ChatGPT

Contexte et GGE dans les systèmes intégrables

Dans un système quantique **intégrable**, il existe une infinité de charges conservées locales Q_i commutant entre elles et avec l'Hamiltonien H ([Rigol *et al.* 2007] [1]). Concrètement, chaque charge se présente sous la forme $Q_i = \int dx\, q_i(x)$, où $q_i(x)$ est une densité d'observable locale à support borné. L'intégrabilité implique ainsi une caractérisation complète des états propres par un ensemble de paramètres (rapidités $\{\lambda_j\}$ dans le modèle de Lieb-Liniger) [2] . En particulier, contrairement aux systèmes génériques, un système intégrable ne thermalise pas au sens canonique classique, car la présence de toutes ces contraintes empêche l'oubli complet des conditions initiales. Les points clés sont alors :
- **Charges conservées** : infinité de Q_i locales satisfaisant $[Q_i, H] = 0$ et $[Q_i, Q_j] = 0$.
- **Densités locales** : chaque Q_i s'écrit $Q_i = \int_{\mathbb{R}} dx\, q_i(x)$, avec $q_i(x)$ à support fini.
- **Relaxation non canonique** : après un *quench* (changement brutal de paramètre), le système évolue vers un état stationnaire qui n'est pas décrit par l'ensemble canonique habituel.

Pour décrire cet état, on introduit l'**ensemble de Gibbs généralisé (GGE)**. Rigol *et al.* ont montré qu'une « extension naturelle de l'ensemble de Gibbs aux systèmes intégrables » prédit correctement les valeurs moyennes des observables après relaxation [1] . Formellement, pour une région finie $\mathcal{S}$ du système, on définit la matrice densité locale :

$$\rho_{\mathcal{S}} = \frac{1}{Z_{\mathcal{S}}} \exp\Big(- \sum_i \beta_i\, Q_i^{(\mathcal{S})} \Big) , \quad Q_i^{(\mathcal{S})} = \int_{\mathcal{S}} dx\, q_i(x) ,$$

où β_i sont les multiplicateurs de Lagrange (ou « températures généralisées ») associés aux charges locales conservées $\{Q_i\}$. La constante $Z_{\mathcal{S}} = \text{\Tr}[\exp(-\sum_i \beta_i Q_i^{(\mathcal{S})})]$ assure la normalisation. L'**état GGE** ainsi défini est le seul permettant de prédire de manière cohérente les observables locales de $\mathcal{S}$ à long temps [3] . Autrement dit, l'équilibre local après quench est un état stationnaire faisant perdurer la mémoire de chaque charge conservée, ce qui conduit à un nombre macroscopique de paramètres thermodynamiques (une « température » β_i par charge) [4] .

En résumé, la GGE généralise les ensembles canoniques standard : au lieu de retenir uniquement l'énergie, on impose la conservation de l'ensemble complet $\{Q_i\}$. Cette construction rend compte du fait que, dans un système intégrable, les observables locaux convergent vers les valeurs moyennes de $\rho_{\mathcal{S}}$, et non vers celles d'un Gibbs thermique ordinaire [3] [1] . On comprend ainsi pourquoi la *thermalisation habituelle* (canonique ou microcanonique) échoue : seul l'ensemble de Gibbs généralisé peut intégrer toutes les contraintes locales.

Modèle de Lieb-Liniger et distribution de rapidités

Le **modèle de Lieb-Liniger** (gaz bosonique 1D à interactions de contact) est un exemple paradigmatique d'un système intégrable [2] . Ses états propres sont caractérisés par un ensemble de N rapidités $\{\lambda_j\}$, qui jouent le rôle de quasi-momenta (Bethe ansatz). Dans ce contexte, l'état macroscopique du gaz après relaxation unitaire est entièrement déterminé par la **distribution des rapidités**. Formellement, on définit la densité $\rho(\lambda)$ telle que $\rho(\lambda)d\lambda$ donne la fraction de particules ayant une rapidité dans $[\lambda, \lambda + d\lambda]$.

