.

Imagerie in situ Sans champ magnétique, les atomes sont imaginés à $7 \mu\text{m}$ de la puce, ce qui implique une double absorption du faisceau incident et réfléchi. Dans ce cas, la transition n'est pas fermée, ce qui nécessite une calibration du facteur de conversion entre la densité mesurée et la densité réelle. Un ajustement linéaire permet de relier les profils *in situ* aux profils obtenus après temps de vol.

Choix des paramètres d'imagerie L'intensité du faisceau sonde est choisie typiquement à $I_0/I_{\text{sat}} \approx 0.3$ pour optimiser le rapport signal sur bruit tout en restant dans une zone de linéarité acceptable. Dans ces conditions, le nombre de photons diffusés est de l'ordre de $N_{\text{sc}} \approx 230$ et le rayon de diffusion reste comparable à la résolution du système d'imagerie ($\sim 2.6 \mu\text{m}$).

Limites du modèle de Beer-Lambert La validité de la loi de Beer-Lambert repose sur une approximation à une particule. Dans le cas des gaz fortement denses ou quasi 1D, les effets collectifs, les réabsorptions et les couplages dipolaires peuvent invalider ce modèle. Pour cette raison, même pour l'imagerie *in situ*, un temps de vol court (~ 1 ms) est souvent appliqué afin de diluer le gaz transversalement.

Défauts et instabilités expérimentales Plusieurs limitations instrumentales ont été identifiées :

- La caméra initialement utilisée montrait des motifs parasites aléatoires ainsi qu'un offset variant au cours du temps. Le remplacement de la caméra a permis de résoudre ces problèmes.
- Des franges d'interférences apparaissaient lors de la division des images d'absorption, probablement dues à des effets Fabry-Pérot dans les optiques. Le désaxage du faisceau d'imagerie a permis d'en limiter l'impact.
- Des photons résiduels, même en l'absence de faisceau sonde, ont été détectés. Ces derniers proviennent vraisemblablement de diffusions multiples dans le système optique.

Conclusion La combinaison de l'imagerie *in situ* et après temps de vol, ainsi qu'une calibration soigneuse des paramètres optiques et expérimentaux, permettent d'accéder à des profils de densité fiables malgré les limites intrinsèques du système d'imagerie. Une attention particulière a été portée à la réduction des artefacts expérimentaux afin de garantir la précision des mesures.

2.4.2 Analyse des profils

- Extraction des densités, tailles, températures.
- Distribution longitudinale.
- Estimation de la température par ajustement Yang-Yang (optionnel si pertinent).

2.5 Expériences et protocoles étudiés

Cette section peut être la plus personnelle, en précisant ton rôle à chaque fois.

2.5.1 Expansion longitudinale

- Protocole d'expansion (libération longitudinale, maintien du confinement transverse).
- Suivi de l'évolution du profil.
- Analyse à différents temps d'expansion
- Comparaison aux modèles analytiques : solutions homothétiques, GP, asymptotiques.

2.5.2 Sonde locale de distribution de rapidité

- Principe de la mesure : coupure d'une tranche puis expansion.
- Rôle du DMD dans la sélection.
- Accès à la distribution de vitesse locale.
- Comparaison avec les prédictions GHD.
- Limites et incertitudes

2.6 Discussion sur les limites et les perspectives

- Contraintes techniques (bruit, alignement, stabilité de la puce...).
- Améliorations potentielles (résolution, contrôle du potentiel, automatisation).
- Perspectives pour d'autres types d'expériences (étude de chocs, turbulence quantique, etc.)

Conclusion

- Résumé de l'architecture du dispositif).
- Méthodes d'analyse utilisées et robustesse.
- Importance de l'expérience dans le contexte de l'étude des gaz quantiques unidimensionnels

Ce chapitre a présenté les éléments essentiels du dispositif expérimental, les méthodes d'imagerie, ainsi que les expériences auxquelles j'ai participé. L'ensemble constitue une plateforme performante pour l'étude de la dynamique de gaz 1D hors équilibre.

Résumé de l'architecture expérimentale Nous avons décrit les éléments clés du dispositif utilisé : un système de refroidissement laser basé sur trois sources couplées, un piégeage magnétique sur puce optimisé pour réaliser des géométries unidimensionnelles, une plateforme de modulation de potentiel via un DMD, et un système d'imagerie haute résolution. L'ensemble permet une manipulation fine des nuages atomiques dans un cadre reproductible et stable.

Méthodes d'analyse et robustesse L'imagerie par absorption, couplée à une analyse rigoureuse des profils atomiques, fournit des outils fiables pour extraire les grandeurs pertinentes : densités, tailles, températures, distributions de vitesses. Ces méthodes ont permis de confronter les résultats expérimentaux à des prédictions théoriques de type GHD ou Yang-Yang.

Importance du dispositif pour la thèse Ce dispositif a été essentiel pour mener à bien les expériences présentées dans cette thèse. Il offre à la fois un contrôle local (grâce au DMD), un bon confinement transverse (grâce à la puce) et une imagerie précise. La plateforme est ainsi bien adaptée pour étudier des systèmes 1D fortement corrélés hors équilibre, et pour tester les prédictions de la physique statistique intégrable.

Perspectives Malgré ses atouts, le dispositif présente des limitations techniques (rugosité magnétique, sensibilité à l'alignement, etc.) qui laissent entrevoir des pistes d'amélioration. Des développements futurs pourraient notamment viser à augmenter la résolution spatiale, automatiser davantage les séquences, ou explorer d'autres régimes dynamiques comme la turbulence ou les collisions de chocs quantiques.

Annexes

- Schémas techniques (puce, DMD, optique).
- Tableaux de paramètres expérimentaux.
- Exemples de motifs DMD utilisés.

Chapitre 3

Étude du protocal de bi-partition : Mesure de distribution de rapidités locales $\rho(x, \theta)$ pour des systèmes hors équilibre

Contents

2.1	Présentation générale de l'expérience	16
2.1.1	Vue d'ensemble du dispositif	16
2.1.2	Historique et contributions successives	16
2.2	Le dispositif expérimental	16
2.2.1	Système laser et contrôle de fréquence	16
2.2.2	Production et refroidissement des atomes (non détaillé ici, renvoi à d'autres travaux)	17
2.2.3	Piégeage magnétique sur puce	17
2.2.4	Génération de potentiels modulés	19
2.3	Sélection spatiale avec DMD	20
2.3.1	Motivation et principe	20
2.3.2	Mise en place technique (initiée par Léa Dubois)	20
2.3.3	Utilisation dans les protocoles	22
2.4	Techniques d'imagerie et d'analyse	23
2.4.1	Imagerie par absorption	23
2.4.2	Analyse des profils	23
2.5	Expériences et protocoles étudiés	23
2.5.1	Expansion longitudinale	24
2.5.2	Sonde locale de distribution de rapidité	24
2.6	Discussion sur les limites et les perspectives	24

Introduction

Objectif de ce chapitre : Ce chapitre est consacré à l'étude de la dynamique hors équilibre d'un gaz quantique unidimensionnel intégrable, soumis à une discontinuité initiale de densité induite par un protocole de type **quench bipartite**. L'objectif principal est d'évaluer dans quelle mesure la Théorie Hydrodynamique Généralisée (GHD) permet de décrire cette dynamique, tant sur le plan théorique qu'expérimental. Nous nous appuyons sur une préparation initiale contrôlée, un protocole de coupure abrupte, et une analyse des profils de densité et des facteurs d'occupation pour tester les prédictions de la GHD.

Modèles intégrables et thermalisation généralisée : Les modèles intégrables jouent un rôle central dans l'étude des systèmes quantiques à plusieurs corps, notamment en régime hors équilibre. Leur caractéristique essentielle est la présence d'une infinité de constantes du mouvement, qui empêche l'évolution vers l'équilibre thermodynamique canonique. Cette contrainte mène à l'émergence d'un état d'équilibre généralisé, décrit non par l'ensemble canonique, mais par l'**Ensemble de Gibbs Général (GGE)**, qui maximise l'entropie sous contraintes intégrales multiples (cf Chap (??)).

Une analogie classique : le pendule de Newton : Une illustration classique du comportement non diffus des systèmes intégrables est fournie par le pendule de Newton : les chocs élastiques entre sphères de masses égales conduisent à une propagation balistique de l'énergie, sans diffusion. Cette analogie, bien que classique, capture l'essence du transport cohérent que l'on retrouve dans les systèmes intégrables quantiques.

Le problème de Riemann en hydrodynamique : Un test fondamental de la dynamique hors équilibre est fourni par le problème dit de Riemann, qui consiste à étudier l'évolution d'un système à partir d'une discontinuité initiale dans l'espace. Dans sa formulation générale, on considère une équation de conservation de la forme

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad (3.1)$$

accompagnée d'une condition initiale arbitraire $u(x, t = 0) = u_0(x)$. Dans le cas particulier que nous considérons ici, l'état initial est composé de deux régions homogènes, juxtaposées de part et d'autre de l'origine :

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases}. \quad (3.2)$$

Ce type de configuration, appelé problème de Riemann à données discontinues, permet de sonder la réponse non linéaire du système.

Le problème de Riemann quantique : un cadre paradigmatic. Dans un système quantique intégrable, le problème de Riemann consiste à connecter brusquement deux régions préparées dans des états thermodynamiques différents, généralement homogènes. Ce scénario, dit de *quench bipartite*, constitue un cadre paradigmatic pour sonder la dynamique hors équilibre dans les gaz quantiques unidimensionnels [3, 4]. Contrairement au cas classique, la présence d'un nombre infini de constantes du mouvement empêche l'établissement d'un état thermique usuel. La relaxation locale conduit alors à un état d'équilibre généralisé, spécifique à chaque région de l'espace-temps. Le problème de Riemann quantique permet ainsi d'étudier la propagation balistique d'informations, l'émergence d'un régime autosimilaire stationnaire, et la structure fine des distributions locales de quasi-particules. Il offre un terrain théorique idéal pour tester la validité de la Théorie Hydrodynamique Généralisée [5, 6], tout en étant expérimentalement accessible grâce aux systèmes ultrafroids unidimensionnels.

Apparition de la Théorie Hydrodynamique Généralisée (GHD) : L'avènement de la GHD a marqué une avancée majeure dans la compréhension de la dynamique des systèmes intégrables. Introduite dans le contexte des théories des champs (modèle de Sinh-Gordon, modèle de Lieb-Liniger) et des chaînes quantiques (chaîne XXZ de Heisenberg) [références à insérer], elle permet de décrire analytiquement la propagation d'informations dans ces systèmes en intégrant les contraintes des charges conservées. Plusieurs solutions analytiques du problème de Riemann ont depuis été obtenues, notamment dans la chaîne XXZ et pour des gaz de sphères dures en 1D, confirmant la validité et la puissance prédictive de la GHD.

