

## Résumé

Nous passons en revue les progrès théoriques et expérimentaux récents concernant le comportement de l'Hydrodynamique Généralisée (GHD) du gaz de Bose unidimensionnel avec des interactions répulsives de contact, également connu sous le nom de gaz de Lieb-Liniger. Dans la première section, nous passons en revue la théorie du gaz de Lieb-Liniger, en introduisant les notions clés de rapidités et de distribution des rapidités. Cette dernière caractérise le gaz de Lieb-Liniger après relaxation et est au cœur de la GHD. Nous présentons également les régimes asymptotiques du gaz de Lieb-Liniger avec leurs descriptions approximatives dédiées. Dans la deuxième section, nous abordons le sujet principal et passons en revue les résultats théoriques sur la GHD dans les gaz de Bose 1D. Les troisième et quatrième sections sont consacrées aux résultats expérimentaux obtenus dans des expériences sur les atomes froids : la réalisation expérimentale du modèle de Lieb-Liniger est présentée dans la section 3, avec une sélection de résultats clés pour les systèmes à l'équilibre, et la section 4 présente les tests expérimentaux de la théorie GHD. Dans la section 5, nous passons en revue les effets des pertes d'atomes qui, en supposant des processus de pertes lentes, peuvent être décrits dans le cadre de la GHD. Nous concluons par quelques questions ouvertes.

## Introduction

Les systèmes physiques composés de nombreuses particules identiques se comportent très différemment en fonction des échelles de distance et de temps auxquelles ils sont sondés. Dans un gaz très dilué, sur des échelles de temps pas plus grandes que le temps typique entre deux collisions, les particules sont essentiellement non-interactives. Ainsi, deux nuages de fluide peuvent entrer en collision et simplement se traverser ; un exemple familier de ce phénomène en astrophysique est celui des nuages d'étoiles dans les galaxies en collision. En revanche, sur des échelles de temps beaucoup plus longues que le temps de collision, les particules subissent généralement un très grand nombre de collisions, de sorte que le fluide a le temps de se relaxer localement vers un état d'équilibre. Cette relaxation locale donne lieu à un comportement hydrodynamique, qui est typiquement bien plus complexe et non-linéaire que la simple propagation libre. Par exemple, on peut penser à deux gouttes d'eau qui entrent en collision : elles ne vont pas simplement se traverser. Il est plus probable que leur mouvement soit plus complexe, par exemple qu'elles se coalescent (?).

La dynamique des fluides à courts temps est capturée par une équation d'évolution pour la densité dans l'espace des phases des particules  $\rho(x, p, t)$  qui prend la forme d'une équation de transport libre, ou équation de Boltzmann sans collision. Typiquement,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, p, t) + v(p) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, p, t) - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} \rho(x, p, t) = 0. \quad (1)$$

Ici, nous écrivons l'équation dans une dimension spatiale ; l'extension aux dimensions supérieures est directe. Dans l'équation (1),  $v(p)$  est généralement la vitesse de groupe  $\partial \varepsilon(p) / \partial p$  d'une particule ayant un moment  $p$  et une énergie cinétique  $\varepsilon(p)$ , et  $V(x)$  est un potentiel externe. L'équation (1) est obtenue, par exemple, pour  $N$  particules classiques décrites par le Hamiltonien non-interactif  $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N [\varepsilon(p_j) + V(x_j)]$ . L'évolution de la densité dans l'espace des phases  $\rho(x, p, t) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j(t)) \delta(p - p_j(t))$  découle alors de l'évaluation du crochet de Poisson  $\partial \rho / \partial t = \{\mathcal{H}, \rho\}$ . Des équations similaires à l'équation (1) apparaissent dans la description de fluides constitués de particules à la fois classiques et quantiques ; nous y reviendrons ci-dessous.

Sur des échelles de temps bien plus longues que le temps de relaxation, l'équation (1) est supplantée par un système d'équations hydrodynamiques. À cette échelle, le fluide est localement relaxé vers un état d'équilibre à tout moment. Les états d'équilibre local sont paramétrés par les quantités conservées du système, dont l'évolution dans le temps est régie par des équations de continuité. Un bon exemple est celui d'un fluide galiléen avec un nombre de particules conservé, un moment conservé et une énergie conservée. Une description hydrodynamique moyennée, valide à grande échelle de distance et de temps, est obtenue en écrivant trois équations de continuité pour la densité de masse  $q_M$ , la densité de moment  $q_P$ , et la densité d'énergie  $q_E$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} q_M(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} j_M(x, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} q_P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} j_P(x, t) &= -\frac{1}{m} \frac{\partial V(x)}{\partial x} q_M(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} q_E(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} j_E(x, t) &= 0, \end{cases} \quad (2)$$

où  $j_M$ ,  $j_P$  et  $j_E$  sont les trois courants associés. Ici, la deuxième ligne n'est pas tout à fait une équation de continuité, sauf si  $\partial V / \partial x = 0$ . Cela est simplement dû au fait que le moment n'est pas conservé en présence d'une force externe : le membre de droite de cette équation d'évolution pour  $q_P$  est donné par la deuxième loi de Newton.

En raison de la relaxation locale, les courants dépendent de  $x$  et  $t$  uniquement à travers leur dépendance aux densités de charge. En général, un courant  $j$  est une fonction de toutes les densités de charge  $q$  et de leurs dérivées spatiales  $\partial_x q$ ,  $\partial_x^2 q$ , etc. Cependant, pour des variations de densité de très longues longueurs d'onde, la dépendance aux dérivées peut être négligée, et

$j_M$ ,  $j_P$  et  $j_E$  sont des fonctions de  $q_M$ ,  $q_P$  et  $q_E$  uniquement. Les équations hydrodynamiques d'ordre zéro obtenues de cette manière sont généralement appelées 'hydrodynamique à l'échelle d'Euler' ou 'limite hydrodynamique d'Euler'. À l'échelle d'Euler, les trois équations de continuité ci-dessus se réduisent aux équations d'Euler standards pour un fluide galiléen,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial x} (nu) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{1}{mn} \partial_x \mathcal{P} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} e + u \frac{\partial}{\partial x} e + \frac{1}{n} \mathcal{P} \partial_x u &= 0. \end{cases} \quad (3)$$

Ici,  $m$  est la masse des particules,  $n = q_M/m$  est la densité de particules,  $u = q_P/q_M$  est la vitesse moyenne du fluide, et  $e = (q_E - q_P^2/(2q_M) - nV(x))/n$  est l'énergie interne par particule. Pour passer des équations de conservation (2) au système (3), on utilise le fait que  $j_M = q_P$  en raison de l'invariance galiléenne. De plus, à l'échelle d'Euler,  $j_P = q_P^2/q_M + \mathcal{P}$  et  $j_E = (q_E + \mathcal{P})q_P/q_M$ , où  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(n, e)$  est la pression à l'équilibre.

Pour fermer le système d'équations (3), il faut connaître la pression à l'équilibre  $\mathcal{P}(n, e)$ , qui est une fonction de  $n$  et  $e$  et qui dépend des détails microscopiques du système. Dans certains modèles simples tels que le gaz parfait, une expression analytique simple pour la pression est disponible, mais en général il n'y en a pas. Pour le gaz de Bose unidimensionnel avec répulsion de contact, qui est au centre de cet article de revue,  $\mathcal{P}(n, e)$  peut être tabulée numériquement (voir la sous-section ??).

Pour conclure cette brève discussion des équations hydrodynamiques, mentionnons qu'il est bien sûr possible d'aller 'au-delà de l'échelle d'Euler', et de faire de l'hydrodynamique du premier ordre en conservant la dépendance des courants aux gradients des densités de charge. Cela conduit à des équations hydrodynamiques de type Navier-Stokes, qui incluent

des termes dissipatifs. Dans cet article de revue, nous nous concentrons principalement sur l'hydrodynamique à l'échelle d'Euler (ordre zéro).

Cet article de revue traite du comportement particulier semblable à un fluide qui émerge dans le gaz de Bose unidimensionnel quantique. Il est particulier en ce sens qu'il est simultanément sous la forme (2,3) et sous la forme (1), sur des échelles de temps beaucoup plus longues que l'inverse du taux de collision. Ce même comportement particulier est commun à tous les systèmes intégrables unidimensionnels, qu'ils soient classiques ou quantiques, et il est connu sous le nom d'Hydrodynamique Généralisée' ou GHD' depuis 2016 (??). Ici, le terme Généralisée' est utilisé de la même manière que dans Ensemble Gibbs généralisé' (??) : il désigne l'extension d'un concept (Ensemble de Gibbs' ou Hydrodynamique') du cas avec un petit nombre fini de quantités conservées au cas avec une infinité de celles-ci.

Pour illustrer l'émergence de l'Hydrodynamique Généralisée' dans un système avec une infinité de quantités conservées, il est instructif de penser à  $N$  billes de billard identiques de diamètre  $|\Delta|$  dont le mouvement est restreint à une ligne unidimensionnelle, voir Fig. 1. Ici, nous prenons  $\Delta < 0$ . [Cette drôle de convention garantit que les équations hydrodynamiques pour le gaz de hard core (4) sont presque les mêmes que celles pour le gaz de Lieb-Liniger, voir Eq. (??).  $\Delta$  est positif dans le gaz de Bose unidimensionnel répulsif, voir la Sous-section ??.] Ce modèle pour un gaz unidimensionnel classique est connu sous le nom de gaz de hard rod' dans la littérature de la physique statistique, voir e.g. (????????). Les billes sont à la position  $x_j$  et se déplacent à la vitesse  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Lorsque deux billes entrent en collision de manière élastique, elles échangent leurs vitesses, si bien que l'ensemble des vitesses est conservé à tout moment. Ainsi, ce système de plusieurs particules a une infinité de quantités conservées qui sont indépendantes dans la limite thermodynamique  $N \rightarrow \infty$ . En effet, pour toute fonction  $f$  de la vitesse, la charge  $Q[f] := \sum_{j=1}^N f(v_j)$  est conservée.

On peut introduire une densité de phase espace grossière des billes  $\rho(x, v) = \sum_{j=1}^N \delta_\ell(x - x_j) \delta_\sigma(v - v_j)$ , où  $\delta_\ell$  et  $\delta_\sigma$  sont des distributions lisses de poids un, concentrées autour de l'origine, par exemple deux Gaussiennes de largeur  $\ell$  et  $\sigma$ . Lorsque  $\ell$  et  $\sigma$  sont suffisamment grands pour que le volume du phase space  $[x, x + \ell] \times [v, v + \sigma]$  contienne un très grand nombre de billes, mais assez petits pour que la densité reste constante à travers le volume, la densité grossière évolue selon les deux équations

$$\begin{cases} \partial_t \rho(x, v, t) + \partial_x (v^{\text{eff}}[\rho](v) \rho(x, v, t)) - \frac{1}{m} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \partial_v \rho(x, v, t) = 0, \\ v^{\text{eff}}[\rho](v) = v - \Delta \int_{-\infty}^{\infty} (v^{\text{eff}}[\rho](v) - v^{\text{eff}}[\rho](w)) \rho(w) dw, \end{cases} \quad (4)$$

où nous avons inclus un potentiel externe  $V(x)$ . Ce sont les équations de l'Hydrodynamique Généralisée' pour le gaz de hard rod, initialement dérivées par ?, et prouvées par ? pour  $V(x) = 0$ . L'inclusion du potentiel de piégeage, et sa rupture des lois de conservation, a été étudiée plus récemment par ?.

La première équation (4) est similaire à l'équation de transport (1), bien que deux différences importantes doivent être soulignées. La première différence réside dans le champ d'application de l'Eq. (4) : il s'agit d'une description grossière du gaz de hard rod basée sur la relaxation locale, qui n'est valable qu'à l'échelle d'Euler. L'équation de transport libre (1), en

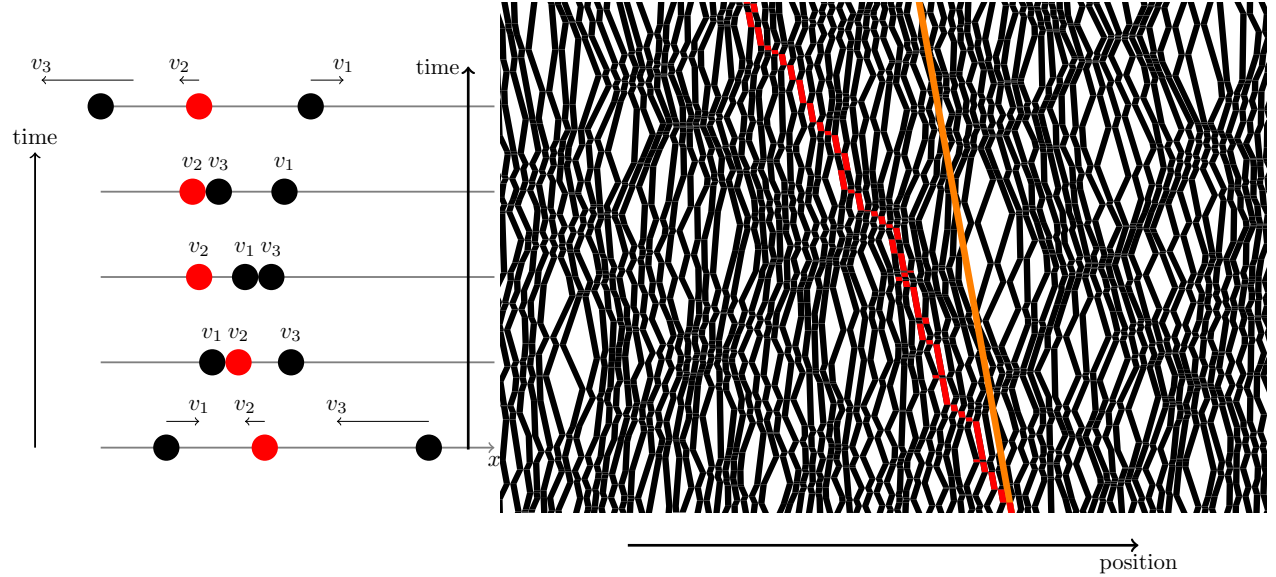


FIGURE 1 – Le système le plus simple qui exhibe l’Hydrodynamique Généralisée’ est sans doute le gaz de hard rod classique, c’est-à-dire des billes de billard identiques dont le mouvement est restreint à une ligne. À gauche : les billes entrent en collision de manière élastique et échangent leurs vitesses. On peut réindexer les billes après chaque collision de sorte que la vitesse ‘nue’  $v_j$  soit constante (ici, la bille rouge est celle avec la vitesse  $v_2$  à tout moment). À droite : à des échelles de distance et de temps grandes, la vitesse effective de la bille rouge  $v^{\text{eff}}$  (trajectoire rouge) est différente de sa vitesse ‘nue’  $v$  (trajectoire orange). La description en termes d’Hydrodynamique Généralisée’ du gaz de hard rod (4) est une limite hydrodynamique d’Euler où les interactions entre les particules entrent à travers la vitesse effective.

revanche, ne repose pas sur des hypothèses hydrodynamiques. La deuxième différence est qu’au lieu de la vitesse de groupe d’une seule particule, l’Eq. (4) implique une ‘vitesse effective’. Cette vitesse effective est une fonctionnelle de la densité  $\rho(v)$  à une position donnée  $x$  et un temps  $t$ , définie par la deuxième équation (4). Elle a une interprétation simple, voir Fig. 1. À chaque collision, les étiquettes des billes en collision peuvent être échangées, de sorte que chaque vitesse  $v_j$  reste constante, mais la position  $x_j$  change instantanément de  $\pm|\Delta|$  (le diamètre des billes). Pour une densité finie de billes, ces sauts entraînent une modification de la vitesse de propagation de la bille avec la vitesse  $v_j$  à travers le gaz,  $v_j \rightarrow v^{\text{eff}}[\rho](v_j)$ .

Les équations d’Hydrodynamique Généralisée (4) sont également analogues aux équations hydrodynamiques d’Euler (2)-(3), mais pour une infinité de charges. Toutes les charges sont conservées en l’absence de potentiel externe ( $V(x) = 0$ ), tandis que pour  $V(x) \neq 0$ , seule la conservation de la masse et de l’énergie est généralement attendue. Pour le voir, considérons les charges susmentionnées  $Q[f] = \sum_{j=1}^N f(v_j)$ , et leurs densités de charge associées  $q[f](x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\rho(x, v, t)dv$ . Ces densités de charge évoluent selon

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q[f](x, t) + \frac{\partial}{\partial x} j[f](x, t) &= -\frac{1}{m} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} f'(v)\rho(x, v, t)dv, \\ \text{avec } j[f](x, t) &= v^{\text{eff}}[\rho](v)q[f](x, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Lorsque  $V(x) = 0$ , la première équation est une équation de continuité qui exprime la conservation de  $Q[f]$ . La seconde ligne donne la valeur d’attente du courant en fonction des densités de charge sous les hypothèses hydrodynamiques.

Ainsi, comme affirmé ci-dessus, l’Hydrodynamique Généralisée capture un comportement particulier semblable à un fluide qui ressemble à la fois à un fluide obéissant à l’équation de transport libre (1) et à un fluide obéissant aux équations hydrodynamiques d’Euler (2,3).

Remarquablement, les équations d’Hydrodynamique Généralisée (4) ont réémergé en 2016, dans le contexte des systèmes quantiques intégrables unidimensionnels (??). Dans la décennie qui a précédé cette percée de 2016, d’énormes progrès avaient été réalisés sur la dynamique quantique hors d’équilibre, largement motivés par les avancées dans les expériences sur les atomes froids. Pour ne citer qu’un exemple, l’expérience de 2006 du Quantum Newton Cradle de ?, où deux nuages unidimensionnels d’atomes interagissants dans un potentiel harmonique  $V(x)$  subissent des milliers de collisions, échappant apparemment à la convergence vers l’équilibre thermique, était devenue une source d’inspiration importante et un défi pour les théoriciens des systèmes quantiques à plusieurs corps. De nombreuses avancées conceptuelles importantes sur la thermalisation (ou son

absence) des systèmes quantiques isolés, en particulier les développements autour de la notion d'Ensemble de Gibbs généralisé, ont eu lieu entre 2006 et 2016. Pourtant, une modélisation quantitativement fiable de la configuration du Quantum Newton Cradle, avec des paramètres expérimentalement réalistes, était restée complètement hors de portée. Comme d'habitude avec les systèmes quantiques à plusieurs corps, la croissance exponentielle de l'espace de Hilbert avec le nombre d'atomes  $N$  empêchait apparemment des simulations numériques directes de la dynamique.

La percée de 2016 de l'Hydrodynamique Généralisée a complètement changé cet état de choses. La réalisation que la dynamique des gaz quantiques ultrafroids unidimensionnels dans des expériences telles que le Quantum Newton Cradle est capturée par des équations d'Hydrodynamique Généralisée de la forme (4) a ouvert une nouvelle ère pour leur description théorique.

**Objectif de cette revue et organisation.** Notre but est de fournir un aperçu pédagogique des développements qui ont eu lieu sur le gaz de Bose unidimensionnel depuis la découverte en 2016 de l'Hydrodynamique Généralisée dans les systèmes quantiques intégrables (??). Étant donné que le sujet intéresse à la fois les physiciens des atomes froids et les physiciens statistiques quantiques, nous avons tenté d'écrire cet article de revue de manière à le rendre accessible à tous.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 1, nous examinons les faits de base concernant la théorie du gaz de Bose unidimensionnel qui sont utiles pour comprendre le développement de l'Hydrodynamique Généralisée. Nous fournissons une introduction au modèle de Lieb-Liniger répulsif, en mettant fortement l'accent sur le concept clé des rapidités. Nous passons également en revue les régimes asymptotiques du gaz de Bose unidimensionnel (quasicondensat, gaz de Bose idéal et régimes à cœur dur), qui sont souvent importants dans la description des expériences. Dans la section ??, nous présentons la description de l'Hydrodynamique Généralisée du gaz de Bose unidimensionnel et passons en revue les résultats théoriques qui ont été obtenus depuis 2016 avec cette approche. Dans la section ??, nous passons brièvement en revue les configurations expérimentales qui ont été utilisées pour réaliser des gaz de Bose unidimensionnels, ainsi que les principaux résultats expérimentaux obtenus en lien avec l'intégrabilité. Dans cette section, nous nous concentrons principalement sur les résultats obtenus avant l'avènement de l'Hydrodynamique Généralisée. Ensuite, dans la section ??, nous présentons les tests expérimentaux de l'Hydrodynamique Généralisée et les expériences récentes dont les descriptions ont reposé sur l'Hydrodynamique Généralisée. Dans la section ??, nous discutons brièvement des récents développements théoriques visant à décrire l'effet des pertes d'atomes. Nous discutons de certaines perspectives et questions ouvertes dans la Conclusion.

