

Chapitre 1

Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz

Sommaire

1.1	Description du modèle de Lieb-Liniger	4
1.1.1	Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel	4
1.1.2	Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à 2 corps	12
1.2	Équation de Bethe et distribution de rapidité	17
1.2.1	Fonction d'onde dans le secteur ordonné et représentation de Gaudin	17
1.2.2	Conditions aux bords périodiques	17
1.2.3	Thermodynamique du gaz de Lieb–Liniger à l'état fondamental	19
1.2.4	Excitations élémentaires	20

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation progressive du modèle de **Lieb–Liniger (LL)** et de l'Ansatz de Bethe (en anglais **Bethe Ansatz (BA)**), outils centraux pour la description d'un gaz de bosons unidimensionnel en interaction via un potentiel de type delta. L'objectif est d'accompagner rigoureusement le lecteur depuis la formulation quantique du système jusqu'aux solutions exactes obtenues par l'approche de Bethe.

Nous commençons, pour des raisons pédagogiques, par le cas le plus simple : une particule libre, sans interaction, dans un espace unidimensionnel avec des conditions aux bords périodiques. Cette première étape permet d'introduire naturellement les fonctions d'onde à une particule, leur évolution sous l'action d'Hamiltonien libre, ainsi que la quantification résultant des conditions de périodicité — autrement dit, la version élémentaire des équations de Bethe.

Nous passons ensuite à la formulation du problème en champ quantique, en exprimant l'Hamiltonien en termes d'opérateurs de création et d'annihilation dans la représentation positionnelle : il s'agit du passage à la seconde quantification. Cette étape permet de formaliser clairement les termes à un corps et à deux corps dans l'Hamiltonien, et d'établir les notations qui seront utilisées tout au long du chapitre.

Une fois ce cadre posé, nous généralisons le raisonnement au cas de N particules pour introduire le modèle complet de **Lieb–Liniger**. Nous présentons alors l'Ansatz de Bethe dans sa forme générale, qui fournit les états propres de l'Hamiltonien. Ce formalisme permet d'accéder explicitement au spectre du système, ainsi qu'à diverses quantités physiques telles que l'impulsion totale et le nombre de particules.

Nous traitons d'abord le cas à seulement deux particules, cette fois en tenant compte de l'interaction locale. L'analyse de ce système met en lumière les effets de l'interaction ponctuelle sur la régularité de la fonction d'onde et les conditions de raccord, ainsi que sur les modifications des équations de Bethe. Ce cas constitue une étape clé vers la généralisation à N particules.

La fonction d'onde est ensuite étendue au cas général de N particules, ce qui nous permet de dériver les équations de Bethe pour un système entièrement interactif. Ces équations encapsulent toute l'information sur les états propres du système.

Enfin, nous introduisons la notion de *distribution de rapidité*, concept fondamental pour la description des états dans la limite thermodynamique. Elle permet non seulement de caractériser les états d'énergie minimale (états fondamentaux), mais aussi d'analyser des configurations excitées au-delà de l'état fondamental. Ce formalisme constituera le socle des développements ultérieurs sur les propriétés thermodynamiques et dynamiques des gaz bosoniques intégrables.

1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger

1.1.1 Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel

1.1.1.1 De la première à la seconde quantification

Introduction. La mécanique quantique se développe historiquement en deux grandes étapes : la *première quantification*, aussi appelée quantification canonique et la *seconde quantification*. Comprendre ces deux cadres est essentiel pour aborder les systèmes quantiques complexes, en particulier ceux où le nombre de particules peut varier.

Première quantification (quantification canonique, particule unique). La première quantification est la mécanique quantique standard, celle que vous avez rencontrée dès vos premiers cours. Elle consiste à quantifier un système classique décrit par des variables dynamiques telles que la position x et la quantité de mouvement p . On procède en remplaçant ces variables par des **opérateurs hermitiens** \hat{x} et

$$\hat{p} \doteq -i\hbar\hat{\partial}_x, \quad (1.1)$$

où \hbar est la constante de Planck réduite, satisfaisant la **relation de commutation canonique** fondamentale $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. L'état du système est alors décrit par une **fonction d'onde** $\psi(x, t)$, solution de l'**équation de Schrödinger** indépendante du nombre de particules :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\psi, \quad (1.2)$$

avec $\hat{\mathcal{H}}$ l'opérateur hamiltonien.

Exemple : particule libre en une boîte à une dimension.

Dans le cas d'une particule libre de masse m se déplaçant en une dimension, l'Hamiltonien est constitué uniquement du terme cinétique $\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}^2/2m$. En représentation position, où l'opérateur quantité de mouvement s'écrit comme dans l'équation (1.1), l'Hamiltonien prend alors la forme différentielle :

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2. \quad (1.3)$$

Les états propres stationnaires de (1.2) dépendant du temps sont de la forme $\psi_k(x, t) = \varphi_k(x) e^{-i\varepsilon(k)t/\hbar}$ où $\varphi_k(x)$ est une fonction propre de l'hamiltonien, soit de l'équation stationnaire $\hat{\mathcal{H}}\varphi_k = \varepsilon(k)\varphi_k$ i.e. pour une particule libre :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\varphi_k = \varepsilon(k)\varphi_k, \quad (1.4)$$

avec $\varepsilon(k)$ l'énergie associée à une onde plane de nombre d'onde k

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (1.5)$$

Les fonctions propres spatiales $\varphi_k(x)$ de l'hamiltonien libre s'écrivent comme des combinaisons linéaires d'ondes planes

$$\varphi_k(x) = ae^{-ikx} + be^{ikx}, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{C}^2. \quad (1.6)$$

Périodicité. Si la particule est confinée dans une boîte de longueur L avec des conditions aux limites périodiques (ie $\varphi_k(x+L) = \varphi_k(x)$), alors le spectre de k est quantifié :

$$e^{ikL} = 1 \quad \text{ou encore } kL \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Le problème est équivalent à celui d'une particule libre sur un cercle de périmètre L .

La particule est délocalisée sur tout l'espace (le cercle), sans structure particulière *i.e.* les solutions (1.6) correspondent à des **états non liés** (ou états de diffusion).

Pour $k \neq 0$ (respectivement pour $k = 0$), la fonction propre $\varphi_k(x)$ de l'équation (1.6) appartient à un sous-espace propre associé à k de dimension 2 (respectivement de dimension 1) engendré par $x \mapsto e^{-ikx}$ et $x \mapsto e^{ikx}$ (respectivement par $x \mapsto 1$). L'espace engendré par l'ensemble des sous-espaces propres forme un **espace de Hilbert**, muni du **produit scalaire** défini par :

$$(\varphi_{k'}, \varphi_k) = \int_0^L \varphi_{k'}^*(x) \varphi_k(x) dx. \quad (1.8)$$

Les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux *i.e.* en utilisant les conséquences de la condition de périodicité (1.7), $(\varphi_{k'}, \varphi_k) = 0$ pour $|k'| \neq |k|$. Pour chaque sous-espace propre on impose que les états propres forment une base orthonormale *i.e.* en utilisant (1.7), les fonctions propres φ_k écrites sous la forme (1.6), sont orthogonales avec $\varphi_{\bar{k}}: x \mapsto \pm(b^*e^{-ikx} - a^*e^{ikx})$ soit $(\varphi_{\bar{k}}, \varphi_k) = 0$, et on impose que $|a|^2 + |b|^2 = L^{-1}$ pour assurer la normalité de φ_k et de $\varphi_{\bar{k}}$ soit $(\varphi_k, \varphi_k) = (\varphi_{\bar{k}}, \varphi_{\bar{k}}) = 1$.

Les solutions générales de l'équation de Schrödinger s'écrivent alors comme une superposition d'états propres $\psi = c_0\psi_0 + \sum_{|k|>0} (c_k\psi_k + c_{\bar{k}}\psi_{\bar{k}})$.

Il y a deux bases de vecteur propre particulier :

i) **Base de chiralité / impulsion :**

$$\varphi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\pm ikx} \quad (1.9)$$

Ces derniers de plus d'être états propres de l'opérateur énergie \hat{H} , sont des états propres de l'opérateur impulsion \hat{p} , avec valeurs propres opposées $\pm\hbar k$.

ii) **Base symétrique / antisymétrique :** En appliquant la matrice de passage unitaire $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix}$ à la base $\{\varphi_+, \varphi_-\}$, on passe dans la base

$$\begin{cases} \varphi_S = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(kx) & \text{type Neumann : } \varphi'_S(0) = \varphi'_S(L) = 0 \\ \varphi_A = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) & \text{type Dirichlet : } \varphi_A(0) = \varphi_A(L) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Cette condition d'orthonormalité est imposée afin de garantir l'indépendance linéaire des états quantiques, et d'assurer que toute fonction d'onde de l'espace de Hilbert puisse être développée de manière unique sur cette base.

Avec le formalisme de Dirac, la fonction d'onde φ_k est représentée par le ket $|k\rangle$ normé (*i.e.* $\langle k'|k\rangle = \delta_{k',k}$, où $\delta_{p,q}$ est le symbole de Kronecker), et l'équation de Schrödinger s'écrit : $\hat{H}|k\rangle = \varepsilon(k)|k\rangle$. En appliquant le bra $\langle x|$ de part et d'autre, on obtient : $\langle x|\hat{H}|k\rangle = \varepsilon(k)\langle x|k\rangle$, où $|x\rangle$ est normé (*i.e.* $\langle x'|x\rangle = \delta(x'-x)$ avec $\delta(y-x)$ une distribution de Dirac) et $\varphi_k(x) = \langle x|k\rangle$ est la représentation positionnelle de l'état $|k\rangle$.