Notre système : un gaz de bosons 1D faiblement interactifs : Nous considérons un gaz quantique unidimensionnel de bosons faiblement interactifs, confiné dans une géométrie strictement 1D, et bien décrit par le modèle intégrable de Lieb-Liniger avec interactions répulsives. Ce système présente un comportement quantique collectif tout en restant dans un régime faiblement corrélé, ce qui en fait un candidat idéal pour tester les prédictions de la GHD.

Préparation expérimentale et protocole de coupure : La configuration initiale consiste à préparer un gaz homogène à densité constante n_0 , et à température contrôlée (voir Fig. 3.4). Un protocole de coupe abrupte est ensuite appliqué : la partie gauche du système ($x < 0$) est vidée de ses atomes, tandis que la partie droite ($x > 0$) reste occupée. Ce *quench bipartite* génère une discontinuité initiale de densité, analogue au problème de Riemann, mais dans un système quantique doté d'un nombre infini de lois de conservation. Ce protocole a déjà fait l'objet d'une première étude expérimentale dans la thèse de Léa Dubois [?], qui en a révélé le potentiel pour sonder la dynamique hors équilibre.

Observation d'une propagation balistique : Nous prolongeons cette étude en analysant la dynamique unitaire du gaz à l'aide des outils de la GHD. Nous montrons que la discontinuité initiale donne lieu à une propagation balistique, en bon accord avec la solution du problème de Riemann généralisé. Le profil de densité mesuré à différents temps révèle une frontière en déplacement linéaire, reproduite avec précision par les prédictions théoriques (voir Fig. 3.5 (e)-(g)). Des écarts résiduels, attribuables à des effets thermiques et à des imperfections expérimentales, sont toutefois observés.

Reconstruction de la distribution de rapidité : Un aspect central de notre approche repose sur la reconstruction de la distribution initiale de rapidité à partir des profils de densité mesurés dans la région de transition. Cette démarche s'apparente à une forme de *thermométrie généralisée*, et permet d'inférer des informations fines sur les états locaux du système.

Accès expérimental au facteur d'occupation $\nu(x, \theta)$: Nous développons également une méthode expérimentale originale permettant de mesurer localement le facteur d'occupation $\nu(x, \theta)$ dans la région de déformation. Cette quantité révèle une forte asymétrie : large et lisse du côté initialement occupé, abrupte et tronquée du côté initialement vide. Ce comportement reflète la nature hors équilibre du système, et s'accorde qualitativement avec les prédictions de la GHD, bien que la résolution spatiale expérimentale limite l'accès aux détails les plus fins.

Conclusion : Ce chapitre explore ainsi, à la fois théoriquement et expérimentalement, la dynamique d'un gaz intégrable soumis à une discontinuité initiale de densité. Il met en lumière la pertinence de la GHD pour décrire de telles dynamiques, et démontre la faisabilité d'outils d'analyse avancés comme la reconstruction de la distribution de rapidité ou la mesure locale du facteur d'occupation.

3.1 Dynamique balistique d'un gaz 1D après une coupure bipartite

Introduction

Dans cette section, nous étudions la dynamique hors équilibre d'un gaz quantique unidimensionnel de bosons soumis à une coupure bipartite. Ce protocole expérimental permet de générer une discontinuité nette dans le profil de densité initial, menant à une évolution balistique non triviale.

L'objectif est double :

- du point de vue expérimental, suivre en temps réel l'évolution du gaz et caractériser ses propriétés locales et globales ;
- du point de vue théorique, confronter ces observations aux prédictions de la Théorie Hydrodynamique Généralisée (GHD), qui fournit un cadre analytique pour décrire la relaxation de systèmes intégrables à grande échelle.

Cette étude constitue une illustration directe du problème de Riemann quantique, dans lequel un état initial composé de deux régions thermodynamiques différentes évolue selon une dynamique déterministe. Elle permet également d'accéder à des signatures locales de la distribution de quasi-particules (ou rapidités), jusque-là difficiles à sonder expérimentalement.

Nous structurons cette section en quatre sous-parties :

- Préparation et protocole expérimental : description du gaz unidimensionnel, du piège et de la méthode de coupure.
- Cadre théorique de la GHD : présentation des équations hydrodynamiques et de la solution auto-similaire du problème de Riemann.
- Confrontation avec les données expérimentales : validation de la structure auto-similaire et test de la théorie à température nulle.

3.1.1 Préparation expérimentale et protocole de coupure

Points clés :

- Réalisation d'un gaz unidimensionnel de bosons dans un piège quartique plat.
- Méthode d'illumination sélective à l'aide d'un DMD pour créer une discontinuité initiale.
- Passage à un régime d'expansion libre unidimensionnelle après suppression du confinement longitudinal.

Contexte expérimental et références Les détails concernant l'imagerie, le piégeage et la sélection spatiale sont présentés de manière approfondie dans le chapitre (2), ainsi que dans la thèse de Léa Dubois [2]. Dans cette sous-section, nous nous limitons aux éléments essentiels à la compréhension du protocole de coupure et de la dynamique qui en résulte.

Préparation d'un gaz unidimensionnel de bosons Nous utilisons un gaz ultra-froid de ^{87}Rb , piégé sur une puce atomique dans l'état hyperfin $|F = 2, m_F = 2\rangle$. Le confinement transverse est assuré par trois microfils parcourus par des courants RF, produisant un piège harmonique de fréquence $\omega_\perp/2\pi = 2,56$ kHz. Après évaporation, on obtient un gaz à température $T \approx 100$ nK, dans un régime 1D caractérisé par $\mu, k_B T \ll \hbar\omega_\perp$. Le couplage effectif en 1D est $g = 2a_{3D}\hbar\omega_\perp$, avec $a_{3D} = 5,3$ nm.

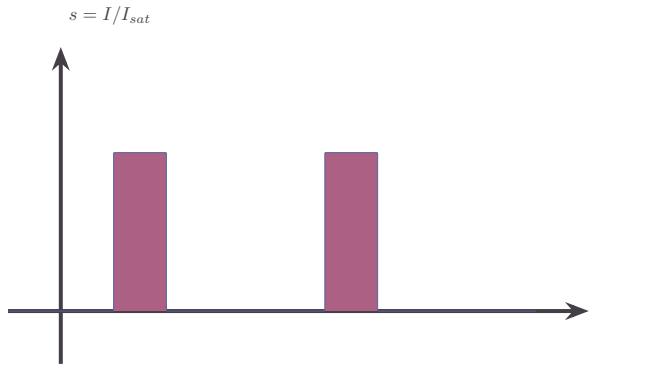


FIGURE 3.1 – Schéma synthétique du dispositif expérimental : cycles d’illumination, intensités de courant, géométrie du piège, et évolution du profil longitudinal au cours du protocole de coupure.

Confinement longitudinal quartique Le confinement longitudinal est généré par quatre fils latéraux, dont les courants sont ajustés pour annuler les composantes linéaire, quadratique et cubique du potentiel. Il en résulte un confinement quartique $V(x) = a_4 x^4$, produisant un profil de densité quasi-plat sur environ 250 μm . Cette homogénéité est cruciale pour l’étude des dynamiques balistiques et pour l’application de la GHD.

Coupure bipartite par sélection spatiale La bipartition initiale est réalisée en illuminant l’extrême gauche du gaz par un faisceau quasi-résonant façonné par un DMD. Les atomes exposés sont expulsés du piège via pression de radiation. Cette méthode, développée dans [?], permet de créer une discontinuité nette du profil de densité, entre une région vide ($x < 0$) et une région remplie homogène ($x > 0$).

Évolution après coupure Une fois la coupure effectuée, le confinement longitudinal est supprimé tandis que le confinement transverse est maintenu. Le gaz évolue alors librement dans une direction, ce qui est analogue au problème de Riemann (3.1) mais depuis une condition initiale de deux régions homogène (3.2). L’évolution du profil de densité $n(x, t)$ est suivie par imagerie après différentes durées t d’évolution.

[figure de shemat de coupure en tikz zt au coter deux nuage , un coupé et l'autre non coupé]

3.1.2 Cadre de la GHD et dynamique balistique et

Points clés :

- Présentation du facteur d’occupation $\nu(x, \theta; t)$ comme variable hydrodynamique.
- Formulation de l’équation convective de GHD.
- Structure auto-similaire $\nu(x, \theta; t) = \nu^*(x/t, \theta)$ et résolution implicite via la vitesse effective.
- Prédictions analytiques pour le profil de densité $n(x, t)$.

Dans cette section, nous présentons le cadre théorique de la *Théorie Hydrodynamique Généralisée* (GHD) appliquée à l’expérience décrite précédemment. L’objectif est de décrire analytiquement la dynamique balistique induite par une coupure bipartite dans un gaz quantique unidimensionnel, en exploitant les équations de GHD appliquées au modèle de Lieb-Liniger.

Nous procédons en plusieurs étapes :

1. Nous introduisons la description hydrodynamique à l’échelle d’Euler.
2. Nous formulons les équations de GHD pour l’évolution du facteur d’occupation $\nu(x, \theta; t)$.
3. Nous analysons la structure auto-similaire de la solution en régime hydrodynamique.
4. Nous présentons la solution semi-analytique du problème de Riemann bipartite, ainsi que sa résolution graphique.

Description hydrodynamique à l’échelle d’Euler Dans un système intégrable, les états stationnaires sont entièrement caractérisés par leur distribution de rapidités $\rho(\theta)$ ou, de manière équivalente, par le facteur d’occupation $\nu(\theta)$ (Cf Chap (??)). En régime hors équilibre, on suppose qu’à des échelles de temps longues et d’espace macroscopiques, le système évolue lentement vers un état localement stationnaire. Cela permet d’introduire une description hydrodynamique dans laquelle les quantités locales dépendent de la position et du temps : $\rho(x, \theta; t)$ ou $\nu(x, \theta; t)$.

Pourquoi travailler avec ν plutôt qu’avec ρ ?

Équation de GHD en termes de ρ . L'évolution à grande échelle du système est gouvernée par les équations de GHD [?, ?]. L'évolution pour la distribution de quasi-particules $\rho(x, \theta; t)$ (Eq (??)), en l'absence de potentiel extérieur, prend la forme d'une équation convective :

$$\partial_t \rho + \partial_x (v_{[\rho]}^{\text{eff}} \rho) = 0, \quad (3.3)$$

où $v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta)$ est la vitesse effective des quasi-particules de rapidité θ , fonctionnelle non linéaire de ρ et où un terme de compression $\partial_x (v_{[\rho]}^{\text{eff}} \rho)$ apparaît lorsqu'on développe la dérivée. Cela complique l'analyse, notamment lorsque les vitesses effectives varient fortement dans l'espace ou le temps.

Pour chaque rapidité θ , l'équation (3.3) constitue un cas particulier du problème de Riemann généralisé (3.1). Nous considérons ici une condition initiale de type « coupure bipartite », représentant un état homogène à droite ($x > 0$) et vide à gauche ($x < 0$) :

$$\rho(x, \theta; t = 0) = \begin{cases} \rho_0(\theta) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce type de condition correspond , pour chaque rapidité θ , au condition introduit dans l'introduction (3.2).

