

# Étude de la dynamique hors équilibre des gaz de Bosons unidimensionnels

*Study of the out-of-equilibrium dynamics of one-dimensional Bose gases*

**Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay**

École doctorale n°572, Ondes et Matières

Spécialité de doctorat : Physique

Graduate School : Physique, Référent : Faculté des Sciences d'Orsay

Thèse préparée au **Laboratoire Charles Fabry** (Université Paris-Saclay, CNRS, Institut d'Optique Graduate School), sous la direction de **Isabelle BOUCHOULE**, Directrice de thèse.

**Thèse soutenue à PALAISEAU, le 4 novembre 2025, par**

**Guillaume THÉMÈZE**

## Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

<b>Laurent VERNAC</b> Professeur, Universités Sorbonne (LPL)	Rapporteur
<b>Nicolas CHERRORET</b> Chargé de recherche (LKB)	Rapporteur
<b>Dmitry PETROV</b> Directeur de recherche (LPTMS)	Examinateur
<b>Martin ROBERT DE SAINT VINCENT</b> Chargé de recherche (LPL)	Examinateur



# Liste des acronymes

- AC** Alternating Current. 71
- AOM** Acousto-Optic Modulator. 68, 76, 122, 124–126
- Au** aurum. 70
- BA** Bethe Ansatz. 2, 3, 18, 21, 127
- BCB** benzocyclobuténe. 70
- C2N** Centre de nanosciences et de nanotechnologies. 70, 72
- CCD** Charge-Coupled Device. 77
- CESQ** Centre européen de sciences quantiques. 137
- DBR** Distributed Bragg Reflector. 122, 123
- DC** Direct Current. 67, 71, 72
- DFB** Distributed Feedback. 68, 122
- DMD** Dispositif de Micromirroirs Digitaux. 2, 67, 75–77, 83, 84, 86, 87, 91, 94, 95, 126
- FBA** Fermionic Bethe Ansatz. 18
- GGE** Generalized Gibbs Ensemble. 1, 2, 11, 21, 23–25, 27–29, 31, 33, 36, 47, 49, 52, 53, 59, 65, 83, 127, 128
- GHD** Generalized Hydrodynamics. 1, 2, 37–39, 41–43, 45, 46, 48, 67, 78, 83–86, 89–94, 96–99, 102–104, 127, 133
- GP** Gross–Pitaevskii. 11, 45, 47, 78, 85
- LCF** Laboratoire Charles Fabry. 1, 36, 70, 72
- LDA** Local Density Approximation. 37, 38, 83
- LL** Lieb–Liniger. 2, 3, 11, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 25, 36, 37, 39, 43, 45, 49, 50, 53, 54, 63, 65, 74, 90, 91, 127
- NLS** Nonlinear Schrödinger. 11
- PBS** Polarizing Beam Splitter. 68
- PMO** Piège Magnéto-Optique. 67–70, 72
- qBEC** quasi Bose–Einstein Condensate. 1, 2, 34, 36, 45, 73, 78, 84, 85
- SiC** silicon carbide. 70
- SYRTE** Systèmes de Référence Temps-Espace. 67
- TA** Tapered Amplifier. 68, 123–126
- TBA** Thermodynamic Bethe Ansatz. 2, 21, 23, 28, 36, 61, 63, 83, 84, 98, 127
- TF** Thomas-Fermi. 45, 78, 81