La base $\{|x\rangle\}$ étant continue, et les états $\{|k\rangle\}$ quantifiés (par exemple dans une boîte de taille finie avec conditions aux limites périodiques), les relations de changement de base s'écrivent :

$$|k\rangle = \int_0^L dx \varphi_k(x) |x\rangle, \quad |x\rangle = \sum_k \varphi_k^*(x) |k\rangle, \quad (1.11)$$

avec $\varphi_k^*(x) = \langle k|x\rangle$. L'état $|x\rangle$ est relié aux états $|k\rangle$ par une transformation de Fourier discrète. Ces formules montrent que les états $|k\rangle$ sont les composantes de Fourier de l'état $|x\rangle$.

De la particule unique aux systèmes à N particules. Pour un système composé de N particules identiques, une approche naturelle consiste à introduire une fonction d'onde $\varphi(x_1, \dots, x_N)$ dépendant de N variables, symétrique pour des bosons ou antisymétrique pour des fermions sous l'échange de deux coordonnées $x_i \leftrightarrow x_j$, solution de l'équation de Schrödinger à N corps. Toutefois, cette description devient rapidement inextricable lorsque le nombre de particules augmente, ou lorsque le système permet la création et l'annihilation de particules, comme dans un milieu ouvert ou en contact avec un bain thermique.

1.1.1.2 Seconde quantification

Pour dépasser ces limitations, on adopte le **formalisme de la seconde quantification**, dans lequel l'état du système est décrit non plus par une fonction d'onde mais par un vecteur dans un espace de Fock. Les opérateurs de création et d'annihilation remplacent alors les variables dynamiques classiques et permettent une description unifiée et élégante des systèmes à nombre variable de particules.

Structure de l'espace des états de Fock. Dans ce formalisme, l'espace des états est une **somme directe d'espaces à N particules**, et chaque état est décrit par l'occupation des différents modes quantiques. Les opérateurs \hat{a}_k^\dagger et \hat{a}_k créent et annihilent une particule dans l'état d'onde plane de moment k :

$$|k\rangle = \hat{a}_k^\dagger |\emptyset\rangle, \quad (1.12)$$

état avec une particule dans le mode k , où $|\emptyset\rangle$ désigne le vide quantique de Fock, défini par :

$$\forall k \in \mathbb{R}: \quad \hat{a}_k |\emptyset\rangle = 0, \quad \langle \emptyset | \emptyset \rangle = 1. \quad (1.13)$$

Le symbole \hat{a}_λ représente ici de manière générique soit l'opérateur \hat{b}_λ pour les bosons, soit \hat{c}_λ pour les fermions, et satisfait respectivement les relations de commutation (pour les bosons) ou d'anticommutation (pour les fermions). Dans ce qui suit, nous nous restreignons au cas bosonique.

Relations de commutation bosoniques. Les relations de commutation fondamentales pour les bosons sont :

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] = [\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_{k'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}, \quad (1.14)$$

où $\delta_{k,k'}$ est le symbole de Kronecker, valant 1 si $k = k'$ et 0 sinon.

Nature du champ quantique. La seconde quantification généralise ce cadre en permettant de traiter des systèmes où le nombre de particules n'est pas fixé, ce qui est fréquent en physique des particules, des champs quantiques, ou des gaz quantiques.

L'idée principale est de ne plus quantifier directement les particules, mais le *champ quantique* associé. Les états d'une particule unique deviennent alors des états d'occupation dans un espace de Fock, qui décrit l'ensemble des configurations possibles avec zéro, une, ou plusieurs particules.

Champs de Bose. Le gaz de Bose unidimensionnel est décrit dans le cadre de la théorie quantique des champs par un champ bosonique canonique $\hat{\Psi}(x)$, qui agit sur l'espace de Fock des états du système. Ce champ quantique encode l'annihilation d'une particule en x , et son adjoint $\hat{\Psi}^\dagger(x)$ correspond à la création d'une particule en ce point.

$$|x\rangle = \hat{\Psi}^\dagger(x) |\emptyset\rangle, \quad (1.15)$$

état avec une particule en x et $|\emptyset\rangle$ est le vide quantique de Fock défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{\Psi}(x) |\emptyset\rangle = 0. \quad (1.16)$$

Relations de commutation bosoniques. Ces champs satisfont les relations de commutation canoniques à temps égal :

$$[\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}(y)] = [\hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(y)] = 0, \quad [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(y)] = \delta(x - y), \quad (1.17)$$

où $\delta(x - y)$ est la fonction delta de Dirac. Ces relations expriment le caractère bosonique des excitations du champ.

État à N particules. Soient N bosons dans les états $\{k_1, \dots, k_N\}$ (un boson dans l'état k_1 , un autre dans k_2 , etc.) et aux positions $\{x_1, \dots, x_N\}$ (un boson en x_1 , un autre en x_2 , etc.). Leurs états s'écrivent alors :

$$|\{k_1, \dots, k_N\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{b}_{k_1}^\dagger \cdots \hat{b}_{k_N}^\dagger |\emptyset\rangle, \quad |\{x_1, \dots, x_N\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |\emptyset\rangle, \quad (1.18)$$

où le facteur $1/\sqrt{N!}$ traduit le caractère d'indiscernabilité des bosons et garantit la symétrisation correcte de l'état.

Changement de base. On peut relier les opérateurs de création/annihilation dans la base des ondes planes aux opérateurs de champ via :

$$\hat{b}_k^\dagger = \int_0^L dx \varphi_k(x) \hat{\Psi}^\dagger(x), \quad \hat{\Psi}^\dagger(x) = \sum_k \varphi_k^*(x) \hat{b}_k^\dagger. \quad (1.19)$$

Le champ quantique $\hat{\Psi}(x)$ est relié aux opérateurs de moment \hat{b}_k par une transformation de Fourier. Ces formules montrent que les opérateurs \hat{b}_k sont les composantes de Fourier du champ $\hat{\Psi}(x)$.

Ainsi, un état à N bosons dans la base $|k\rangle^{\otimes N}$ peut s'écrire :

$$|\{k_a\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx_1 \cdots dx_N \varphi_{\{k_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |\emptyset\rangle, \quad (1.20)$$

où on note $\{k_a\} \equiv \{k_1, \dots, k_N\}$ et $\{x_a\} \equiv \{x_1, \dots, x_N\}$, et la fonction d'onde symétrisée s'écrit : $\varphi_{\{k_a\}}(\{x_a\}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \prod_{i=1}^N \varphi_{k_{\sigma(i)}}(x_i)$, avec \mathcal{S}_N le groupe symétrique d'ordre N mais aussi :

$$\varphi_{\{k_a\}}(\{x_a\}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle \emptyset | \hat{\Psi}(x_1) \cdots \hat{\Psi}(x_N) | \{k_a\} \rangle. \quad (1.21)$$

1.1.1.3 Opérateur.

Opérateur à un corps.

Dans la base discrète des modes $\{|k\rangle\}$. Soit \hat{f} un opérateur à une particule, dont les éléments de matrice dans une base orthonormée $\{|k\rangle\}$ sont donnés par $f_{\lambda\nu} = \langle \lambda | \hat{f} | \nu \rangle$. Un opérateur symétrique à N particules correspondant à la somme des actions de \hat{f} sur chacune des particules s'écrit : $\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{f}^{(i)}$, où $\hat{f}^{(i)}$ désigne l'action de \hat{f} sur la i^{e} particule uniquement. En base de Dirac, cela donne : $\hat{f}^{(i)} = \sum_{\lambda, \nu} f_{\lambda\nu} |i: \lambda\rangle \langle i: \nu|$, où $|i: \lambda\rangle$ représente un état où seule la i^{e} particule est dans l'état λ . On peut montrer que la somme des projecteurs agissant sur chaque particule s'identifie à une combinaison d'opérateurs de création et d'annihilation : $\sum_{i=1}^N |i: \lambda\rangle \langle i: \nu| = \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\nu$, (où \hat{a}_λ est une notation générique désignant \hat{b}_λ pour les bosons, ou \hat{c}_λ pour les fermions).

On en déduit que l'opérateur à un corps \hat{F} peut se réécrire dans le formalisme de la seconde quantification comme :

$$\hat{F} = \sum_{\lambda, \nu} \langle \lambda | \hat{f} | \nu \rangle \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\nu. \quad (1.22)$$

L'opérateur $\hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\nu$ fait la transition d'une particule de l'état ν à vers l'état λ . Si $\lambda = \nu$ cet opérateur est l'opérateur nombre de particules dans le mode λ .

Exemple : Énergie cinétique totale des particules libres. Si l'on sait diagonaliser l'opérateur à une particule \hat{f} , c'est-à-dire si l'on peut écrire : $\hat{f} = \sum_k f_k |k\rangle \langle k|$, alors l'opérateur à N corps associé s'écrit : $\hat{F} = \sum_k \langle k | \hat{f} | k \rangle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$. On obtient ainsi une forme diagonale de \hat{F} en seconde quantification.