Équation de GHD en termes de ν . En comparaison, l'évolution de la densité de remplissage $\nu(x, \theta; t)$ (Eq (??)) , qui, en l'absence de potentiel extérieur suit une équation de transport pur (type Liouville) :

$$\partial_t \nu + v_{[\nu]}^{\text{eff}} \partial_x \nu = 0, \quad (3.5)$$

où la dérivée temporelle est directement couplée à une dérivée spatiale. Cette forme préserve l'information le long des caractéristiques associées aux vitesses effectives $v_{[\nu]}^{\text{eff}}$, ce qui rend la dynamique plus lisible et plus simple à analyser.

Les équation de transport pur (3.5) ne sont pas des cas particuliers du problème de Riemann généralisé (3.1). Et donc même si les conditions initiales de type « coupure bipartite » , pour ν :

$$\nu(x, \theta; t = 0) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

sont du type (3.2), contrairement à (3.3), l'évolution (3.5) ne génère pas de **chocs**.

Dans ce travail, nous choisissons de formuler la dynamique hydrodynamique généralisée en termes de la fonction d'occupation $\nu(x, \theta; t)$, plutôt que de la densité de quasi-particules $\rho(x, \theta, t)$. Cette approche présente plusieurs avantages. D'une part, l'équation vérifiée par ν est une équation de transport pur (3.5), ce qui permet une résolution naturelle par la méthode des caractéristiques, plus simplement que dans (3.3). D'autre part, ν possède une interprétation physique claire comme taux de remplissage des états accessibles, borné entre 0 et 1, ce qui en fait une variable plus stable et mieux adaptée aux calculs analytiques ou numériques. De plus, la dynamique effective des observables s'exprime naturellement en fonction de ν . Enfin, ν et ρ étant liés, résoudre l'équation en ν revient, une fois $v_{[\nu]}^{\text{eff}}$ déterminé, à résoudre complètement la dynamique de ρ .

Structure auto-similaire de la solution Un point central est que les conditions initiales (3.6) sont invariantes par dilatation. En effet quelque soit $\alpha > 0$, et pour tout x réelle, on a $\nu(\alpha x, \theta; t = 0) = \nu(x, \theta; t = 0)$. Un autre point central de la GHD est l'invariance d'échelle des solutions de l'équation (3.5) ((3.3) aussi et plus généralement de (3.1)). En effet, si $\nu(x, \theta; t)$ est solution de l'équation (3.5), alors $\nu(\alpha x, \theta; \alpha t)$ l'est également , pour tout $\alpha > 0$, avec les conditions initiales $\nu(\alpha x, \theta; t = 0)$. Comme les fonctions $\nu(\alpha \cdot, \theta; t = 0)$ et $\nu(x, \theta; t = 0)$ coïncident, alors si (3.5) admet au plus une solution physique (entropique Cf Annex ??) pour chaque données initiales, on doit avoir $\nu(\alpha x, \theta; \alpha t) = \nu(x, \theta; t)$ pour tout $\alpha > 0$. Sous hypothèse d'unicité (Cf Annex (??)), cette propriété implique que :

$$\nu(x, \theta; t) = \nu^* \left(\frac{x}{t}, \theta \right), \quad (3.7)$$

autrement dit, les solutions dépendent uniquement du rapport $\xi = x/t$, appelé *variable auto-similaire*.

Résolution de l'évolution de ν . La dynamique est alors entièrement encodée dans la fonction $\nu^*(\xi, \theta)$, qui décrit la structure locale du gaz le long des rayons de vitesse ξ . Et, pour ξ est fixé, θ libre, (3.5), se réécrit , avec des dérivés selon ξ :

$$(\xi - v_{[\nu^*(\xi, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta)) \partial_\xi \nu^* = 0. \quad (3.8)$$

Soit simplement pour chaque θ , soit la vitesse effective est égale à ξ , soit $\partial_\xi \nu^*(\xi, \theta) = 0$.

Autrement dit : pour une θ donnée, la fonction $\nu^*(\xi, \theta)$ est constante en ξ , sauf au point $\xi = v_{[\nu^*(\xi, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta)$, où une **discontinuité** apparaît.

La vitesse effective, $v^{\text{eff}}[\nu^*(\xi, \cdot)](\theta)$, est strictement monotone en θ ; il existe donc au plus un unique point θ^* tel que $\xi = v^{\text{eff}}[\nu^*](\theta^*)$, c'est-à-dire une seule discontinuité dans la solution.

La solution $\nu^*(\xi, \theta)$ s'écrit comme une fonction en escalier paramétrée par une valeur de coupure θ^* :

$$\nu^*(\xi, \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } \theta < \theta^*, \\ 0 & \text{si } \theta > \theta^*, \end{cases} \quad \text{où on rappelle } v_{[\nu^*(\xi, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta^*) = \xi. \quad (3.9)$$

Cette équation implicite peut être résolue numériquement pour obtenir θ^* à chaque v , puis en déduire $\nu^*(v, \theta)$ et, via l'équation (??), que je rappelle

$$n(x; t) = \int d\theta \rho(x, \theta; t), \quad (3.10)$$

le profil de densité $n(x, t)$ à un instant donné.

Résumé Ainsi, dans le cadre de la GHD, la dynamique balistique résultant du quench bipartite est décrite par une solution auto-similaire paramétrée par une coupure en rapidité $\theta^*(\xi)$. Cette solution permet de prédire les profils de densité et d'occupation mesurables dans l'expérience. Elle fournit également un point de comparaison direct avec les données expérimentales obtenues à différents temps t , comme nous le verrons dans les sections suivantes.

3.1.3 Validation expérimentale de la dynamique hydrodynamique

Points clés :

- Observation directe des profils $n(x, t)$ à différents temps.
- Mise en évidence de l'auto-similarité en x/t dans un régime temporel intermédiaire.
- Comparaison quantitative avec la solution de GHD à température nulle.

Dans cette section, nous présentons les résultats expérimentaux obtenus après la coupure bipartite, et les comparons aux prédictions de la GHD à l'échelle d'Euler. L'objectif est de vérifier que la dynamique du gaz est bien décrite, à court et moyen terme, par une solution auto-similaire des équations hydrodynamiques.

Nous structurons cette analyse en quatre étapes :

1. Description du protocole expérimental de libération.
2. Mise en évidence d'une structure auto-similaire.
3. Délimitation du domaine de validité temporelle de la GHD.
4. Comparaison quantitative avec la solution théorique à température nulle.

Libération du gaz et expansion balistique. À l'issue du protocole de coupure décrit en sous-section 3.1.1, le confinement longitudinal est entièrement supprimé, tandis que le confinement transverse est maintenu. Cette opération permet au gaz de s'étendre librement le long de l'axe longitudinal, tout en conservant un comportement unidimensionnel (cf. section ??). L'évolution du profil de densité $n(x, t)$ est alors enregistrée à différents temps t après la libération, en utilisant une imagerie par absorption.

Mise en évidence de l'auto-similarité (régime d'Euler). Dans la section, pour se concentrer sur les facteur d'occupation ν , on a à peine mentionner que la distribution de rapidité ρ suit aussi une structure auto-similaire : $\rho(x, \theta; t) = \rho^*(x/t, \theta)$. En injectant dans l'équation (3.10), il vient que dans le cadre de la GHD à l'échelle d'Euler, il est attendu que les profils de densité présentent une forme auto-similaire :

$$n(x; t) = n^* \left(\frac{x}{t} \right), \quad (3.11)$$

où n^* est une fonction universelle qui ne dépend que de la variable réduite $\xi = x/t$.

Cette propriété est testée expérimentalement en superposant les profils mesurés à différents temps, après mise à l'échelle selon x/t . La Fig. 3.2(a) montre les profils normalisés mesurés entre $t = 10$ ms et $t = 18$ ms. L'excellent recouvrement obtenu confirme la validité du régime balistique et la pertinence de la description auto-similaire prédictive par la GHD.

Contrainte expérimentales. La description par la GHD à l'échelle d'Euler est limitée à un domaine temporel intermédiaire $t \in [t_m, t_M]$:

- Pour $t > t_M \simeq 18$ ms, la densité maximale du gaz devient trop faible, et les effets de taille finie altèrent la validité de l'approximation d'un système semi-infini.
- Pour $t < t_m \simeq 6 \pm 2$ ms, plusieurs effets remettent en question la validité de la GHD :
 - La coupure initiale n'est pas parfaitement abrupte (longueur caractéristique $\sim 1 \mu\text{m}$).
 - La résolution de l'imagerie limite la détection fine du bord.
 - La GHD n'est valable qu'aux grandes échelles spatio-temporelles.

Ainsi, dans nos conditions expérimentales, le régime GHD est atteint de manière fiable pour des temps compris entre $t_m \approx 6$ ms et $t_M \approx 18$ ms.

Comparaison avec la prédiction théorique à température nulle. Une fois la structure auto-similaire établie, il est possible de comparer directement les données expérimentales avec la prédiction théorique de la GHD dans le régime de quasi-condensat à température nulle. Cette limite correspond à une solution exacte de l'équation (??), avec un paramètre de Lieb $\gamma \ll 1$.

La Fig. 3.2(b) présente une telle comparaison pour $t = 10$ ms et $\gamma = 4,6 \times 10^{-3}$. On observe une bonne correspondance entre le profil mesuré et la prédiction théorique, confirmant que la dynamique observée est bien capturée par la GHD dans cette limite.

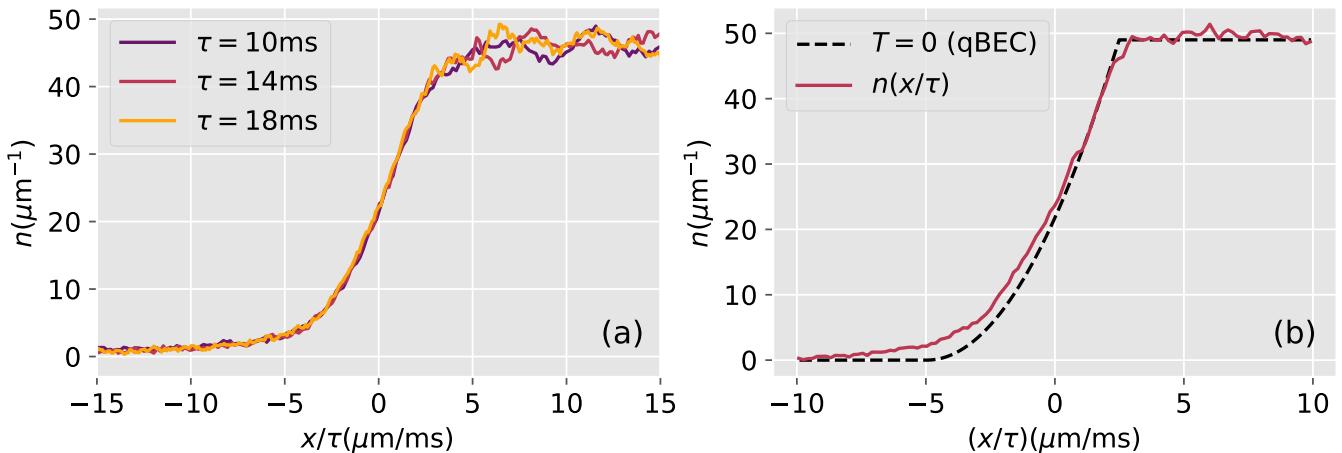


FIGURE 3.2 – (a) Profils de densité mesurés pour différents temps t , représentés en fonction de la variable x/t . L'excellent recouvrement des courbes confirme l'auto-similarité et la dynamique balistique.