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>The Lieb-Liniger model and the rapidities</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1      | Le décalage de diffusion (ou délai temporel de Wigner) . . . . .                         | 6         |
| 1.2      | La fonction d'onde de Bethe et les rapidités en tant que moments asymptotiques . . . . . | 9         |
| 1.3      | Thermodynamic limit . . . . .  | 9         |
| 1.3.1    | Thermodynamic form of the Bethe equations . . . . .                                      | 9         |
| 1.3.2    | The dressing . . . . .   | 11        |
| 1.4      | Entropy maximization : the Yang-Yang equation . . . . .                                  | 11        |
| 1.4.1    | Calcule de Bess . . . . .  | 14        |
| 1.5      | Fluctuation de la distribution : Entropy maximization , the Yang-Ynag equation . . . . . | 18        |
| 1.5.1    | Rappel de Physique statistique . . . . .   | 18        |
| 1.5.2    | La probabilité de configuration en limite thermodynamique . . . . .                      | 20        |
| 1.5.3    | L'action . . . . .   | 22        |
| 1.5.4    | La fonction de partition . . . . .   | 25        |
| 1.5.5    | Dérivé seconde de l'action . . . . .   | 27        |
| 1.5.6    | Dérivé fonctionnelle . . . . .   | 30        |
| 1.5.7    | Tentative d'inversion de la dérivé seconde de l'action . . . . .                         | 30        |
| 1.5.8    | Fluctuation de $\nu$ . . . . .   | 37        |
| 1.5.9    | Brouillons . . . . .   | 41        |
| 1.5.10   | Résumé . . . . .   | 41        |
| <b>2</b> | <b>Rappel Physique statistique</b>   | <b>43</b> |
| <b>3</b> | <b>1</b>   | <b>43</b> |
| <b>4</b> | <b>Calcul des densités d'états</b>   | <b>44</b> |

## 1 The Lieb-Liniger model and the rapidities

En l'absence d'un potentiel externe, l'hamiltonien des bosons unidimensionnels avec une répulsion delta s'écrit, sous forme quantifiée du second ordre :

$$H = \int \Psi^\dagger(x) \left[ -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} - \mu + \frac{g}{2} \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \right] \Psi(x) dx. \quad (6)$$

Ici,  $\Psi^\dagger(x)$  et  $\Psi(x)$  sont les opérateurs de création/annihilation des bosons qui satisfont aux relations canoniques de commutation  $[\Psi(x), \Psi^\dagger(x')] = \delta(x - x')$ ,  $m$  représente la masse des bosons,  $g > 0$  est la force de répulsion en une dimension, et  $\mu$  est le potentiel chimique. Le nombre total de particules dans le système est  $N = \int \langle \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \rangle dx$ . Dans la littérature, il est courant de définir le paramètre  $c = mg/\hbar^2$ , homogène à une inverse de longueur. Dans une boîte de longueur  $L$ , le rapport de  $c$  à la densité de particules  $n = N/L$  donne la force de répulsion adimensionnelle, ou paramètre de Lieb,

$$\gamma = \frac{c}{n} = \frac{mg}{\hbar^2 n}. \quad (7)$$

Dans le reste de cette section, nous examinons quelques faits fondamentaux sur la solution exacte du modèle (6) de [Lieb et Liniger \(1963\)](#), consultez ([Gaudin 2014](#), [Korepin et al. 1997](#)) pour des introductions. En particulier, nous mettons l'accent sur le concept crucial des *rapidités*, et nous passons en revue un certain nombre de résultats qui se sont révélés utiles dans les développements récents de la dynamique hydrodynamique généralisée. Nous choisissons  $\hbar = m = 1$ .

Modèle de LIEB-LINIGER :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{z_i}^2 + g \sum_{i < j} \delta(z_i - z_j) \stackrel{\hbar=m=1}{=} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_{z_i}^2 + c \sum_{i < j} \delta(z_i - z_j). \quad (8)$$

## 1.1 Le décalage de diffusion (ou délai temporel de Wigner)

Il est instructif de commencer par le cas de  $N = 2$  particules sur une ligne infinie. En première quantification, en utilisant les coordonnées du centre de masse et relatives  $Z = (z_1 + z_2)/2$  et  $Y = z_1 - z_2$ ,

$$\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}$$

**Propriété 1.1.** Soient deux application  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $U$  et  $V$  sont ouverts) telles que  $\varphi(V) \subset U$ . On écrit  $\varphi$  sous la forme  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  où  $\varphi_i: V \rightarrow \mathbb{R}$  pour tous  $i$ . Soit  $a \in V$  tel que  $\varphi$  est différentiable en  $a$  et  $f$  est différentiable en  $\varphi(a)$ . Alors l'application  $F = f \circ \varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $a$  et

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket: \frac{\partial F}{\partial u_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a)) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(a)$$

avec la règle de la chaîne  $\partial_Z = \frac{\partial z_1}{\partial Z} \partial_{z_1} + \frac{\partial z_2}{\partial Z} \partial_{z_2}$ ,  $\partial_Y = \frac{\partial z_1}{\partial Y} \partial_{z_1} + \frac{\partial z_2}{\partial Y} \partial_{z_2}$ .

$$\begin{pmatrix} \partial_Z \\ \partial_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{z_1} \\ \partial_{z_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial_{z_1} \\ \partial_{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_Z \\ \partial_Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \partial_Z^2 &= \partial_{z_1}^2 + \partial_{z_2}^2 + 2\partial_{z_1} \partial_{z_2}, \\ 4\partial_Y^2 &= \partial_{z_1}^2 + \partial_{z_2}^2 - 2\partial_{z_1} \partial_{z_2}, \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2} \partial_Z^2 + 2\partial_Y^2 = \partial_{z_1}^2 + \partial_{z_2}^2$$

l'hamiltonien (6) se divise en une somme de deux problèmes indépendants à une seule particule.

$$H = -\frac{1}{2}\partial_{z_1}^2 - \frac{1}{2}\partial_{z_2}^2 + c\delta(z_1 - z_2) = -\frac{1}{4}\partial_Z^2 - \partial_Y^2 + c\delta(Y) \quad (9)$$

Les états propres de l'hamiltonien du centre de masse,  $-\frac{1}{4}\partial_Z^2$ , sont des ondes planes, et l'hamiltonien pour la coordonnée relative  $Y$  correspond à celui d'une particule de masse 1/2 en présence d'un potentiel delta en  $Y = 0$ . En raison de ce potentiel delta, la dérivée première de la fonction d'onde  $\varphi(Y)$  doit avoir une discontinuité en  $Y = 0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \underbrace{-\frac{1}{4}\partial_Z^2 \varphi(Y)}_0 - \partial_Y^2 \varphi(Y) + c\delta(Y)\varphi(Y) dY &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} E dY, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\varphi'(\epsilon) - \varphi'(-\epsilon)] - c\varphi(0) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} E dY, \\ \varphi'(0^+) - \varphi'(0^-) - c\varphi(0) &= 0. \end{aligned}$$

$\varphi'(0^+) - \varphi'(0^-) - c\varphi(0) = 0$ . En revenant aux coordonnées d'origine, on constate que la fonction d'onde à deux corps  $\varphi(z_1, z_2) = \langle 0 | \Psi(z_1) \Psi(z_2) | \varphi \rangle$  satisfait à cette condition :

Dans notre système ne compte que la difference des position  $z_1$  et  $z_2$ . Donc je suis convaincu que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} &= \lim_{z_1 \rightarrow z_2^+} = \lim_{z_2 \rightarrow z_1^-}, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} &= \lim_{z_1 \rightarrow z_2^-} = \lim_{z_2 \rightarrow z_1^+}, \\ \text{soit } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^\pm} &= \lim_{z_1 \rightarrow z_2^\pm} = \lim_{z_2 \rightarrow z_1^\mp}. \end{aligned}$$

et par le même raisonnement, je suis convaincu que

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_1^\pm} \partial_{z_1} \varphi(z_1, z_2) = \lim_{z_1 \rightarrow z_2^\mp} \partial_{z_2} \varphi(z_1, z_2)$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\partial_Y \varphi(\epsilon) - \partial_Y \varphi(-\epsilon)] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \partial_Y \varphi(\epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \partial_Y \varphi(\epsilon), \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z_2 \rightarrow z_1^+} [(\partial_{z_1} - \partial_{z_2}) \varphi(z_1, z_2)] - \frac{1}{2} \lim_{z_2 \rightarrow z_1^-} [(\partial_{z_1} - \partial_{z_2}) \varphi(z_1, z_2)], \\ &= \lim_{z_2 \rightarrow z_1^+} [(\partial_{z_1} - \partial_{z_2}) \varphi(z_1, z_2)] \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_1^+} [\partial_{z_2} \varphi(z_1, z_2) - \partial_{z_1} \varphi(z_1, z_2) - c\varphi(z_1, z_2)] = 0. \quad (10)$$

Les mêmes conditions s'appliquent lorsque  $x_1$  est échangé avec  $x_2$ , puisque la fonction d'onde est symétrique. Ainsi, les états propres de l'équation (9) sont

$$\varphi(z_1, z_2) \propto \begin{cases} (\theta_2 - \theta_1 - ic)e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2} - (\theta_1 - \theta_2 - ic)e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1} & \text{si } z_1 < z_2 \\ (z_1 \leftrightarrow z_2) & \text{si } z_1 > z_2 \end{cases} \quad (11)$$

correspondant aux valeurs propres  $(\theta_1^2 + \theta_2^2)/2$ . Pour  $\theta_1 > \theta_2$ , les deux termes  $e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2}$  et  $e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1}$  correspondent aux paires de particules entrantes et sortantes dans un processus de diffusion à deux corps. Le rapport de leurs amplitudes est la phase de diffusion à deux corps,

$$e^{i\phi(\theta_1 - \theta_2)} \doteq \frac{\theta_1 - \theta_2 - ic}{\theta_2 - \theta_1 - ic}. \quad (12)$$

Une expression équivalente pour cette phase, souvent utilisée dans la littérature et que nous utilisons également ci-dessous, est  $\phi(\theta) = 2 \arctan(\theta/c) \in [-\pi, \pi]$ .

Il a été souligné par Eisenbud (1948) et Wigner (1955) que la phase de diffusion peut être interprétée de manière semiclassique comme un "décalage temporel". Esquissons brièvement l'argument de Wigner (1955). Tout d'abord, notons que, pour une particule unique, une approximation simple d'un paquet d'ondes peut être obtenue en superposant deux ondes planes avec des moments  $\theta$  et  $\theta + \delta\theta$ , respectivement,

$$e^{iz\theta} + e^{iz(\theta+\delta\theta)}. \quad (13)$$

FIGURE 2 – Gauche : La fonction d'onde (11) sur la ligne infinie correspond à un processus de diffusion à deux corps. Semiclassiquement, la phase de diffusion dans ce processus à deux corps se reflète dans le décalage de diffusion (17) : après la collision, la position de la particule a été déplacée d'une distance  $\Delta(\theta_1 - \theta_2)$ . Droite : La fonction d'onde de Bethe (18) sur la ligne infinie correspond à un processus de diffusion à  $N$ -corps qui se factorise en des processus à deux corps (le décalage de diffusion  $\Delta$  est également présent ici, mais il n'est pas représenté dans la caricature). Dans ce processus à  $N$ -corps, les rapidités  $\theta_j$  sont les moments asymptotiques des bosons.

Une telle superposition évolue dans le temps comme  $e^{(iz\theta - it\varepsilon(\theta))} + e^{(iz(\theta+\delta\theta) - it\varepsilon(\theta+\delta\theta))}$ , où  $\varepsilon(\theta) = \theta^2/2$  est l'énergie. Le centre de ce 'paquet d'ondes' se situe à la position où les phases des deux termes coïncident, c'est-à-dire au point où  $z\delta\theta - t[\varepsilon(\theta + \delta\theta) - \varepsilon(\theta)] = 0$ , ce qui donne  $z \simeq vt$  avec la vitesse de groupe  $v = d\varepsilon/d\theta = \theta$ . Ainsi, il s'agit effectivement d'un 'paquet d'ondes' se déplaçant à la vitesse  $\theta$ . Ensuite, considérons deux particules entrantes dans un état tel que le centre de masse  $(z_1 + z_2)/2$  ait une impulsion  $\theta_1 - \theta_2$ , tandis que la coordonnée relative  $z_1 - z_2$  se trouve dans un 'paquet d'ondes' se déplaçant à la vitesse  $(\theta_1 - \theta_2)/2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2}{2}(\theta_1 - \theta_2) + (z_1 - z_2) \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + \delta\theta \right) &= z_1(\theta_1 + \delta\theta) + z_2(\theta_2 - \delta\theta) \\ \psi_{inc}(z_1, z_2) &\propto e^{i\frac{z_1+z_2}{2}(\theta_1+\theta_2)} \left( e^{i(z_1-z_2)\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{i(z_1-z_2)(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\delta\theta)} \right) \\ &\propto e^{iz_1\theta_1+iz_2\theta_2} + e^{iz_1(\theta_1+\delta\theta)+iz_2(\theta_2-\delta\theta)} \end{aligned} \quad (14)$$

Selon les équations (11) et (12), l'état sortant correspondant serait :

$$\begin{aligned} \psi_{outc}(z_1, z_2) &\propto -e^{i\phi(\theta_1-\theta_2)} e^{iz_1\theta_2+iz_2\theta_1} - e^{i\phi(\theta_1-\theta_2+2\delta\theta)} e^{iz_1(\theta_2-\delta\theta)+iz_2(\theta_1+\delta\theta)} \\ &\propto e^{i\frac{z_1+z_2}{2}(\theta_1+\theta_2)} \left( -e^{i\phi(\theta_1-\theta_2)} e^{i(z_1-z_2)\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} - e^{i\phi(\theta_1-\theta_2+2\delta\theta)} e^{i(z_1-z_2)(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\delta\theta)} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

En répétant l'argument précédent de la stationnarité de phase, on trouve que la coordonnée relative est à la position  $z_1 - z_2 \simeq (\theta_1 - \theta_2)t - 2d\phi/d\theta$  au moment  $t$ . Étant donné que le centre de masse n'est pas affecté par la collision et se déplace à la vitesse de groupe  $(\theta_1 + \theta_2)/2$ , nous constatons que la position des deux particules semiclassiques après la collision sera

$$z_1 \simeq \theta_1 t - \Delta(\theta_2 - \theta_1), \quad z_2 \simeq \theta_2 t - \Delta(\theta_2 - \theta_1), \quad (16)$$

où le déplacement de diffusion  $\Delta(\theta)$  est donné par la dérivée de la phase de diffusion,

$$\Delta(\theta) \doteq \frac{d\phi}{d\theta}(\theta) = \frac{2c}{c^2 + \theta^2} \quad (17)$$

Les deux particules sont retardées : leur position après la collision est la même que si elles étaient en retard respectivement de  $\delta t_1 = \Delta(\theta_2 - \theta_1)/v_1$  et  $\delta t_2 = \Delta(\theta_2 - \theta_1)/v_2$ .



## 1.2 La fonction d'onde de Bethe et les rapidités en tant que moments asymptotiques

Pour un plus grand nombre de particules, les états propres de l'Hamiltonien (6) sur la ligne infinie sont des états de Bethe  $|\{\theta_a\}\rangle$  étiquetés par un ensemble de  $N$  nombres  $\{\theta_a\}_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ , appelés les rapidités. Dans le domaine  $x_1 < z_2 < \dots < z_N$ , la fonction d'onde est (Gaudin 2014, Korepin et al. 1997, Lieb and Liniger 1963) :

$$\begin{aligned} \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) &= \langle 0 | \Psi(z_1) \dots \Psi(z_N) | \{\theta_a\} \rangle \\ &\propto \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \left( \prod_{1 \leq a < b \leq N} (\theta_{\sigma(b)} - \theta_{\sigma(a)} - ic) \right) e^{i \sum_j z_j \theta_{\sigma(j)}}, \end{aligned} \quad (18)$$

et elle est étendue à d'autres domaines par symétrie  $z_i \leftrightarrow z_j$ . Ici, la somme s'étend à toutes les permutations  $\sigma$  des  $N$  éléments (donc il y a  $N!$  termes) et  $(-1)^{|\sigma|}$  est la signature de la permutation. L'impulsion et l'énergie de l'état propre (18) sont :

## 1.3 Thermodynamic limit

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur un nombre fini de bosons  $N$ , d'abord sur une ligne infinie, puis dans une boîte périodique de longueur  $L$ . Pour faire de l'hydrodynamique, il est nécessaire de comprendre d'abord les propriétés thermodynamiques du système. Dans cette sous-section, nous passons brièvement en revue les techniques permettant de prendre la limite thermodynamique  $N, L \rightarrow \infty$ , tout en maintenant la densité de bosons  $n = N/L$  fixée.

L'idée clé est de se concentrer sur une séquence infinie d'états propres  $(\{\theta_a\}_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket})_{N \in \mathbb{Z}}$  de l'hamiltonien de Lieb-Liniger (??), avec  $L = N/n$ , de telle sorte que la limite de la distribution des rapidités

$$\rho(\theta) \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{a=1}^N \delta(\theta - \theta_a) \quad (19)$$

est bien définie et est une fonction (par morceaux) régulière de  $\theta$ . Les propriétés thermodynamiques du système (telles que sa densité d'énergie, sa pression, etc.) deviennent alors des fonctionnelles particulières de cette densité de rapidité  $\rho(\theta)$ , et l'objectif est de trouver ces fonctionnelles et de les évaluer. Dans ce qui suit, nous écrivons

$$\lim_{\text{therm.}} \doteq \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty \\ \frac{N}{L} = \text{const}}}$$

pour cette procédure de limite.