Un exemple immédiat est celui des **particules libres sans interaction**. On rappelle que : $\hat{\mathcal{H}}|k\rangle = \varepsilon(k)|k\rangle$, avec $\varepsilon(k)$ l'énergie du mode k (1.5). En injectant $\hat{f} = \hat{\mathcal{H}} (= \frac{\hat{p}^2}{2m})$ dans (1.22), on obtient l'énergie cinétique totale du système :

$$\hat{K} = \sum_k \varepsilon(k) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k. \quad (1.23)$$

Pour N particules libres, en écrivant l'état sous la forme (1.18), en utilisant les relations de commutation (1.14) et la définition de l'état de Fock (1.13), on trouve que $|\{k_a\}\rangle$ est un état propre de \hat{K} associé à l'énergie $\sum_{i=1}^N \varepsilon(k_i)$, c'est-à-dire :

$$\hat{K} |\{k_a\}\rangle = \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon(k_i) \right) |\{k_a\}\rangle. \quad (1.24)$$

Dans la base continue des positions $\{|x\rangle\}$. En injectant les relation des changement de base d'état (1.11) et de champ (1.19) (qui prend la même forme pour \hat{a}_λ et pour \hat{a}_λ^\dagger), dans (1.22) on obtient :

$$\hat{F} = \iint_0^L dx dy \hat{\Psi}^\dagger(x) \langle x | \hat{f} | y \rangle \hat{\Psi}(y). \quad (1.25)$$

Exemple : Énergie cinétique totale des particules libres. Reprenons l'exemple de l'énergie cinétique totale avec $\hat{f} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. En injectant $\langle x | \hat{f} | y \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_y^2 \delta(y - x)$ dans (1.25), on réécrit l'opérateur énergie cinétique total \hat{K} de l'équation (1.23) :

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L dx \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \cdot \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x). \quad (1.26)$$

Lorsque cet Hamiltonien agit sur l'état de Fock à N particules libres $|\{k_a\}\rangle$, les règles de commutation (1.17) ainsi que la définition des états de Fock (1.16) impliquent (cf. Annexe A) :

$$\hat{K} |\{k_a\}\rangle = \int_0^L dz \hat{\mathcal{K}}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{K}}_N = -\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2 \hat{\partial}_{z_i}^2}{2m}, \quad (1.27)$$

où $-i\hbar \hat{\partial}_{z_i}$ désigne l'opérateur impulsion associé à la coordonnée z_i de la i -ème particule.

Quantité de mouvement totale et nombre total de particules. Dans l'exemple de l'énergie cinétique, l'opérateur \hat{f} est proportionnel à l'opérateur impulsion au carré \hat{p}^2 . On peut appliquer un raisonnement similaire à d'autres observables : pour le **nombre total de particules**, on prend $\hat{f} = \hat{p}^0$, c'est-à-dire l'identité et pour la **quantité de mouvement totale**, on choisit $\hat{f} = \hat{p}$ (puissance 1). On note \hat{Q} l'opérateur nombre total de particule et \hat{P} l'opérateur quantité mouvement totale.

Ces observables sont liées à des symétries fondamentales du système : \hat{Q} est associé à la symétrie $U(1)$ (conservation du nombre de particules); \hat{P} est associé à la translation (conservation de la quantité de mouvement).

Pour ces observables, les états $|\{k_a\}\rangle$ sont des états propres, et cela reste vrai **avec ou sans interaction**, tant que le système conserve ces symétries fondamentales. Ainsi, $|\{k_a\}\rangle$ diagonalise directement \hat{Q} et \hat{P} , même en présence d'interactions locales qui respectent $U(1)$ et la translation.

En seconde quantification, ces opérateurs s'écrivent dans la base $\{|k\rangle\}$:

$$\hat{Q} = \sum_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \quad \hat{P} = \hbar \sum_k k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \quad (1.28)$$

Lorsqu'on les applique à un état de Fock à N particules $|\{k_a\}\rangle$, on obtient :

$$\hat{Q} |\{k_a\}\rangle = \left(\sum_{i=1}^N 1 \right) |\{k_a\}\rangle, \quad \hat{P} |\{k_a\}\rangle = \hbar \left(\sum_{i=1}^N k_i \right) |\{k_a\}\rangle. \quad (1.29)$$

Dans la base position $\{|x\rangle\}$, les opérateurs s'écrivent :

$$\hat{Q} = \int_0^L dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x), \quad \hat{P} = \frac{i\hbar}{2} \int_0^L dx \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x) - \left[\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \right\} \quad (1.30)$$

où l'expression symétrisée de \hat{P} assure son hermiticité.

Lorsqu'on applique ces opérateurs à l'état $|\{k_a\}\rangle$, on obtient (comme pour l'énergie cinétique) :

$$\hat{Q} |\{k_a\}\rangle = \int_0^L d^N z \hat{N}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle, \quad \text{avec} \quad \hat{N}_N = \sum_{i=1}^N 1, \quad (1.31)$$

$$\hat{P} |\{k_a\}\rangle = \int_0^L d^N z \hat{P}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle, \quad \text{avec} \quad \hat{P}_N = -i\hbar \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i} \quad (1.32)$$

On s'avance sur le chapitre (2). , en voulant généraliser avec $\hat{f} = \hat{p}^q$ où q est un entier. Soit dans la base $\{|k_a\rangle\}$: $\hat{F} = \hbar^q \sum_k k^q \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$ et en l'appliquant à $|\{k_a\}\rangle$: On peut généraliser cette construction en considérant des opérateurs à une particule de la forme $\hat{f} = \hat{p}^q$, où q est entier. Dans la base impulsion $\{|k\rangle\}$, l'opérateur à N corps associé s'écrit : $\hat{F} = \hbar^q \sum_k k^q \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$ et son action sur un état de Fock libre est immédiatement

$$\hat{F} |\{k_a\}\rangle = \hbar^q \left(\sum_{i=1}^N k_i^q \right) |\{k_a\}\rangle, \quad (1.33)$$

En représentation position $\{|x\rangle\}$, on obtient l'opérateur hermitisé

$\hat{F} = \frac{\hbar^q}{2} \int_0^L \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x^q \hat{\Psi}(x) + (-1)^q \left[\hat{\partial}_x^q \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \right\} dx$ et son action sur $|\{k_a\}\rangle$ se traduit par :

$\hat{F} |\{k_a\}\rangle = \int_0^L d^N z \hat{\mathcal{F}}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle$ avec $\hat{\mathcal{F}}_N = (-1)^q \hbar^q \sum_{i=1}^N (\hat{\partial}_{z_i})^q$.

L'opérateur \hat{K} (énergie cinétique) ne représente l'énergie totale que dans le cas d'un gaz libre, sans interaction ni potentiel externe. Dans ce régime, les états de Fock $|k_a\rangle$ sont propres de \hat{K} ainsi que de tous les opérateurs \hat{F} construits pour $q \geq 0$.

Dès que des interactions entre particules sont introduites, ces états libres ne sont plus propres de l'Hamiltonien complet (cinétique + interaction), ni des opérateurs \hat{F} . Il faut alors considérer les états de Bethe $|\theta_a\rangle$, qui diagonalisent l'Hamiltonien complet, mais aussi les charges conservées fondamentales (\hat{Q} et \hat{P}) et l'ensemble infini de charges d'ordre supérieur.

Dans ce cadre, les opérateurs \hat{F} ne suffisent plus : il est nécessaire d'introduire des contributions à plusieurs corps pour tenir compte des interactions, ce qui conduit naturellement à la hiérarchie des charges locales d'intégrabilité.

Opérateurs à deux corps

Dans la base discrètes des modes $\{|k\rangle\}$. Nous considérons à présent les termes d'interaction impliquant deux particules, \hat{v} , dont les éléments de matrices sont donnés par $v_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle 1 : \alpha; 2 : \beta | \hat{v} | 1 : \gamma; 2 : \delta \rangle$, où $|i : \gamma; j : \delta\rangle$ représente l'état où la i^e particule est dans l'état γ et la j^e dans l'état δ . Ceux-ci correspondent à des opérateurs de la forme : $\hat{V} = \sum_{j < i} \hat{v}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \hat{v}^{(i,j)}$. où $\hat{v}^{(i,j)}$ désigne

l'interaction à deux corps entre les i^e et j^e particules, exprimés dans la base à deux états : $\hat{\mathbf{p}}^{(i,j)} = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\gamma} |i : \alpha; j : \beta\rangle v_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle i : \gamma; j : \delta|$. On peut réécrire l'opérateur \hat{V} en termes d'opérateurs de création et d'annihilation comme suit :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \langle 1 : \alpha; 2 : \beta | \hat{\mathbf{p}} | 1 : \gamma; 2 : \delta \rangle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\beta}^{\dagger} \hat{a}_{\delta} \hat{a}_{\gamma}. \quad (1.34)$$

Cette forme est particulièrement utile pour le traitement des interactions dans l'espace de Fock.

Dans la base continue des positions $\{|x\rangle\}$. En injectant les relations des changements de base d'état (1.11) et de champ (1.19), dans (1.34) on obtient :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \iiint_0^L dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 \langle 1 : x_1, 2 : x_2 | \hat{\mathbf{p}} | 1 : x'_1, 2 : x'_2 \rangle \hat{\Psi}^{\dagger}(x_1) \hat{\Psi}^{\dagger}(x_2) \hat{\Psi}(x'_2) \hat{\Psi}(x'_1) \quad (1.35)$$

Exemple : Interactions ponctuelles. Dans le cas d'une interaction ne dépendant que de la distance relative entre deux particules, $\langle 1 : x_1, 2 : x_2 | \hat{\mathbf{p}} | 1 : x'_1, 2 : x'_2 \rangle = v(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2)$, l'expression (1.35) se simplifie :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 v(x_1 - x_2) \hat{\Psi}^{\dagger}(x_1) \hat{\Psi}^{\dagger}(x_2) \hat{\Psi}(x_2) \hat{\Psi}(x_1) \quad (1.36)$$

soit pour des interactions ponctuelles :

$$\hat{V} = \frac{g}{2} \int dx \hat{\Psi}^{\dagger}(x) \hat{\Psi}^{\dagger}(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \quad (1.37)$$

et quand on l'applique à l'état $|\{k_a\}\rangle$, les règles de commutations (1.17) et la définition d'état de Fock (1.16) impliquent que (cf Annexe A)

$$\hat{V} |\{k_a\}\rangle = \int d^N z \hat{\mathcal{V}}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^{\dagger}(z_1) \cdots \hat{\Psi}^{\dagger}(z_N) |\emptyset\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{V}}_N = g \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \quad (1.38)$$

où g est la constante de couplage.