(b) Comparaison entre un profil mesuré à $t = 10$ ms (points) et la prédiction GHD à température nulle (ligne), pour un paramètre de Lieb $\gamma = 4,6 \times 10^{-3}$.

Conclusion Ces observations expérimentales confirment que la dynamique induite par une coupure bipartite est bien décrite par la GHD à l'échelle d'Euler, dans un régime temporel intermédiaire bien identifié. La mise à l'échelle en x/t permet une confrontation directe entre théorie et expérience, et ouvre la voie à des tests plus précis des effets thermiques et des corrections hors-échelle d'Euler.

Résumé

Nous avons étudié la dynamique hors équilibre d'un gaz unidimensionnel de bosons à la suite d'une coupure bipartite, créant une discontinuité initiale dans le profil de densité. Cette configuration, analogue au problème de Riemann quantique, engendre une évolution balistique décrite par la Théorie Hydrodynamique Généralisée (GHD).

Sur le plan expérimental, nous avons mis en œuvre un protocole précis pour préparer un gaz homogène, le scinder spatialement à l'aide d'un DMD, puis le libérer dans un guide unidimensionnel. L'évolution du profil de densité $n(x, t)$ a été mesurée pour différents temps, révélant une structure auto-similaire caractéristique du régime hydrodynamique.

Côté théorique, nous avons présenté les équations de GHD dans leur forme convective, et montré que la solution du problème de Riemann s'exprime sous la forme d'une distribution auto-similaire $\nu(x/t, \theta)$. Cette structure permet de prédire analytiquement les profils de densité.

La comparaison entre les données expérimentales et les prédictions de la GHD à température nulle montre une excellente correspondance dans un régime temporel intermédiaire bien défini ($t \in [6, 18]$ ms). Ces résultats valident la

GHD comme cadre pertinent pour décrire la relaxation balistique de systèmes quantiques intégrables, et ouvrent la voie à des explorations plus fines des effets thermiques et quantiques hors équilibre.

3.2 Sonder la distribution locale des rapidités

Points clés :

- Protocole expérimental pour extraire une tranche locale du gaz après évolution.
- Expansion 1D de la tranche sélectionnée et reconstruction de la distribution de rapidités $\Pi(\theta)$.
- Comparaison avec les prédictions GHD : asymétrie, effet de la largeur finie de la tranche, et limitations dues à la résolution et aux effets diffusifs.
- Discussion sur les écarts observés et les hypothèses du modèle.

Introduction

3.1.2 Les outils de l'hydrodynamique généralisée (GHD) introduits dans la section 3.1.2 permettent de décrire la dynamique hors équilibre dans des configurations de type jonction bipartite. Dans le scénario de jonction bipartite — où deux parties du gaz, initialement préparées dans des états thermodynamiques distincts, sont soudainement mises en contact — la dynamique engendre des profils locaux fortement hors équilibre. En particulier, lorsque l'état initial consiste en un gaz homogène à droite et une région vide à gauche, la GHD prédit qu'à grand temps le système atteint un régime stationnaire autosimilaire, dans lequel les observables locales dépendent uniquement du rapport $\zeta = x/t$. Dans ce régime, la distribution locale des quasi-particules est décrite par un facteur d'occupation $\nu^*(\zeta, \theta)$, solution d'une équation de type (3.9).

Une prédition remarquable de ce cadre est la présence, du côté droit du système, d'une discontinuité abrupte dans la distribution en rapidité du facteur d'occupation $\nu^*(\zeta, \theta)$ — signature d'un état local proche du fondamental. À l'inverse, du côté gauche (où le gaz est initialement absent), la distribution reste lisse en rapidité, ce qui indique un état localement excité, distinct d'un état fondamental. Ce contraste fort entre les deux régions — l'une présentant une distribution lisse, l'autre une discontinuité abrupte — reflète la propagation balistique des quasi-particules, conséquence directe de l'intégrabilité du système. En effet, dans un système intégrable, les quasi-particules conservent leur individualité et se propagent à vitesse bien définie sans diffusion, ce qui permet de maintenir à grand temps des structures non thermalisées comme des discontinuités, absentes dans les systèmes non intégrables.

L'objectif de cette section est de confronter ces prédictions théoriques à l'expérience, en accédant à la distribution locale de rapidités du gaz. Pour cela, nous mettons en œuvre un protocole expérimental inspiré de la Réf. [?], permettant de mesurer indirectement cette distribution via l'expansion libre d'une tranche localisée du gaz. En parallèle, nous réalisons des simulations numériques de la dynamique à l'aide de la GHD, ce qui nous permet de comparer les distributions mesurées avec les prédictions théoriques, et ainsi de tester la présence effective de la discontinuité attendue.

Nous structurons cette analyse en quatre étapes principales :

- Sélection d'une tranche localisée du gaz après un temps d'évolution donné.
- Observation du profil de vitesse après expansion libre, révélant une éventuelle asymétrie.

3.2.1 Sélection d'une tranche localisée après déformation du bord

Nous laissons d'abord le gaz se dilater pendant un temps $t = 18$ ms, de sorte que le bord s'étale sur une large zone d'environ $350 \mu\text{m}$, comme illustré en Fig. 3.5 (e)-(f) et Fig. 3.3 (a). Nous sélectionnons ensuite une tranche du gaz comprise dans l'intervalle $[x_0 - \ell/2, x_0 + \ell/2]$, en éliminant tous les atomes situés hors de cette tranche à l'aide d'un faisceau de poussée [?](Fig 3.6 (a)-(c)).

Sélection locale d'une tranche du gaz. Afin d'accéder localement à la distribution de rapidité, nous exploitons le fait qu'après un temps $t = 18$ ms, le bord du gaz s'étale sur plusieurs centaines de microns — environ $350 \mu\text{m}$ — comme illustré en Fig. 3.5(e)-(f) et Fig. 3.3(a). Cette large extension spatiale permet d'identifier des régions à la fois assez étendues pour être sélectionnées expérimentalement, et suffisamment étroites pour que le gaz puisse y être considéré comme localement homogène dans le cadre de l'hydrodynamique généralisée.

Pour isoler une telle région, un **faisceau de poussée** est appliqué afin d'**éliminer tous les atomes situés hors d'un intervalle spatial** centré en $x_0 = 18 \mu\text{m}$ et de largeur ℓ . Cette technique, inspirée de la Réf. [?], permet de ne conserver qu'une **tranche localisée du gaz**, dont la distribution en rapidité reflète l'état local $\rho(x, \theta)$ aux abords de $x \approx x_0$, comme illustré en Fig. 3.6(a)-(c).

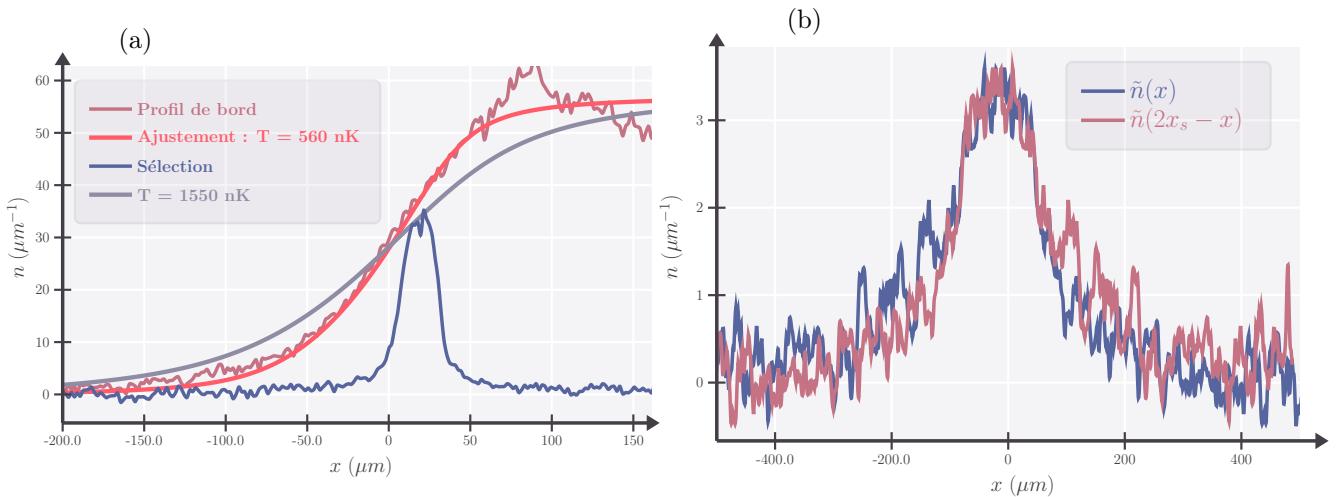


FIGURE 3.3 – (a) *Profil de bord et tranche sélectionnée*. Le profil de bord après 18 ms est montré en rouge. L’ajustement thermique donne une température $T = 560 \text{ nK}$ (orange). Le profil de densité mesuré 1 ms après la sélection de la tranche est en bleu. (b) *Asymétrie du profil d’expansion de la tranche*. Le profil de densité après une expansion pendant $\tau = 30 \text{ ms}$ est comparé à son image miroir. Le centre de symétrie $x_s = -17 \mu\text{m}$ minimise la distance quadratique $\delta^2 = \int dx (\tilde{n}(x) - \tilde{n}(2x_s - x))^2$.

Contrôle expérimental du faisceau de sélection. La sélection spatiale du gaz est réalisée à l'aide d'un dispositif à micro-miroirs (DMD), qui permet de contrôler finement la forme du faisceau de poussée utilisé pour éliminer les atomes hors d'un intervalle centré en x_0 . Ce dispositif est piloté via une interface logicielle développée au sein de l'équipe, basée sur les outils CICERO-ISO et SPARTACUS. Le DMD est commandé par une série de paramètres expérimentaux transmis à ces logiciels, dont certains (comme la position x_0) sont enregistrés systématiquement au cours de l'expérience. En revanche, d'autres paramètres, notamment la largeur effective ℓ du faisceau, n'ont pas été archivés dans la base de données associée aux séquences expérimentales. Ainsi, dans les paragraphes précédents, nous avons pu indiquer précisément la valeur de x_0 (ici $x_0 = 18 \mu\text{m}$), mais non celle de ℓ . Cette valeur sera déterminée a posteriori par analyse des profils expérimentaux, et jouera un rôle essentiel dans les simulations numériques présentées plus loin.

