Parametrization of a stationnary solution of Euler-scale GHD. D'après les notes de Jérôme

Isabelle

December 4, 2023

Le potentiel longitudinal est $V(x)$. On suppose que $\nu(x,\theta)$ est solution de l'équation GHD stationnaire

$$v_{\rm eff}\partial_x\nu - \partial_x V \partial_\theta \nu = 0. \tag{1}$$

Alors, il existe une fonction $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\theta^2}{2} + V(x) = s'(\nu(x,\theta)) + \int \frac{d\theta'}{2\pi}\Delta(\theta-\theta')\left(s(\nu(\theta',x)) - \nu(\theta',x)s'(\nu(\theta',x))\right) \tag{2}$$

Démonstration

Notons

$$f(\theta,x) = \frac{\theta^2}{2} + V(x). \tag{3}$$

On choisit un point x_0. On introduit la fonction s définie par

$$f(\theta,x_0) = s'(\nu(x_0,\theta)) + \int \frac{d\theta'}{2\pi}\Delta(\theta-\theta')\left(s(\nu(\theta',x_0)) - \nu(\theta',x_0)s'(\nu(\theta',x_0))\right), \tag{4}$$

en supposant qu'une telle solution existe et qu'elle est unique. Pour tout x, on note $\nu_s(x,\theta)$ la fonction de θ qui vérifie

$$f(\theta,x) = s'(\nu_s(x,\theta)) + \int \frac{d\theta'}{2\pi}\Delta(\theta-\theta')\left(s(\nu_s(\theta',x)) - \nu_s(\theta',x)s'(\nu_s(\theta',x))\right). \tag{5}$$

On calcule aisément, en utilisant Eq.(5) que

$$\partial_x f = s''(\nu_s(x,\theta))\frac{\partial \nu_s}{\partial x} - \int \frac{d\theta'}{2\pi}\Delta(\theta-\theta')s''(\nu_s(\theta',x_0))\left(\partial\nu_s/\partial x\right)(x,\theta')\nu_s(x,\theta'). \tag{6}$$

On reconnait le dressing (par rapport à ν_s) et on trouve

$$s''(\nu_s(x,\theta))\frac{\partial \nu_s}{\partial x} = \left(\partial_x f\right)^{\rm dr}. \tag{7}$$

De même (avec une intégration par partie), on trouve

$$s''(\nu_s(x,\theta))\frac{\partial \nu_s}{\partial \theta} = \left(\partial_\theta f\right)^{\rm dr}. \tag{8}$$

D'un autre côté, on a, en utilisant Eq.(3),

$$\left(\partial_x f\right)^{\rm dr} = \frac{\partial V}{\partial x}1^{\rm dr} \tag{9}$$

et

$$(\partial_\theta f)^{\mathrm{dr}} = \theta^{\mathrm{dr}}. \tag{10}$$

LEs deux équation ci-dessus impliquent, en utilsant $v_{\mathrm{eff}} = \theta^{\mathrm{dr}}/1^{\mathrm{dr}}$

$$v_{\mathrm{eff}} \, (\partial_x f)^{\mathrm{dr}} - \frac{\partial V}{\partial x} \, (\partial_\theta f)^{\mathrm{dr}} = 0. \tag{11}$$

En injectant Eq.8 et 7, on a

$$v_{\mathrm{eff}} \, (\partial_x \nu_s) - \frac{\partial V}{\partial x} \, (\partial_\theta \nu_s) = 0. \tag{12}$$

ν et ν_s sont 2 solutions stationnaires de GHD ayant la même valeur en x_0. Par unicité de cette solution, on a donc

$$\nu = \nu_s. \tag{13}$$

CQFD.

Cas particulier: ensemble de Gibbs pour Leib-Liniger

Le cas d'un GE température T et potentiel chimique μ est obetnu pour

$$s(\nu) = (\nu \ln(\nu) + (1-\nu)\ln(1-\nu))\, T + \mu \tag{14}$$