# Table des matières

<b>1 Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz</b>	<b>3</b>
1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger . . . . .	4
1.2 Équation de Bethe et distribution de rapidité . . . . .	17
<b>2 Relaxation et Équilibre dans les Systèmes Quantiques Intégrables : de l'Ensemble de Gibbs Généralisé à la Thermodynamique de Bethe</b>	<b>23</b>
2.1 Notion d'état d'Équilibre de Gibbs Généralisé (GGE) . . . . .	24
2.2 Thermodynamique de Bethe et relaxation . . . . .	29
<b>3 Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée</b>	<b>39</b>
3.1 Manipulation de l'opération d' <i>habillage</i> . . . . .	41
3.2 Formulation hamiltonienne de la GHD . . . . .	44
3.3 Régime de quasi-condensation et limite Gross–Pitaevskii . . . . .	47
<b>4 Fluctuation de la distribution de rapidité dans des état d'équilibre</b>	<b>51</b>
4.1 Fluctuation-réponse et susceptibilités dans les états d'équilibre généralisés . . . . .	52
4.2 Limite thermodynamique, structure variationnelle et susceptibilité . . . . .	59
<b>5 Dispositif expérimental</b>	<b>71</b>
5.1 Le dispositif expérimental . . . . .	72
5.2 Sélection spatiale avec DMD . . . . .	78
5.3 Techniques d'imagerie et d'analyse . . . . .	81
5.4 Expériences et protocoles étudiés . . . . .	82
<b>6 Étude du protocal de bi-partition : Mesure de distribution de rapidités locales <math>\rho(x, \theta)</math> pour des systèmes hors équilibre</b>	<b>93</b>
6.1 Dynamique balistique d'un gaz 1D après une coupure bipartite . . . . .	95
6.2 Sonder la distribution locale des rapidités . . . . .	98
6.3 Simulations numériques . . . . .	102
<b>7 Mise en place d'un confinement longitudinal dipolaire</b>	<b>109</b>
7.1 Transformation de jauge et simplification du Hamiltonien . . . . .	109
7.2 Potentiel Dipolaire d'un atome à deux niveaux - généralité . . . . .	110
7.3 Piégeage dipolaire d'un atome à plusieurs niveaux . . . . .	114
7.4 Cas du Rubidium 87 dans une polarisation rectiligne . . . . .	117
7.5 Notre dispositif expérimental . . . . .	123
<b>Conclusion</b>	<b>131</b>
<b>A Action de <math>\hat{P}</math> et <math>\hat{H}</math> sur <math> \{\theta_a\}\rangle</math></b>	<b>133</b>
A.1 Action de $\hat{P}$ sur $ \{\theta_a\}\rangle$ . . . . .	133
A.2 Action de $\hat{H}$ sur $ \{\theta_a\}\rangle$ . . . . .	134
<b>B Réduction GHD → transport d'Euler lorsque le <i>dressing</i> est l'identité</b>	<b>137</b>
<b>C Dérivation alternative des fluctuations de <math>\rho</math></b>	<b>141</b>
C.1 Réécriture de l'entropie de Yang–Yang . . . . .	141

---

C.2 Différentielle de l'action effective . . . . .	141
C.3 Fluctuations . . . . .	142
<b>D Propriétés des facteurs d'homothétie</b>	<b>145</b>
D.1 Loi de puissance des facteurs homothétiques . . . . .	145
D.2 Équivalence entre $f(\lambda)$ et $\mu(n)$ . . . . .	145
<b>E Polarisabilité dynamique et potentiel dipolaire optique</b>	<b>147</b>
<b>F Moment tensoriel pour J=1/2</b>	<b>151</b>

# Introduction générale

Ma thèse porte sur l'étude des gaz d'atomes froids, plus précisément sur des systèmes expérimentaux où des ensembles, de quelques dizaines à plusieurs millions, d'atomes sont refroidis jusqu'à des températures proches du zéro absolu. Dans ce régime extrême, les effets quantiques collectifs prennent le dessus et donnent accès à une physique à  $N$  corps difficilement accessible autrement [BDZ08]. Ces gaz offrent ainsi un laboratoire exceptionnel pour explorer la mécanique quantique et tester des modèles théoriques complexes. Ils trouvent aussi de nombreuses applications, allant de la métrologie de très haute précision au développement de processeurs quantiques [GLM06], en passant par la simulation de systèmes quantiques dont la dimension de l'espace de Hilbert croît de manière exponentielle avec le nombre de particules, ce qui rend leur traitement classique rapidement inabordable [NC10 ; Fey82].

Parmi ces systèmes, les gaz atomiques unidimensionnels (1D) constituent une plateforme privilégiée pour l'étude de la physique quantique dans les systèmes de basse dimension. En réduisant drastiquement le mouvement transversal des atomes grâce à des pièges très confinants, leurs degrés de liberté sont figés dans deux directions et le mouvement se limite à une seule dimension. Cette géométrie particulière conduit à des systèmes de type ; modèles de bosons [BI05 ; KWW04 ; Hal+09 ; Ame+08 ; Jac+11], de fermions [GBL13 ; Lia+10 ; Mor+05] ou encore de mélanges multi-composants [Pag+14]. Leur intérêt réside notamment dans la possibilité d'établir des comparaisons directes avec des descriptions théoriques et numériques très précises, mais aussi dans leur rôle de systèmes analogues pour comprendre des matériaux de basse dimension tels que les chaînes de spins, les nanofils supraconducteurs ou les réseaux de jonctions Josephson. Dans les expériences menées au [Laboratoire Charles Fabry \(LCF\)](#), ces gaz 1D sont réalisés en piégeant des atomes de rubidium 87 à l'aide de champs magnétiques générés par des microstructures déposées sur une puce atomique.