Inhomogénéité de la tranche sélectionnée Dans l'idéal, on souhaiterait que l'intervalle de sélection soit suffisamment fin pour garantir l'homogénéité de la densité locale au sein de la tranche. Toutefois, comme la valeur exacte de ℓ n'a pas été enregistrée, nous ne pouvons pas l'estimer directement à partir des données de Fig. 3.3(a), qui représente l'état du système avant sélection. Néanmoins, cette même figure montre également le profil de densité mesuré une milliseconde après la sélection. Or, comme nous le verrons dans la suite, les simulations GHD montrent que, dans cet intervalle de temps, la distribution en espace réel ne subit ni déplacement significatif, ni déformation notable. Il est donc raisonnable d'utiliser ce profil post-sélection comme estimation fidèle de la densité initiale dans la tranche.

Estimation de la largeur ℓ et conséquences À partir de cette analyse, nous pouvons estimer que la largeur ℓ de la tranche sélectionnée est de l'ordre de 20 à 30 \$\mu\text{m}\$. Or, pour une position centrale $x_0 \approx 18 \mu\text{m}$, la densité atomique $\tilde{n}(x; \tau = 0)$ varie sensiblement sur cette échelle. La tranche sélectionnée n'est donc pas localement homogène, et la distribution de rapidité mesurée correspond en réalité à une moyenne spatiale de $\rho(x, \theta)$ sur un intervalle de largeur ℓ centré en x_0 . Cette observation est essentielle pour l'interprétation des données et sera prise en compte dans la suite, en particulier dans les comparaisons avec les simulations hydrodynamiques.

3.2.2 Expansion de la tranche et observation d'une asymétrie

Principe de l'expansion et lien avec la distribution en rapidité Après la sélection, la tranche est laissée en expansion libre unidimensionnelle pendant un temps τ , puis son profil de densité longitudinal $\tilde{n}(x, \tau)$ est mesuré. Cette expansion permet de convertir l'information spatiale en une information sur la distribution en rapidité. En effet, pour un temps τ suffisamment grand, on s'attend à ce que la densité observée soit proportionnelle à la distribution totale des rapidités dans la tranche :

$$\tau \tilde{n}(\tau\theta - x_0; \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \Pi(\theta), \quad (3.12)$$

où, quel que soit le temps d'expansion unidimensionnelle τ , la distribution de rapidité extensive $\Pi(\theta)$ reste constante, c'est-à-dire $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta; \tau \geq 0) dx$. En particulier, cette distribution s'identifie à celle de l'état initial dans la

tranche sélectionnée :

$$\Pi(\theta) = \int_{x_0 - \ell/2}^{x_0 + \ell/2} \rho(x, \theta; \tau = 0) dx. \quad (3.13)$$

Autrement dit, $\Pi(\theta)$ correspond à la distribution de rapidité intégrée sur la tranche sélectionnée, conservée lors de l'expansion.

Observation expérimentale de l'asymétrie La théorie prédit que la distribution locale de quasi-particules $\rho(x, \theta)$ est fortement asymétrique en θ . Cette asymétrie se retrouve dans $\Pi(\theta)$ et doit donc se manifester dans le profil d'expansion $\tilde{n}(x, \tau)$. Cette asymétrie est effectivement observée dans nos données expérimentales, comme illustré en Fig. 3.3(b) pour un temps d'expansion $\tau = 30$ ms.

Quantification de l'asymétrie par symétrisation. La figure 3.3(b) présente deux courbes : le profil mesuré $\tilde{n}(x)$ (abréviation de $\tilde{n}(x, \tau)$) et son image par symétrie par rapport à un axe $x = 2x_s$. L'objectif est de rendre visible et de quantifier l'asymétrie du profil. Pour ce faire, nous considérons une décomposition naturelle du profil autour d'un centre $x = x_s$:

$$\tilde{n}(x) = \tilde{n}_{\text{pair}}^{(x_s)}(x) + \tilde{n}_{\text{impair}}^{(x_s)}(x), \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{n}_{\text{pair}}^{(x_s)}(x) &= \frac{\tilde{n}(x) + \tilde{n}(2x_s - x)}{2}, \\ \tilde{n}_{\text{impair}}^{(x_s)}(x) &= \frac{\tilde{n}(x) - \tilde{n}(2x_s - x)}{2}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Cette décomposition correspond à une projection du profil sur les fonctions paires et impaires centrées en $x = x_s$.

L'asymétrie du profil est directement liée à la composante impaire. Pour la quantifier, nous cherchons la valeur de x_s qui minimise la norme L^2 de la partie impaire :

$$\delta^2(x_s) = \int dx [\tilde{n}(x) - \tilde{n}(2x_s - x)]^2. \quad (3.15)$$

La valeur optimale de x_s minimise cette fonctionnelle $\delta^2(x_s)$ et fournit un axe de symétrie effectif pour le profil. Cette méthode permet de comparer de manière robuste différentes conditions expérimentales, ou différents temps d'expansion, en s'affranchissant d'un ajustement arbitraire de centre.

Effet de l'homogénéité de la tranche sélectionnée Plus la densité atomique est homogène dans la tranche sélectionnée, plus l'expansion est asymétrique et restitue fidèlement la distribution de rapidité au point x_0 . En effet, si $\rho(x, \theta)$ est uniforme sur la largeur ℓ , on obtient :

$$\Pi(\theta) \simeq \ell \rho(x_0, \theta) \Rightarrow \tau \tilde{n}(\tau\theta - x_0; \tau) \simeq \ell \rho(x_0, \theta), \quad (3.16)$$

ce qui permet d'accéder directement à la distribution locale, y compris à d'éventuelles discontinuités.

Deux stratégies permettent d'améliorer cette homogénéité :

- Diminuer la largeur ℓ de la sélection,
- Augmenter le temps t de déformation du bord avant sélection, pour étendre la région d'intérêt spatialement.

Cependant, ces deux approches ont des limitations : une plus petite valeur de ℓ réduit le nombre d'atomes sélectionnés, ce qui diminue le rapport signal/bruit, et des temps t trop longs font sortir le système du régime semi-infini, introduisant des effets de bord non désirés (voir Fig. [à insérer]).

Limites sur le temps d'expansion Allonger le temps d'expansion τ permet d'approcher plus fidèlement le régime asymptotique $\tau \rightarrow \infty$ où la correspondance avec $\Pi(\theta)$ est exacte. Toutefois, cette expansion est limitée expérimentalement par la taille longitudinale du confinement 1D, de l'ordre de 1 mm, correspondant à la taille typique des triplets de microfils. Comme illustré en Fig. 3.3(b), le nuage atteint cette taille à $\tau \sim 30$ ms, ce qui constitue une limite pratique. Par ailleurs, des simulations GHD (voir Ref. [?]) montrent que des temps significativement plus longs seraient nécessaires pour que $\tau \tilde{n}$ converge véritablement vers $\Pi(\theta)$.

Renforcer l'asymétrie observée Enfin, une asymétrie plus marquée peut être obtenue en modifiant l'état initial du gaz. En particulier, une bipartition réalisée à partir d'un état initial plus excité (c'est-à-dire moins proche du fondamental) du côté gauche renforcerait le contraste entre les deux côtés. Cette stratégie permettrait d'amplifier la discontinuité attendue dans la distribution de rapidité, et donc dans le profil d'expansion.

[Figure : asymétries observées pour différents états initiaux]

Résumé

Dans cette section, nous avons présenté un protocole permettant de sonder la distribution locale des quasi-particules dans un gaz unidimensionnel hors équilibre, en sélectionnant une tranche étroite après déformation du bord, puis en la laissant s'étendre librement. Cette procédure permet d'accéder indirectement à la distribution intégrée en rapidité $\Pi(\theta)$ dans la tranche, et de tester les prédictions de la GHD sur la structure locale du facteur d'occupation $\nu(x, \theta)$.

L'analyse expérimentale révèle une forte asymétrie du profil d'expansion, signature d'une distribution de rapidité non thermique. La méthode de symétrisation introduite permet de quantifier cette asymétrie de manière robuste. Nous avons montré que l'homogénéité de la tranche sélectionnée, la durée d'expansion libre, ainsi que l'état initial du gaz influencent fortement l'observation de cette asymétrie.

Enfin, ces résultats confirment qualitativement les prédictions de la GHD dans le régime stationnaire autosimilaire, en particulier l'existence d'une discontinuité du côté du gaz initialement présent, tout en mettant en évidence les limitations expérimentales et les effets hors modèle — notamment les contraintes liées à la sélection spatiale et à la durée d'expansion.

Pour approfondir cette analyse, nous nous appuyons à présent sur des simulations numériques basées sur l'équation de GHD. Celles-ci permettent de modéliser la dynamique complète de la tranche sélectionnée, depuis la déformation du bord jusqu'à son expansion, et de confronter quantitativement les distributions mesurées aux prédictions théoriques.

3.3 Simulations numériques

Cette section présente en détail les étapes nécessaires à la résolution numérique de l'équation de GHD dans le cadre des simulations effectuées.

Dans un premier temps, nous explicitons le calcul du facteur d'occupation $\nu(\theta)$ et de la densité de rapidité $\rho(\theta)$ à l'équilibre thermique, obtenus à partir d'un couple (T, μ) donné.

Nous décrivons ensuite l'évolution du système sous l'effet du potentiel de piégeage : en particulier, nous nous intéressons à la dynamique du contour délimitant la région occupée dans l'espace des phases (x, θ) , en exploitant la conservation lagrangienne du facteur d'occupation.

La simulation permet alors de suivre la déformation du bord au cours du temps. Une fois ce bord suffisamment évolué, nous extrayons une tranche du système pour en simuler l'expansion.

Enfin, nous comparons la distribution de rapidité issue de cette expansion numérique avec celle mesurée expérimentalement, dans des conditions analogues.

3.3.1 Système homogène à l'équilibre thermique

Nous considérons d'abord un gaz unidimensionnel homogène infini, à l'équilibre thermique, caractérisé par un couple de paramètres thermodynamiques (T, μ) . La thermodynamique de Bethe-Ansatz permet de décrire un tel système par une équation intégrale sur le poids/potentiel spectral $w(\theta)$, donnée par :

$$w(\theta) = \beta \left(\frac{1}{2} m \theta^2 - \mu \right), \quad (3.17)$$

où $\beta = (k_B T)^{-1}$ est l'inverse de la température (en unités d'énergie). La résolution de cette équation donne accès au facteur d'occupation $\nu_0(\theta)$.