Par exemple, considérons les valeurs attendues des densités de charge (??) : dans la limite thermodynamique, celles-ci deviennent

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \{\theta_a\} | q[f] | \{\theta_a\} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \rho(\theta) d\theta \quad (20)$$

En particulier, la densité de particules, la densité de momentum et la densité d'énergie sont, respectivement, les suivantes :

$$\begin{aligned} n = \langle q[\theta \mapsto 1] \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\theta) d\theta, \\ \langle q[\theta \mapsto \theta] \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \rho(\theta) d\theta, \\ \langle q[\theta \mapsto \theta^2/2] \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta^2}{2} \rho(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

### 1.3.1 Thermodynamic form of the Bethe equations

De manière cruciale, étant donné que tous les états dans la séquence infinie  $(\{\theta_a\}_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket})_{N \in \mathbb{Z}}$  sont des états de Bethe, chaque ensemble de rapidités  $\{\theta_a\}_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  doit satisfaire les équations de Bethe (??). Pour mettre en œuvre cette contrainte,

il est courant de considérer l'ensemble des moments de fermions  $\{p_a\}_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  associés à l'ensemble des rapidités  $\{\theta_a\}_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ , tous deux ordonnés comme dans (??), et de définir la densité d'états  $\rho_s(\theta)$  comme suit :

$$2\pi\rho_s(\theta) = \lim_{\text{therm.}} \frac{|p_a - p_{a+1}|}{|\theta_a - \theta_{a+1}|} \quad (21)$$

où la séquence d'indices a du côté droit est choisie de telle sorte que  $\lim_{\text{therm.}} \theta_a = \theta$ . Étant donné que les moments des fermions pa doivent satisfaire le principe d'exclusion de Pauli (ils doivent tous être différents), il est clair que  $|p_a - p_{a+1}| \geq \frac{2\pi}{L}$ . De plus, remarquez que, par définition,  $\lim_{\text{therm.}} \frac{1}{L|\theta_a - \theta_{a+1}|} \doteq \rho(\theta)$ . Par conséquent, le rapport d'occupation de Fermi

$$\nu \doteq \frac{\rho}{\rho_s} \quad (22)$$

doit toujours satisfaire

$$\nu : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & [0, 1] \\ \theta & \mapsto & \nu(\theta) \end{array} \quad (23)$$

De plus, la densité de rapidité  $\rho(\theta)$  et la densité d'états  $\rho(\theta)$  sont liées par la version thermodynamique de l'équation de Bethe (??). En insérant l'équation (??) dans la définition (??), on obtient l'équation constitutive :

$$2\pi\rho_s(\theta) = \lim_{\text{therm.}} \frac{1}{|\theta_a - \theta_{a+1}|} \left[ \left( \theta_a + \frac{1}{L} \sum_{b \neq a} 2 \arctan \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{c} \right) \equiv p_a \right) - \left( \theta_{a+1} + \frac{1}{L} \sum_{b \neq a+1} 2 \arctan \left( \frac{\theta_{a+1} - \theta_b}{c} \right) \equiv p_{a+1} \right) \right] \quad (24)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{b \neq a} f(a, b) - \sum_{b \neq a+1} f(a+1, b) &= \sum_b \{f(a-b) - f(a+1-b)\} - \underbrace{(f(a-a) - f(a+1-a+1))}_0 \\ 2\pi\rho_s(\theta) &= \lim_{\text{therm.}} \frac{1}{|\theta_a - \theta_{a+1}|} \left[ \theta_a - \theta_{a+1} + \frac{1}{L} \sum_b \left\{ 2 \arctan \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{c} \right) - 2 \arctan \left( \frac{\theta_{a+1} - \theta_b}{c} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f \mapsto \lim_{\text{therm.}} \frac{f(\theta_a) - f(\theta_{a+1})}{\theta_a - \theta_{a+1}} &= f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta), \\ \frac{\partial \left\{ \theta \mapsto 2 \arctan \left( \frac{\theta - \theta_b}{c} \right) \right\}}{\partial \theta}(\theta) &= \frac{1}{c} \frac{2}{1 + \left( \frac{\theta - \theta_b}{c} \right)^2} = \frac{2c}{c^2 + (\theta - \theta_b)^2} = \Delta(\theta - \theta_b); \\ f \mapsto \lim_{\text{therm.}} \sum_b f(\theta_b) &= f \mapsto \int f(\theta_b) \rho(\theta_b) d\theta_b; \\ f \mapsto \lim_{\text{therm.}} \sum_b \frac{f(\theta_a - \theta_b) - f(\theta_{a+1} - \theta_b)}{\theta_a - \theta_{a+1}} &= f \mapsto \int \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta - \theta_b) \rho(\theta_b) d\theta_b; \end{aligned}$$

d'où

$$2\pi\rho_s(\theta) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') d\theta', \quad (26)$$

$$= 1 + \{\Delta \star \rho\}(\theta) \quad (27)$$

où  $\Delta(\theta - \theta')$  représente le décalage différentiel de diffusion à deux corps (??).

En pratique, pour construire des états thermodynamiques intéressants, on peut spécifier le rapport d'occupation de Fermi  $\nu(\theta)$ , puis utiliser l'équation constitutive (26) pour reconstruire la densité de rapidité  $\rho(\theta)$  et la densité d'états  $\rho_s(\theta)$ . Un exemple important est l'état fondamental de l'hamiltonien de Lieb-Liniger, qui correspond à un rapport d'occupation en forme de fonction rectangulaire :  $\nu(\theta) = 1$  pour  $\theta \in [-\theta_F, \theta_F]$ , et  $\nu(\theta) = 0$  sinon. Ici,  $\theta_F$  est la rapidité de Fermi, qui est une fonction de la densité de particules  $n$ . Dans ce cas, l'équation constitutive devient l'équation de Lieb (Lieb et Liniger 1963) (également connue sous le nom d'équation de Love (Love 1949) ; pour des études de cette équation particulière, voir par exemple Lang et al. (2017), Marino et Reis (2019), Popov (1977), Prolhac (2017), Takahashi (1975)). Un autre exemple important est celui d'une distribution d'équilibre thermique  $\rho(\theta)$  obtenue en résolvant l'équation de Yang-Yang (équ. (??) ci-dessous).

En général, l'équation constitutive ne peut pas être résolue analytiquement. Cependant, étant donné qu'elle est linéaire, elle peut être facilement résolue numériquement en discrétisant l'intégrale.

### 1.3.2 The dressing

Dans les manipulations thermodynamiques, il s'avère que l'opération suivante est omniprésente : à une fonction  $f(\theta)$ , on associe sa contrepartie « habillée »  $f^{dr}(\theta)$ , définie par l'équation intégrale :

$$f^{dr}(\theta) = f(\theta) + \int K(\theta - \theta') \nu(\theta') f^{dr}(\theta') d\theta' \quad (28)$$

$$= f(\theta) + \{K \star (\nu \cdot f^{dr})\}(\theta) \quad (29)$$

où  $K(\theta - \theta')$  est un noyau de convolution spécifique qui dépend du problème considéré. Cette équation permet de capturer les effets de l'interaction entre les particules et de rendre compte des corrections « habillées » à la fonction initiale  $f(\theta)$ . En résolvant cette équation, on obtient la fonction habillée  $f^{dr}(\theta)$  associée à la fonction donnée  $f(\theta)$ . Cette opération est couramment utilisée dans les calculs thermodynamiques pour prendre en compte les interactions et les corrections aux propriétés des systèmes physiques.

Dans notre problème  $K(\theta - \theta') = \frac{\Delta(\theta - \theta')}{2\pi}$  soit :

$$f^{dr}(\theta) = f(\theta) + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') \nu(\theta') f^{dr}(\theta'), \quad (30)$$

$$= f(\theta) + \frac{1}{2\pi} \{\Delta \star (\nu \cdot f^{dr})\}(\theta) \quad (31)$$

Bien que cela ne soit pas explicite dans la notation,  $f^{dr}(\theta)$  est toujours fonctionnelle de la distribution de rapidité, à travers sa dépendance vis-à-vis du rapport d'occupation de Fermi. Par exemple, avec cette définition, l'équation constitutive (26) est reformulée comme suit :

$$2\pi\rho_s(\theta) = 1^{dr}(\theta) \quad (32)$$

où  $1(\theta) = 1$  est la fonction constante.

## 1.4 Entropy maximization : the Yang-Yang equation

Dans la sous-section précédente, nous avons expliqué comment les observables physiques, telles que les valeurs d'attente des charges et des courants, deviennent des fonctionnelles de la distribution de rapidité  $\rho(\theta)$  dans la limite thermodynamique. Cependant, nous n'avons pas expliqué comment construire des distributions de rapidité physiquement significatives (sauf pour l'état fondamental de l'hamiltonien de Lieb-Liniger, pour lequel  $\nu(\theta)$  est une fonction rectangulaire, voir la sous-section (??)). *Par exemple, quelle est la distribution de rapidité correspondant à un état d'équilibre thermique à une température non nulle ?*

La question a été répondue dans les travaux pionniers de Yang et Yang (1969), que nous allons maintenant examiner brièvement. Tout d'abord, nous observons qu'il existe de nombreuses choix différents de séquences d'états propres  $(\{\theta_a\}_{a \in [1, N]})_{N \in \mathbb{Z}}$  qui conduisent à la même distribution de rapidité thermodynamique (??). La description du système en termes de distribution de rapidité  $\rho(\theta)$  est seulement une description grossière : on devrait considérer la distribution de rapidité  $\rho(\theta)$  comme caractérisant un macro-état du système, correspondant à un très grand nombre de micro-états possibles  $|\{\theta_a\}\rangle$ . *Pour faire de la thermodynamique, il faut estimer le nombre de ces micro-états.*

Pour estimer ce nombre, on se concentre sur une petite cellule de rapidité  $[\theta, \theta + \delta\theta]$ , qui contient  $L\rho(\theta)\delta\theta$  rapidités. Les équations de Bethe (??) relient ces rapidités aux moments de fermions pa dans une cellule de moment  $[p, p + \delta p]$ , où  $\delta p / \delta\theta$  est d'environ  $2\pi\rho_s(\theta)$ , voir l'équation (??). Il est important de noter que les moments de fermions pa sont soumis au principe d'exclusion de Pauli. Le nombre de micro-états est alors évalué en comptant le nombre de configurations de moments de fermions mutuellement distincts, équivalent à  $L\rho(\theta)\delta\theta$ , qui peuvent être placées dans la boîte  $[p, p + \delta p]$ . Comme l'espacement minimal entre deux moments est de  $2\pi/L$ , la réponse est

$$\#conf. \approx \frac{[L\rho_s(\theta)\delta\theta]!}{[L\rho(\theta)\delta\theta]![L(\rho_s(\theta) - \rho(\theta))\delta\theta]!}, \quad (33)$$

or

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}. \quad (34)$$

$$\ln n! \xrightarrow{n \rightarrow \infty} n \ln n - \underbrace{n + \ln \sqrt{2\pi n}}_{o(n \ln n)}, \quad (35)$$

$$\stackrel{\sim}{\sim}_{n \rightarrow \infty} n \ln n \quad (36)$$

$$\ln \# \text{conf.} \stackrel{\sim}{\sim}_{n \rightarrow \infty} L \{ \rho_s(\theta) \ln [L \rho_s(\theta) \delta \theta] - \rho(\theta) \ln [L \rho(\theta) \delta \theta] - (\rho_s(\theta) - \rho(\theta)) \ln [L(\rho_s(\theta) - \rho(\theta)) \delta \theta] \} \delta \theta, \quad (37)$$

$$\stackrel{\sim}{\sim}_{n \rightarrow \infty} L \{ \rho_s(\theta) \ln \rho_s(\theta) - \rho(\theta) \ln \rho(\theta) - (\rho_s(\theta) - \rho(\theta)) \ln (\rho_s(\theta) - \rho(\theta)) \} \delta \theta, \quad (38)$$

Le nombre total de micro-états est le produit de toutes ces configurations pour toutes les cellules de rapidité  $[\theta, \theta + \delta \theta]$ . En prenant le logarithme et en remplaçant la somme par une intégrale sur  $d\theta$ , nous obtenons l'entropie de Yang-Yang.

$$\ln \# \text{microstates.} = \int \ln \# \text{conf.}, \quad (39)$$

$$\approx LS_{YY}[\rho], \quad (40)$$

$$S_{YY}[\rho] \doteq \int (\rho_s(\theta) \ln \rho_s(\theta) - \rho(\theta) \ln \rho(\theta) - (\rho_s(\theta) - \rho(\theta)) \ln (\rho_s(\theta) - \rho(\theta))) d\theta \quad (41)$$

On écrit l'observable énergie et nombre :

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \left( \sum_a \varepsilon(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (42)$$

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \left( \sum_a 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (43)$$

avec  $\sum_a \varepsilon(\theta_a) \equiv \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{E}} | \{\theta_a\} \rangle$  et  $\sum_a 1 \equiv \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{N}} | \{\theta_a\} \rangle$   
La probabilité que le système soit dans configuration  $|\{\theta_a\}\rangle$  est

$$P_{|\{\theta_a\}\rangle} = \frac{e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle})}}{Z_{thermal}} = \frac{e^{-\beta \sum_a (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}}{Z_{thermal}} \quad (44)$$

avec la fonction de partition  $Z_{thermal} = e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle})} = e^{-\beta \sum_a (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}$   
Soit les moyennes, variance et écartype de l'observable

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (45)$$

$\hat{\mathcal{O}}_i \in \{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}\}$  tel que  $\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} = \beta \left( \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} \right)$  et pour simplifier ici  $Z \equiv Z_{thermal}$  :

$$\overline{\hat{\mathcal{O}}_i} = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} \frac{\overbrace{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle}}}_{P_{|\{\theta_a\}\rangle}}}{Z} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_i} \quad (46)$$

$$\overline{\hat{\mathcal{O}}_i^2} = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle}}}{Z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \quad (47)$$

$$\Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 = \overline{(\hat{\mathcal{O}}_i - \overline{\hat{\mathcal{O}}_i})^2} = \overline{\hat{\mathcal{O}}_i^2} - \overline{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} - \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \right) \quad (48)$$

si  $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{N}}$  alors  $\beta_i = -\beta \mu$  et si  $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}$  alors  $\beta_i = \beta$ .

$$\overline{\hat{\mathcal{O}}}_i = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}}_i | \{\theta_a\} \rangle \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle}}}{Z}, \quad (49)$$

$$= \sum_{|\{\theta_b\}\rangle} \langle \{\theta_b\} | \hat{\mathcal{O}}_i \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle}}}{Z} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\} | \{\theta_b\}\rangle, \quad (50)$$

$$= \text{Tr}(\hat{\mathcal{O}}_i \hat{\rho}) \quad (51)$$

avec  $\hat{\rho} = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle}}}{Z} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$  et  $Z = \text{Tr}(\hat{\rho})$

La matrice densité thermique est :

$$\hat{\rho}_{thermal} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z_{thermal}}, \quad (52)$$

$$e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{|\theta_a\rangle} e^{-\beta \sum_a (\varepsilon(\theta_a) - \mu)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (53)$$

La matrice densité GGE avec  $Z \equiv Z_{GGE}$  est :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{|\{\theta_a\}\rangle}}}{Z} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| = \frac{e^{-\hat{\mathcal{Q}}[f]}}{Z_{GGE}}, \quad (54)$$

$$e^{-\hat{\mathcal{Q}}[f]} = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} e^{-\sum_a f(\theta_a)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (55)$$

pour une certaine fonction  $f$  relié à la charge  $\hat{\mathcal{Q}}[f] = \sum_{|\{\theta_a\}\rangle} (\sum_a f(\theta_a)) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$ . Nous aimerions calculer les valeurs d'attente par rapport à cette matrice de densité, par exemple La moyenne GGE d'un observable s'écrit ,

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} \doteq \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} \hat{\rho}_{GGE}[f])}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{GGE}[f])} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} e^{-\hat{\mathcal{Q}}[f]})}{\text{Tr}(e^{-\hat{\mathcal{Q}}[f]})} = \frac{\sum_{|\{\theta_a\}\rangle} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle e^{-\sum_a f(\theta_a)}}{\sum_{|\{\theta_a\}\rangle} e^{-\sum_a f(\theta_a)}} \quad (56)$$

pour une certaine observable  $\hat{\mathcal{O}}$ . Lorsque l'observable  $\hat{\mathcal{O}}$  est suffisamment local, on croit que la valeur d'attente  $\langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle$  ne dépend pas de l'état microscopique spécifique du système, de sorte qu'elle devient une fonctionnelle de  $\rho$  dans la limite thermodynamique.

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle = \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\rho]} \quad (57)$$

Cette hypothèse est liée à une "Hypothèse de thermalisation généralisée des états propres", voir par exemple (Cassidy et al. 2011, Dymarsky and Pavlenko 2019, He et al. 2013, Pozsgay 2011, 2014, Vidmar and Rigol 2016). Sous cette hypothèse, on peut remplacer la somme précédente sur tous les états propres par une intégrale fonctionnelle sur la distribution des rapides à grains grossiers  $\rho$ ,

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} = \frac{\int \mathcal{D}\rho \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\rho]} \# \text{microstates.} e^{-L \int f(\theta) \rho(\theta) d\theta}}{\int \mathcal{D}\rho \# \text{microstates.} e^{-L \int f(\theta) \rho(\theta) d\theta}}, \quad (58)$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}\rho \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\rho]} e^{L(S_{YY}[\rho] - \int f(\theta) \rho(\theta) d\theta)}}{\int \mathcal{D}\rho e^{L(S_{YY}[\rho] - \int f(\theta) \rho(\theta) d\theta)}}, \quad (59)$$

L'intégrale fonctionnelle est alors dominée par la distribution des racines qui minimise une fonctionnelle d'énergie libre (généralisée) :

$$\frac{\delta}{\delta \rho} \lim_{\text{therm.}} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{\delta \rho} \left[ \int f(\theta) \rho(\theta) d\theta - S_{YY}[\rho] \right] = 0 \quad (60)$$

En utilisant la définition de l'entropie de Yang-Yang et l'équation constitutive (??), on obtient la relation suivante entre la fonction  $f(\theta)$  définissant la matrice de densité diagonale (??) et la distribution de rapidité  $\rho(\theta)$  qui domine l'intégrale fonctionnelle (??).