La restriction à une dimension unique entraîne des propriétés singulières pour les gaz atomiques. Ainsi, les fluctuations quantiques y sont fortement amplifiées, ce qui empêche la formation d'une condensation de Bose-Einstein à température nulle ([qBEC](#)). Certains de ces systèmes 1D présentent également une intégrabilité : ils possèdent autant de quantités conservées que de degrés de liberté. Cette caractéristique se traduit par une dynamique particulière, contrairement aux systèmes ergodiques. Ces gaz ne tendent pas vers un état thermique classique, mais vers un état décrit par des fonctions conservées dont les distributions de rapidités, qui codent l'ensemble des constantes de mouvement du système.

Ma thèse s'est concentrée sur l'étude d'un gaz 1D de bosons avec interactions de contact répulsives, un système intégrable étudié initialement par Lieb et Liniger [LL63 ; Lie63]. Les états propres de ce modèle, obtenus via l'ansatz de Bethe, sont décrits par des rapidités qui peuvent être interprétées comme les vitesses de quasi-particules à temps de vie infini. Dans la limite thermodynamique, l'état relaxé du système est entièrement caractérisé par la distribution de rapidités.

Durant cette thèse, j'ai réalisé une partie des expériences avec Léa Dubois, doctorante ayant travaillé précédemment sur le même dispositif. J'ai contribué à l'étude expérimentale de la distribution de rapidités, ainsi qu'à l'analyse numérique des résultats via des simulations basées sur la théorie Hydrodynamique Généralisée ([GHD](#)). Mon apport a notamment porté sur l'étude des fluctuations dans le cadre du formalisme de l'Ensemble de Gibbs Généralisé ([GGE](#)) et sur la mise en place d'un potentiel dipolaire permettant de contrôler et moduler la distribution atomique.

Ce mémoire présente les résultats obtenus sur la caractérisation expérimentale et numérique des gaz de bosons 1D, tant à l'équilibre qu'hors équilibre, à travers l'étude de la distribution de rapidités spatialement résolue. Il est structuré en sept chapitres, chacun abordant un aspect spécifique de l'étude, qu'il soit théorique, numérique ou expérimental.

## Présentation des chapitres

**Chapitre 1 : Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz.** Ce chapitre introduit de manière pédagogique le modèle de Lieb-Liniger (LL) et l'approche de l'ansatz de Bethe (BA). Il commence par un rappel des notions de première et deuxième quantification pour expliquer la structure de l'Hamiltonien de Lieb–Liniger (LL), en particulier l'interaction de contact. Les états de Bethe sont des états propres de l'Hamiltonien (LL), ainsi que des opérateurs nombre de particules et quantité de mouvement. Ils constituent un point de départ pour l'étude des charges conservées, qui sera développée dans le chapitre suivant [CM11].

**Chapitre 2 : Relaxation et Équilibre dans les Systèmes Quantiques Intégrables : de l'Ensemble de Gibbs Généralisé à la Thermodynamique de Bethe.** Le chapitre 2 présente le formalisme (GGE) et introduit le formalisme du Bethe Ansatz thermodynamique (TBA) à travers les travaux de Yang et Yang. On y détaille notamment le calcul des moyennes de charges locales et le formalisme nécessaire pour relier l'état intégrable aux distributions de rapidités. Les notions de fluctuations sont évoquées, mais leur étude détaillée est laissée au chapitre 4.

**Chapitre 3 : Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée.** Le chapitre 3 étend l'étude à la dynamique hors équilibre à l'aide de la théorie (GHD). On y montre comment le formalisme du (GGE) se traduit dans la dynamique, et que les distributions de rapidités restent des quantités conservées, contrairement à l'approche classique de Gibbs.

**Chapitre 4 : Fluctuations de la distribution de rapidité dans des états d'équilibre.** Nous avons montré qu'il est possible d'échantillonner correctement le (GGE) en utilisant des simulations de Monte-Carlo. Le principe de fluctuation-réponse est employé pour tester la validité des formules établies dans le régime où le formalisme (TBA) est applicable.