1.1.1.4 Expression de l'Hamiltonien de Lieb-Liniger.

À partir d'ici, on fixe $\hbar = m = 1$. Ainsi, les dimensions (unités) des nombres d'onde k et des vitesses ne sont plus différenciées. Dans le formalisme des opérateurs de champs, l'Hamiltonien d'un système soumis à des interactions ponctuelles est la somme de l'énergie cinétique \hat{K} donnée par (1.26), et du terme d'interaction \hat{V} introduit dans (1.37) :

$$\hat{H} = \int dx \hat{\Psi}^{\dagger}(x) \left[-\frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 + \frac{g}{2} \hat{\Psi}^{\dagger}(x) \hat{\Psi}(x) \right] \hat{\Psi}(x). \quad (1.39)$$

Lorsqu'on applique cet Hamiltonien à un état à N particules, il est important de distinguer deux situations :

- **Sans interaction** ($g = 0$) : les états propres sont simplement les états de Fock en impulsion $|\{k_a\}\rangle$ définie en (1.18). Ce sont des produits d'ondes planes symétrisées.
- **Avec interaction** ($g \neq 0$) : les états propres ne sont plus des produits d'ondes planes. Ce sont les états de Bethe, que l'on note

$$|\{\theta_a\}\rangle \quad (1.40)$$

où les paramètres θ_a jouent le rôle de **quasi-moments (rapidités)**. Ceux-ci sont homogènes à un nombre d'onde ou à une vitesse, mais ne coïncident pas directement avec les impulsions libres k_a . La fonction d'onde correspondante est une combinaison linéaire de morceaux d'ondes planes, reliés par des phases de diffusion fixées par l'interaction locale.

Ainsi, la notation $|\{\theta_a\}\rangle$ est choisie pour rappeler que :

- en absence d'interaction, $\theta_a = k_a$ et l'on retrouve les états de Fock,
- en présence d'interaction, θ_a sont les quasi-moments de Bethe, qui généralisent les nombres d'onde libres.

En utilisant les équations (1.27) et (1.38), on obtient :

$$\hat{H}|\{\theta_a\}\rangle = \int d^N z \hat{\mathcal{H}}_N \varphi_{\{\theta_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle, \quad (1.41)$$

avec $\{\theta_a\} \equiv \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ et .

$$\hat{\mathcal{H}}_N = \hat{\mathcal{K}}_N + \hat{\mathcal{V}}_N \quad \text{où on rappelle} \quad \hat{\mathcal{K}}_N = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_{z_i}^2, \text{ et } \hat{\mathcal{V}}_N = g \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta(z_i - z_j). \quad (1.42)$$

Équation du mouvement associée. L'équation du mouvement du champ $\hat{\Psi}(x)$ s'obtient à partir de l'équation de Heisenberg :

$$i\partial_t \hat{\Psi} = [\hat{\Psi}, \hat{H}]. \quad (1.43)$$

En évaluant explicitement le commutateur (1.17), on trouve :

$$i\partial_t \hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \hat{\Psi} + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}. \quad (1.44)$$

Il est important de souligner que cette équation est encore **quantique** : elle décrit l'évolution de l'opérateur de champ $\hat{\Psi}$.

En revanche, si l'on prend l'approximation dite de **champ moyen**, où l'on remplace l'opérateur de champ par son espérance de valeur dans un état cohérent ou condensé

$$\Psi = \langle \hat{\Psi} \rangle, \quad (1.45)$$

on obtient alors l'équation de **Nonlinear Schrödinger (NLS)** (ou équation de **Gross-Pitaevskii (GP)**) pour une fonction d'onde classique :

$$i\partial_t \Psi = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \Psi + g|\Psi|^2 \Psi. \quad (1.46)$$

Ainsi, l'appellation « équation de Schrödinger non linéaire » n'est pertinente qu'au niveau **effectif classique** (champ moyen), et non au niveau fondamental de l'équation de Heisenberg pour les champs quantiques.

Conservation et commutation.

À propos d'autres interactions. La conservation des opérateurs nombre total de particules \hat{Q} et quantité totale de mouvement \hat{P} dépend uniquement des **symétries** de l'interaction, et non de sa force :

- Une interaction **locale et à deux corps** de type $g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}$ (cas du modèle de **LL**) est invariante par $U(1)$ et par translation. Ainsi, \hat{Q} et \hat{P} sont conservés.
- Une interaction **à longue portée mais translationnellement invariante** (par exemple un potentiel dipolaire uniforme, ou un potentiel $V(x - y)$ dépendant seulement de la distance relative) conserve encore \hat{P} , et si elle respecte la symétrie $U(1)$, alors \hat{Q} reste aussi conservé.
- Une interaction **non uniforme ou dépendant explicitement de la position** (par exemple un potentiel externe $V(x)$, ou des bords durs) brise l'invariance par translation : \hat{P} n'est alors plus conservé.
- Une interaction qui **crée ou détruit des particules** brise la symétrie $U(1)$: \hat{Q} n'est plus conservé.

En résumé, la conservation de \hat{Q} et \hat{P} ne dépend pas de la nature microscopique de l'interaction, mais uniquement des **symétries correspondantes** de l'Hamiltonien.

Interactions de contact. Dans le cas particulier du modèle de LL, les opérateurs nombre total de particules \hat{Q} et quantité totale de mouvement \hat{P} commutent avec l'Hamiltonien \hat{H} :

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = 0, \quad [\hat{H}, \hat{P}] = 0. \quad (1.47)$$

Ils constituent donc des **intégrales du mouvement**. Cette propriété reflète directement la conservation du nombre de particules (symétrie $U(1)$) et l'invariance par translation du système (symétrie spatiale).

Nous verrons au chapitre 2 que, dans les systèmes intégrables comme le modèle de LL, cette situation s'étend à une **infinité d'intégrales du mouvement**. Cette richesse supplémentaire de conservation conduit naturellement à l'introduction de l'ensemble de Gibbs généralisé, appelé en anglais **Generalized Gibbs Ensemble (GGE)**.

États propres et valeurs propres. Les états propres $|\{\theta_a\}\rangle$, construits dans le cadre de la seconde quantification à partir de la solution du modèle de LL, sont simultanément fonctions propres des opérateurs \hat{Q} , \hat{P} et \hat{H} :

$$\hat{Q} |\{\theta_a\}\rangle = N |\{\theta_a\}\rangle, \quad \hat{P} |\{\theta_a\}\rangle = \left(\sum_{a=1}^N \theta_a \right) |\{\theta_a\}\rangle, \quad \hat{H} |\{\theta_a\}\rangle = \left(\frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \theta_a^2 \right) |\{\theta_a\}\rangle. \quad (1.48)$$

Conclusion. La première quantification constitue la base indispensable pour comprendre le comportement quantique d'un nombre fixe de particules. La seconde quantification en est une extension naturelle, nécessaire pour décrire des systèmes plus complexes où le nombre de particules peut varier. Elle repose sur la quantification des champs et l'introduction d'opérateurs de création et d'annihilation, ouvrant ainsi la voie à la physique quantique des champs et à de nombreuses applications modernes.

Les opérateurs \hat{Q} , \hat{P} (1.30) et \hat{H} (1.39) possèdent une structure diagonale commune dans la base des états propres $|\{\theta_a\}\rangle$, révélant la nature intégrable du modèle de LL. Leurs valeurs propres sont respectivement les 0^e, 1^{er} et 2^e moments des θ_a . Cette structure permet de généraliser la construction à une hiérarchie complète d'observables conservées, qui seront présentées au chapitre suivant.

En passant par la seconde quantification, nous avons pu relier l'Hamiltonien à une particule \hat{H}_1 (1.3) à un Hamiltonien à N particules \hat{H}_N (1.42) dans le modèle de Lieb–Liniger (système avec interactions ponctuelles). Les états $\varphi_{\{\theta_a\}}$ sont des états propres du nombre total de particules \hat{N}_N (1.31), de la quantité de mouvement totale \hat{P}_N (1.32) et de l'Hamiltonien \hat{H}_N .

Dans le cas d'un système à une particule, les états de la forme (1.9) sont déjà propres de \hat{N}_1 , \hat{P}_1 et \hat{H}_1 (cf. (1.4)). Mais quelle est leur forme pour N particules ? Et comment généraliser les conditions périodiques (1.7), valables pour une particule, à un système à N particules ?

Nous allons étudier le cas de $N = 2$ corps, afin de simplifier l'analyse tout en capturant les premiers effets non triviaux des interactions. Cela permettra de comprendre plus facilement les implications physiques des interactions ponctuelles, en particulier leur influence sur la structure des états propres, les conditions de continuité des fonctions d'onde, ainsi que les relations de dispersion modifiées. Ce cas servira de base pour introduire les concepts clés de la résolution exacte par la méthode de Bethe ansatz, avant de les généraliser au cas N -corps.