À partir de $\nu_0(\theta)$, les densités de quasi-particules $\rho(\theta)$ et de niveaux disponibles $\rho_s(\theta)$ sont obtenues par un processus de **habillage** (ou **dressing**) standard (voir section ??). Ces grandeurs sont ensuite utilisées pour calculer les observables physiques.

Détermination du potentiel chimique à température fixée Dans l'expérience, la quantité accessible est la densité linéique homogène n_0 , par exemple $n_0 = 56 \text{ } \mu\text{m}^{-1}$ (voir Fig. 3.3(a)). Afin de reproduire cette densité dans les simulations, nous fixons la température T (déterminée indépendamment dans l'expérience), puis nous ajustons la valeur du potentiel chimique μ pour satisfaire la contrainte :

$$n_0 = \int \rho_0(\theta) d\theta. \quad (3.18)$$

Ce processus est effectué numériquement en résolvant les équations TBA pour différentes valeurs de μ jusqu'à obtenir l'accord avec la densité cible. Dans notre cas, pour $T = 560 \text{ nK}$, nous obtenons $\mu = 65 \text{ nK}$ comme valeur correspondant à la densité $n_0 = 56 \text{ } \mu\text{m}^{-1}$.

Les résultats de cette résolution sont illustrés en Fig. 3.4 :

- Le facteur d'occupation obtenu $\nu_0(\theta)$ est représenté en (a).
- La densité spatiale correspondante, constante dans le cas homogène, est illustrée en (b).

- Le facteur $\nu_0(\theta)$ est à nouveau tracé en (c), en complément pour lecture directe.

Dans ce régime homogène, la distribution est indépendante de la position, i.e.

$$\nu(x, \theta) = \nu_0(\theta), \quad \forall x, \quad (3.19)$$

comme visible en Fig. 3.4(a,c).

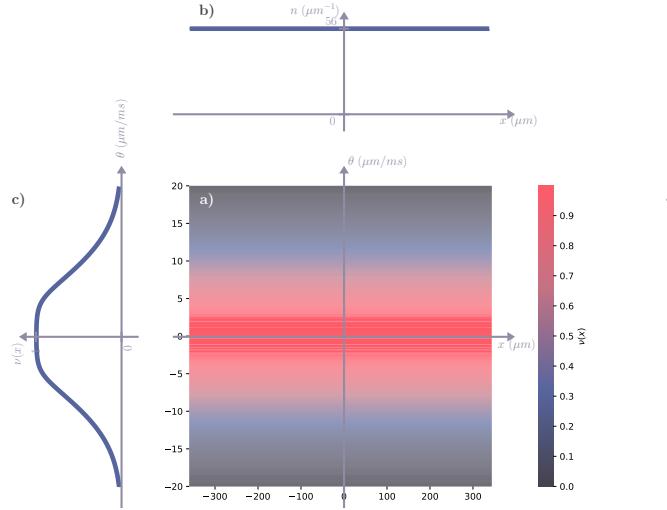


FIGURE 3.4 – a) Facteur d'occupation initial $\nu(x, \theta) = \nu_0(\theta)$ correspondant à un état d'équilibre thermique à la température $T = 560 \text{ nK}$, pour une densité linéaire homogène $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$. Ces paramètres correspondent à une potentielles chimiques $\mu = 65 \text{ nK}$. b) Densité spatiale linéaire $n(x) = \int \rho_{[\nu]}(x, \theta) d\theta$, constante et égale à $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$. c) Facteur d'occupation $\nu_0(\theta)$ correspondant à la distribution thermique illustrée en a).

3.3.2 Dynamique du contour dans l'espace des phases (x, θ) .

Une fois le facteur d'occupation initial $\nu_0(\theta)$ déterminé, nous cherchons à décrire l'évolution temporelle de la région occupée dans l'espace des phases (x, θ) . Cette région, notée Γ_t , est définie comme le support du facteur d'occupation $\nu(x, \theta, t)$: elle contient l'ensemble des points pour lesquels ν est non nul à l'instant t .

Interprétation lagrangienne et trajectoires caractéristiques : Dans l'hydrodynamique généralisée, l'évolution de ν est décrite par une équation de transport pur du type (3.5). Cette équation peut être interprétée selon une perspective **lagrangienne** : le facteur d'occupation ν reste constant au cours du temps c'est à dire

$$\nu(x(t), \theta(t); t) = \nu(x(0), \theta(0); 0) \quad (3.20)$$

lorsqu'on suit les trajectoires $(x(t), \theta(t))$ définies par :

$$\frac{d\nu}{dt}(x, \theta; t) = 0,$$

soit $\partial_t \nu + \dot{x} \partial_x \nu = 0$ soit en identifiant dans (3.5) :

$$\partial_t \begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) &= v_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta), \\ \theta(t) &= \theta(0) \equiv \theta. \end{cases} \quad (3.21)$$

Autrement dit, les quasi-particules de rapidité θ se déplacent à la vitesse efficace $v_{[\nu]}^{\text{eff}}$, et leur répartition reste inchangée tout au long de leur trajectoire dans l'espace des phases. Cette conservation est analogue à une conservation lagrangienne classique, où l'on suit un élément de fluide individuellement.

État initial en "patch" et Propagation du support . Nous considérons un état initial de type « patch » : le facteur d'occupation $\nu(x, \theta; 0)$ est égal à $\nu_0(\theta)$ à l'intérieur d'une certaine région initiale Γ_0 , et nul en dehors. Ce choix modélise une situation typique de type « front d'onde » avec un gaz localement homogène dans une portion de l'espace.

En suivant chaque point $(x(t), \theta)$ de cette région selon l'équation (3.21), on détermine la région atteinte à l'instant t , notée Γ_t . Par construction, le facteur d'occupation reste constant le long de ces trajectoires d'après (3.20), $\nu(x(t), \theta, t) = \nu(x(0), \theta, 0)$ soit :

$$\nu(x(t), \theta, t) = \nu_0(\theta). \quad (3.22)$$

Par conséquent, on peut écrire l'évolution du facteur d'occupation de manière explicite :

$$\nu(x, \theta, t) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } (x, \theta) \in \Gamma_t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Cette propriété est une conséquence directe du cadre intégrable sous-jacent et de la forme particulière de l'équation de GHD, qui assure que les caractéristiques $(x(t), \theta)$ suivent une dynamique conservant localement l'occupation.

Enfin, notons que, dans ce cadre, la vitesse efficace $v_{[\nu]}^{\text{eff}}(x, \theta, t)$ est fonctionnelle du facteur d'occupation *instantané*. Toutefois, dans les cas où ν conserve sa structure initiale par blocs (comme ici avec un contour net), on peut exprimer cette vitesse uniquement à partir de ν_0 sur chaque trajectoire, ce qui permet de déterminer toute la dynamique sans recalculer le champ ν à chaque pas de temps. Cette remarque est à la base des méthodes numériques efficaces employées dans nos simulations (voir section ??).

3.3.3 Simulation de la déformation du bord

Dans la configuration initiale correspondant à l'expérience de déformation du bord (Fig. 3.5), la région occupée par le gaz correspond à $x > 0$, avec un facteur d'occupation uniforme $\nu(x, \theta; t=0) = \nu_0(\theta)$ pour $x > 0$, et nul pour $x < 0$. Le contour initial séparant ces deux domaines est donné par $(x=0, \theta)$. L'évolution de ce front peut être entièrement décrite à l'aide de l'équation de GHD, en supposant que le contour reste bijectif au cours du temps.

Nous paramétrons ce contour par une variable s , de sorte que le bord à l'instant t est donné par $(x_b(s; t), \theta_b(s))$, avec $\theta_b(s)$ strictement croissante (i.e. $(x_b(s; t), \theta_b(s)) \in \partial\Gamma_t$). La conservation lagrangienne du facteur d'occupation implique que la vitesse efficace $v_{[\nu^*]}^{\text{eff}}(\theta_b(s))$ est indépendante du temps de déformation t . En dérivant (??), on obtient que chaque point $(x_b(s; t), \theta_b(s))$ suit une trajectoire caractéristique associée à cette vitesse efficace :

$$x_b(s; t) = v_{[\nu^*]}^{\text{eff}}(\theta_b(s)) \cdot t,$$

où $\nu^*(v, \theta)$ désigne le facteur d'occupation exprimé dans les variables autosimilaires, avec $v = x/t$. Le facteur d'occupation autosimilaire prend alors la forme (3.23) :

$$\nu^*(x_b(s; t)/t, \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } \theta < \theta_b(s) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \nu^*(v, \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } v < v_{[\nu^*]}^{\text{eff}}(\theta), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.24)$$

La vitesse efficace $v_{[\nu^*]}^{\text{eff}}(\theta)$ est déterminée par : $v_{[\nu^*]}^{\text{eff}}(\theta) = \frac{\text{id}_{[\nu^*]}^{\text{dr}}(\theta)}{1_{[\nu^*]}^{\text{dr}}(\theta)}$. À partir de la connaissance du contour $(x_b(s; t), \theta_b(s))$, on reconstruit le facteur d'occupation $\nu(x, \theta; t)$ à l'aide de l'équation (3.24) (Fig. 3.5 (e) &(g)). On en déduit ensuite la densité totale de quasi-particules par : $\rho_s(x, \theta; t) = \frac{\hbar}{m} \cdot 1_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta)$, $\rho(x, \theta; t) = \nu(x, \theta; t) \cdot \rho_s(x, \theta; t)$, puis la densité linéique : $n(x, t) = \int \rho(x, \theta; t) d\theta$. (Fig. 3.5 (e)&(f)).

Enfin, en fixant $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$, nous ajustons la température T des simulations GHD pour reproduire les données expérimentales de déformation du bord (Fig. 3.3). Cet ajustement donne $T = 560 \text{nK}$.

3.3.4 Simulation de l'expansion.

Après la déformation du bord, une sélection spatiale est réalisée pour isoler une tranche du gaz (voir Fig. 3.6(a)), que l'on laisse ensuite se dilater librement en une dimension pendant un temps τ . Contrairement au cas de la déformation du bord, le contour de la région occupée dans (x, θ) n'est plus bijectif ($\partial\Gamma_t \ni (x, \theta) \mapsto \theta$ n'est pas injectif) : pour une position donnée de x , plusieurs rapidité θ peuvent exister telles que (x, θ) appartiennent au contour $\partial\Gamma_t$ de la région occupée.