Cette « distribution de rapidités » est d'autant plus pertinente qu'elle est *accessible expérimentalement*. En effet, lorsque le gaz bosonique 1D est libéré et laissé s'étendre, la distribution asymptotique des vitesses des atomes coïncide avec la distribution initiale des rapidités [5]. Autrement dit, la GGE prédit un profil de vitesses observables en laboratoire. Dubois souligne que « la distribution de rapidités est la distribution asymptotique des vitesses des atomes après une expansion dans le guide 1D », et qu'elle peut être extraite par l'hydrodynamique généralisée [5].

Dans la GGE, cette distribution macroscopique $\rho(\lambda)$ est fixée par l'ensemble des charges conservées. Par exemple, on ajuste les β_i de sorte que les valeurs moyennes $\langle Q_i \rangle_{\rho_S}$ correspondent aux valeurs initiales. Ce processus détermine donc la fonction $\rho(\lambda)$ décrivant l'état d'équilibre local. Les observables locaux du gaz (densité, corrélations, etc.) en découlent alors via les équations de Bethe ansatz.

Motivation : fluctuations de la distribution de rapidités

Si la GGE décrit correctement la valeur moyenne de $\rho(\lambda)$ après relaxation, il est naturel de se demander si elle capture aussi les **fluctuations** autour de cette moyenne. Autrement dit, notre objectif est de vérifier expérimentalement si la GGE est l'« *ensemble statistique correct* » pour l'état d'équilibre en étudiant non seulement la distribution moyenne des rapidités, mais aussi ses fluctuations.

Plusieurs travaux récents ont souligné l'intérêt de sonder ces fluctuations. De Nardis et al. montrent que la mesure de la *structure dynamique de la densité* après quench permet de reconstruire entièrement l'état stationnaire, c'est-à-dire la distribution de rapidités du GGE [6]. Concrètement, ils mettent en évidence que l'analyse du facteur de structure dynamique fournit accès à chacune des « températures effectives » β_i et donc à la distribution macroscopique $\rho(\lambda)$ [4] [6]. Ainsi, en mesurant les corrélations dynamiques du gaz (quantité accessible via spectroscopie ou fluctuations de densité), on peut tester si les fluctuations observées concordent avec celles prédites par la GGE.

En pratique, l'étude des fluctuations de $\rho(\lambda)$ consiste à analyser la dispersion des vitesses (ou rapidités) sur des répétitions expérimentales du même quench. Si la GGE est correcte, la variance et les corrélations de ces fluctuations devraient correspondre aux prédictions de ρ_S . À terme, une telle analyse permettrait de confirmer que l'état final du gaz suit bien la statistique GGE plutôt que la distribution thermique classique. En résumé, les fluctuations de la distribution de rapidités constituent un test clé de la validité de la GGE pour modéliser les résultats expérimentaux dans le modèle de Lieb-Liniger [7] [6].

Sources : Principaux résultats de la littérature sur les états d'équilibre généralisés (GGE) et systèmes intégrables [2] [1] [3] [4]. Définitions et notations suivies d'applications concrètes au modèle de Lieb-Liniger et aux mesures expérimentales [5] [6].

---

[1] Relaxation in a completely integrable many-body Quantum system: An Ab initio study of the dynamics of the highly excited states of 1D lattice hard-core bosons - Penn State
https://pure.psu.edu/en/publications/relaxation-in-a-completely-integrable-many-body-quantum-system-an

[2] [3] Exact correlations in the Lieb-Liniger model and detailed balance out-of-equilibrium
https://scipost.org/SciPostPhys.1.2.015/pdf

[4] [6] [7] SciPost: SciPost Phys. 3, 023 (2017) - Probing non-thermal density fluctuations in the one-dimensional Bose gas
https://scipost.org/SciPostPhys.3.3.023

5 Dynamique hors d'équilibre d'un gaz de Bosons unidimensionnel étudiée via la mesure spatialement résolue de la distribution des quasiparticules - Thèse de l'Institut d'Optique Graduate School
https://hal-emse.ccsd.cnrs.fr/IOGS-THESE/tel-04749900v1