1.1.2 Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à 2 corps

Introduction au système de deux bosons avec interaction de contact. Considérons maintenant un système de deux bosons confinés dans une boîte unidimensionnelle de longueur L , avec des conditions aux limites périodiques. Contrairement au cas à une seule particule, une interaction de contact intervient ici dans la dynamique. L'Hamiltonien à deux particules s'écrit :

$$\hat{H}_2 = \hat{\mathcal{K}}_2 + \hat{\mathcal{V}}_2, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{K}}_2 = -\frac{1}{2}\partial_{z_1}^2 - \frac{1}{2}\partial_{z_2}^2, \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{V}}_2 = g \delta(z_1 - z_2). \quad (1.49)$$

On rappelle que, pour des particules de masse unitaire (i.e., $\hbar = m = 1$), les énergies propres de l'opérateur cinétique $\hat{\mathcal{K}}_2$, associées aux fonctions d'onde symétrisées $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}$, sont données par :

$$\varepsilon(\theta_1) + \varepsilon(\theta_2) = \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}. \quad (1.50)$$

Afin de simplifier le problème, nous nous plaçons dans le référentiel du centre de masse.

Changement de variables : coordonnées du centre de masse et relative. En première quantification, on introduit les nouvelles variables : $Z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ (centre de masse), $Y = z_1 - z_2$ (coordonnée relative). Dans ce changement de variables, l'opérateur laplacien total $\partial_{z_1}^2 + \partial_{z_2}^2$ devient $\frac{1}{2}\partial_Z^2 + 2\partial_Y^2$. L'Hamiltonien (1.49) se décompose alors en la somme de deux Hamiltoniens agissant respectivement sur Z et Y :

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = -\frac{1}{4}\partial_Z^2 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{rel}}, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{H}}_{\text{rel}} = -\partial_Y^2 + g\delta(Y). \quad (1.51)$$

Résolution du problème du centre de masse et de la coordonnée relative. L'Hamiltonien du centre de masse, $-\frac{1}{4}\partial_Z^2$, décrit une particule de masse totale $\bar{m} = 2$. Ses états propres sont des ondes planes associées à une énergie $\bar{\theta}^2$, avec : $\bar{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, jouant ici un rôle analogue à celui d'un pseudo-moment associé dans le référentiel de laboratoire. Le Hamiltonien relatif, $\hat{\mathcal{H}}_{\text{rel}}$, correspond quant à lui à une particule de masse réduite $\tilde{m} = \frac{1}{2}$ soumise à un potentiel delta centré en $Y = 0$. Son équation propre s'écrit :

$$-\partial_Y^2 \tilde{\varphi}(Y) + g\delta(Y) \tilde{\varphi}(Y) = \tilde{\varepsilon} \tilde{\varphi}(Y), \quad (1.52)$$

où $\tilde{\varepsilon}$ désigne l'énergie associée au mouvement relatif.

Forme symétrique de la fonction d'onde pour bosons. Dans le référentiel du centre de masse, le système est le même que celui d'une particule de masse $\tilde{m} = \frac{1}{2}$. Le système étant composé de particules bosoniques, on cherche une solution symétrique que l'on écrit sous la forme :

$$\tilde{\varphi}(Y) = a e^{i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} + b e^{-i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} \propto \sin\left(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}|Y| + \Phi)\right). \quad (1.53)$$

Le paramètre $\tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_2$ joue ici un rôle analogue à celui d'un pseudo-moment associé à la coordonnée relative, et la phase s'écrit

$$\Phi(\tilde{\theta}) = 2 \arctan\left(\frac{1}{i} \frac{a+b}{a-b}\right), \quad (1.54)$$

car $a \exp(ix) + b \exp(-ix) = 2\sqrt{ab} \sin\left(x + \arctan\left(-i \frac{a+b}{a-b}\right)\right)$. Pour $\tilde{\theta} < 0$, les termes exponentiels $\exp(i\tilde{\theta}|Y|/2)$ et $\exp(-i\tilde{\theta}|Y|/2)$ correspondent aux paires de particules entrantes et sortantes d'un processus de diffusion à deux corps.

En réinjectant l'ansatz (1.53) dans l'équation relative (1.52), on obtient l'énergie propre $\tilde{\varepsilon}$ du problème réduit. Elle prend la forme cinétique usuelle $\frac{1}{2} \times \text{masse} \times \text{vitesse}^2$. La masse réduite vaut ici $\tilde{m} = \frac{1}{2}$ et le paramètre $\tilde{\theta}$ joue le rôle d'une impulsion ; ainsi

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^2}{4}. \quad (1.55)$$

Cette énergie gouverne la décroissance exponentielle de la fonction d'onde dans la coordonnée relative : plus $\tilde{\theta}$ est grand, plus l'état est localisé autour de $Y = 0$, signe d'une interaction attractive plus forte entre les deux bosons.

La fonction d'onde relative présente des oscillations de fréquence $\tilde{\theta}/2$, et son énergie croît avec $\tilde{\theta}^2$. Cette solution correspond à un état de diffusion à deux corps en interaction ponctuelle. En revanche, une décroissance exponentielle autour de $Y = 0$ n'apparaît que dans le cas d'un couplage attractif ($g < 0$), où des états liés peuvent se former.

L'énergie totale se décompose enfin en la somme du mouvement du centre de masse et du mouvement relatif : $\bar{\theta}^2 + \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) = \varepsilon(\theta_1) + \varepsilon(\theta_2)$, où $\bar{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$.

Condition de discontinuité à cause du potentiel delta. En raison de la présence du potentiel delta centré en $Y = 0$, la dérivée première de la fonction d'onde $\tilde{\varphi}(Y)$ présente une discontinuité en ce point. En effet, le potentiel étant infini en $Y = 0$, la phase Φ du régime symétrique est déterminée en intégrant l'équation du mouvement autour de la singularité. En intégrant entre $-\epsilon$ et $+\epsilon$ et en faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient la condition de saut de la dérivée :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} -\partial_Y^2 \tilde{\varphi}(Y) + g\delta(Y)\tilde{\varphi}(Y) dY = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) dY,$$

$$\tilde{\varphi}'(0^+) - \tilde{\varphi}'(0^-) - g\tilde{\varphi}(0) = 0.$$

Détermination de la phase Φ . Et en évaluant la discontinuité de sa dérivée au point $Y = 0$, on trouve que la phase Φ satisfait la condition :

$$\Phi(\tilde{\theta}) = 2 \arctan(\tilde{\theta}/g) \in [-\pi, +\pi]. \quad (1.56)$$

Cette relation exprime l'effet de l'interaction delta sur la phase de la fonction d'onde à deux particules. On en déduit que plus le couplage g est fort ($g \rightarrow \infty$), plus la phase Φ se rapproche de zéro. Cela correspond à une fonction d'onde qui s'annule en $Y = 0$, caractéristique d'un régime d'imperméabilité totale.

À l'inverse, dans la limite d'une interaction faible ($g \rightarrow 0$), la phase Φ tend vers π (ou $-\pi$, selon le signe de $\tilde{\theta}$). Dans ce cas, la discontinuité de la dérivée de la fonction d'onde au point $Y = 0$ devient négligeable, ce qui traduit une interaction absente entre les deux particules.

Phase de diffusion à deux corps. En combinant les équations (1.54) et (1.56) avec l'identité analytique valable pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $2 \arctan(z) = i \ln\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)$ i.e. $e^{2i \arctan(z)} = \frac{1+iz}{1-iz}$, on obtient que le rapport des amplitudes a et b de la fonction d'onde relative (1.53) définit la *phase de diffusion* $\Phi(\tilde{\theta}) = i \ln\left(-\frac{b}{a}\right)$. On introduit alors la *matrice de diffusion* (ou *facteur de diffusion*) noté $S(\theta)$, définie comme une phase complexe :

$$S(\theta) \doteq e^{i\Phi(\theta)} \quad (1.57)$$

Dans le cas d'une interaction de type delta, cette fonction prend la forme explicite :

$$S(\tilde{\theta}) = \frac{1 + i\tilde{\theta}/g}{1 - i\tilde{\theta}/g}. \quad (1.58)$$

Cette expression, unitaire et analytique, caractérise entièrement la diffusion élastique à deux corps dans le modèle considéré.

Lien entre la phase de diffusion et le décalage temporel — interprétation semi-classique Wigner (1955) [Wig55], à la suite d'Eisenbud (1948) [Eis48], a mis en évidence un lien entre la **phase de diffusion** et un *décalage temporel*, interprétation qui peut être éclairée dans une perspective semi-classique. L'idée de Wigner repose sur l'analyse d'un paquet d'ondes incident, constitué de la superposition de deux ondes planes de moments voisins, $\tilde{\theta}/2$ et $\tilde{\theta}/2 + \delta\tilde{\theta}$:

$$\tilde{\varphi}_{\text{inc}}(Y) \propto e^{i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} + e^{i\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|}. \quad (1.59)$$

Cette superposition évolue dans le temps comme :

$$\tilde{\varphi}_{\text{inc}}(Y, t) \propto e^{i(\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y| - t\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}))} + e^{i(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y| - t\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta}))}. \quad (1.60)$$

Le centre de ce 'paquet d'ondes' se situe à la position où les phases des deux termes coïncident, c'est-à-dire au point où $|Y|\delta\tilde{\theta} - t[\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta}) - \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta})] = 0$, ce qui donne $|Y| \simeq \tilde{\theta} t$ avec la vitesse réduite $\tilde{\theta} = 2\tilde{\varepsilon}'(\tilde{\theta})$. Selon les équations (1.53) et (1.58), l'état sortant de la diffusion correspondant serait :

$$\tilde{\varphi}_{\text{outc}}(Y, t) \propto -e^{i\Phi(\tilde{\theta})} e^{-i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} - e^{i\Phi(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})} e^{-i\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|}. \quad (1.61)$$

En répétant l'argument précédent de la stationnarité de phase, on trouve que la coordonnée relative est à la position $|Y| \simeq \tilde{\theta}t - 2\Phi'(\tilde{\theta})$ au moment t .