Pour surmonter cette difficulté, nous décomposons le contour en deux branches bijectives : le bord gauche $(x_g(s; \tau), \theta_g(s))$ et le bord droit $(x_d(s; \tau), \theta_d(s))$. Cette décomposition garantit que sur chaque branche, la correspondance $\theta \mapsto x$ est bijective. Le facteur d'occupation après un temps τ est alors donné par (3.23) :

$$\nu(x(s; \tau), \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } \theta \in [\theta_g(s), \theta_d(s)], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.25)$$

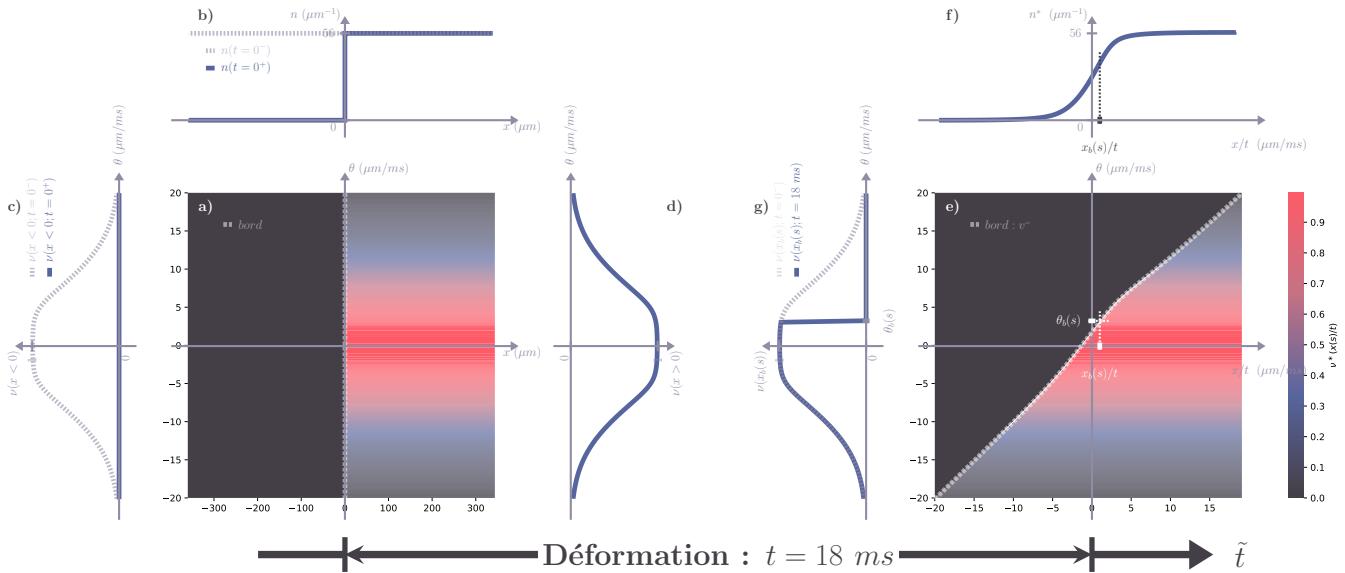


FIGURE 3.5 – (a) À l'instant $t = 0^+$, immédiatement après le « quench bipartite » en $x = 0$, le facteur d'occupation est donné par $\nu(x, \theta; t = 0^+) = \nu_0(\theta)$ pour $x > 0$ et est nul pour $x < 0$. Le bord initial représenté en tirets par l'ensemble des points $(x_b(s; t = 0^+) = 0, \theta(s; t = 0^+))$. (b) Densité spatiale linéique $n(x)$: en pointillés, $n(x; t = 0^-) = \int \rho(x, \theta; t = 0^-) d\theta = n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$ juste avant le quench ; en ligne pleine, $n(x; t = 0^+) = n_0$ pour $x > 0$ et 0 pour $x < 0$. (c) À gauche de la coupure ($x < 0$) : en pointillés, $\nu(x, \theta; t = 0^-) = \nu_0(\theta)$; en ligne pleine, $\nu(x, \theta; t = 0^+) = 0$. (d) À droite de la coupure ($x > 0$), le facteur d'occupation reste inchangé : $\nu(x, \theta; t = 0^+) = \nu_0(\theta)$. (e) À l'instant $t = 18 \text{ ms}$, après l'évolution balistique post-quench, le facteur d'occupation est donné par $\nu^*(x_b(s; t)/t, \theta) = \nu_0(\theta)$ pour $\theta < \theta_b(s; t)$, et nul pour $\theta > \theta_b(s; t)$, résolvant l'équation (3.9), pour $t > 0$. $\nu(x(s; t), \theta(s; t)) (= \nu^*(x(s; t)/t, \theta(s; t)))$ est invariant de la déformation ie de $t > 0$. Le bord représenté en tirets par l'ensemble des points $(x_b(s; t)/t, \theta(s; t))$. Étant donné que la coupure initiale est en $x = 0$ et que l'évolution du bord est balistique, cette courbe résoud $v_{[\nu^*(x(s; t)/t, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s; t)) = x(s; t)/t = v(s)$ (3.5). (f) Densité spatiale $n^*(x/t)$ en régime hydrodynamique (scaling). (g) Pour les atomes à droite de la coupure : en pointillés, $\nu^*(x_b(s; t)/t, \theta) = \nu_0(\theta)$; en ligne pleine, $\nu^*(x_b(s; t)/t, \theta) = \nu_0(\theta)$ pour $\theta < \theta_b(s; t)$ et nul pour $\theta > \theta_b(s; t)$. Le raisonnement est similaire pour les atomes à gauche de la coupure.

La vitesse efficace dépend désormais explicitement du temps τ et de la position, puisqu'elle est fonction du facteur d'occupation local :

$$v_{[\nu(x(s; \tau), \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s)),$$

Pour résoudre numériquement (??) on est ici obligé d'induire des pas de temps $d\tau$:

$$x(\tau + d\tau) = x(\tau) + v_{[\nu(x(s; \tau), \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s))d\tau.$$

En suivant l'évolution de chaque point du contour via cette vitesse, on reconstruit la densité spatiale $n(x, \tau)$, à comparer aux données expérimentales (Fig. 3.6(f)).

Détermination de la taille de la tranche ℓ . Les simulations d'expansion conservent le nombre de particules à mieux que 3%. Comme mentionné précédemment, lors de l'expérience, nous avons enregistré la position du centre de la tranche x_0 , mais pas sa largeur ℓ . Nous avons donc choisi d'ajuster ℓ de manière à ce qu'après expansion unidimensionnelle, le nombre total de particules prédit par les simulations coïncide avec celui mesuré expérimentalement dans la Fig. 3.7(b).

Une première simulation est réalisée avec la température $T = 560 \text{ nK}$, obtenue précédemment par ajustement sur la déformation du bord. Pour reproduire correctement le nombre total de particules après une expansion unidimensionnelle de durée $\tau = 30 \text{ ms}$, la largeur de la tranche doit être fixée à $\ell = 24 \mu\text{m}$.

Cette expansion unidimensionnelle est modélisée en supposant que le facteur d'occupation $\nu(x, \theta)$ est conservé localement au sein de la tranche sélectionnée. La figure 3.6 illustre les différentes étapes de cette procédure. Dans un premier temps, la tranche est extraite du bord du système, tel qu'il a évolué jusqu'à l'instant $t = 18 \text{ ms}$ dans le piége. L'évolution unidimensionnelle à partir de cette condition initiale repose sur le transport lagrangien du bord dans l'espace des phases (x, θ) , en l'absence de piégeage.

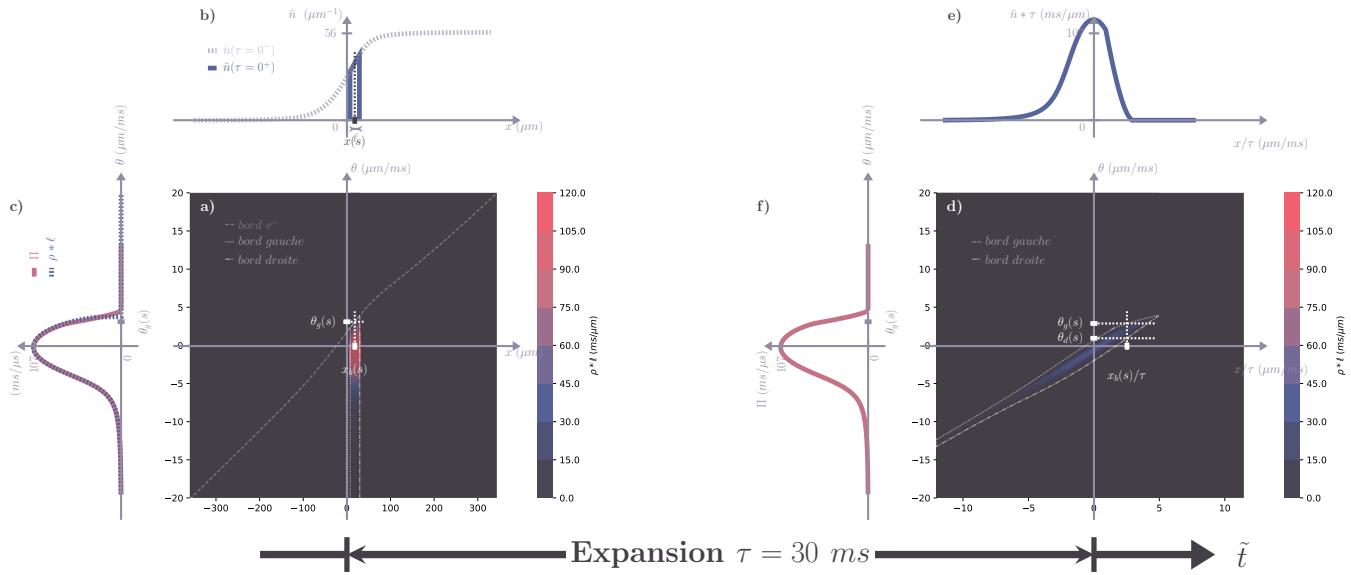


FIGURE 3.6 – (a) À l'instant $\tau = 0^+$, immédiatement après la sélection de la tranche centrée en $x = x_0$ et de largeur ℓ , la distribution de rapidité localement résolue est donnée par $\rho(x, \theta; \tau = 0^+) = \nu(x, \theta; t = 18 \text{ ms}) \rho_s(x, \theta; t = 18 \text{ ms})$ pour $|x - x_0| < \ell/2$, et est nulle pour $|x - x_0| > \ell/2$. Le bord gauche immédiatement après la sélection est représenté en pointillés par l'ensemble des points $(x_g(s; \tau = 0^+), \theta_g(s; \tau = 0^+))$, et le bord droit en tiret-point par l'ensemble des points $(x_d(s; \tau = 0^+), \theta_d(s; \tau = 0^+))$. Le bord complet est donc la concaténation de ces deux ensembles. (b) Densité linéaire spatiale $\tilde{n}(x)$: en pointillés, $n(x; t = 18 \text{ ms})$ juste avant la sélection ; en ligne pleine, $\tilde{n}(x; \tau = 0^+)$, égal à $n(x; t = 18 \text{ ms})$ pour $|x - x_0| < \ell/2$ et nul ailleurs. (c) Distribution de rapidité après sélection, $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta; \tau) dx$, invariante sous l'évolution unidimensionnelle, représentée en rouge. La distribution localement résolue en $x_b(s; \tau = 0^+)$, $\rho(x_b(s; \tau = 0^+), \theta; \tau = 0^+)$, est représentée en pointillés. Cette distribution est localement conservée, i.e., $\rho(x(s; \tau), \theta(s; \tau))$ reste inchangée au cours de l'évolution unidimensionnelle, indépendamment de τ . (e) Distribution localement résolue $\rho(x, \theta; \tau = 30 \text{ ms})$ après une évolution unidimensionnelle de 30 ms. Le bord gauche est représenté en pointillés par les points $(x_g(s; \tau = 30 \text{ ms}), \theta(s; \tau = 30 \text{ ms}))$, et le bord droit en tiret-point par $(x_d(s; \tau = 30 \text{ ms}), \theta(s; \tau = 30 \text{ ms}))$. (f) Densité spatiale $\tilde{n}(x; \tau = 30 \text{ ms})$. (g) Distribution de rapidité $\Pi(\theta)$ après la sélection (identique à celle de (c)).