On rappelle que le scattering shift  $\Delta(\theta)$  est donné par

$$\Delta(\theta) \doteq \frac{d\phi}{d\theta}(\theta) = \frac{2c}{c^2 + \theta^2}$$

On rappelle que  $2\pi\rho_s = 1 + \Delta \star_\theta \rho$  avec le produit de convolution  $\star_\theta : (f \star_\theta g)(\theta) = \int g(\theta - \theta') f(\theta') d\theta'$  donc je vais simplifier la notation en  $\star \equiv \star_\theta$ .

$$\frac{\delta\rho_s}{\delta\rho_i} = \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta\rho}{\delta\rho_i}, \quad (61)$$

$$\frac{\delta S_{YY}}{\delta\rho_i}[\rho] = \int d\theta \left\{ (\ln \rho_s + \mathcal{I}) \frac{\delta\rho_s}{\delta\rho_i} - (\ln \rho + \mathcal{I}) \frac{\delta\rho}{\delta\rho_i} - (\ln(\rho_s - \rho) + \mathcal{I}) \left( \frac{\delta\rho_s}{\delta\rho_i} - \frac{\delta\rho}{\delta\rho_i} \right) \right\}(\theta), \quad (62)$$

$$= \int d\theta \left\{ \ln \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) \frac{\delta\rho}{\delta\rho_i} - \left( \ln \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right) \right) \frac{\delta\rho_s}{\delta\rho_i} \right\}(\theta), \quad (63)$$

$$= \int d\theta \left\{ \ln \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) \frac{\delta\rho}{\delta\rho_i} - \left( \ln \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right) \right) \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta\rho}{\delta\rho_i} \right\}(\theta), \quad (64)$$

et si  $\rho_i = \rho$  alors  $\frac{\delta\rho}{\delta\rho_i} = 1$  et  $\int d\theta f(\theta) \cdot \Delta \star 1 = \int d\theta \Delta \star f$  car  $\Delta$  est symétrique. Soit on retrouve

$$\frac{\delta S_{YY}}{\delta\rho}[\rho] = \int d\theta \left\{ \ln \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \ln \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right) \right) \right\}(\theta). \quad (65)$$

#### 1.4.1 Calcul de Bess

On introduit  $\rho_h$  tel que  $\rho_s = \rho + \rho_h$ . La thermodynamique de Yang-Yang nous donne

$$\frac{\rho_h}{\rho} = e^{\beta\epsilon}, \quad (66)$$

$$\nu \doteq \frac{\rho}{\rho_s} = \frac{1}{1 + e^{\beta\epsilon}} \quad (67)$$

Où la minimisation de l'énergie libre [Yang-Yang] donne :

$$\epsilon(\theta) = -\mu + \frac{\hbar^2\theta^2}{2m} - \frac{1}{\beta} \frac{1}{2\pi} \{ \Delta \star \ln(1 + e^{\beta\epsilon}) \}(\theta), \quad (68)$$

$$\rho = \rho_s \nu = \frac{\nu}{2\pi} (1 + \{ \Delta \star \rho \}) \quad (69)$$

1

Rappel des constantes :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{k_B T}, \\ \tilde{c} &= \frac{1}{l_g} = \frac{mg_{1D}}{\hbar^2}, \\ t &= \frac{1}{\beta E_g} = \frac{1}{\beta} \frac{2\hbar^2}{mg_{1D}^2} = \frac{1}{\beta \tilde{c} g_{1D}}, \\ \gamma &= \frac{1}{nl_g} = \frac{1}{n} \frac{mg_{1D}}{\hbar^2} = \frac{\tilde{c}}{n} \end{aligned}$$

1.

$$2\pi\rho_s = 1 + \{ \Delta \star \rho \} = 1 + \{ \Delta \star \{ \nu \rho_s \} \}$$

On fait les changement de variables :

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} &= \frac{\theta}{\tilde{c}}, \\ \tilde{\mu} &= \beta\mu, \\ \tilde{\epsilon} &= \beta\epsilon, \\ \tilde{\rho}(\tilde{\theta}) &= \rho(\theta)\end{aligned}$$

soit

$$\frac{\tilde{\theta}^2}{t} = \beta\tilde{c}g_{1D}\frac{1}{\tilde{c}}\frac{\hbar^2}{mg_{1D}}\theta^2 = \beta\frac{\hbar^2\theta^2}{2m}.$$

et

$$\Delta(\theta - \theta')d\theta' = \frac{2\tilde{c}}{\tilde{c}^2 + (\theta - \theta')^2}d\theta' = \frac{2}{1 + (\tilde{\theta} - \tilde{\theta}')^2}d\tilde{\theta}' = \tilde{\Delta}(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}')d\tilde{\theta}'$$

$$\frac{\tilde{\rho}_h}{\tilde{\rho}} = e^{\tilde{\epsilon}}, \quad (70)$$

$$\tilde{\nu} \doteq \frac{\tilde{\rho}}{\rho_s} = \frac{1}{1 + e^{\tilde{\epsilon}}} \quad (71)$$

Où la minimisation de l'énergie libre [Yang-Yang] donne :

$$\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta}) = -\tilde{\mu} + \frac{\tilde{\theta}^2}{t} - \frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \ln(1 + e^{\tilde{\epsilon}}) \right\}(\tilde{\theta}), \quad (72)$$

$$\tilde{\rho} = \rho_s \tilde{\nu} = \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} (1 + \{\tilde{\Delta} \star \tilde{\rho}\}) \quad (73)$$

2

Après avoir résolue ces deux dernier equations, on peut calculer la densité linéaire  $n$ , l'énergie totale  $E$ , l'entropie  $S$ , la pression  $P$  :

$$(nl_g =) \frac{1}{\gamma} = \int d\tilde{\theta} \tilde{\rho}(\tilde{\theta}), \quad (75)$$

$$\beta \frac{E}{N} = \frac{\gamma}{t} \int d\tilde{\theta} \tilde{\theta}^2 \tilde{\rho}(\tilde{\theta}), \quad (76)$$

$$\frac{S}{N} = \gamma \int d\tilde{\theta} \tilde{\rho}(\tilde{\theta}) \left( e^{\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta})} \ln(1 + e^{-\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta})}) + e^{\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta})} \right), \quad (77)$$

$$\beta \frac{P}{n} = \frac{\gamma}{2\pi} \int d\tilde{\theta} \ln(1 + e^{-\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta})}). \quad (78)$$

### **Programmation :**

- 1 Pour des couples  $(\mu, T)$  résoudre l'équation (72). Avec  $\tilde{e}$  on a  $\tilde{\nu}$
- 2 Résoudre l'équation (73) pour avoir  $\tilde{\rho}$
- 2 bis Résoudre l'équation (74) pour avoir  $\tilde{\rho}_s$ . Et  $\tilde{\rho} = \tilde{\nu}\tilde{\rho}_s$
- 3 Ou peut avoir accès à d'autre valeur thermodynamique avec les équation ci-dessus

---

2.

$$2\pi\tilde{\rho}_s = 1 + \{\tilde{\Delta} \star \tilde{\rho}\} = 1 + \{\tilde{\Delta} \star \{\tilde{\nu}\tilde{\rho}_s\}\} \quad (74)$$

**Résoudre :**

Les équations (72) , (73) et (74) sont de la forme .

Soit  $x$  dans  $K$  un e-vl et une application  $F: K \rightarrow K$

$$x = b + F(x) \quad (79)$$

|      | $x$                | $F(x)$   | $b$                                      |
|------|--------------------|--|--|
| (72) | $\tilde{\epsilon}$ | $-\frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \ln(1 + e^x) \right\}$           | $-\tilde{\mu} + \frac{x \mapsto x^2}{t}$ |
| (73) | $\tilde{\rho}$     | $\frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \cdot \left\{ \tilde{\Delta} \star x \right\}$       | $\frac{\tilde{\nu}}{2\pi}$               |
| (74) | $\tilde{\rho}_s$   | $\frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \{\tilde{\nu} \cdot x\} \right\}$ | $\frac{1}{2\pi}$                         |

La notation tensorielle

$$x^i = b^i + \{F\}_j^i x^j \quad (80)$$

|      | $x^i$                | $\{F\}_j^i x^j$   | $b^i$   |
|------|----------------------|---|---|
| (72) | $\tilde{\epsilon}^i$ | $-\frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \ln(1 + e^x) \right\}^i$                      | $-\tilde{\mu} + \frac{x^i \mapsto x^{i2}}{t}$ |
| (73) | $\tilde{\rho}^i$     | $\left\{ \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \cdot \left\{ \tilde{\Delta} \star x \right\} \right\}^i$ | $\frac{\tilde{\nu}^i}{2\pi}$                  |
| (74) | $\tilde{\rho}_s^i$   | $\frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \{\tilde{\nu} \cdot x\} \right\}^i$            | $\frac{1}{2\pi}$                              |

Soit deux applications  $f, g$ . La notation Tensorielle de leurs multiplication et convolution est

$$\{f \cdot g\}(x) = f(x)g(x) \rightarrow \{f \cdot g\}^i x_i = \delta_j^i f^j x_i g^j x_j \quad (81)$$

$$\{f \star g\}(x) = \int f(x - x')g(x')dx' \rightarrow \{f \star g\}^i x_i = dx \delta_j^\sigma \{f(\cdot_i - \cdot_\sigma)\}^{i\sigma} x_i x_\sigma g^j x_j \quad (82)$$

Numériquement on résout dans l'espace des vecteur  $x_i$  et non dans l'espace dual  $x^i$ . Ce que je fait réellement c'est résoudre

$$x_i = b_i + \{F(x_i)\}_i \quad (83)$$

|      | $x_i$   | $\{F(x_i)\}_i$  | $b_i$  |
|------|---|---|--|
| (72) | $\left\{ \tilde{\epsilon}(\tilde{\theta}_i) \right\}_i$ | $-\frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \ln(1 + e^x) \right\}_i$                      | $-\tilde{\mu} + \frac{\tilde{\theta}_i^2}{t}$      |
| (73) | $\left\{ \tilde{\rho}(\tilde{\theta}_i) \right\}_i$     | $\left\{ \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \cdot \left\{ \tilde{\Delta} \star x \right\} \right\}_i$ | $\frac{\{\tilde{\nu}(\tilde{\theta}_i)\}_i}{2\pi}$ |
| (74) | $\left\{ \tilde{\rho}_s(\tilde{\theta}_i) \right\}_i$   | $\frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \{\tilde{\nu} \cdot x\} \right\}_i$            | $\frac{1}{2\pi}$                                   |

Soit deux applications  $f, g$ . La notation Tensorielle de leurs multiplication et convolution est

$$\{f \cdot g\}(x) = f(x)g(x) \rightarrow \{\{f \cdot g\}(x_i)\}_i = \delta_i^j \delta_j^\sigma \{f(x_\sigma)\}_\sigma \{g(x_j)\}_j \quad (84)$$

$$\{f \star g\}(x) = \int f(x - x')g(x')dx' \rightarrow \{\{f \star g\}(x_i)\}_i = dx \delta_j^\sigma \{f(x_i - x_\sigma)\}_{i\sigma} \{g(x_j)\}_j \quad (85)$$

Méthode 1) Résoudre :

$$F_1(x) = b \quad (86)$$

avec  $F_1: x \mapsto x - F(x)$ .

Les équations (73) et (74) sont linéaires ; On peut écrire des équations matricielle :



$$\{F_1\}x = b \quad (87)$$

Pour  $\tilde{\rho}(\tilde{\theta})$ ,  $F_1(x) = x - \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \cdot \left\{ \tilde{\Delta} \star x \right\}$  et  $b = \frac{\tilde{\nu}(\tilde{\theta})}{2\pi}$

$$\left\{ Id - \frac{d\tilde{\theta}}{2\pi} \text{diag}(\tilde{\nu}(\tilde{\theta})) \cdot \tilde{\Delta}(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}') \right\} x = \frac{\tilde{\nu}(\tilde{\theta})}{2\pi} \quad (88)$$

et  $\tilde{\rho}_s = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\nu}}$

Pour  $\tilde{\rho}_s(\tilde{\theta})$ ,  $F_1(x) = x - \frac{1}{2\pi} \cdot \left\{ \tilde{\Delta} \star (\tilde{\nu} \cdot x) \right\}$  et  $b = \frac{1}{2\pi}$

$$\left\{ Id - \frac{d\tilde{\theta}}{2\pi} \tilde{\Delta}(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}') \cdot \text{diag}(\tilde{\nu}(\tilde{\theta})) \right\} x = \frac{1}{2\pi} \quad (89)$$

et  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_s \cdot \tilde{\nu}$

L'équations (72) est non-linéaire. On peut avoir des solution cycles que l'on explique dans la deuxième méthode.

Méthode 2) Pour trouver les points fixes de  $F_2 : x \mapsto b + F(x)$ , nous devons résoudre l'équation

$$F_2(x) = x$$

. Soit  $n$  un entier naturel, alors  $x_n = x^* + \delta x_n$  où  $x^*$  est un point fixe de  $F_2$  et  $\delta x_n$  est une petite perturbation. En développant  $F_2$  autour de  $x^*$ , nous obtenons :

$$x^* + \delta x_{n+1} = F_2(x^* + \delta x_n) = F_2(x^*) + F_2'(x^*)\delta x_n + \mathcal{O}(\delta x_n), \quad (90)$$

où  $F_2'(x^*)$  est la dérivée de  $F_2$  évaluée en  $x^*$ . En négligeant les termes d'ordre supérieur  $\mathcal{O}(\delta x_n)$ , nous avons :

$$\delta x_{n+1} = F_2'(x^*)\delta x_n. \quad (91)$$

Pour que  $x^*$  soit stable, la norme du déterminant du jacobien de  $F_2$  évaluée en  $x^*$  doit être inférieure à 1.

Pour l'équation (72)

$$F_2'(x) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \frac{e^x}{1 + e^x} \right\} \quad (92)$$

$$\left( \frac{e^x}{1 + e^x} \right)' = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \quad (93)$$

donc

$$\text{Max}_{x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} \right) < \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} \right) = 1 \quad (94)$$

$$\|\tilde{\Delta}\|_1 = \int \frac{2}{1 + x^2} dx = 2 [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi, \quad (95)$$

$$\|F_2'\|_1 < \frac{1}{2\pi} \text{Max}_{x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} \right) \|\tilde{\Delta}\|_1 = 1 \quad (96)$$

Si  $F_2$  est non linéaire, les solutions peuvent être des cycles. Par exemple, pour un cycle de longueur 2, nous devons résoudre l'équation :

$$\{F_2 \circ F_2\}(x) = x. \quad (97)$$

$$x_{n+1} - x_n = \delta x_{n+1} - \delta x_n = (F_2'(x^*) - 1)\delta x_n + \mathcal{O}(\delta x_n) = \mathcal{O}(\delta x_n), \quad (98)$$

$$\frac{\delta x_{n+1} - \delta x_n}{\delta x_n} = \mathcal{O}(1). \quad (99)$$

|      | $x$                | $F_1(x)$   | $b$                                      |
|------|--------------------|--|--|
| (72) | $\tilde{\epsilon}$ | $x + \frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \ln(1 + e^x) \right\}$        | $-\tilde{\mu} + \frac{x \mapsto x^2}{t}$ |
| (73) | $\tilde{\rho}$     | $x - \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \cdot \left\{ \tilde{\Delta} \star x \right\}$   | $\frac{\tilde{\nu}}{2\pi}$               |
| (74) | $\tilde{\rho}_s$   | $x - \frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \tilde{\nu} \cdot x \right\}$ | $\frac{1}{2\pi}$                         |

La notation tensorielle

$$\{F_1\}_j^i x^j = b^i \quad (100)$$

|      | $x^i$                | $\{F_1\}_j^i x^j$   | $b^i$  |
|------|----------------------|---|--|
| (72) | $\tilde{\epsilon}^i$ | $x^i + \frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \ln(1 + e^x) \right\}^i$                       | $-\tilde{\mu} + \frac{x^i \mapsto x^{i^2}}{t}$ |
| (73) | $\tilde{\rho}^i$     | $x^i - \left\{ \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \cdot \left\{ \tilde{\Delta} \star x \right\} \right\}^i$ | $\frac{\tilde{\nu}^i}{2\pi}$                   |
| (74) | $\tilde{\rho}_s^i$   | $x^i - \frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Delta} \star \tilde{\nu} \cdot x \right\}^i$                | $\frac{1}{2\pi}$                               |

Numériquement on résout dans l'espace des vecteur  $x_i$  et non dans l'espace dual  $x^i$ . Ce que je fait réellement c'est résoudre

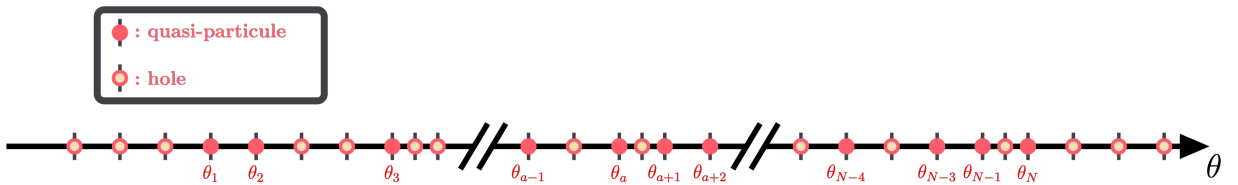
$$\{F_1(x_i)\}_i = b_i \quad (101)$$

|      | $x_i$   | $\{F_1(x_i)\}_i$  | $b_i$  |
|------|---|---|--|
| (72) | $\left\{\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta}_i)\right\}_i$ | $x_i + \frac{1}{2\pi} \left\{\tilde{\Delta} \star \ln(1 + e^x)\right\}_i$                     | $-\tilde{\mu} + \frac{\tilde{\theta}_i^2}{t}$      |
| (73) | $\left\{\tilde{\rho}(\tilde{\theta}_i)\right\}_i$     | $x_i - \left\{\frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \cdot \left\{\tilde{\Delta} \star x\right\}\right\}_i$ | $\frac{\{\tilde{\nu}(\tilde{\theta}_i)\}_i}{2\pi}$ |
| (74) | $\left\{\tilde{\rho}_s(\tilde{\theta}_i)\right\}_i$   | $x_i - \frac{1}{2\pi} \left\{\tilde{\Delta} \star \tilde{\nu} \cdot x\right\}_i$              | $\frac{1}{2\pi}$                                   |

s

## 1.5 Fluctuation de la distribution : Entropy maximization , the Yang-Ynag equation

### 1.5.1 Rappel de Physique statistique



On écrit l'observable énergie et nombre :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (102)$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (103)$$

avec  $\sum_{a=1}^N 1 \equiv \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{N}} | \{\theta_a\} \rangle$  et  $\sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \equiv \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{E}} | \{\theta_a\} \rangle$ .

La probabilité que le système soit dans configuration  $\{\theta_a\}$  est

$$P_{\{\theta_a\}} = \frac{e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})}}{Z_{thermal}} = \frac{e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}}{Z_{thermal}} \quad (104)$$

avec la fonction de partition  $Z_{thermal} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}$   
On peut commence à généraliser avec l'opérateur :

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (105)$$

$\hat{\mathcal{O}}_i \in \{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}\}$  tel que  $\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \beta (\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})$  et pour simplifier ici  $Z \equiv Z_{thermal}$  :

**Affirmation 1.** Sa moyenne , variance et équartype de l'observable :

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{\overbrace{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}^{P_{\{\theta_a\}}}}{Z} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \quad (106)$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i}$$

$$\Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 = \left\langle \left( \hat{\mathcal{O}}_i - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i} - \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \right)^2 \quad (107)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \right) = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \quad (108)$$

si  $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{N}}$  alors  $\beta_i = -\beta\mu$  et si  $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}$  alors  $\beta_i = \beta$ .

$$\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \Big|_T, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \mu^2} \Big|_T = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \Big|_T \quad (109)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Big|_\mu, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \Big|_\mu = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \Big|_\mu \quad (110)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_\mu \right] \ln Z, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}}}^2 = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_\mu \right]^2 \ln Z = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_\mu \right] \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle \quad (111)$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}}_i | \{\theta_a\} \rangle \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}, \quad (112)$$

$$= \sum_{\{\theta_b\}} \langle \{\theta_b\} | \hat{\mathcal{O}}_i \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} | \{\theta_b\} \rangle, \quad (113)$$

$$= \text{Tr}(\hat{\mathcal{O}}_i \hat{\rho}) \quad (114)$$

avec  $\hat{\rho} = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$  et  $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}$  tel que  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$

La matrice densité thermique est :

$$\hat{\rho}_{thermal} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z_{thermal}}, \quad (115)$$

$$e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (116)$$

La matrice densité GGE avec  $Z \equiv Z_{GGE}$  est :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|. \quad (117)$$

Dans le cas thermique, on peut remarquer que  $\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^0$  et  $\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^2$ . On peut donc réécrire  $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{a=1}^N \theta_a^i \quad (118)$$

et pour chaque  $a \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :  $\sum_i \alpha_i \theta_a^i$  converge donc on peut échanger les deux sommes soit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^N f(\theta_a) \quad (119)$$

avec  $f(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i$ . Et on peut réécrire la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \frac{e^{-\hat{\mathcal{Q}}[f]}}{Z_{GGE}}, \quad (120)$$

$$e^{-\hat{\mathcal{Q}}[f]} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (121)$$

pour une certaine fonction  $f$  relié à la charge  $\hat{\mathcal{Q}}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N f(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$ . Et on peut réécrire la probabilité de la configuration  $\{\theta_a\}$  :  $P_{\{\theta_a\}} = \langle \{\theta_a\} | \hat{\rho}_{GGE}[f] | \{\theta_a\} \rangle = e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} / Z$  avec  $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}$ .

Nous aimerions calculer les valeurs d'attente par rapport à cette matrice de densité, par exemple La moyenne GGE d'un observable s'écrit ,

#### Affirmation 2.

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} \doteq \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} \hat{\rho}_{GGE}[f])}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{GGE}[f])} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} e^{-\hat{\mathcal{Q}}[f]})}{\text{Tr}(e^{-\hat{\mathcal{Q}}[f]})} = \frac{\sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}}{\sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}} \quad (122)$$

pour une certaine observable  $\hat{\mathcal{O}}$ .