$$|Y| \simeq \tilde{\theta}t - 2\Delta(\tilde{\theta}) \quad (1.62)$$

où le **déplacement collisionnel** $\Delta(\theta)$ est donné par la dérivée de la *phase de diffusion*,

$$\Delta(\theta) \doteq \frac{d\Phi}{d\theta}(\theta) = \frac{2g}{g^2 + \theta^2}. \quad (1.63)$$

Retour aux coordonnées du laboratoire. En revenant aux coordonnées du laboratoire, la fonction d'onde à deux corps s'écrit $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) = \langle \emptyset | \hat{\Psi}(z_1) \hat{\Psi}(z_2) | \{\theta_1, \theta_2\} \rangle / \sqrt{2}$, dans le cas $z_1 < z_2$, c'est-à-dire pour une séparation relative $Y = z_1 - z_2 < 0$ (on pourra symétriser ultérieurement). Dans le référentiel du laboratoire, le centre de masse évolue selon $Z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \bar{\theta}t$. Ainsi, la position semi-classique des deux particules après la collision s'écrit

$$z_1 = Z + \frac{Y}{2} \simeq \theta_1 t - \Delta(\theta_1 - \theta_2), \quad z_2 = Z - \frac{Y}{2} \simeq \theta_2 t + \Delta(\theta_1 - \theta_2). \quad (1.64)$$

La figure 1.1 illustre schématiquement la collision de deux particules et le décalage spatial $\Delta(\theta_1 - \theta_2)$ qui en résulte dans l'évolution semi-classique de leurs positions.

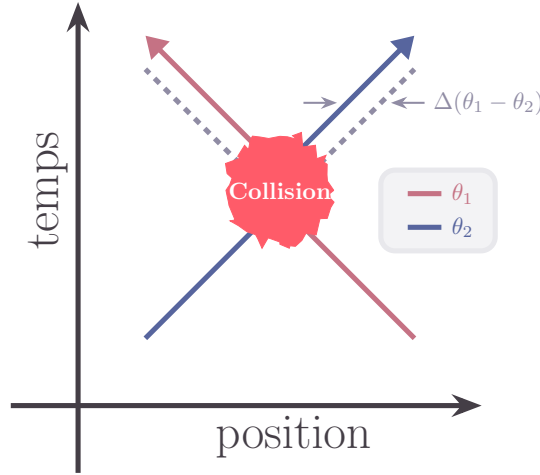


FIGURE 1.1 – Schéma de collision entre deux quasi-particules et du décalage spatial $\Delta(\theta_1 - \theta_2)$.

On peut vérifier les identités utiles suivantes :

$$z_1 \theta_1 + z_2 \theta_2 = 2Z\bar{\theta} + \frac{1}{2}Y\tilde{\theta}, \quad z_1 \theta_2 + z_2 \theta_1 = 2Z\bar{\theta} - \frac{1}{2}Y\tilde{\theta},$$

ce qui est en accord avec les masses associées : masse totale $\bar{m} = 2$, masse réduite $\tilde{m} = \frac{1}{2}$.

Pour revenir à la représentation observée dans le laboratoire, il est nécessaire de multiplier l'ansatz dans le référentiel du centre de masse (Eq. (1.53)) par un facteur de phase globale $\exp(2iZ\bar{\theta})$. On obtient alors l'expression de la fonction d'onde :

$$\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) \propto \begin{cases} (\theta_2 - \theta_1 - ig)e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2} - (\theta_1 - \theta_2 - ig)e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1} & \text{si } z_1 < z_2 \\ (z_1 \leftrightarrow z_2) & \text{si } z_1 > z_2 \end{cases} \quad (1.65)$$

Pour $\theta_1 > \theta_2$, les deux termes exponentiels $e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2}$ et $e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1}$ correspondent respectivement aux ondes entrantes et sortantes dans le canal de diffusion à deux corps [BD22]. Le rapport de leurs amplitudes définit la **phase de diffusion** Φ et **matrice diffusion** S à deux corps (1.58), reste inchangé mais voici une autre écriture :

$$S(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\theta_1 - \theta_2 - ig}{\theta_2 - \theta_1 - ig}. \quad (1.66)$$

Cette phase caractérise entièrement le processus de diffusion dans le modèle de LL à deux particules.

Conditions périodiques et équations de Bethe pour deux bosons. Dans ce paragraphe, on écrit la fonction d'onde obtenue en (1.65) sous la forme

$$\varphi_{\{\theta_1 < \theta_2\}}(z_1, z_2) = a e^{iz_1 \theta_1 + iz_2 \theta_2} + b e^{iz_1 \theta_2 + iz_2 \theta_1}, \quad (1.67)$$

où a et b sont deux coefficients complexes.

Périodicité en z_2 . On impose une condition de périodicité sur la fonction (1.67) : $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2 = L) = \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2 = 0)$, avec $0 < z_1 < z_2 = L$. Au point $z_2 = L$, la configuration reste dans le secteur $z_1 < z_2$, tandis qu'à $z_2 = 0$, on entre dans le secteur $z_2 < z_1$. La continuité de la fonction d'onde impose alors d'échanger les coordonnées $z_1 \leftrightarrow z_2$: $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, L) = \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(0, z_1)$. En utilisant l'expression explicite de l'ansatz dans les deux secteurs, on obtient l'égalité suivante :

$$a e^{i\theta_1 z_1 + i\theta_2 L} + b e^{i\theta_2 z_1 + i\theta_1 L} = a e^{i\theta_2 z_1} + b e^{i\theta_1 z_1}. \quad (1.68)$$

Cette relation, valable pour tout $z_1 \in [0, L]$, fixe une contrainte sur le rapport b/a . En utilisant l'expression de la phase de diffusion introduite en (1.66) (valable pour $z_1 < z_2$), on a :

$$-\frac{b}{a} = e^{i\Phi(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (1.69)$$

avec la fonction Φ donnée par l'équation (1.56).

On obtient une condition sur les phases θ_1 et θ_2 , cœur de la quantification imposée par le formalisme de Bethe. En identifiant les coefficients de $e^{i\theta_1 z_1}$ et $e^{i\theta_2 z_1}$ indépendamment dans (1.68), on obtient $e^{i\theta_2 L} a = b$, $e^{i\theta_1 L} b = a$, c'est-à-dire en utilisant (1.69), les **équations de Bethe à deux particules** :

$$e^{i\theta_1 L} e^{i\Phi(\theta_1 - \theta_2)} = -1, \quad e^{i\theta_2 L} e^{i\Phi(\theta_2 - \theta_1)} = -1. \quad (1.70)$$

En prenant le logarithme, elles se réécrivent sous la forme usuelle :

$$\theta_1 L + \Phi(\theta_1 - \theta_2) = 2\pi I_1, \quad \theta_2 L + \Phi(\theta_2 - \theta_1) = 2\pi I_2, \quad (1.71)$$

où $I_1, I_2 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ sont des nombres demi-entiers.

Périodicité sur z_1 . Le raisonnement symétrique conduit exactement aux mêmes égalités (1.70) et (1.71). Ces équations constituent la quantification complète du gaz de Lieb–Liniger à deux bosons sur un cercle de longueur L et seront le point de départ pour l'étude de l'état fondamental et des excitations.

En comparaison avec le cas d'une seule particule (où la condition aux bords périodiques impose simplement $\theta L = 2\pi n$ (1.7)), on voit que les équations de Bethe à deux particules (1.70)–(1.71) incorporent la fonction Φ , qui encode explicitement l'**interaction entre particules**.

1.1.2.1 Interprétation physique pour deux particules et rôle de la rapidité

Pour bien comprendre le sens physique des équations de Bethe (1.71), nous avons commencé par le cas de deux particules. Dans ce cadre, les particules interagissent lorsqu'elles se croisent, et à chaque interaction elles acquièrent une **phase de diffusion** Φ . L'état propre du système est obtenu en imposant que l'onde multi-corps soit périodique sur un cercle de longueur L : chaque particule effectue une rotation complète, accumule une phase cinématique $e^{i\theta L}$ liée à son mouvement libre, ainsi que des contributions de phase dues aux diffusions avec l'autre particule. Cela donne lieu à une quantification des **pseudo-impulsions** θ via l'équation de Bethe.

Pour décrire ces **excitations**, ces **quasi-particules**, on introduit le paramètre θ appelé **rapidité**. Ce terme vient de la théorie relativiste [ZZ79; BBT03], mais reste pertinent même dans des modèles non relativistes, comme ici. La rapidité est choisie comme **paramètre spectral naturel** : elle étiquette les états propres, linéarise les relations de dispersion dans certains régimes, et elle simplifie considérablement les équations de Bethe.

On peut interpréter chaque θ comme la **vitesse d'une quasi-particule** : une entité collective qui se comporte comme une particule libre, mais qui tient compte des effets des interactions avec les autres. Contrairement à une particule élémentaire, une **quasi-particule** est une excitation émergente du système à plusieurs corps : elle résume de façon efficace le comportement collectif d'une particule « habillée » par son environnement d'interactions. Cette notion est centrale en physique des systèmes quantiques à N corps, où les excitations ne sont plus des particules indépendantes, mais des objets collectifs.

Ainsi, dans l'image de Bethe, les états propres sont des configurations stables de N quasi-particules de rapidités $\theta_1, \dots, \theta_N$, dont les valeurs sont quantifiées par les conditions d'interférence imposées par les équations de Bethe.