**Chapitre 5 : Dispositif expérimental.** Ce chapitre présente les aspects expérimentaux de la thèse : lasers, puce atomique, Dispositif de Micromirroirs Digitaux (DMD), etc . Deux expériences principales sont décrites : la première étudie l'évolution d'un nuage initialement piégé dans un potentiel harmonique, dans le régime de quasi-condensation de Bose (qBEC) ; la seconde utilise le (DMD) pour résoudre spatialement la distribution de rapidités et pour préparer des états hors équilibre.

**Chapitre 6 : Analyse des déformations de profil et simulations GHD.** Le chapitre 6 se concentre sur l'étude des déformations du profil de densité et des résultats numériques issus des simulations (GHD), permettant de comparer les prédictions théoriques avec les mesures expérimentales.

**Chapitre 7 : Potentiel dipolaire et perspectives expérimentales.** Le dernier chapitre présente la réflexion sur l'ajout d'un potentiel dipolaire et les perspectives expérimentales associées. On y discute comment ce potentiel permet de préparer des distributions atomiques plus complexes et d'étudier de nouveaux régimes dynamiques.

Bien que chaque chapitre puisse être lu indépendamment, certaines dépendances existent pour une compréhension plus complète :

- Le chapitre 4 s'appuie sur le chapitre 2, lui-même basé sur le chapitre 1.
- Le chapitre 7 se fonde sur le chapitre 6, qui fait référence au chapitre 3, lequel repose sur le chapitre 2.

# Chapitre 1

## Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Description du modèle de Lieb-Liniger</b>	<b>4</b>
1.1.1	Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel	4
1.1.2	Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à 2 corps	12
<b>1.2</b>	<b>Équation de Bethe et distribution de rapidité</b>	<b>17</b>
1.2.1	Fonction d'onde dans le secteur ordonné et représentation de Gaudin	17
1.2.2	Conditions aux bords périodiques	17
1.2.3	Thermodynamique du gaz de Lieb–Liniger à l'état fondamental	19
1.2.4	Excitations élémentaires	20

---

### Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation progressive du modèle de Lieb–Liniger (LL) et de l’Ansatz de Bethe (en anglais **Bethe Ansatz (BA)**), outils centraux pour la description d’un gaz de bosons unidimensionnel en interaction via un potentiel de type delta. L’objectif est d’accompagner rigoureusement le lecteur depuis la formulation quantique du système jusqu’aux solutions exactes obtenues par l’approche de Bethe.

Nous commençons, pour des raisons pédagogiques, par le cas le plus simple : une particule libre, sans interaction, dans un espace unidimensionnel avec des conditions aux bords périodiques. Cette première étape permet d’introduire naturellement les fonctions d’onde à une particule, leur évolution sous l’action du Hamiltonien libre, ainsi que la quantification résultant des conditions de périodicité — autrement dit, la version élémentaire des équations de Bethe.

Nous passons ensuite à la formulation du problème en champ quantique, en exprimant le Hamiltonien en termes d’opérateurs de création et d’annihilation dans la représentation positionnelle : il s’agit du passage à la seconde quantification. Cette étape permet de formaliser clairement les termes à un corps et à deux corps dans l’Hamiltonien, et d’établir les notations qui seront utilisées tout au long du chapitre.

Une fois ce cadre posé, nous généralisons le raisonnement au cas de  $N$  particules pour introduire le modèle complet de Lieb–Liniger. Nous présentons alors l’Ansatz de Bethe dans sa forme générale, qui fournit les états propres de l’Hamiltonien. Ce formalisme permet d’accéder explicitement au spectre du système, ainsi qu’à diverses quantités physiques telles que l’impulsion totale et le nombre de particules.

Nous traitons d’abord le cas à seulement deux particules, cette fois en tenant compte de l’interaction locale. L’analyse de ce système met en lumière les effets de l’interaction ponctuelle sur la régularité de la fonction d’onde et les conditions de raccord, ainsi que sur les modifications des équations de Bethe. Ce cas constitue une étape clé vers la généralisation à  $N$  particules.

La fonction d'onde est ensuite étendue au cas général de  $N$  particules, ce qui nous permet de dériver les équations de Bethe pour un système entièrement interactif. Ces équations encapsulent toute l'information sur les états propres du système.

Enfin, nous introduisons la notion de *distribution de rapidité*, concept fondamental pour la description des états dans la limite thermodynamique. Elle permet non seulement de caractériser les états d'énergie minimale (états fondamentaux), mais aussi d'analyser des configurations excitées au-delà de l'état fondamental. Ce formalisme constituera le socle des développements ultérieurs sur les propriétés thermodynamiques et dynamiques des gaz bosoniques intégrables.