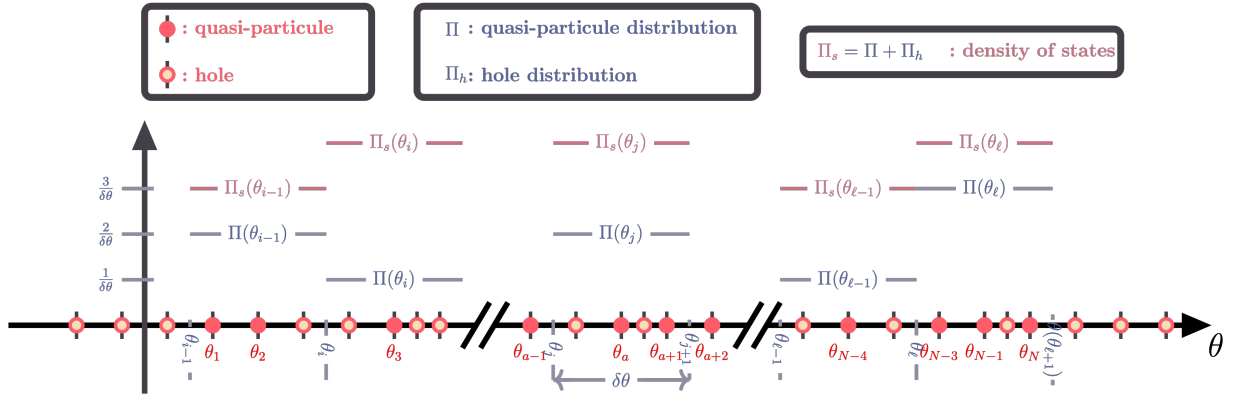
### 1.5.2 La probabilité de configuration en limite thermodynamique

Dans la sous-sous-section précédente, nous avons expliqué comment les observables physiques, telles que les valeurs d'attente des charges et des courants, deviennent des fonctionnelles de la distribution de rapidité extensive  $\Pi(\theta)$  dans la limite thermodynamique. Cependant, nous n'avons pas expliqué comment construire des distributions de rapidité physiquement significatives (sauf pour l'état fondamental de l'hamiltonien de Lieb-Liniger, pour lequel  $\nu(\theta)$  est une fonction rectangulaire, voir la sous-section (??)). *Par exemple, quelle est la distribution de rapidité correspondant à un état d'équilibre thermique à*

une température non nulle ?

La question a été répondue dans les travaux pionniers de Yang et Yang (1969), que nous allons maintenant examiner brièvement. Tout d'abord, nous observons qu'il existe de nombreuses choix différents de séquences d'états propres  $(\{\theta_a\}_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket})_{N \in \mathbb{Z}}$  qui conduisent à la même distribution de rapidité thermodynamique (??). La description du système en termes de distribution de rapidité extensive  $\Pi(\theta)$  est seulement une description grossière : on devrait considérer la distribution de rapidité  $\Pi(\theta)$  comme caractérisant un macro-état du système, correspondant à un très grand nombre de micro-états possibles  $\{\{\theta_a\}\}$ . Pour faire de la thermodynamique, il faut estimer le nombre de ces micro-états.

Pour estimer ce nombre, on se concentre sur une petite cellule de rapidité  $[\theta, \theta + \delta\theta]$ , qui contient  $\Pi(\theta)\delta\theta$  rapidités.



Les équations de Bethe (??) relient ces rapidités aux moments de fermions  $p_a$  dans une cellule de moment  $[p, p + \delta p]$ , où  $\delta\Pi/\delta\theta$  est d'environ  $2\pi\Pi_s(\theta)$ , voir l'équation (??). Il est important de noter que les moments de fermions  $p_a$  sont soumis au principe d'exclusion de Pauli. Le nombre de micro-états est alors évalué en comptant le nombre de configurations de moments de fermions mutuellement distincts, équivalent à  $\Pi(\theta)\delta\theta$ , qui peuvent être placées dans la boîte  $[p, p + \delta p]$ . Comme l'espacement minimal entre deux moments est de  $2\pi/L$ , la réponse est :

$$\#conf.(\theta) \approx \frac{[\Pi_s(\theta)\delta\theta]!}{[\Pi(\theta)\delta\theta]![(\Pi_s(\theta) - \Pi(\theta))\delta\theta]!}, \quad (123)$$

or avec la formule de Sterling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad (124)$$

composé du fonction logarithmique, il vient cette équivalence :

$$\ln n! \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} n \ln n - \underbrace{n + \ln \sqrt{2\pi n}}_{o(n \ln n)}, \quad (125)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n \quad (126)$$

$\#conf.$  est jamais null donc on peut écrire que :

$$\ln \#conf.(\theta) \underset{\substack{\Pi\delta\theta \rightarrow \infty \\ \Pi(\theta) \leq \Pi_s(\theta)}}{\sim} [\Pi_s \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi) \ln(\Pi_s - \Pi)](\theta)\delta\theta. \quad (127)$$

Le nombre total de micro-états est le produit de toutes ces configurations pour toutes les cellules de rapidité  $[\theta, \theta + \delta\theta]$ . En prenant le logarithme et en remplaçant la somme par une intégrale sur  $d\theta$ , nous obtenons l'entropie de Yang-Yang :

$$\ln \#microstates. = \sum_{a|tranche} \ln \#conf.(\theta_a), \quad (128)$$

$$\approx \mathcal{S}_{YY}[\Pi], \quad (129)$$

$$\mathcal{S}_{YY}[\Pi] \doteq \sum_{a|tranche} [\Pi_s \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi) \ln(\Pi_s - \Pi)](\theta_a) \delta\theta. \quad (130)$$

Les variation de  $f$  sont négligeables sur  $\delta\theta$  alors  $\sum_{a=1}^N f(\theta_a) = \sum_{a|tranche} f(\theta_a) \Pi(\theta_a) \delta\theta$ .

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} = \frac{\sum_{|\{\theta_a\}\rangle|\Pi} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle \# \text{microstates} . e^{-\sum_{a|tranche} f(\theta_a) \Pi(\theta_a) \delta\theta}}{\sum_{|\{\theta_a\}\rangle|\Pi} \# \text{microstates} . e^{-\sum_{a|tranche} f(\theta_a) \Pi(\theta_a) \delta\theta}} \quad (131)$$

Lorsque l'observable  $\hat{\mathcal{O}}$  est suffisamment local, on croit que la valeur d'attente  $\langle \{\theta_a\} | \mathcal{O} | \{\theta_a\} \rangle$  ne dépend pas de l'état microscopique spécifique du système, de sorte qu'elle devient une fonctionnelle de  $\Pi$  dans la limite thermodynamique.

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle = \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\Pi]}, \quad (132)$$

et

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} = \frac{\sum_{\Pi} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\Pi]} \# \text{microstates} . e^{-\sum_{a|tranche} f(\theta_a) \Pi(\theta_a) \delta\theta}}{\sum_{\Pi} \# \text{microstates} . e^{-\sum_{a|tranche} f(\theta_a) \Pi(\theta_a) \delta\theta}}, \quad (133)$$

$$= \frac{\sum_{\Pi} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\Pi]} e^{\mathcal{S}_{YY}[\Pi] - \sum_{a|tranche} f(\theta_a) \Pi(\theta_a) \delta\theta}}{\sum_{\Pi} e^{\mathcal{S}_{YY}[\Pi] - \sum_{a|tranche} f(\theta_a) \Pi(\theta_a) \delta\theta}} \quad (134)$$

$$= \sum_{\Pi} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\Pi]} P_{\{\Pi\}} \quad (135)$$

avec la probabilité de la configuration  $\{\Pi\}$  :

$$P_{\{\Pi\}} = \frac{e^{\mathcal{S}_{YY}[\Pi] - \sum_{a|tranche} f(\theta_a) \Pi(\theta_a) \delta\theta}}{\sum_{\Pi} e^{\mathcal{S}_{YY}[\Pi] - \sum_{a|tranche} f(\theta_a) \Pi(\theta_a) \delta\theta}} \quad (136)$$

Il est tentant de définir une action et une fonction de partition.

### 1.5.3 L'action

Soit  $\{\theta_a\}$  l'ensemble de rapidité où  $a$  est l'indice des tranches. La probabilité de cette configuration  $\{\Pi^c(\theta_a)\}$  est :

$$P_{\{\Pi^c(\theta_a)\}} = \frac{e^{-\mathcal{A}[\Pi^c]}}{\mathcal{Z}[\Pi^c]} \quad (137)$$

avec l'action

#### Affirmation 3.

$$\mathcal{A}[g] = -\mathcal{S}_{YY}[g] + \langle f, g \rangle, \quad (138)$$

qui est une fonctionnelle, et la fonction de partition  $\mathcal{Z}[g] = \sum_g e^{-\mathcal{A}[g]}$ . Maintenant pour simplifier on note le produit scalaire sur l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\langle f, g \rangle = \sum_{a|tranche} f(\theta_a) g(\theta_a) \delta\theta$ .

On suppose que  $\mathcal{A}$  est *différentiable* en tout point dans un ouvert  $U$  dans l'espace des fonction d'argument réelle et à valeur réelle. Alors

$$\mathcal{A}[g+h] \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathcal{A}[g] + d\mathcal{A}_g(h) + o(\|h\|)$$

avec  $g \mapsto d\mathcal{A}_g$  l'application différentielle de  $\mathcal{A}$ .

Si de plus  $\mathcal{A}: U \subset \mathbb{R}^{\#tranche} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors pour  $g \in U$ ,  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g)$  existe pour tous  $a$  indice des tranches, et on a

$$d\mathcal{A}_g = \sum_{a|tranche} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g) dx_a,$$

où  $(dx_a)$  est la base duale dans  $(\mathbb{R}^{\#tranche})^*$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^{\#tranche}$ .

De plus si  $\mathcal{A}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  alors on applique la *formule de Taylor-Young*,

$$\mathcal{A}[g+h] \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathcal{A}[g] + \left[ \sum_{a|tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g) \right] + \frac{1}{2!} \left[ \sum_{a|tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g) \right]^{[2]} + \underbrace{\sum_{j=3}^k \frac{1}{j!} \left[ \sum_{a|tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g) \right]^{[j]}}_{o(\|h\|^2)} + o(\|h\|^k),$$

avec pour  $n \in \llbracket 1, k \rrbracket$

$$\left[ \sum_{a=1}^{\#tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g) \right]^{[n]} = \sum_{a_1 + \dots + a_{\#tranche} = n} \frac{n!}{a_1! \dots a_{\#tranche}!} h_1^{a_1} \dots h_{\#tranche}^{a_{\#tranche}} \frac{\partial^n \mathcal{A}}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_{\#tranche}^{a_{\#tranche}}}(g)$$

**Affirmation 4.** On se restreint à  $\mathcal{A}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et on admet qu'il existe  $g \in U$  tel que  $d\mathcal{A}_g = 0$ , de sorte que d'après la formule de Taylor-Young

$$\mathcal{A}[g+h] \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathcal{A}[g] + \mathcal{Q}(h)/2 + o(\|h\|^2),$$

où  $\mathcal{Q}$  est la forme quadratique

$$\mathcal{Q}(h) = \left[ \sum_{a|tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g) \right]^{[2]} = \sum_{a,b|tranche} h_a \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a \partial x_b}(g) h_b = \sum_{a|tranche} h_a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a^2}(g) + 2 \sum_{\substack{a,b|tranche \\ a < b}} h_a h_b \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a \partial x_b}(g)$$

Alors

1. si  $\mathcal{A}$  admet un minimum (resp. un maximum) relatif en  $g$ ,  $\mathcal{Q}$  est une forme quadratique positive (resp. négative).
2. si  $\mathcal{Q}$  est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative),  $\mathcal{A}$  admet un minimum (resp. un maximum) relatif en  $g$ .

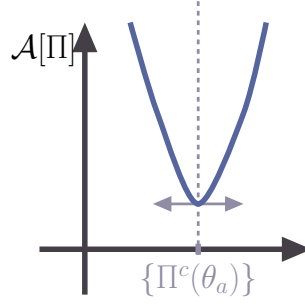
*Remarque 1.2.* — Si la forme quadratique  $\mathcal{Q}$  est seulement supposée positive (et non pas définie positive), on n'est pas assuré d'avoir un minimum relatif en  $g$ . Par exemple, pour la fonction  $\mathcal{A}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto x^3$  en  $g = 0$ ,  $\mathcal{Q} = 0$  est positive (elle est nulle) et pourtant,  $\mathcal{A}$  n'admet pas d'extremum en 0.

— Dire que la forme quadratique  $\mathcal{Q}$  est positive (resp. définie positive), c'est dire que la matrice symétrique  $\hat{\mathbf{A}} = \{\mathcal{A}^{(2)}(g)\}_{a,b}$  avec  $\{\mathcal{A}^{(2)}(g)\}_{a,b} = \left( \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a \partial x_b}(g) \right)_{a,b}$  est positive (resp. définie positive), ou encore que les valeurs propres de  $\hat{\mathbf{A}}$  sont  $\geq 0$  (resp.  $> 0$ ). La matrice  $\mathbf{A}$  est appelée *matrice hessienne* de  $\hat{\mathbf{A}}$  au point critique  $g$ .

On fait l'hypothèse que la configuration  $\{\Pi^c(\theta_a)\}$  du col domine tous les configurations. On note

$$\Pi = \Pi^c + \delta \Pi,$$

tel que  $\mathcal{A}$  admet un minimum en  $\Pi^c$  et  $\mathcal{Q}$  est définie positif.



On simplifie les notation avec

Pour simplifier les notations et généraliser, on note les fonction  $g \equiv \Pi$ . pour calculer la contribution dominante du col  $g^c$ , nous changeons de variable :

$$g = g^c + h$$

avec les fonction  $g^c \equiv \Pi^c$  et  $h \equiv \delta\Pi$ . Et les vecteurs dans  $\mathbb{R}^{\#tranche}$

$$\vec{g} = \vec{g}^c + \vec{h}$$

avec les fonction  $\vec{g} \equiv (\Pi(\theta_1), \dots, \Pi(\theta_a), \dots, \Pi(\theta_{\#tranche}))$ ,  $\vec{g}^c \equiv (\Pi^c(\theta_1), \dots, \Pi^c(\theta_a), \dots, \Pi^c(\theta_{\#tranche}))$  et  $\vec{h} \equiv (\delta\Pi(\theta_1), \dots, \delta\Pi(\theta_{\#tranche}))$

On define la *matrice hessienne* de  $\mathcal{A}$  au point critique

$$\hat{A} = \left\{ \mathcal{A}^{(2)}(g^c) \right\}_{a,b}$$

avec  $\left\{ \mathcal{A}^{(2)}(g) \right\}_{a,b} = \left( \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a \partial x_b}(g^c) \right)_{a,b}$ .

$$P_{\{\Pi(\theta_a)\}} \sim B e^{-\frac{1}{2} \vec{h}^t \hat{A} \vec{h}}, \quad (139)$$

avec  $B = e^{-\mathcal{A}[\Pi^c]}/Z$ .

On avoue ici loi normale multidimensionnelle<sup>3</sup>  
avec la fonction de partition

$$Z \sim (2\pi)^{\#tranche/2} \det(\Sigma)^{1/2} e^{-\mathcal{A}[\Pi^c]} \quad (140)$$

---

### 3. Loi normale multidimensionnelle

- $x \in \mathbb{R}^N$  : fonction caractéristique :  $\phi_{\mu, \Sigma} = \exp(ix^T \mu - \frac{1}{2} x^T \Sigma x)$ .
- cas non-dégénéré où  $\Sigma$  est définie positive :  $f_{\mu, \Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu))$
- théorème centrale limite fait apparaitre un variable U de Gauss centré réduite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= 0, & \mathbb{E}(U^2) &= 1 & p_U(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \\ \text{si } X &= \sigma U + \mu, & \mathbb{E}(X) &= \mu, & \mathbb{E}((X - \mu)^2) &= \sigma^2 & p_X(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- loi unitaire à plusieurs variable

$$\mathbb{E}(U) = 0, \quad \mathbb{E}(UU^T) = id \quad p_U(u) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2}uu^T}$$

- loi générale à plusieurs variables

$$X = aU + \mu \quad \mathbb{E}(X) = a\mathbb{E}(U) + \mu = \mu, \quad \mathbb{E}((X - \mu)(X - \mu)^T) = \mathbb{E}(aUU^T a^T) = aa^T = \Sigma \quad p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$



**Affirmation 5.** avec la matrice écartype

$$\Sigma = \hat{\mathbf{A}}^{-1} \quad (141)$$

Pourquoi une loi normal ? Notament pourquoi  $Z \sim (2\pi)^{\#tranche/2} \det(\hat{\mathbf{A}})^{-1/2} e^{-\mathcal{A}[\Pi^c]}$  ? On se pence plus sur la fonction de partition .

#### 1.5.4 La fonction de partition

Nous rappelons que l'action  $\mathcal{A}$  se réécrit

$$\mathcal{A}[g] = \mathcal{A}[g^c] + \frac{1}{2}(h, A(h)) + o(\|h\|^2), \quad (142)$$

et la fonction de partition se réécrit

$$\mathcal{Z}(g) \doteq \int \mathcal{D}g e^{-\mathcal{A}(g)} \quad (143)$$

$$= e^{-\mathcal{A}(g^c)} \int \mathcal{D}h e^{-\frac{1}{2}(h, A(h))} (1 + o(1)). \quad (144)$$

Imaginons que  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{M}_{\#tranche, \#tranche}(\mathbb{R})$  et  $\vec{g} \in \mathcal{M}_{\#tranche, 1}(\mathbb{R})$ . On introduit une autre fonction de partition

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}) = \int_{\mathbb{R}^{\#tranche}} \underbrace{dh_1 \cdots dh_{\#tranche}}_{\#tranche} e^{-\vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h} + \vec{J}^t \vec{h}} \quad (145)$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \vec{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J}\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{\hat{\mathbf{A}}}{2\pi}\right)}}, \quad (146)$$

Nous souhaitons prouver que :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}) = \int_{\mathbb{R}^{\#tranche}} e^{-\vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h} + \vec{J}^t \vec{h}} dh_1 \cdots dh_{\#tranche}$$

et montrer que cela donne :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \vec{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J}\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{\hat{\mathbf{A}}}{2\pi}\right)}}.$$

#### Étape 1 : Reconnaître la forme de l'intégrale

L'intégrande est de la forme d'une distribution gaussienne multivariée. Pour le rendre plus explicite, réécrivons le terme quadratique dans l'exposant sous forme matricielle :

$$-\vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h} + \vec{J}^t \vec{h} = -\frac{1}{2} \vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J} - \frac{1}{2} \vec{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J},$$

ce qui simplifie l'intégrale en :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h} + \vec{J}^t \vec{h}} d\vec{h}.$$

#### Étape 2 : Compléter le carré

Pour continuer avec l'intégration, nous devons compléter le carré dans l'exposant. Considérons la forme quadratique dans l'exposant :

$$-\frac{1}{2} \vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h} + \vec{J}^t \vec{h}.$$

Nous complétons le carré en ajoutant et en soustrayant le terme qui rend l'exposant un carré parfait :

$$-\frac{1}{2} \left( \vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h} - 2 \vec{J}^t \vec{h} \right) = -\frac{1}{2} \left( \vec{h} - \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J} \right)^t \hat{\mathbf{A}} \left( \vec{h} - \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J} \right) + \frac{1}{2} \vec{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J}.$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} (\vec{h} - \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J})^t \hat{\mathbf{A}} (\vec{h} - \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J})} e^{\frac{1}{2} \vec{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J}} d\vec{h}.$$

### Étape 3 : Changement de variables

Maintenant, effectuons un changement de variables  $\vec{h} \rightarrow \vec{h} + \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J}$ , de sorte que l'intégrande simplifie à :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}) = e^{\frac{1}{2} \vec{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h}} d\vec{h}.$$

### Étape 4 : Calcul de l'intégrale gaussienne

L'intégrale restante est une intégrale gaussienne standard. On sait que pour toute matrice  $\hat{\mathbf{A}}$  définie positive :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h}} d\vec{h} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(\hat{\mathbf{A}})}}.$$

Ainsi, nous avons :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}) = e^{\frac{1}{2} \vec{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J}} \cdot \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(\hat{\mathbf{A}})}}.$$

### Étape 5 : Expression finale

Nous exprimons maintenant le résultat final comme suit :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \vec{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \vec{J}\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{\hat{\mathbf{A}}}{2\pi}\right)}}.$$