1.2 Équation de Bethe et distribution de rapidité

1.2.1 Fonction d'onde dans le secteur ordonné et représentation de Gaudin

Sans en faire ici la démonstration, donnons une forme généralisée de la fonction propre à N particules (Eq (1.21)), qui prolonge naturellement l'expression obtenue pour le cas à deux corps (Eq (1.65)). Dans le domaine $z_1 < z_2 < \dots < z_N$, la fonction d'onde pour un état de Bethe à N particules s'écrit [KIB93; GC12; LL63; Fra16; Wou15] :

$$\begin{aligned} \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1 < \dots < z_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle \emptyset | \hat{\Psi}(z_1) \dots \hat{\Psi}(z_N) | \{\theta_a\} \rangle \\ &\propto \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \left(\prod_{1 \leq a < b \leq N} (\theta_{\sigma(b)} - \theta_{\sigma(a)} - ig) \right) e^{i \sum_{j=1}^N z_j \theta_{\sigma(j)}}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

où la somme s'étend sur toutes les permutations σ de $\{1, \dots, N\}$. Le facteur $(-1)^{|\sigma|}$ est la signature de la permutation, et les amplitudes dépendent des différences de quasi-moments θ_j ainsi que du couplage g . Cette fonction d'onde est ensuite étendue par symétrie aux autres domaines du type $z_{\pi(1)} < z_{\pi(2)} < \dots < z_{\pi(N)}$ via des propriétés d'échange symétriques.

1.2.2 Conditions aux bords périodiques

Les équations précédentes ont été établies pour un système défini sur la droite réelle. Cependant, dans une perspective thermodynamique, il est essentiel de considérer une densité finie N/L . Cela peut être obtenu en compactifiant l'espace sur un cercle de longueur L , i.e. en imposant les *conditions aux bords périodiques*.

Concrètement, cela consiste à identifier $x = 0$ et $x = L$ et à exiger que la fonction d'onde soit périodique lorsqu'une particule fait le tour du système :

$$\varphi_{\{\theta_a\}}(x_1, \dots, x_{N-1}, L) = \varphi_{\{\theta_a\}}(0, x_1, \dots, x_{N-1}). \quad (1.73)$$

Cette condition doit être satisfaite pour chaque particule. Or, déplacer la j -ième particule de x_j à $x_j + L$ revient à la faire passer devant toutes les autres : cela introduit un facteur de diffusion à chaque croisement.

1.2.2.1 Équations de Bethe exponentielles

En imposant les conditions de périodicité sur la fonction d'onde de type Bethe (1.72), on généralise l'équation (1.70) pour N particules. On obtient que chaque moment θ_a doit satisfaire l'équation :

$$e^{i\theta_a L} \prod_{b \neq a} S(\theta_a - \theta_b) = (-1)^{N-1}, \quad a = 1, \dots, N, \quad (1.74)$$

où la matrice diffusion $S(\theta)$ définie en (1.57), (1.58) et (1.66) est l'amplitude de diffusion à deux corps. Le signe $(-1)^{N-1}$ vient du fait que chaque permutation change la signature du déterminant dans la représentation de Gaudin.

1.2.2.2 Équations de Bethe logarithmiques

En prenant le logarithme du membre gauche et du membre droit de l'équation (1.74), on généralise l'équation (1.71). On obtient sa forme *logarithmique* :

$$L\theta_a + \sum_{b=1}^N \Phi(\theta_a - \theta_b) = 2\pi I_a, \quad a = 1, \dots, N, \quad (1.75)$$

où les I_a sont des nombres quantiques. Ce sont des entiers $I_a \in \mathbb{Z}$ si N est impair, et des demi-entiers $I_a \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ si N est pair.

Dans la configuration d'état fondamental (ou de type “mer de Fermi”), ces nombres sont pris de manière symétrique autour de zéro (voir Fig 1.2(a)) :

$$I_a = a - \frac{N+1}{2}, \quad \text{pour } a \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.76)$$

ce qui correspond au choix symétrique des nombres quantiques pour l'état fondamental. Il en résulte une distribution uniforme des θ_a dans l'intervalle autour de zéro $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$ où θ_{\max} est le paramètre de Fermi (ou rapidité maximale).

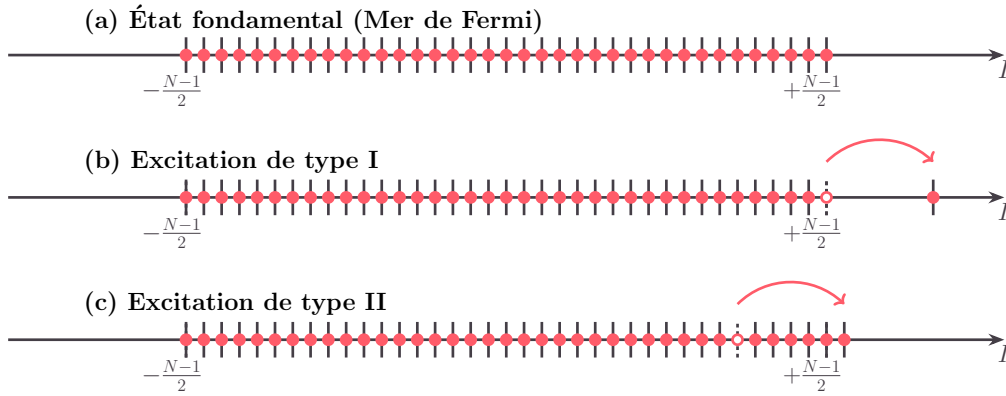


FIGURE 1.2 – Représentation schématique de la mer de Fermi pour un système de N particules : (a) distribution occupée à l'état fondamental, analogue à une mer de Fermi idéale ; (b) modification de cette distribution sous l'effet d'une excitation élémentaire de type I ; (c) modification correspondante en présence d'une excitation élémentaire de type II.

Tous les nombres I_a sont distincts. Cette propriété établit un lien direct avec un gaz de **fermions libres** en une dimension : bien que les particules du modèle de Lieb–Liniger soient bosoniques, la structure des équations de Bethe impose une exclusion effective au niveau des nombres quantiques. Pour cette raison, on parle de **nombres quantiques fermioniques**. L'équation de Bethe (1.75) définit ainsi une bijection entre une configuration de rapidité $\{\theta_a\}$ (BA) et un ensemble de nombres quantiques $\{I_a\}$ (**Fermionic Bethe Ansatz (FBA)**) [Gir60].

En particulier, dans la limite d'**interaction forte** (i.e. $g \rightarrow \infty$ c'est-à-dire si $\Phi = 0$), les équations (1.75) se réduisent à $L\theta_a = 2\pi I_a$, soit $\theta_a = 2\pi I_a/L$. Cela correspond exactement aux quantifications de l'impulsion pour des **fermions libres sans spin**, dans une boîte de taille L , avec conditions aux bords périodiques.

L'interprétation est alors la suivante : les solutions de Bethe θ_a décrivent des quasi-particules interagissantes, dont la configuration est déterminée par l'ensemble des nombres quantiques I_a , eux-mêmes analogues aux **moments quantiques d'un gaz de fermions libres**.

1.2.2.3 Interprétation physique

Les équations de Bethe (1.75) représentent une *quantification des pseudo-impulsions* θ_a des particules en interaction, résultant d'un *interféromètre multi-corps sur le cercle* : chaque particule accumule une phase $e^{i\theta_a L}$ due au mouvement libre, ainsi que des phases de diffusion lorsqu'elle croise les autres.

Ce système d'équations détermine les états propres du système de LL en volume fini, et joue un rôle fondamental dans la description exacte de ses propriétés thermodynamiques et dynamiques.

1.2.3 Thermodynamique du gaz de Lieb–Liniger à l'état fondamental

Dans la limite thermodynamique, le nombre de particules N et la longueur L du système tendent vers l'infini de telle sorte que leur rapport reste fini :

$$\lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty \\ N/L = \text{const}}} \frac{N}{L} = n < \infty,$$

où n désigne la densité linéique de particules.

Considérons désormais le système à température nulle. L'état fondamental dans le secteur à nombre de particules fixé correspond à la configuration d'énergie minimale parmi les solutions des équations de Bethe (1.75).

Dans la limite thermodynamique ($\lim_{\text{therm}} \equiv \lim_{\substack{L, N \rightarrow \infty, \infty \\ N/L = \text{const}}}$), les valeurs de θ_a deviennent quasi-continues, avec un espacement $\theta_{a+1} - \theta_a = O(1/L)$, et se condensent dans un intervalle symétrique autour de zéro $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$. En supposant l'ordre $I_a \geq I_b$ implique $\theta_a \geq \theta_b$, cet intervalle constitue ce qu'on appelle la *mer de Fermi* (ou sphère de Fermi en dimension un).