## 1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger

### 1.1.1 Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel

#### 1.1.1.1 De la première à la seconde quantification

**Introduction.** La mécanique quantique se développe historiquement en deux grandes étapes : la *première quantification*, aussi appelée quantification canonique, et la *seconde quantification*. Comprendre ces deux cadres est essentiel pour aborder les systèmes quantiques complexes, en particulier ceux où le nombre de particules peut varier.

**Première quantification (quantification canonique, particule unique).** La première quantification est la mécanique quantique standard, celle que vous avez rencontrée dès vos premiers cours. Elle consiste à quantifier un système classique décrit par des variables dynamiques telles que la position  $x$  et la quantité de mouvement  $p$ . On procède en remplaçant ces variables par des **opérateurs hermitiens**  $\hat{x}$  et

$$\hat{p} \doteq -i\hbar\hat{\partial}_x, \quad (1.1)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite, satisfaisant la **relation de commutation canonique** fondamentale  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ . L'état du système est alors décrit par une **fonction d'onde**  $\psi(x, t)$ , solution de l'**équation de Schrödinger** indépendante du nombre de particules :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\psi, \quad (1.2)$$

avec  $\hat{\mathcal{H}}$  l'opérateur hamiltonien.

*Exemple : particule libre en une boîte à une dimension.*

Dans le cas d'une particule libre de masse  $m$  se déplaçant en une dimension, l'Hamiltonien est constitué uniquement du terme cinétique  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}^2/2m$ . En représentation position, où l'opérateur quantité de mouvement s'écrit comme dans l'équation (1.1), l'Hamiltonien prend alors la forme différentielle :

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2. \quad (1.3)$$

Les états propres stationnaires de (1.2) dépendant du temps sont de la forme  $\psi_k(x, t) = \varphi_k(x) e^{-i\varepsilon(k)t/\hbar}$  où  $\varphi_k(x)$  est une fonction propre de l'hamiltonien, soit de l'équation stationnaire  $\hat{\mathcal{H}}\varphi_k = \varepsilon(k)\varphi_k$  i.e. pour une particule libre :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\varphi_k = \varepsilon(k)\varphi_k, \quad (1.4)$$

avec  $\varepsilon(k)$  l'énergie associée à une onde plane de nombre d'onde  $k$

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (1.5)$$

Les fonctions propres spatiales  $\varphi_k(x)$  de l'hamiltonien libre s'écrivent comme des combinaisons linéaires d'ondes planes

$$\varphi_k(x) = ae^{-ikx} + be^{ikx}, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{C}^2. \quad (1.6)$$

**Périodicité.** Si la particule est confinée dans une boîte de longueur  $L$  avec des conditions aux limites périodiques (ie  $\varphi_k(x+L) = \varphi_k(x)$ ), alors le spectre de  $k$  est quantifié :

$$e^{ikL} = 1 \quad \text{ou encore } kL \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Le problème est équivalent à celui d'une particule libre sur un cercle de périmètre  $L$ .

La particule est délocalisée sur tout l'espace (le cercle), sans structure particulière *i.e.* les solutions (1.6) correspondent à des **états non liés** (ou états de diffusion).

Pour  $k \neq 0$  (respectivement pour  $k = 0$ ), la fonction propre  $\varphi_k(x)$  de l'équation (1.6) appartient à un sous-espace propre associé à  $k$  de dimension 2 (respectivement de dimension 1) engendré par  $x \mapsto e^{-ikx}$  et  $x \mapsto e^{ikx}$  (respectivement par  $x \mapsto 1$ ). L'espace engendré par l'ensemble des sous-espaces propres forme un **espace de Hilbert**, muni du **produit scalaire** défini par :

$$(\varphi_{k'}, \varphi_k) = \int_0^L \varphi_{k'}^*(x) \varphi_k(x) dx. \quad (1.8)$$

Les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux *i.e.* en utilisant les conséquences de la condition de périodicité (1.7),  $(\varphi_{k'}, \varphi_k) = 0$  pour  $|k'| \neq |k|$ . Pour chaque sous-espace propre on impose que les états propres forment une base orthonormale *i.e.* en utilisant (1.7), les fonctions propres  $\varphi_k$  écrits sous la forme (1.6), sont orthogonaux avec  $\varphi_{\bar{k}}: x \mapsto \pm(b^*e^{-ikx} - a^*e^{ikx})$  soit  $(\varphi_{\bar{k}}, \varphi_k) = 0$ , et on impose que  $|a|^2 + |b|^2 = L^{-1}$  pour assurer la normalité de  $\varphi_k$  et de  $\varphi_{\bar{k}}$  soit  $(\varphi_k, \varphi_k) = (\varphi_{\bar{k}}, \varphi_{\bar{k}}) = 1$ .

