Parametrization of a stationnary solution of Euler-scale GHD. D'après les notes de Jérôme

Isabelle

December 4, 2023

Le potentiel longitudinal est V(x). On suppose que $\nu(x,\theta)$ est solution de l'équation GHD stationnaire

$$v_{\text{eff}} \partial_x \nu - \partial_x V \partial_\theta \nu = 0. \tag{1}$$

Alors, il existe une fonction $s:[0,1]\to\mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\theta^2}{2} + V(x) = s'(\nu(x,\theta)) + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') \left(s(\nu(\theta',x)) - \nu(\theta',x) s'(\nu(\theta',x)) \right) \tag{2}$$

Démonstration

Notons

$$f(\theta, x) = \frac{\theta^2}{2} + V(x). \tag{3}$$

On choisit un point x_0 . On introduit la fonction s définie par

$$f(\theta, x_0) = s'(\nu(x_0, \theta)) + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') \left(s(\nu(\theta', x_0)) - \nu(\theta', x_0) s'(\nu(\theta', x_0)) \right), \tag{4}$$

en supposant qu'une telle solution existe et qu'elle est unique. Pour tout x, on note $\nu_s(x,\theta)$ la fonction de θ qui vérifie

$$f(\theta, x) = s'(\nu_s(x, \theta)) + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') \left(s(\nu_s(\theta', x)) - \nu_s(\theta', x) s'(\nu_s(\theta', x)) \right). \tag{5}$$

On calcule aisément, en utilisant Eq.(5) que

$$\partial_x f = s''(\nu_s(x,\theta)) \frac{\partial \nu_s}{\partial x} - \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') s''(\nu_s(\theta', x_0)) \left(\partial \nu_s / \partial x\right) (x, \theta') \nu_s(x, \theta'). \tag{6}$$

On reconnait le dressing (par rapport à ν_s) et on trouve

$$s''(\nu_s(x,\theta))\frac{\partial\nu_s}{\partial x} = (\partial_x f)^{\mathrm{dr}}.$$
 (7)

De même (avec une intégration par partie), on trouve

$$s''(\nu_s(x,\theta))\frac{\partial \nu_s}{\partial \theta} = (\partial_{\theta} f)^{dr}.$$
 (8)

D'un autre côté, on a, en utilisant Eq.(3),

$$\left(\partial_x f\right)^{\mathrm{dr}} = \frac{\partial V}{\partial x} 1^{\mathrm{dr}} \tag{9}$$

 et

$$\left(\partial_{\theta} f\right)^{\mathrm{dr}} = \theta^{\mathrm{dr}}.\tag{10}$$

LEs deux équation ci-dessus impliquent, en utilsant $v_{\rm eff}=\theta^{\rm dr}/1^{\rm dr}$

$$v_{\text{eff}} \left(\partial_x f\right)^{\text{dr}} - \frac{\partial V}{\partial x} \left(\partial_\theta f\right)^{\text{dr}} = 0. \tag{11}$$

En injectant Eq.8 et 7, on a

$$v_{\text{eff}} \left(\partial_x \nu_s \right) - \frac{\partial V}{\partial x} \left(\partial_\theta \nu_s \right) = 0.$$
 (12)

 ν et ν_s sont 2 solutions stationnaires de GHD ayant la même valeur en x_0 . Par unicité de cette solution, on a donc

$$\nu = \nu_s. \tag{13}$$

CQFD.

Cas particulier: ensemble de Gibbs pour Leib-Liniger

Le cas d'un GE température T et potentiel chimique μ est obetnu pour

$$s(\nu) = (\nu \ln(\nu) + (1 - \nu) \ln(1 - \nu)) T + \mu \tag{14}$$