Cela termine la démonstration.

en gardant en tête que

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}) \xrightarrow{\#tranche \rightarrow \infty} \int \mathcal{D}h e^{-\frac{1}{2} h^* \hat{\mathbf{A}} h + \vec{J}^t h}. \quad (147)$$

De plus en notant  $\vec{J} = (j_1, \dots, j_a, \dots, j_{\#tranche})$  on remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^n} dh_1 \dots dh_{\#tranche} h_a h_b e^{-\vec{h}^t \hat{\mathbf{A}} \vec{h} + \vec{J}^t \vec{h}} = \frac{d^2 Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J})}{dj_a dj_b} \quad (148)$$

$$= (\hat{\mathbf{A}}^{-1})_{a,b} Z(\hat{\mathbf{A}}, \vec{J}). \quad (149)$$

**Affirmation 6.** Avec avec  $\vec{J} = 0$ , on retrouve d'une part que si on discrétise les vecteur, fonction de partition s'écrit

$$\mathcal{Z}(g) \sim (2\pi)^{\#tranche/2} \det(\hat{\mathbf{A}})^{-1/2} e^{-\mathcal{A}(g^c)}, \quad (150)$$

et d'autre part que les fluctuations s'écrivent

$$\langle h_a, h_b \rangle = (\mathbf{A}^{-1})_{a,b} \quad (151)$$

On fait comme si c'était la même chose que

$$\lim_{\text{therm.}} \langle h_a h_b \rangle_{GGE} = \frac{\int \mathcal{D}g \langle h_a h_b \rangle_{[g]} e^{-\mathcal{A}(g)}}{\int \mathcal{D}g e^{-\mathcal{A}(g)}} \quad (152)$$

En revenant à  $\hat{\mathbf{A}} \equiv \{\mathcal{A}^{(2)}[\Pi^c]\}$ , on se motive à calculer la dérivée seconde de l'action  $\mathcal{A}$

### 1.5.5 Dérivée seconde de l'action

On garde pour l'action la notion avec le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\mathcal{A}[g] = -\mathcal{S}_{YY}[g] + \langle f, g \rangle$$

pour justement de suite la définir. De sorte à simplifier les notations et généraliser au cas discret avec des  $\sum$  et continue avec des  $\int$  en faisant tendre  $\delta\theta$  vers 0 à savoir dans le cas continue

$$\mathcal{S}_{YY}[\Pi] = \int d\theta_s \{ \Pi_s \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi) \ln(\Pi_s - \Pi) \} (\theta_s).$$

Définir la dérivée fonctionnelle de  $\mathcal{A}$  par rapport de sa variable  $g$ ,  $\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta g}$ , est possible s'il y a la différentiabilité au sens de Fréchet de  $\mathcal{A}$  en  $g$ . Pour toute fonction  $h$

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta g}[h] \doteq D_h \mathcal{A}(g) (= d\mathcal{A}_g(h))$$

où  $D_h \mathcal{A}$  est la dérivée directionnelle de  $\mathcal{A}$  dans la direction  $h$ .

$$D_h \mathcal{A}(g) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{\mathcal{A}(g + \varepsilon h) - \mathcal{A}(g)}{\varepsilon}$$

cette dérivée étant bien définie au point  $a$  car  $\mathcal{A}$  est supposé différentiable en  $g$ . La dérivée directionnelle de  $\mathcal{A}$  dans la direction  $h$  s'écrit aussi

$$D_h \mathcal{A}(g) = \sum_{a|tranche} h(\theta_a) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial g(\theta_a)}(g)$$

La dérivée première de l'action s'écrit :

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta g(\theta)}[g] = -\frac{\delta \mathcal{S}_{YY}}{\delta g(\theta)}[g] + \left\langle f, \frac{\delta g}{\delta g(\theta)} \right\rangle,$$

de plus le dérivé de l'entropie s'écrit

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{YY}}{\delta \Pi(\theta)}[\Pi] = \left\langle \ln \left( \frac{\Pi_s}{\Pi} - 1 \right), \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle - \left\langle \ln \left( 1 - \frac{\Pi}{\Pi_s} \right), \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle \quad (153)$$

De plus

$$2\pi \Pi_s = L + \Delta \star \Pi,$$

Donc

$$\frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} = \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \quad (154)$$

et en remarquant que si  $s$  est pair alors

$$\langle f, s \star g \rangle = \langle s \star f, g \rangle$$

il viens que

$$\frac{\delta S_{YY}}{\delta \Pi(\theta)}[\Pi] = \left\langle \ln \left( \frac{\Pi_s}{\Pi} - 1 \right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln \left( 1 - \frac{\Pi}{\Pi_s} \right), \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle, \quad (155)$$

soit

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \Pi(\theta)}[\Pi] = \left\langle f - \ln \left( \frac{\Pi_s}{\Pi} - 1 \right) + \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln \left( 1 - \frac{\Pi}{\Pi_s} \right), \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle, \quad (156)$$

or au point col  $\Pi^c$ , pour tout  $\delta \Pi$ ,

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \Pi^c}(\delta \Pi) = 0,$$

soit

$$\forall \theta \in \text{tranche} : \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \Pi(\theta)}[\Pi^c] = 0$$

soit

**Affirmation 7.**

$$f = \ln \left( \frac{\Pi_s^c}{\Pi^c} - 1 \right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln \left( 1 - \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c} \right)$$

Continuons vers la dérivé seconde de l'action avec

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln \left( \frac{\Pi_s}{\Pi} - 1 \right)}{\delta \Pi(\theta')} &= \frac{\left( \Pi \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta')} - \Pi_s \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \right)}{\Pi(\Pi_s - \Pi)} \\ \frac{\delta \ln \left( 1 - \frac{\Pi}{\Pi_s} \right)}{\delta \Pi(\theta')} &= \frac{\left( \Pi \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta')} - \Pi_s \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \right)}{\Pi_s(\Pi_s - \Pi)} \end{aligned}$$

on peut remarquer que

$$\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi(\theta') \delta \Pi(\theta)}[\Pi] = - \frac{\delta^2 S_{YY}}{\delta \Pi(\theta') \delta \Pi(\theta)}[\Pi]$$

On peut continuer avec (153), (155) ou (156), par symetrie je part de (153)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi(\theta') \delta \Pi(\theta)} [\Pi] &= \left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi}, \left( (\Pi/\Pi_s)^{-1} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} - \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} - \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} + (\Pi/\Pi_s) \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} \right) \right\rangle, \\
&= + \left\langle \frac{(\Pi/\Pi_s)^{-1}}{\Pi_s - \Pi}, \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi}, \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} + \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{\Pi/\Pi_s}{\Pi_s - \Pi}, \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle
\end{aligned}$$

4

en se rappelant de (154)

**Affirmation 8.**

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi(\theta') \delta \Pi(\theta)} [\Pi] &= + \left\langle \frac{(\Pi/\Pi_s)^{-1}}{\Pi_s - \Pi}, \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi}, \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \right) \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} + \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right) \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{\Pi/\Pi_s}{\Pi_s - \Pi}, \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \right) \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

Jusque là on avais pas besoin de le définir. *Mais c'est quoi  $\frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)}$  ?*

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} = \delta_\theta \equiv \delta(\cdot - \theta)$$

où ici  $\delta$  est une fonction de Dirac et non distribution de Dirac c'est à dire

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

4.

et en partant de (155) ou (156) et en remarquant que que si  $s$  est une fonction pair

$$\langle s \star (f \cdot h), g \rangle = \langle f, h \cdot (s \star g) \rangle,$$

on reviens au meme resultat

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi(\theta') \delta \Pi(\theta)} [\Pi] &= \left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi}, \left( (\Pi/\Pi_s)^{-1} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} - \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \right) \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \frac{1}{\Pi_s - \Pi} \cdot \left( 1 - (\Pi/\Pi_s) \frac{\Delta}{2\pi} \star \right) \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \right), \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle, \\
&= \left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi}, \left( (\Pi/\Pi_s)^{-1} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} - \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} - \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} + (\Pi/\Pi_s) \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta')} \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

ce qui me rassure dans mes calculs .

*N.B.* 1.3. et de plus

$$\frac{\delta g}{\delta g(\theta)} = \delta_\theta \equiv \delta(\cdot - \theta),$$

où  $\delta$  est la fonction / distribution de Dirac. Mais plus l'instant pour rester général on garde  $\delta g / \delta g(\theta)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} &= \delta_{\theta'}\delta_{\theta} = \delta_{\theta}\delta(\theta' - \theta), \\ \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} &= \frac{\Delta_{\theta}}{2\pi}\delta\theta = \frac{\Delta}{2\pi}(\cdot - \theta)\delta\theta\end{aligned}$$

Donc

**Affirmation 9.**

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{(\Pi/\Pi_s)^{-1}}{\Pi_s - \Pi}, \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} \right\rangle &= \left( \frac{(\Pi/\Pi_s)^{-1}}{\Pi_s - \Pi} \right) (\theta)\delta(\theta' - \theta)\delta\theta \\ \left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi}, \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')} \right) \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} + \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} \right) \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')} \right\rangle &= \left[ \left( \frac{1}{\Pi_s - \Pi} \right) (\theta) + \left( \frac{1}{\Pi_s - \Pi} \right) (\theta') \right] \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi}\delta\theta'\delta\theta \\ \left\langle \frac{\Pi/\Pi_s}{\Pi_s - \Pi}, \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')} \right) \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} \right) \right\rangle &= \left\langle \frac{\Pi/\Pi_s}{\Pi_s - \Pi}, \frac{\Delta_{\theta'}}{2\pi} \frac{\Delta_{\theta}}{2\pi} \right\rangle \delta\theta'\delta\theta\end{aligned}$$

avec le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^{\#tranche}$  :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{a|tranche} f(\theta_a)g(\theta_a)\delta\theta_a$$

et sur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\theta \in tranche} f(\theta)g(\theta)\delta\theta_a$$

### 1.5.6 Dérivé fonctionnelle

Pour insister que l'on a conscience de ce qu'est et de ce que n'est pas une dérivée fonctionnelle, On comment par donner une définition brève admise par la communauté physicien, mais suffisante pour la suite.

Soient  $\mathcal{F}$  une fonctionnelle et une fonction  $f$ . Définir la dérivée fonctionnelle de  $\mathcal{F}$  par rapport de sa variable  $f$ ,  $\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f}$ , est possible s'il y a la différentiabilité au sens de Fréchet de  $\mathcal{F}$  en  $f$ . Pour toute fonction  $h$

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f}[h] \doteq D_h\mathcal{F}(f)$$

où  $D_h\mathcal{F}$  est la dérivée directionnelle de  $\mathcal{F}$  dans la direction  $h$ .

$$D_h\mathcal{F}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(f + \varepsilon h) - \mathcal{F}(f)}{\varepsilon}$$

cette dérivée étant bien définie au point  $f$  car  $\mathcal{F}$  est supposé différentiable en  $f$ .

### 1.5.7 Tentative d'inversion de la dérivée seconde de l'action

On utilise la théorie de perturbation sur

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta\hat{\mathbf{V}}$$

$$\text{avec } A_{\theta,\theta'}^{(0)} = \left( \frac{(\Pi^c/\Pi_s^c)^{-1}}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta)\delta\theta\delta_{\theta,\theta'} \text{ et } V_{\theta,\theta'} = \left\{ - \left[ \left( \frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta) + \left( \frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta') \right] \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} + \left\langle \frac{\Pi^c/\Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c}, \frac{\Delta_{\theta}}{2\pi} \frac{\Delta_{\theta'}}{2\pi} \right\rangle \right\} \delta\theta.$$

On peut aussi utiliser la formule de Neuman si  $|\delta\theta| \|(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}}\| < 1$ ,

$$(\hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta\hat{\mathbf{V}})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\delta\theta)^k ((\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}})^k (\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}$$

5

or

$$\begin{aligned} \left( (\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}}(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1} \right)_{\theta,\theta'} &= (E_{\theta}^{(0)})^{-1} \delta_{\theta,\ell} V^{\ell\kappa} (E_{\kappa}^{(0)})^{-1} \delta_{\kappa,\theta'} \\ &= (E_{\theta}^{(0)})^{-1} \delta_{\theta,\ell} V^{\ell}_{\theta'} (E_{\theta'}^{(0)})^{-1} \\ &= (E_{\theta}^{(0)})^{-1} V_{\theta,\theta'} (E_{\theta'}^{(0)})^{-1} \end{aligned}$$

---

5.

Hypothèse de départ :

Soit  $A$  une matrice inversible et  $H$  une perturbation telle que  $\|A^{-1}H\| < 1$ . Cette condition garantit la convergence de la série géométrique matricielle. Nous cherchons à exprimer l'inverse de  $A + H$  en termes de  $A^{-1}$  et  $H$ .

Étapes de la démonstration

Étape 1 : Formulation du problème

On commence avec l'identité matricielle fondamentale :

$$(A + H)(A + H)^{-1} = I$$

où  $I$  est la matrice identité. Multiplions par  $A^{-1}$  à gauche :

$$A^{-1}(A + H)(A + H)^{-1} = A^{-1}.$$

En développant le produit matriciel :

$$(I + A^{-1}H)(A + H)^{-1} = A^{-1}.$$

Posons  $B = (A + H)^{-1}$ . Cela donne :

$$(I + A^{-1}H)B = A^{-1}.$$

---

Étape 2 : Résolution de l'équation

Réorganisons pour isoler  $B$  :

$$B = (I + A^{-1}H)^{-1}A^{-1}.$$

Développons  $(I + A^{-1}H)^{-1}$ . Si  $\|A^{-1}H\| < 1$ , nous pouvons appliquer la formule de la série géométrique matricielle :

$$(I + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k.$$

Substituons cette expression dans  $B$  :

$$B = \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k \right) A^{-1}.$$

En réorganisant :

$$(AH)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1}.$$

Conditions de validité

La série converge si  $\|A^{-1}H\| < 1$ , c'est-à-dire que  $H$  est suffisamment "petite" par rapport à  $A$ . Cette condition garantit que  $(I + A^{-1}H)^{-1}$  est bien définie et que la série géométrique converge.

**Affirmation 10.** Donc une a l'ordre un en  $\delta\theta(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}}$

$$(\hat{\mathbf{A}}^{-1})_{\theta,\theta'} = ((\Pi_s^c - \Pi^c)\Pi^c/\Pi_s^c)(\theta)\delta_{\theta,\theta'}/\delta\theta + \mathcal{F}(\theta,\theta'),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\theta,\theta') &= [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta) + (\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} \\ &\quad - [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta)(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \left\langle \frac{\Pi^c/\Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c}, \frac{\Delta_\theta}{2\pi} \frac{\Delta_{\theta'}}{2\pi} \right\rangle \end{aligned}$$

**Ou utiliser la théorie de pertubation,**

$\hat{\mathbf{A}}$  est symétrique donc diagonalisable. Elle est diagonalisable dans une base de vecteur propre orthonormé  $|\varphi_\theta\rangle$  associé à la valeur propre  $E_\theta$  soit

$$(\hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta\hat{\mathbf{V}})|\varphi_\theta\rangle = E_\theta|\varphi_\theta\rangle$$

avec

$$\begin{aligned} |\varphi_\theta\rangle &= |\varphi_\theta^{(0)}\rangle + \delta\theta|\varphi_\theta^{(1)}\rangle + (\delta\theta)^2|\varphi_\theta^{(2)}\rangle + \dots \\ E_\theta &= E_\theta^{(0)} + \delta\theta E_\theta^{(1)} + (\delta\theta)^2 E_\theta^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

tel que

$$\hat{\mathbf{A}}^{(0)}|\varphi_\theta^{(0)}\rangle = E_\theta^{(0)}|\varphi_\theta^{(0)}\rangle$$

Soit un Dl en  $\delta\theta$

$$\begin{aligned} |\varphi_\theta\rangle &= |\varphi_\theta^{(0)}\rangle + \delta\theta \sum_{\theta' \neq \theta} |\varphi_{\theta'}^{(0)}\rangle \frac{V_{\theta',\theta}}{E_\theta^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)}} \\ E_\theta &= E_\theta^{(0)} + \delta\theta V_{\theta,\theta} + (\delta\theta)^2 \sum_{\theta' \neq \theta} \frac{V_{\theta',\theta}^2}{E_\theta^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)}} \end{aligned}$$

On note  $\hat{\mathbf{P}}$  la matrice de passage de la base  $|\varphi_\theta^{(0)}\rangle$  à  $|\varphi_\theta\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= {}^t\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}} \\ |\varphi_\theta\rangle &= \hat{\mathbf{P}}|\varphi_\theta^{(0)}\rangle \end{aligned}$$

avec  $\hat{\mathbf{D}}$  diagonale avec  $E_\theta$  dans la diagonale et

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{1}} + \delta\theta\hat{\mathbf{P}}^{(1)}$$

avec

$$(\hat{\mathbf{P}}^{(1)})_{\theta'}^\theta = \begin{cases} \frac{V_{\theta,\theta'}}{E_\theta^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)}} & \text{si } \theta \neq \theta' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$



et dans la base  $|\varphi_{\theta}^{(0)}\rangle$

$$\hat{A}^{-1} = {}^t \hat{P} \hat{D}^{-1} \hat{P}$$

avec

$$\begin{aligned} (\hat{A}^{-1})_{\theta, \theta'}^{\theta} &= \left( \hat{\delta}_{\ell}^{\theta} + \delta\theta (\hat{P}^{(1)})_{\ell}^{\theta} \right) \left( (E^{-1})^{\ell} \hat{\delta}_{\kappa}^{\ell} \left( \hat{\delta}_{\theta'}^{\kappa} + \delta\theta (\hat{P}^{(1)})_{\theta'}^{\kappa} \right) \right) \\ &= \left( \hat{\delta}_{\ell}^{\theta} + \delta\theta (\hat{P}^{(1)})_{\ell}^{\theta} \right) \left( (E^{-1})^{\ell} \left( \hat{\delta}_{\theta'}^{\ell} + \delta\theta (\hat{P}^{(1)})_{\theta'}^{\ell} \right) \right) \\ &= (E^{-1})^{\theta} \hat{\delta}_{\theta'}^{\theta} - \delta\theta (\hat{P}^{(1)})_{\theta'}^{\theta} (E_{\theta'}^{-1} - E_{\theta}^{-1}) - (\delta\theta)^2 (\hat{P}^{(1)})_{\ell}^{\theta} (\hat{P}^{(1)})_{\theta'}^{\ell} E_{\ell}^{-1} \end{aligned}$$

car  $\hat{P}^{(1)}$  est antisymétrique ie  $P_{\theta, \theta'}^{(1)} = -P_{\theta', \theta}^{(1)}$ . Et avec

$$\begin{aligned} E_{\theta}^{-1} &= \frac{1}{E_{\theta}^{(0)}} \frac{1}{1 + \delta\theta \frac{V_{\theta, \theta}}{E_{\theta}^{(0)}} + (\delta\theta)^2 \sum_{\theta' \neq \theta} \frac{V_{\theta', \theta}^2}{E_{\theta}^{(0)}(E_{\theta}^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)})}} \\ &\stackrel{\delta\theta \rightarrow 0}{=} \frac{1}{E_{\theta}^{(0)}} - \delta\theta \frac{V_{\theta, \theta}}{(E_{\theta}^{(0)})^2} + (\delta\theta)^2 \left( \frac{V_{\theta, \theta}^2}{(E_{\theta}^{(0)})^3} - \sum_{\theta' \neq \theta} \frac{V_{\theta', \theta}^2}{(E_{\theta}^{(0)})^2 (E_{\theta}^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)})} \right) + o(\|\delta\theta\|^3) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} E_{\theta}^{-1} - E_{\theta'}^{-1} &\stackrel{\delta\theta \rightarrow 0}{=} \underbrace{\frac{1}{E_{\theta}^{(0)}} - \frac{1}{E_{\theta'}^{(0)}}}_{\frac{E_{\theta'}^{(0)} - E_{\theta}^{(0)}}{E_{\theta}^{(0)} E_{\theta'}^{(0)}}} + \delta\theta \left( \frac{V_{\theta', \theta'}}{(E_{\theta'}^{(0)})^2} - \frac{V_{\theta, \theta}}{(E_{\theta}^{(0)})^2} \right) \\ &\quad + (\delta\theta)^2 \underbrace{\left( \frac{V_{\theta, \theta}^2}{(E_{\theta}^{(0)})^3} - \frac{V_{\theta', \theta'}^2}{(E_{\theta'}^{(0)})^3} + \sum_{\ell \neq \theta'} \frac{V_{\ell, \theta'}^2}{(E_{\theta'}^{(0)})^2 (E_{\theta'}^{(0)} - E_{\ell}^{(0)})} - \sum_{\ell \neq \theta} \frac{V_{\ell, \theta}^2}{(E_{\theta}^{(0)})^2 (E_{\theta}^{(0)} - E_{\ell}^{(0)})} \right)}_{o(\|\delta\theta\|^2)} + o(\|\delta\theta\|^3) \end{aligned}$$

et

$$\sum_{\ell} P_{\theta, \ell}^{(1)} P_{\ell, \theta'}^{(1)} E_{\ell}^{-1} \stackrel{\delta\theta \rightarrow 0}{=} \sum_{\ell \notin \{\theta, \theta'\}} \frac{V_{\theta, \ell}^2}{E_{\ell}^{(0)} - E_{\theta}^{(0)}} \frac{V_{\ell, \theta'}^2}{E_{\theta'}^{(0)} - E_{\ell}^{(0)}} \frac{1}{E_{\ell}^{(0)}} + o(\|\delta\theta\|)$$