Les solutions générales de l'équation de Schrödinger s'écrivent alors comme une superposition d'états propres  $\psi = c_0\psi_0 + \sum_{|k|>0} (c_k\psi_k + c_{\bar{k}}\psi_{\bar{k}})$ .

Il y a deux bases de vecteur propre particulier :

i) **Base de chiralité / impulsion :**

$$\varphi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\pm ikx} \quad (1.9)$$

Ces derniers de plus d'être états propres de l'opérateur énergie  $\hat{\mathcal{H}}$ , sont des états propres de l'opérateur impulsion  $\hat{p}$ , avec valeurs propres opposées  $\pm\hbar k$ .

ii) **Base symétrique / antisymétrique :** En appliquant la matrice de passage unitaire  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix}$  à la base  $\{\varphi_+, \varphi_-\}$ , on passe dans la base

$$\begin{cases} \varphi_S = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(kx) & \text{type Neumann : } \varphi'_S(0) = \varphi'_S(L) = 0 \\ \varphi_A = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) & \text{type Dirichlet : } \varphi_A(0) = \varphi_A(L) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Cette condition d'orthonormalité est imposée afin de garantir l'indépendance linéaire des états quantiques, et d'assurer que toute fonction d'onde de l'espace de Hilbert puisse être développée de manière unique sur cette base.

Avec le formalisme de Dirac, la fonction d'onde  $\varphi_k$  est représentée par le ket  $|k\rangle$  normé (*i.e.*  $\langle k'|k\rangle = \delta_{k',k}$ , où  $\delta_{p,q}$  est le symbole de Kronecker), et l'équation de Schrödinger s'écrit :  $\hat{\mathcal{H}}|k\rangle = \varepsilon(k)|k\rangle$ . En appliquant le bra  $\langle x|$  de part et d'autre, on obtient :  $\langle x|\hat{\mathcal{H}}|k\rangle = \varepsilon(k)\langle x|k\rangle$ , où  $|x\rangle$  est normé (*i.e.*  $\langle x'|x\rangle = \delta(x'-x)$  avec  $\delta(y-x)$  une distribution de Dirac) et  $\varphi_k(x) = \langle x|k\rangle$  est la représentation positionnelle de l'état  $|k\rangle$ .

La base  $\{|x\rangle\}$  étant continue, et les états  $\{|k\rangle\}$  quantifiés (par exemple dans une boîte de taille finie avec conditions aux limites périodiques), les relations de changement de base s'écrivent :

$$|k\rangle = \int_0^L dx \varphi_k(x) |x\rangle, \quad |x\rangle = \sum_k \varphi_k^*(x) |k\rangle, \quad (1.11)$$

avec  $\varphi_k^*(x) = \langle k|x\rangle$ . L'état  $|x\rangle$  est relié aux états  $|k\rangle$  par une transformation de Fourier discrète. Ces formules montrent que les états  $|k\rangle$  sont les composantes de Fourier de l'état  $|x\rangle$ .

*De la particule unique aux systèmes à  $N$  particules.* Pour un système composé de  $N$  particules identiques, une approche naturelle consiste à introduire une fonction d'onde  $\varphi(x_1, \dots, x_N)$  dépendant de  $N$  variables, symétrique pour des bosons ou antisymétrique pour des fermions sous l'échange de deux coordonnées  $x_i \leftrightarrow x_j$ , solution de l'équation de Schrödinger à  $N$  corps. Toutefois, cette description devient rapidement inextricable lorsque le nombre de particules augmente, ou lorsque le système permet la création et l'annihilation de particules, comme dans un milieu ouvert ou en contact avec un bain thermique.

### 1.1.1.2 Seconde quantification

Pour dépasser ces limitations, on adopte le **formalisme de la seconde quantification**, dans lequel l'état du système est décrit non plus par une fonction d'onde mais par un vecteur dans un espace de Fock. Les opérateurs de création et d'annihilation remplacent alors les variables dynamiques classiques et permettent une description unifiée et élégante des systèmes à nombre variable de particules.