3.3.5 Comparaison aux données expérimentales et discussion

Nous comparons dans cette section les profils de densité obtenus par simulation GHD à ceux mesurés expérimentalement après expansion d'une tranche extraite du bord du système.

La Fig. 3.7(a) montre le profil d'expansion simulé à partir d'un état initial à température $T = 560 \text{ nK}$, déterminée indépendamment par ajustement sur la déformation du bord (cf. Fig. 3.3). Le profil présente une forte asymétrie caractéristique, avec un bord droit abrupt et une densité qui s'annule au-delà d'une certaine position. Toutefois, cette chute est moins abrupte que celle de la distribution locale des rapidités $\rho(x, \theta)$ au centre de la tranche. Deux effets principaux expliquent cet élargissement :

- (i) La distribution de rapidité n'est pas homogène dans la tranche, si bien que la distribution intégrée $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta) dx$ diffère de $\ell \rho(x, \theta)$, comme visible sur la Fig. 3.7(a), ligne pleine versus pointillée ;
- (ii) Le temps d'expansion $\tau = 30 \text{ ms}$ est fini, de sorte que la densité spatiale observée $\tilde{n}(x, \tau)$ diffère de la transformation directe $\Pi((x - x_0)/\tau)$, comme le montre la comparaison entre les courbes rouge et marron dans la même figure.

La Fig. 3.7(b) compare la densité simulée à $T = 560 \text{ nK}$ avec les données expérimentales. Bien que la forme générale du profil soit qualitativement bien reproduite, des écarts significatifs apparaissent, en particulier autour de $x \simeq \pm 350 \mu\text{m}$, et jusqu'à 25% dans la région centrale.

Afin d'améliorer cet accord, nous avons traité la température T de l'état initial comme un paramètre libre, conjointement à la largeur de tranche ℓ . L'ajustement donne une température apparente de $T = 1550 \text{ nK}$, représentée par la ligne magenta dans la Fig. 3.7(b). Cette valeur permet de mieux reproduire le profil d'expansion, en particulier dans les régions périphériques.

Cependant, le profil au bord correspondant à cette température, présenté en Fig. 3.3(a), est incompatible avec les observations expérimentales. En particulier, la courbure du bord simulé à cette température est beaucoup plus

prononcée que celle mesurée. Ceci suggère que l'ajustement par température libre masque d'autres effets physiques non pris en compte dans le modèle.

Une analyse plus fine du profil expérimental révèle la présence de queues asymétriques à droite, absentes des prédictions GHD à l'échelle d'Euler. Ces queues pourraient résulter de phénomènes hors du cadre du modèle, notamment :

- **Effets de sélection de tranche** : le faisceau de poussée utilisé pourrait chauffer localement les atomes en bordure, entraînant des distributions de rapidité plus étendues que prévu.
- **Effets diffusifs** : dans les régions de forts gradients, notamment au bord du gaz, des termes de diffusion (omnis présents dans la GHD à l'échelle d'Euler) pourraient devenir significatifs. De telles corrections ont été proposées récemment pour modéliser la GHD au-delà de l'approximation eulérienne.

En résumé, bien que la GHD reproduise globalement la forme du profil d'expansion, des écarts importants subsistent. Leur origine semble liée à des effets microscopiques non capturés par la description eulérienne — en particulier la dynamique hors équilibre aux bords — soulignant l'intérêt d'une extension du modèle pour mieux décrire ces régimes.

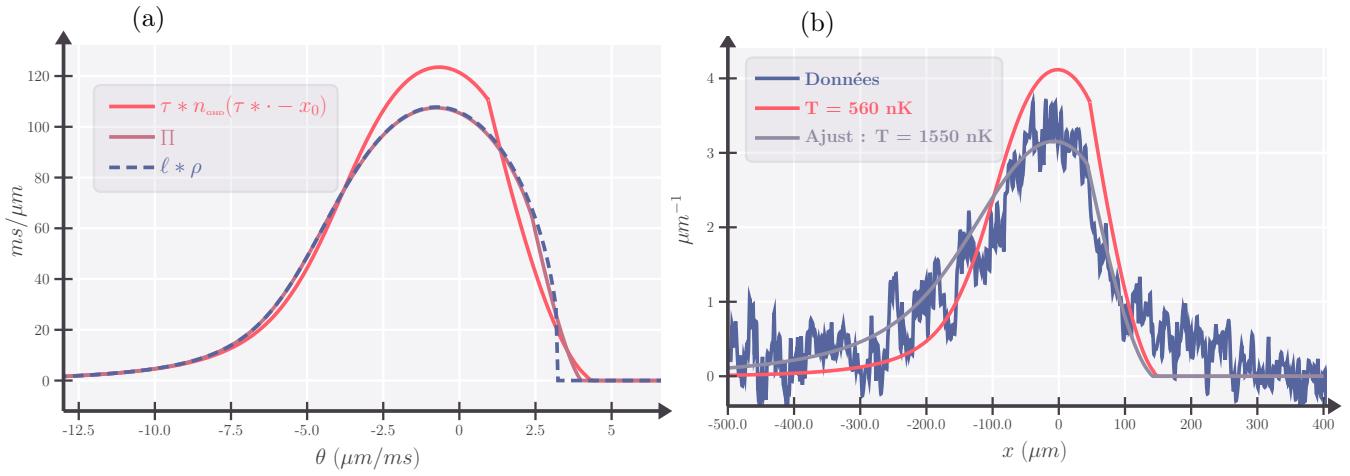


FIGURE 3.7 – (a) *Profil de densité après expansion de la tranche : effets de la largeur finie et du temps d'expansion fini.* Courbe orange : profil obtenu par simulation GHD après expansion pendant $\tau = 30$ ms, avec $T = 560$ nK. Courbe marron : distribution asymptotique $\Pi((x - x_0)/\tau)/\tau$. Courbe pointillée noire : approximation $\ell\rho(x_0, (x - x_0)/\tau)/\tau$ dans le cas d'une tranche étroite. (b) *Comparaison aux données expérimentales.* En bleu : profil expérimental après expansion pendant $\tau = 30$ ms. En orange : simulation GHD avec $T = 560$ nK. En magenta : ajustement du profil expérimental donnant $T = 1550$ nK.

Résumé

Cette section a détaillé la mise en œuvre des simulations numériques basées sur l'hydrodynamique généralisée (GHD), permettant de modéliser finement la dynamique du système dans les régimes explorés expérimentalement.

Nous avons d'abord établi l'état initial du gaz à l'équilibre thermique, en déterminant les distributions $\nu(\theta)$ et $\rho(\theta)$ à partir de la densité et de la température expérimentales. En exploitant la conservation lagrangienne du facteur d'occupation, nous avons ensuite simulé la déformation du bord dans le piégeage, puis l'expansion unidimensionnelle d'une tranche extraite de ce bord.

Les simulations reproduisent qualitativement les principaux traits observés expérimentalement, notamment l'asymétrie du profil d'expansion et la chute abrupte du bord droit. Cependant, des écarts significatifs subsistent, notamment dans les régions périphériques et dans la forme fine des profils. Ces différences soulignent les limites du modèle à l'échelle d'Euler, et suggèrent que des effets hors modèle — tels que la sélection de tranche, le chauffage local, ou des corrections diffusives — peuvent jouer un rôle non négligeable.

Ces résultats confirment la pertinence de la GHD pour décrire la dynamique collective d'un gaz unidimensionnel hors équilibre, tout en ouvrant la voie à des extensions du modèle pour capturer des effets plus fins, au-delà de l'approximation hydrodynamique idéale.

Conclusion du chapitre

Ce chapitre a présenté une exploration conjointe expérimentale et théorique de la dynamique hors équilibre d'un gaz unidimensionnel de bosons, initiée par une coupure bipartite. Ce protocole génère un état initial présentant une

discontinuité macroscopique de densité, dont l'évolution constitue une réalisation physique du problème de Riemann quantique.

L'analyse repose sur la *Théorie Hydrodynamique Généralisée* (GHD), cadre théorique récent permettant de décrire, à l'échelle d'Euler, la relaxation déterministe de systèmes quantiques intégrables. Nous avons montré que la GHD permet non seulement de prédire les profils de densité issus de la dynamique balistique du gaz, mais également de modéliser la distribution locale des quasi-particules, accessibles via un protocole de sélection spatiale.

Les mesures expérimentales, validées par des simulations numériques basées sur la GHD, confirment l'existence d'une structure auto-similaire de la dynamique, ainsi que l'asymétrie caractéristique des distributions de rapidité hors équilibre. Les écarts résiduels entre théorie et expérience soulignent la nécessité de développer des extensions de la GHD, intégrant des effets hors d'équilibre plus subtils, tels que la diffusion, le chauffage local ou les défauts de sélection.

Ainsi, ce travail établit une correspondance quantitative entre un cadre mathématique hydrodynamique issu de l'intégrabilité quantique et des observations expérimentales fines, consolidant la GHD comme un outil efficace pour décrire la relaxation déterministe de systèmes quantiques unidimensionnels, et ouvrant des perspectives pour explorer les limites de cette approche dans des régimes plus complexes.

.....

Conclusion

Conclusion de la thèse.

Annexe A

Annexes

Informations complémentaires.

Bibliographie

- [1] Aisling Johnson. *One-dimensional Bose Gases on an Atom Chip : Correlations in Momentum Space and URL*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay (COmUE), December 2016.
- [2] PhD thesis.
- [3] Benjamin Doyon. Lecture notes on generalized hydrodynamics, 2017. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/GHDlectures.pdf>.
- [4] Bruno Bertini, Mario Collura, Jacopo De Nardis, and Maurizio Fagotti. Transport in out-of-equilibrium xxz chains : Exact profiles of charges and currents. *Physical Review Letters*, 117(20) :207201, 2016.
- [5] Olalla A Castro-Alvaredo, Benjamin Doyon, and Takato Yoshimura. Emergent hydrodynamics in integrable quantum systems out of equilibrium. *Physical Review X*, 6(4) :041065, 2016.
- [6] Benjamin Doyon and Herbert Spohn. Generalized hydrodynamics of the classical toda system. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2017(7) :073210, 2017.