Donc

$$\begin{aligned} (A^{-1})_{\theta, \theta'} &= \frac{1}{E_{\theta}^{(0)}} \delta_{\theta, \theta'} - \delta\theta \left( \frac{\overset{0 \text{ si } \theta=\theta'}{\widehat{V_{\theta, \theta'}}}}{E_{\theta}^{(0)} E_{\theta'}^{(0)}} \delta_{\theta \neq \theta'} + \frac{V_{\theta, \theta}}{(E_{\theta}^{(0)})^2} \delta_{\theta, \theta'} \right) \\ &\quad \underbrace{(\delta\theta)^2 \left( \frac{V_{\theta, \theta}^2}{(E_{\theta}^{(0)})^3} \delta_{\theta, \theta'} - \sum_{\ell \neq \theta} \frac{V_{\ell, \theta}^2}{(E_{\theta}^{(0)})^2 (E_{\theta}^{(0)} - E_{\ell}^{(0)})} + \frac{V_{\theta, \theta'}}{E_{\theta'}^{(0)} - E_{\theta}^{(0)}} \left( \frac{V_{\theta', \theta'}}{(E_{\theta'}^{(0)})^2} - \frac{V_{\theta, \theta}}{(E_{\theta}^{(0)})^2} \right) \delta_{\theta \neq \theta'} - \sum_{\ell \notin \{\theta, \theta'\}} \frac{V_{\theta, \ell}^2}{E_{\ell}^{(0)} - E_{\theta}^{(0)}} \frac{V_{\ell, \theta'}}{E_{\theta'}^{(0)} - E_{\ell}^{(0)}} \frac{1}{E_{\ell}^{(0)}} \right)}_{o(\|\delta\theta\|^2)} \end{aligned}$$

### Ou revenir à la définition des fluctuation

La lettre  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $F$  un s.e.v de  $E$  tel que

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Soient  $x \in E$  et  $x|_F$  et la restriction de  $x$  à  $F$ .

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et les restrictions  $u|_F \in \mathcal{L}(F)$  de  $u$  à  $F$ ,  $u|_{F^\perp} \in \mathcal{L}(F^\perp)$  de  $u$  à  $F^\perp$ ,  $u|_{F,F^\perp} \in \mathcal{L}(F, F^\perp)$  et  $u|_{F^\perp,F} \in \mathcal{L}(F^\perp, F)$ .  
Soit  $f$  une application de  $E$  à valeur dans  $\mathbb{K}$  et  $f|_F$  sa restriction à  $F$ .

On veut calculer la moyenne de  $f|_F$

$$\langle f|_F \rangle = \frac{\int dx f|_F(x) \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right)}{\int dx \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right)}$$

Je veux calculer le produit scalaire  $(x, u(x))$  selon les différentes restrictions.

Pour visualiser les calculs plus facilement on note  $\hat{U}$  la représentation matricielle de  $u$  dans une base orthogonale. Et bien que l'écriture soit fautive mais pratique, on écrit

$$(x, u(x)) = \begin{pmatrix} x|_F & x|_{F^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}|_F & \hat{U}|_{F,F^\perp} \\ \hat{U}|_{F^\perp,F} & \hat{U}|_{F^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x|_F \\ x|_{F^\perp} \end{pmatrix},$$

Soit

$$(x, u(x)) = (x|_F, u|_F(x|_F)) + (x|_F, u|_{F,F^\perp}(x|_{F^\perp})) + (x|_{F^\perp}, u|_{F^\perp,F}(x|_F)) + (x|_{F^\perp}, u|_{F^\perp}(x|_{F^\perp}))$$

De plus  $u$  est auto-adjoint donc

$$\begin{aligned} (x|_{F^\perp}, u|_{F^\perp,F}(x|_F)) &= (x|_F, u|_{F,F^\perp}(x|_{F^\perp})) \\ &= (u|_{F^\perp,F}(x|_F), x|_{F^\perp}) \end{aligned}$$

Soit

$$(x, u(x)) = (x|_F, u|_F(x|_F)) + 2(u|_{F^\perp,F}(x|_F), x|_{F^\perp}) + (x|_{F^\perp}, u|_{F^\perp}(x|_{F^\perp}))$$

Donc

$$\begin{aligned} \int dx f|_F(x) \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right) &= \int dx|_F f(x|_F) \exp\left(-\frac{1}{2}(x|_F, u|_F(x|_F))\right) \\ &\quad \times \int dx|_{F^\perp} \exp\left(-\frac{1}{2}(x|_{F^\perp}, u|_{F^\perp}(x|_{F^\perp})) - (u|_{F^\perp,F}(x|_F), x|_{F^\perp})\right) \end{aligned}$$

or pour  $u$  par forcément auto-adjoint

$$\int dx \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x)) + (b, x)\right) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(b, u^{-1}(b))\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{u}{2\pi}\right)}}$$

donc

$$\begin{aligned} \int dx|_{F^\perp} \exp\left(-\frac{1}{2}(x|_{F^\perp}, u|_{F^\perp}(x|_{F^\perp})) - (u|_{F^\perp,F}(x|_F), x|_{F^\perp})\right) &= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(u|_{F^\perp,F}(x|_F), (u|_{F^\perp})^{-1}(u|_{F^\perp,F}(x|_F)))\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{u|_{F^\perp}}{2\pi}\right)}} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\left(x|_F, \left(u|_{F,F^\perp} \circ (u|_{F^\perp})^{-1} \circ u|_{F^\perp,F}\right)(x|_F)\right)\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{u|_{F^\perp}}{2\pi}\right)}} \end{aligned}$$

donc

$$\int dx f_{|F}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right) = \int dx_{|F} f(x_{|F}) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F}, \left(u_{|F} - u_{|F, F^\perp} \circ (u_{|F^\perp})^{-1} \circ u_{|F^\perp, F}\right)(x_{|F})\right)\right) / \sqrt{\det\left(\frac{u_{|F^\perp}}{2\pi}\right)}$$

Ce qui nous rassure car

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{u}{2\pi}\right)}} &= \int dx \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right) \\ &= \int dx_{|F} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_{|F}, u_{|F}(x_{|F}))\right) \\ &\quad \times \int dx_{|F^\perp} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_{|F^\perp}, u_{|F^\perp}(x_{|F^\perp})) - (u_{|F^\perp, F}(x_{|F}), x_{|F^\perp})\right) \\ &= \int dx_{|F} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F}, \left(u_{|F} - u_{|F, F^\perp} \circ (u_{|F^\perp})^{-1} \circ u_{|F^\perp, F}\right)(x_{|F})\right)\right) / \sqrt{\det\left(\frac{u_{|F^\perp}}{2\pi}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{u_{|F} - u_{|F, F^\perp} \circ (u_{|F^\perp})^{-1} \circ u_{|F^\perp, F}}{2\pi}\right) \det\left(\frac{u_{|F^\perp}}{2\pi}\right)}} \end{aligned}$$

et d'après les complement et determinant de Schur on a

$$\det(u) = \det(u_{|F^\perp}) \det\left(u_{|F} - u_{|F, F^\perp} \circ (u_{|F^\perp})^{-1} \circ u_{|F^\perp, F}\right)$$

Donc ça me rassure.

Donc

$$\begin{aligned} \langle f_{|F} \rangle &= \frac{\int dx_{|F} f(x_{|F}) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F}, \left(u_{|F} - u_{|F, F^\perp} \circ (u_{|F^\perp})^{-1} \circ u_{|F^\perp, F}\right)(x_{|F})\right)\right)}{\int dx_{|F} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F}, \left(u_{|F} - u_{|F, F^\perp} \circ (u_{|F^\perp})^{-1} \circ u_{|F^\perp, F}\right)(x_{|F})\right)\right)}, \\ &= \sqrt{\det\left(\frac{u_{|F} - u_{|F, F^\perp} \circ (u_{|F^\perp})^{-1} \circ u_{|F^\perp, F}}{2\pi}\right)} \int dx_{|F} f(x_{|F}) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F}, \left(u_{|F} - u_{|F, F^\perp} \circ (u_{|F^\perp})^{-1} \circ u_{|F^\perp, F}\right)(x_{|F})\right)\right) \end{aligned}$$

**Affirmation 11.** On peut noter que

$$\left((u^{-1})_{|F}\right)^{-1} = u_{|F} - u_{|F, F^\perp} \circ (u_{|F^\perp})^{-1} \circ u_{|F^\perp, F}$$

$$\det(u) \det\left((u^{-1})_{|F^\perp}\right) = \det(u_{|F})$$

$$\det(u) \det\left((u^{-1})_{|F}\right) = \det(u_{|F^\perp})$$

$$\begin{aligned}
\langle f|_F \rangle &= \frac{\int dx f|_F(x) \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right)}{\int dx \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right)} \\
&= \int dx|_F f(x|_F) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x|_F, \left(\left((u^{-1})|_F\right)^{-1}\right)(x|_F)\right)\right) / \sqrt{\det\left(2\pi (u^{-1})|_F\right)}
\end{aligned}$$

or pour  $(x_i, x_j) \in F^2$  et  $u$  inversible

$$\int dx x_i x_j \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right) = \frac{(e_i, u^{-1}(e_j))}{\sqrt{\det\left(\frac{u}{2\pi}\right)}}$$

Donc

$$\langle x_i x_j \rangle = \left( e_i, \overbrace{(u|_F - u|_{F, F^\perp} \circ (u|_{F^\perp})^{-1} \circ u|_{F^\perp, F})^{-1}}^{(u^{-1})|_F} (e_j) \right)$$

**Affirmation 12.** Or  $u|_F$  est inversible donc on peut écrire que

$$\begin{aligned}
\overbrace{(u|_F - u|_{F, F^\perp} \circ (u|_{F^\perp})^{-1} \circ u|_{F^\perp, F})^{-1}}^{(u^{-1})|_F} &= (u|_F)^{-1} + \\
&+ (u|_F)^{-1} \circ u|_{F, F^\perp} \circ \overbrace{(u|_{F^\perp} - u|_{F^\perp, F} \circ (u|_F)^{-1} \circ u|_{F, F^\perp})^{-1}}^{(u^{-1})|_{F^\perp}} \circ u|_{F^\perp, F} \circ (u|_F)^{-1}
\end{aligned}$$

Donc pour  $(x_i, x_j) \in F^2$  et  $u$  inversible

$$\begin{aligned}
\langle x_i x_j \rangle &= \left( e_i, (u^{-1})|_F (e_j) \right), \\
&= \left( e_i, \left( (u|_F)^{-1} + (u|_F)^{-1} \circ u|_{F, F^\perp} \circ (u^{-1})|_{F^\perp} \circ u|_{F^\perp, F} \circ (u|_F)^{-1} \right) (e_j) \right).
\end{aligned}$$

**Affirmation 13.**

$$\begin{aligned}
(u^{-1})|_F &= (u|_F)^{-1} + (u|_F)^{-1} \circ u|_{F, F^\perp} \circ (u|_{F^\perp})^{-1} \circ u|_{F^\perp, F} \circ (u|_F)^{-1} + \\
&+ (u|_F)^{-1} \circ u|_{F, F^\perp} \circ (u|_{F^\perp})^{-1} \circ u|_{F^\perp, F} \circ (u^{-1})|_F \circ u|_{F, F^\perp} \circ (u|_{F^\perp})^{-1} \circ u|_{F^\perp, F} \circ (u|_F)^{-1}
\end{aligned}$$

$$p_1 = (u|_F)^{-1} \circ u|_{F, F^\perp},$$

$$p_2 = (u|_{F^\perp})^{-1} \circ u|_{F^\perp, F}$$

$$\begin{aligned}(u^{-1})|_F &= \sum_{i=0}^{\infty} (p_1 \circ p_2)^i \circ \left( (u|_F)^{-1} + p_1 \circ (u|_{F^\perp})^{-1} \circ p_1^* \right) \circ (p_2^* \circ p_1^*)^i + \\ &+ \lim_{i \rightarrow \infty} (p_1 \circ p_2)^i (u^{-1})|_F (p_2^* \circ p_1^*)^i\end{aligned}$$

Pour  $i = j$  on prend  $F_i = \mathbf{Vect}(e_i)$  soit

$$\langle x_i^2 \rangle = \left( e_i, \left( u|_{F_i} - u|_{F_i, F_i^\perp} \circ u|_{F_i^\perp}^{-1} \circ u|_{F_i^\perp, F_i} \right)^{-1} (e_i) \right)$$

Pour  $i \neq j$  on prend  $F_{ij} = \mathbf{Vect}(e_i, e_j)$  soit

$$\langle x_i x_j \rangle = \left( e_i, \left( u|_{F_{ij}} - u|_{F_{ij}, F_{ij}^\perp} \circ u|_{F_{ij}^\perp}^{-1} \circ u|_{F_{ij}^\perp, F_{ij}} \right)^{-1} (e_j) \right)$$

### 1.5.8 Fluctuation de $\nu$

$$\mathcal{S}_{YY}[\Pi] = \langle \Pi_s \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi) \ln(\Pi_s - \Pi), 1 \rangle$$

Or

$$\Pi_s \ln \Pi_s = (\Pi_s - \Pi) \ln \Pi_s + \Pi \ln \Pi_s$$

Soit

$$\begin{aligned}\Pi_s \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi) \ln(\Pi_s - \Pi) &= (\Pi_s - \Pi) \ln \Pi_s + \Pi \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi) \ln(\Pi_s - \Pi) \\ &= (\Pi_s - \Pi) \ln \left( \frac{\Pi_s}{\Pi_s - \Pi} \right) + \Pi \ln \left( \frac{\Pi_s}{\Pi} \right) \\ &= -\Pi_s \left\{ \left( 1 - \frac{\Pi}{\Pi_s} \right) \ln \left( 1 - \frac{\Pi}{\Pi_s} \right) + \frac{\Pi}{\Pi_s} \ln \left( \frac{\Pi}{\Pi_s} \right) \right\} \\ &\stackrel{\substack{\Pi_s = L\rho_s \\ \Pi = L\rho \\ \nu = \frac{\Pi}{\Pi_s}}}{=} -L\rho_s \{ (1 - \nu) \ln(1 - \nu) + \nu \ln(\nu) \}\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{S}_{YY}[\Pi] = -L \langle (1 - \nu) \ln(1 - \nu) + \nu \ln(\nu), \rho_s \rangle$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{\delta[(1 - \nu) \ln(1 - \nu)]}{\delta\nu(\theta)} &= -\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)} \{1 + \ln(1 - \nu)\} \\ \frac{\delta[\nu \ln \nu]}{\delta\nu(\theta)} &= \frac{\partial\nu}{\partial\nu(\theta)} (1 + \ln \nu)\end{aligned}$$

Donc

$$-\frac{\delta[(1 - \nu) \ln(1 - \nu) + \nu \ln \nu]}{\delta\nu(\theta)} = \frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)} \ln \left( \frac{1 - \nu}{\nu} \right)$$

Donc

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{YY}}{\delta \nu(\theta)}[\nu \rho_s] = \left\langle \ln \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right) \rho_s, \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \right\rangle - \left\langle (1-\nu) \ln(1-\nu) + \nu \ln \nu, \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} \right\rangle$$

On rappelle que

$$\mathcal{A}[\nu \rho_s] = -\mathcal{S}_{YY}[\nu \rho_s] + \langle f, \nu \rho_s \rangle$$

Donc

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \nu(\theta)}[\nu \rho_s] = \left\langle \left( f - \ln \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right) \right) \rho_s, \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \right\rangle + \left\langle (1-\nu) \ln(1-\nu) + \nu (\ln \nu + f), \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} \right\rangle$$

et on a vu que

$$f = \ln \left( \frac{1-\nu^c}{\nu^c} \right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln(1-\nu^c)$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)}{\delta \nu(\theta')} &= -\frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \left\{ \frac{1}{1-\nu} + \frac{1}{\nu} \right\} \\ &= -\frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \left\{ \frac{1}{(1-\nu)\nu} \right\} \end{aligned}$$

Donc

**Affirmation 14.**

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \nu(\theta') \delta \nu(\theta)}[\nu \rho_s] &= \left\langle \frac{\rho_s}{(1-\nu)\nu}, \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta')} \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \right\rangle \\ &+ \left\langle \left( f - \ln \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right) \right), \left( \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta')} \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} + \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta')} \right) \right\rangle \\ &+ \left\langle (1-\nu) \ln(1-\nu) + \nu (\ln \nu + f), \frac{\delta^2 \rho_s}{\delta \nu(\theta') \delta \nu(\theta)} \right\rangle \end{aligned}$$

On rappelle aussi que

$$2\pi \rho_s = 1 + \Delta \star (\nu \cdot \rho_s) = 1^{dr}$$

Soit

$$\mathcal{L}[\rho_s] = \frac{1}{2\pi}$$

avec

$$\mathcal{L} : f \mapsto f - \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu \cdot f)$$

De plus

$$\begin{aligned}\frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \cdot \rho_s \right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \nu \cdot \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} \right) &= 0 \\ \frac{\delta^\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta') \delta \nu(\theta)} - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta')} \cdot \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} + \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \cdot \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta')} \right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \nu \cdot \frac{\delta^2 \rho_s}{\delta \nu(\theta') \delta \nu(\theta)} \right) &= 0\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left( \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} \right) &= \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \cdot \rho_s \right) \\ \mathcal{L} \left( \frac{\delta^\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta') \delta \nu(\theta)} \right) &= \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta')} \cdot \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} + \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \cdot \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta')} \right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \cdot \rho_s \right) \right) \\ \frac{\delta^\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta') \delta \nu(\theta)} &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \left( \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta')} \cdot \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta)} + \frac{\delta \nu}{\delta \nu(\theta)} \cdot \frac{\delta \rho_s}{\delta \nu(\theta')} \right) \right)\end{aligned}$$

Cherchons  $\mathcal{L}^{-1}$

Notons

$$\mathcal{L}(f) = g$$

On rappelle que les transformée de Fourier . Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{K})$  :

$$\hat{f} \doteq \mathcal{F}[x \mapsto f(x)] : \kappa \mapsto \alpha \int e^{\mp i \gamma \kappa x} f(x) dx, \quad f \equiv \mathcal{F}^{-1}[\kappa \mapsto \hat{f}(\kappa)] : x \mapsto \beta \int e^{\pm i \gamma \kappa x} \hat{f}(\kappa) d\kappa, \quad \gamma = 2\pi \alpha \beta$$