**Structure de l'espace des états de Fock.** Dans ce formalisme, l'espace des états est une **somme directe d'espaces à  $N$  particules**, et chaque état est décrit par l'occupation des différents modes quantiques. Les opérateurs  $\hat{a}_k^\dagger$  et  $\hat{a}_k$  créent et annihilent une particule dans l'état d'onde plane de moment  $k$  :

$$|k\rangle = \hat{a}_k^\dagger |\emptyset\rangle, \quad (1.12)$$

état avec une particule dans le mode  $k$ , où  $|\emptyset\rangle$  désigne le vide quantique de Fock, défini par :

$$\forall k \in \mathbb{R}: \quad \hat{a}_k |\emptyset\rangle = 0, \quad \langle \emptyset | \emptyset \rangle = 1. \quad (1.13)$$

Le symbole  $\hat{a}_\lambda$  représente ici de manière générique soit l'opérateur  $\hat{b}_\lambda$  pour les bosons, soit  $\hat{c}_\lambda$  pour les fermions, et satisfait respectivement les relations de commutation (pour les bosons) ou d'anticommuation (pour les fermions). Dans ce qui suit, nous nous restreignons au cas bosonique.

*Relations de commutation bosoniques.* Les relations de commutation fondamentales pour les bosons sont :

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] = [\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_{k'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \hat{\delta}_{k,k'}, \quad (1.14)$$

où  $\hat{\delta}_{k,k'}$  est le symbole de Kronecker, valant 1 si  $k = k'$  et 0 sinon.

**Nature du champ quantique.** La seconde quantification généralise ce cadre en permettant de traiter des systèmes où le nombre de particules n'est pas fixé, ce qui est fréquent en physique des particules, des champs quantiques, ou des gaz quantiques.

L'idée principale est de ne plus quantifier directement les particules, mais le *champ quantique* associé. Les états d'une particule unique deviennent alors des états d'occupation dans un espace de Fock, qui décrit l'ensemble des configurations possibles avec zéro, une, ou plusieurs particules.

*Champs de Bose.* Le gaz de Bose unidimensionnel est décrit dans le cadre de la théorie quantique des champs par un champ bosonique canonique  $\hat{\Psi}(x)$ , qui agit sur l'espace de Fock des états du système. Ce champ quantique encode l'annihilation d'une particule en  $x$ , et son adjoint  $\hat{\Psi}^\dagger(x)$  correspond à la création d'une particule en ce point.

$$|x\rangle = \hat{\Psi}^\dagger(x) |\emptyset\rangle, \quad (1.15)$$

état avec une particule en  $x$  et  $|\emptyset\rangle$  est le vide quantique de Fock défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{\Psi}(x)|\emptyset\rangle = 0. \quad (1.16)$$

*Relations de commutation bosoniques.* Ces champs satisfont les relations de commutation canoniques à temps égal :

$$[\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}(y)] = [\hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(y)] = 0, \quad [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(y)] = \hat{\delta}(x - y), \quad (1.17)$$

où  $\hat{\delta}(x - y)$  est la fonction delta de Dirac. Ces relations expriment le caractère bosonique des excitations du champ.

**État à  $N$  particules.** Soient  $N$  bosons dans les états  $\{k_1, \dots, k_N\}$  (un boson dans l'état  $k_1$ , un autre dans  $k_2$ , etc.) et aux positions  $\{x_1, \dots, x_N\}$  (un boson en  $x_1$ , un autre en  $x_2$ , etc.). Leurs états s'écrivent alors :

$$|\{k_1, \dots, k_N\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{b}_{k_1}^\dagger \cdots \hat{b}_{k_N}^\dagger |\emptyset\rangle, \quad |\{x_1, \dots, x_N\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |\emptyset\rangle, \quad (1.18)$$

où le facteur  $1/\sqrt{N!}$  traduit le caractère d'indiscernabilité des bosons et garantit la symétrisation correcte de l'état.

*Changement de base.* On peut relier les opérateurs de création/annihilation dans la base des ondes planes aux opérateurs de champ via :

$$\hat{b}_k^\dagger = \int_0^L dx \varphi_k(x) \hat{\Psi}^\dagger(x), \quad \hat{\Psi}^\dagger(x) = \sum_k \varphi_k^*(x) \hat{b}_k^\dagger. \quad (1.19)$$

Le champ quantique  $\hat{\Psi}(x)$  est relié aux opérateurs de moment  $\hat{b}_k$  par une transformation de Fourier. Ces formules montrent que les opérateurs  $\hat{b}_k$  sont les composantes de Fourier du champ  $\hat{\Psi}(x)$ .