Distribution de rapidité $\rho(\theta)$. Nous introduisons la **distribution de rapidité macroscopique** par unité de longueur, notée $\rho(\theta)$, et définie par

$$L\rho(\theta)\delta\theta \doteq \text{nombre de quasi-particules ayant une rapidité dans } [\theta, \theta + \delta\theta]. \quad (1.77)$$

Autrement dit, dans un petit intervalle $\delta\theta$, le nombre total de particules ayant une rapidité dans cet intervalle est approximativement :

$$\delta N(\theta) = L\rho(\theta)\delta\theta \quad (1.78)$$

Avec les rapidités θ_a ordonnées *i.e.* $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$. Pour des intervalles $[\theta_a, \theta_a + \delta\theta_a]$ assez petits $\delta\theta_a = \theta_{a+1} - \theta_a$, est correspond à $\delta N(\theta_a) = 1$ quasi-particule (car une seule particule occupe l'intervalle entre deux rapidités consécutives). Dans la limite thermodynamique la dernière équation (1.78) se réécrit comme :

$$\rho(\theta_a) = \lim_{\text{therm}} \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\theta_{a+1} - \theta_a} > 0. \quad (1.79)$$

On peut aussi écrire la distribution de rapidité sous la forme :

$$\rho(\theta) = \lim_{\text{therm}} \frac{1}{L} \sum_{a=1}^N \delta(\theta - \theta_a). \quad (1.80)$$

Densité d'états $\rho_s(\theta)$. Intéressons-nous maintenant à la **densité d'états** $\rho_s(\theta)$, définie par

$$\rho_s(\theta_a) \doteq \frac{1}{L} \lim_{\text{therm}} \frac{|I_{a+1} - I_a|}{|\theta_{a+1} - \theta_a|}, \quad (1.81)$$

soit en notant la fonction $I(\theta_a) = I_a$, le passage discret-continu permet d'écrire :

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta_a). \quad (1.82)$$

L'application des équations de Bethe sous forme logarithmique (1.75) conduit alors à

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = 1 + \frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b), \quad (1.83)$$

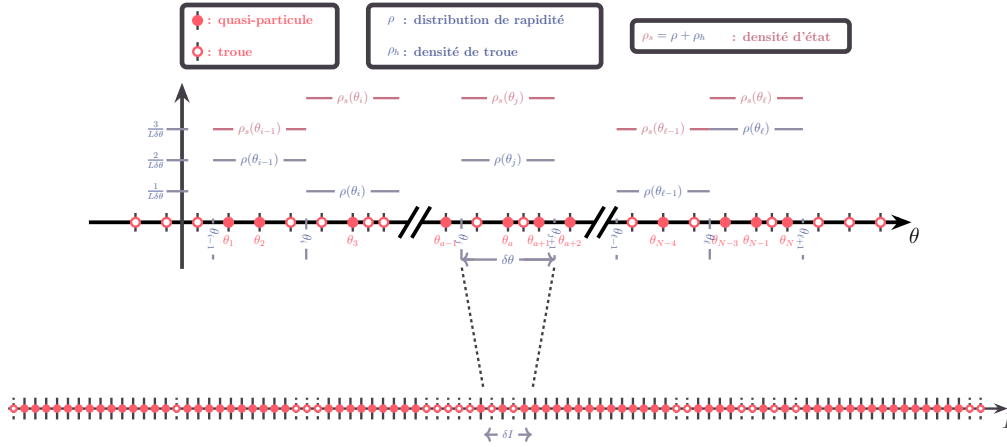


FIGURE 1.3 – Rapidités dans l'intervalle $[\theta, \theta + \delta\theta]$ s'associent à un ensemble de nombres quantiques fermioniques situés dans $[I, I + \delta I]$. La densité d'états ρ_s se déduit alors de la relation $\delta I \simeq L\rho_s(\theta)\delta\theta$

ce qui relie ρ_s au déplacement collisionnel Δ défini dans l'équation (1.63).

Dans l'état fondamental, toutes les positions disponibles dans l'intervalle $[-\theta_{\max}, +\theta_{\max}]$ sont occupées. On a donc :

$$\rho(\theta) = \rho_s(\theta). \quad (1.84)$$

La quantité $L\rho(\theta)d\theta$ représente le nombre de rapidités dans la cellule infinitésimale $[\theta, \theta + d\theta]$, tandis que $N = L \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \rho(\theta) d\theta$ donne le nombre total de particules dans le système. Le passage de la somme discrète à l'intégrale dans le second membre de l'équation de Bethe s'effectue en utilisant la correspondance :

$$\frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b) \xrightarrow{\text{therm}} \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \Delta(\theta_a - \theta) \rho(\theta) d\theta. \quad (1.85)$$

Ainsi, l'équation pour la densité d'états (1.83) devient (Fig 1.3) :

$$2\pi\rho_s(\theta) = 1 + \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') d\theta', \quad (1.86)$$

et, comme $\rho = \rho_s$, à l'état fondamental, on obtient l'équation linéaire intégrale satisfaite par la distribution de rapidités :

$$\rho(\theta) - \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \frac{\Delta(\theta - \theta')}{2\pi} \rho(\theta') d\theta' = \frac{1}{2\pi}. \quad (1.87)$$

1.2.4 Excitations élémentaires

À partir de l'état fondamental dans le régime d'interaction forte, les excitations élémentaires du modèle de LL ont été classifiées par Lieb en deux types distincts [Lie63]. Ces excitations peuvent être comprises comme des perturbations de la mer de Fermi formée par les quasi-particules.

- **Excitations de type I :** Il s'agit de remplacer une quasi-particule avec un nombre fermionique au bord de Fermi I_N (ou I_{-N}) par une quasi-particule avec un nombre fermionique $I' > I_N$ (resp. $I' < I_{-N}$), c'est-à-dire au-delà du bord de la mer de Fermi (voir Fig 1.2(b)). Ces excitations sont analogues à des excitations de particules libres et, dans la limite des faibles interactions ($g \rightarrow 0$), leur relation de dispersion reproduit celle prédite par la théorie de Bogoliubov .
- **Excitations de type II :** Ces excitations sont de type particule-trou. Elles sont obtenues en remplaçant une quasi-particule de la mer de Fermi avec un nombre fermionique I_a (i.e., en créant un trou dans

l'état fondamental) et de le remplacer par une quasi-particule avec $I' = I_{N+1} = N/2$ ou $I' = I_{N-1} = -N/2$ et en réarrangeant les autres nombres fermionique (voir Fig 1.2(c)). Cela correspond à une excitation interne pseudo-mer de Fermi, avec conservation du nombre de particules. Pour de petits I' , la dispersion est linéaire, correspondant à des modes phononiques. Dans la limite d'interaction faible $g \rightarrow 0$, ces excitations peuvent être interprétées comme des solitons sombres [IT80; Kar+15].

Ces deux types d'excitations définissent ensemble le spectre complet du modèle de Lieb-Liniger et permettent d'accéder aux propriétés dynamiques du système, telles que les fonctions de réponse ou la structure du spectre d'énergie.

Équation de Bethe continue. Hors de l'état fondamental, la notion de « mer de Fermi » n'est plus bien définie, et les équations (1.84) et (1.87) ne sont donc plus valides (en particulier, on n'a plus $\rho = \rho_s$). Dans ce cadre, les équations discrètes de Bethe (1.86) se condensent, à la limite thermodynamique, en une équation intégrale reliant les densités de rapidité :

$$2\pi\rho_s(\theta) = 1 + (\Delta \star \rho)(\theta), \quad (1.88)$$

où le symbole \star désigne la *convolution* :

$$[\Delta \star \rho](\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta').$$

On introduit alors la **densité de trous** $\rho_h(\theta)$ définie par

$$\rho_s(\theta) = \rho(\theta) + \rho_h(\theta), \quad (1.89)$$

ainsi que la *fonction d'occupation* (ou facteur d'occupation de type Fermi–Dirac)

$$v(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho_s(\theta)}. \quad (1.90)$$

Opération de *dressing*.

Définition. À toute fonction $f(\theta)$, on associe sa version *habillée* (ou *dressed*) $f_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta)$, définie comme la solution de l'équation intégrale suivante :

$$f_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta) = f(\theta) + \frac{1}{2\pi} (\Delta \star [\nu f^{\text{dr}}])(\theta). \quad (1.91)$$

Ici, $v(\theta)$ est le **facteur d'occupation**, et $\Delta/2\pi$ est le **noyau de diffusion** caractéristique du modèle considéré.

Interprétation physique Le dressing incorpore à tous ordres les effets de rétrodiffusion entre quasi-particules. Il encode ainsi les corrections d'interaction aux grandeurs physiques initiales $f(\theta)$. L'opération de *dressing* joue un rôle central dans la description thermodynamique et dynamique des systèmes intégrables : elle permet d'exprimer les grandeurs physiques effectives (charges, courants, vitesses de groupe, etc.) en termes de leurs versions habillées par les interactions.

Exemple : densité de sites En prenant $f(\theta) = 1$ dans l'équation (1.91), on obtient : $1_{[\nu]}^{\text{dr}} = 1 + \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu 1_{[\nu]}^{\text{dr}})$ soit directement :

$$2\pi\rho_s = 1_{[\nu]}^{\text{dr}}, \quad (1.92)$$

ce qui n'est autre que la relation (1.88).

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons introduit le modèle de **Lieb–Liniger (LL)**, qui décrit un gaz de bosons unidimensionnel soumis à une interaction de contact. Dans ce cadre, les grandeurs conservées naturelles ne sont pas seulement le nombre total de particules \hat{Q} et la quantité de mouvement totale \hat{P} , mais également l'énergie associée à l'Hamiltonien **LL**, \hat{H} , (plutôt qu'à la simple énergie cinétique \hat{K}). Ces charges conservées correspondent respectivement aux moments d'ordre 0, 1 et 2 en rapidité. Comme nous le verrons au chapitre suivant, des charges d'ordre supérieur interviennent dans la description des états en équilibre, notamment via le **GGE**.

L'imposition de conditions aux bords périodiques conduit naturellement aux équations de **Bethe Ansatz (BA)**, voir (1.75). Dans la limite thermodynamique, celles-ci se condensent en une équation intégrale reliant la densité d'états $\rho_s(\theta)$ à la distribution de rapidités $\rho(\theta)$, cf. (1.88). Le Bethe Ansatz établit ainsi le lien fondamental entre ces deux grandeurs et constitue la base de la description thermodynamique du modèle.

Le chapitre suivant sera consacré à l'introduction du **GGE** et à l'écriture explicite du formalisme de Bethe Ansatz thermodynamique (**TBA**), qui fournit un cadre puissant pour décrire les propriétés thermodynamiques et hors équilibre des systèmes intégrables.