Avec cette définition

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f \cdot g] &= \beta \mathcal{F}[f] \star \mathcal{F}[g] \\ \mathcal{F}^{-1}[f \cdot g] &= \alpha \mathcal{F}^{-1}[f] \star \mathcal{F}^{-1}[g] \\ \mathcal{F}[f \star g] &= \alpha^{-1} \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \\ \mathcal{F}^{-1}[f \star g] &= \beta^{-1} \mathcal{F}^{-1}[f] \cdot \mathcal{F}^{-1}[g]\end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{F}[\mathcal{L}(f)] \doteq \hat{f} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\hat{\Delta}}{2\pi} \cdot (\hat{\nu} \star \hat{f}) = \hat{g}$$

On note le noyau

$$K(\kappa, \varrho) \equiv \hat{\Delta}(\kappa) \hat{\nu}(\kappa - \varrho)$$

$$\mathcal{F}[\mathcal{L}(f)](\kappa) \doteq \int d\varrho \left[ \delta(\kappa - \varrho) - \frac{\beta}{\alpha} \frac{K(\kappa, \varrho)}{2\pi} \right] \hat{f}(\varrho) = \hat{g}(\kappa)$$

on note

$$\hat{L}(\kappa, \varrho) = \delta(\kappa - \varrho) - \frac{\beta}{\alpha} \frac{K(\kappa, \varrho)}{2\pi}$$

soit

$$\hat{L} = \hat{1} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\hat{K}}{2\pi}$$

Supposons que la norme de  $\frac{\beta}{\alpha} \frac{\hat{K}}{2\pi} \ll 1$  alors

$$\begin{aligned} \hat{L}^{-1} &= \left( \hat{1} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\hat{K}}{2\pi} \right)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta}{\alpha} \frac{\hat{K}}{2\pi} \right)^n \end{aligned}$$

Ainsi

$$\hat{f}(\varrho) = \int d\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta}{\alpha} \frac{K(\kappa, \varrho)}{2\pi} \right)^n \hat{g}(\kappa)$$

Soit

$$\begin{aligned} f(y) &= \int d\kappa \hat{g}(\kappa) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{2\pi} \right)^n \mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto (K(\kappa, \varrho))^n](y) \\ &= \int d\kappa \hat{g}(\kappa) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{2\pi} \right)^n \alpha^{n-1} \underbrace{\mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto (K(\kappa, \varrho))] \star \cdots \star \mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto (K(\kappa, \varrho))]}_{n \times}(y) \end{aligned}$$

Or

$$\mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto \hat{\nu}(\kappa - \varrho)] = e^{\pm i\gamma\kappa y} \nu(-y)$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(\kappa) &= \alpha \int \frac{2c}{c^2 + \theta^2} e^{\mp i\gamma\kappa\theta} d\theta \\ &= 2\alpha \int \frac{1}{1+u^2} e^{\mp i\gamma\kappa u} \end{aligned}$$

or

$$\int \frac{e^{-iku}}{u^2 + a^2} du = \frac{\pi}{a} e^{-a|k|}$$

Donc

$$\hat{\Delta}(\kappa) = 2\alpha\pi e^{-|\gamma\kappa|}$$

Donc

$$\mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto K(\kappa, \varrho)] = 2\pi\alpha e^{-|\gamma\kappa|} e^{\pm i\gamma\kappa y} \nu(-y)$$

Donc

$$f(y) = \int d\kappa \hat{g}(\kappa) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \alpha^{n-1} e^{-n|\gamma\kappa|} \underbrace{[x \mapsto e^{\pm i\gamma\kappa x} \nu(-x)] \star \cdots \star [x \mapsto e^{\pm i\gamma\kappa x} \nu(-x)]}_{n \times}(y)$$



### 1.5.9 Brouillons

$$\langle \delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta') \rangle = \left( \hat{\mathbf{A}}^{-1} \right)_{\theta, \theta'}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_{\theta, \theta'} &= \frac{1}{\nu(\theta)(\rho_s(\theta) - \rho(\theta))} \delta(\theta' - \theta) \delta\theta \\ &\quad - \frac{\Delta(\theta - \theta')}{2\pi} \left( \frac{1}{\rho_s(\theta) - \rho(\theta)} + \frac{1}{\rho_s(\theta') - \rho(\theta')} \right) \delta\theta \delta\theta' \\ &\quad + \int d\theta'' \frac{\Delta(\theta - \theta'')}{2\pi} \frac{\Delta(\theta' - \theta'')}{2\pi} \frac{\nu(\theta'')}{\rho_s(\theta'') - \rho(\theta'')} \delta\theta \delta\theta' \end{aligned}$$

### 1.5.10 Résumé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux fluctuations de la distribution de rapidité  $\delta\Pi$  autour d'une distribution de référence  $\Pi^c$ , qui maximise la contribution à la fonction de partition des états, exprimée comme une fonctionnelle de la distribution  $\Pi$  :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\Pi} \exp(-\mathcal{A}(\Pi)).$$

Dans la section **Entropie de Yang-Yang** (??), l'action  $\mathcal{A}(\Pi)$  s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}(\Pi) \doteq -\mathcal{S}_{YY}(\Pi) + \int f(\theta) \Pi(\theta) d\theta,$$

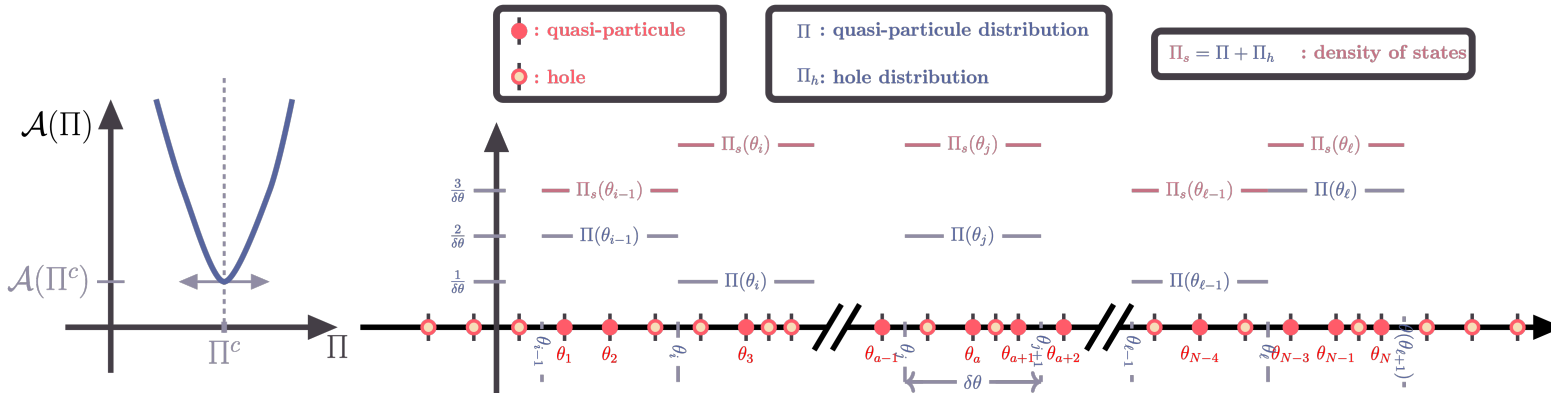
où  $\mathcal{S}_{YY}$  est la fonctionnelle d'entropie de Yang-Yang, définie dans (??), et  $f$  est la fonction paramétrant les charges, introduite dans (??).

Dans cette même section **Entropie de Yang-Yang** (??), nous avons établi un lien entre  $f$  et  $\Pi^c$ .

Nous poursuivons à présent avec cette définition de l'action de classe  $\mathcal{C}^2$  et admetant une distribution critique  $\Pi^c$  tel que sa différentielle en ce point critique soit nulle  $d\mathcal{A}_{\Pi^c} = 0$  (??) de sorte que d'après la formule de Taylor-Young

$$\mathcal{A}(\Pi^c + \delta\Pi) \underset{\delta\Pi \rightarrow 0}{=} \mathcal{A}(\Pi^c) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi^2} \Big|_{\Pi^c} (\delta\Pi)^2 + \mathcal{O}((\delta\Pi)^3),$$

une expression quadratique pour l'action à l'ordre dominant en  $\delta\Pi$  avec  $\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi^2} \Big|_{\Pi^c}$  la forme quadratique définie positive (Fig (??)).



On discrétise l'axe des rapidités en petite cellule de rapidité  $[\theta, \theta + \delta\theta]$ , qui contient  $\Pi(\theta)\delta\theta$  rapidités. Avec ces petites tranches, la forme quadratique s'écrit :

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi^2} \right|_{\Pi^c} (\delta \Pi) = \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta \Pi(\theta_a) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta \Pi(\theta_a) \partial \delta \Pi(\theta_b)} (\Pi^c) \delta \Pi(\theta_b).$$

Les fluctuations s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \langle \delta \Pi(\theta) \delta \Pi(\theta') \rangle &= \frac{\int d\delta \Pi \delta \Pi(\theta) \delta \Pi(\theta') \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta \Pi(\theta_a) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta \Pi(\theta_a) \partial \delta \Pi(\theta_b)} (\Pi^c) \delta \Pi(\theta_b) \right)}{\int d\delta \Pi \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta \Pi(\theta_a) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta \Pi(\theta_a) \partial \delta \Pi(\theta_b)} (\Pi^c) \delta \Pi(\theta_b) \right)} \\ &= (\mathbf{A}^{-1})_{\theta, \theta'} \end{aligned}$$

La *matrice hessienne*  $\mathbf{A}_{\theta, \theta'} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta \Pi(\theta) \partial \delta \Pi(\theta')} (\Pi^c)$ , au point critique  $\Pi^c$ , s'écrit

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta \hat{\mathbf{V}}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{\theta, \theta'}^{(0)} &= \left( \frac{(\Pi_s^c / \Pi_s^c)^{-1}}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta) \delta\theta \delta_{\theta, \theta'}, \\ V_{\theta, \theta'} &= \left\{ - \left[ \left( \frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta) + \left( \frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta') \right] \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} + \int d\theta'' \left( \frac{\Pi^c / \Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta'') \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi} \right\} \delta\theta \end{aligned}$$

**Affirmation 15.** Donc une a l'ordre un en  $\delta\theta(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1} \hat{\mathbf{V}}$

$$\langle \delta \Pi(\theta) \delta \Pi(\theta') \rangle = ((\Pi_s^c - \Pi^c) \Pi^c / \Pi_s^c) (\theta) \delta_{\theta, \theta'} / \delta\theta + \mathcal{F}(\theta, \theta'),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\theta, \theta') &= [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta) + (\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} \\ &\quad - [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta)(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \int d\theta'' \left( \frac{\Pi^c / \Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta'') \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi} \end{aligned}$$

## 2 Rappel Physique statistique

### 3 1

Maintenant, considérons la matrice de densité à l'équilibre thermique à la température  $T$ . Dans le formalisme de la fonction de partition, la matrice de densité peut être écrite comme une exponentielle de l'hamiltonien  $H$  :

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad (157)$$

où  $\beta = 1/(k_B T)$  est l'inverse de la température,  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $Z$  est la fonction de partition. La fonction de partition est définie comme

$$Z = \text{Tr} (e^{-\beta H}) \quad (158)$$

où la trace est prise sur tous les états du système.

En utilisant la diagonalisation de l'hamiltonien, on peut écrire la fonction de partition comme une somme sur tous les états propres  $|n\rangle$  avec les énergies correspondantes  $E_n$  :

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (159)$$

En utilisant la formule de Stirling pour approximer le logarithme de la factorielle, on peut exprimer la somme ci-dessus comme une intégrale sur l'énergie  $E$  :

$$Z = \frac{1}{h^N} \int dE e^{-\beta E} g(E) \quad (160)$$

où  $h$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$  et  $g(E)$  est la densité d'états d'énergie. La densité d'états est le nombre d'états qui ont une énergie entre  $E$  et  $E + dE$ .

En utilisant la densité d'états  $g(E)$ , on peut écrire la fonction de partition  $Z$  comme une intégrale sur toutes les configurations possibles des rapides  $\{\theta_a\}$  :

$$Z = \frac{1}{h^N} \int d\{\theta\} e^{-\beta E(\{\theta\})} \quad (161)$$

où  $E(\{\theta\})$  est l'énergie totale des particules pour une configuration donnée des rapides.

En utilisant cette expression pour  $Z$ , on peut écrire la matrice de densité comme une intégrale sur toutes les configurations possibles des rapides :

$$\rho = \frac{1}{h^N} \int d\{\theta\} e^{-\beta E(\{\theta\})} |\{\theta\}\rangle \langle \{\theta\}| \quad (162)$$

où  $|\{\theta\}\rangle$  est l'état propre correspondant à la configuration des rapides  $\{\theta\}$ .

La distribution des rapides  $\rho(\theta)$  dans la matrice de densité est donnée par l'expression suivante :

$$\rho(\theta) = \frac{1}{h^N} \int d\{\theta'\} e^{-\beta E(\{\theta'\})} \delta(\theta - \theta') \quad (163)$$

où  $\delta(\theta - \theta')$  est la fonction delta de Dirac. Cette expression montre que la distribution des rapides est déterminée par la fonction d'énergie  $E(\{\theta\})$ , qui dépend de l'hamiltonien du système. En général, la fonction d'énergie ne peut pas être calculée exactement, mais des approximations peuvent être utilisées pour estimer la distribution des rapides à l'équilibre thermique.

En fait, une généralisation directe consiste à considérer la matrice de densité de l'ensemble de Gibbs généralisé (Rigol et al. 2008, 2007), donnée par :

$$\rho_{GGE} = \frac{1}{Z_{GGE}} e^{-\sum_{j=1}^M \lambda_j Q_j} \quad (164)$$

où les coefficients  $\lambda_j$  sont des multiplicateurs de Lagrange fixés de manière à ce que les valeurs moyennes des charges conservées coïncident avec celles données par l'état thermique, c'est-à-dire :

$$\langle Q_j \rangle = \text{Tr}(\rho T_j) = \frac{1}{Z} \sum_n \langle \Psi_n | T_j | \Psi_j \rangle e^{-\beta E_n} = \langle Q_j \rangle_{th} \quad (165)$$

où  $T_j$  est une charge conservée et  $\langle Q_j \rangle_{th}$  est sa valeur moyenne dans l'état thermique. La fonction de partition  $Z_{GGE}$  est définie comme la trace de  $\rho_{GGE}$  :

$$Z_{GGE} = \text{Tr}(\rho_{GGE}). \quad (166)$$

L'état thermique est alors obtenu en prenant la limite  $\lambda_j \rightarrow 0$ . Le GGE est une généralisation de l'ensemble de Gibbs standard qui prend en compte les charges conservées supplémentaires et permet ainsi de décrire des systèmes qui ne sont pas en équilibre thermique local.

## 4 Calcul des densités d'états

*Exercice 4.1.*

$$\sum_l f(E_l) = \int dE \rho(E) f(E) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f & \text{est une fonction régulière} \\ \rho(E) & \text{est la densité d'état} \\ \rho(E)dE & \stackrel{\text{def}}{=} \text{nombre d'états dans } [E, E + dE] \end{array} \right.$$

$$\rho(E) = \sum_l \delta(E - E_l) \quad \text{où la somme est sur les états quantiques}$$

$$\rho(E) = \sum_{E_l} g_l \delta(E - E_l)$$

$$\begin{aligned} \Phi(E) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nombre d'états d'énergies inférieures à } E \\ &= \int^E \rho(E') dE' \\ &= \sum_l \Pi(E - E_l) \quad \theta_H = \Pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \frac{2\pi}{L}(n_1, \dots, n_d) \quad \text{avec } n_i \in \mathbb{Z} \\ \Phi(E) &= \sum_{\vec{k}} \Pi\left(E - \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}\right) \quad \text{avec } \sum_{\vec{k}} \equiv \bigotimes_{i=1}^d \sum_{n_i \in \mathbb{Z}} = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{n_d \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

$$\sum_{\vec{k}} = \frac{V}{(2\pi)^d} \int d^d \vec{k} \quad d = \dim \times n$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \Phi(E) &= \int_{\vec{q}_i \in V} \int \prod_{i=1}^n \left( \frac{d^q \vec{q}_i \cdot d^q \vec{p}_i}{h^q} \Pi(E - h_i(\vec{q}_i, \vec{p}_i)) \right) \quad d = qn \\ &= \int_{\vec{q}_i \in V} \int_{h_i(\vec{q}_i, \vec{p}_i) \leq E} \prod_{i=1}^n \left( \frac{d^q \vec{q}_i \cdot d^q \vec{p}_i}{h^q} \right) \quad q = 1, 2, 3 \\ &= \frac{1}{h^d} \left( \begin{array}{l} \text{volume de l'espace des phases occupé} \\ \text{par les microétats d'énergies } < E \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \rho & \xleftrightarrow{1 \text{ p.c}} & \mathcal{D} \\ \Phi & \xleftrightarrow{1 \text{ p.c}} & \mathcal{N} \end{array}$$

$$\begin{aligned} d\mathcal{N}(\mathcal{E}) &= \mathcal{D}(\mathcal{E})d\mathcal{E} \\ \mathcal{D}(\mathcal{E}) &= \frac{d\mathcal{N}}{d\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{N} &= \int_0^\infty d\mathcal{E} \mathcal{D}(\mathcal{E}) f_{FD}(\mathcal{E}) \\ \overline{E} &= \int_0^\infty d\mathcal{E} \mathcal{D}(\mathcal{E}) f_{FD}(\mathcal{E}) \mathcal{E} \end{aligned}$$

1.

$\mathcal{N}(\mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{nombre d'états d'énergies inférieures à } \mathcal{E} \text{ pour une particule}$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{E}) &= g_s \int_{x_i \in [0, L]} \int_{p_i^2 / (2m) < \mathcal{E}} \frac{d^d x \cdot d^d p}{h^d} \\ &= g_s \underbrace{\frac{1}{h^d} \int_{x_i \in [0, L]} d^d x}_{L^d} \underbrace{\int_{p_i < \sqrt{2m\mathcal{E}}} d^d p}_{\mathcal{V}_d(\underbrace{\sqrt{2m\mathcal{E}}}_R)} = \frac{R^d \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 2)} \\ &= g_s \frac{L^d \sqrt[d]{2m\epsilon} \pi^{d/2}}{h^d \Gamma(d/2 + 1)} \\ &= \frac{g_s}{\Gamma(d/2 + 1)} L^d \underbrace{\frac{(2\pi)^d}{h^d}}_{1/\hbar^d} \sqrt[d]{\frac{\mathcal{E}m}{2\pi}} \\ &= \frac{g_s}{\Gamma(d/2 + 1)} \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\epsilon_0}} \right)^d \quad \text{où } \epsilon_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{mL^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \underbrace{\frac{g_s}{\Gamma(d/2)} \left( \frac{1}{\epsilon_0} \right)^{d/2}}_{\equiv K_d} \mathcal{E}^{d/2-1} \quad \text{où } \epsilon_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{mL^2}$$

| Degrès               | $K_d$   | Dépendance en $\mathcal{E}$                           |
|----------------------|---|---|
| $1D \rightarrow K_1$ | $= g_s \frac{L}{h} (2m)^{1/2}$                      | $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \propto \mathcal{E}^{-1/2}$ |
| $2D \rightarrow K_2$ | $= g_s \left( \frac{L}{h} \right)^2 (2m)\pi$        | $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \propto \text{cont}$        |
| $3D \rightarrow K_3$ | $= 2g_s \left( \frac{L}{h} \right)^3 (2m)^{3/2}\pi$ | $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \propto \mathcal{E}^{1/2}$  |