Ainsi, un état à  $N$  bosons dans la base  $|k\rangle^{\otimes N}$  peut s'écrire :

$$|\{k_a\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx_1 \cdots dx_N \varphi_{\{k_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |\emptyset\rangle, \quad (1.20)$$

où on note  $\{k_a\} \equiv \{k_1, \dots, k_N\}$  et  $\{x_a\} \equiv \{x_1, \dots, x_N\}$ , et la fonction d'onde symétrisée s'écrit :  $\varphi_{\{k_a\}}(\{x_a\}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in \hat{S}_N} \prod_{i=1}^N \varphi_{k_{\sigma(i)}}(x_i)$ , avec  $\hat{S}_N$  le groupe symétrique d'ordre  $N$  mais aussi :

$$\varphi_{\{k_a\}}(\{x_a\}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle \emptyset | \hat{\Psi}(x_1) \cdots \hat{\Psi}(x_N) | \{k_a\} \rangle. \quad (1.21)$$

### 1.1.1.3 Opérateur.

#### Opérateur à un corps.

*Dans la base discrète des modes  $\{|k\rangle\}$ .* Soit  $\hat{f}$  un opérateur à une particule, dont les éléments de matrice dans une base orthonormée  $\{|k\rangle\}$  sont donnés par  $f_{\lambda\nu} = \langle \lambda | \hat{f} | \nu \rangle$ . Un opérateur symétrique à  $N$  particules correspondant à la somme des actions de  $\hat{f}$  sur chacune des particules s'écrit en première configuration :  $\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{f}^{(i)}$ , où  $\hat{f}^{(i)}$  désigne l'action de  $\hat{f}$  sur la  $i^{\text{e}}$  particule uniquement. En base de Dirac, cela donne :  $\hat{f}^{(i)} = \sum_{\lambda, \nu} f_{\lambda\nu} |i:\lambda\rangle \langle i:\nu|$ , où  $|i:\lambda\rangle$  représente un état où seule la  $i^{\text{e}}$  particule est dans l'état  $\lambda$ . On peut montrer que la somme des projecteurs agissant sur chaque particule s'identifie à une combinaison d'opérateurs de création et d'annihilation :  $\sum_{i=1}^N |i:\lambda\rangle \langle i:\nu| = \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\nu$ , (où  $\hat{a}_\lambda$  est une notation générique désignant  $\hat{b}_\lambda$  pour les bosons, ou  $\hat{c}_\lambda$  pour les fermions).

On en déduit que l'opérateur à un corps  $\hat{F}$  peut se réécrire dans le formalisme de la seconde quantification comme :

$$\hat{F} = \sum_{\lambda, \nu} \langle \lambda | \hat{f} | \nu \rangle \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\nu. \quad (1.22)$$

L'opérateur  $\hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\nu$  fais la transition d'une particule de l'état  $\nu$  à vers l'état  $\lambda$ . Si  $\lambda = \nu$  (cette opérateur est l'opérateur nombre de particule dans le mode  $\lambda$ ).

*Exemple : Énergie cinétique totale des particules libres.* Si l'on sait diagonaliser l'opérateur à une particule  $\hat{f}$ , c'est-à-dire si l'on peut écrire :  $\hat{f} = \sum_k f_k |k\rangle\langle k|$ , alors l'opérateur à  $N$  corps associé s'écrit :  $\hat{F} = \sum_k \langle k| \hat{f} |k\rangle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ . On obtient ainsi une forme diagonale de  $\hat{F}$  en seconde quantification.

Un exemple immédiat est celui des **particules libres sans interaction**. On rappelle que :  $\hat{\mathcal{H}}|k\rangle = \varepsilon(k)|k\rangle$ , avec  $\varepsilon(k)$  l'énergie du mode  $k$  (1.5). En injectant  $\hat{f} = \hat{\mathcal{H}} (= \frac{\hat{p}^2}{2m})$  dans (1.22), on obtient l'énergie cinétique totale du système :

$$\hat{K} = \sum_k \varepsilon(k) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k. \quad (1.23)$$

Pour  $N$  particules libres, en écrivant l'état sous la forme (1.18), en utilisant les relations de commutation (1.14) et la définition de l'état de Fock (1.13), on trouve que  $|\{k_a\}\rangle$  est un état propre de  $\hat{K}$  associé à l'énergie  $\sum_{i=1}^N \varepsilon(k_i)$ , c'est-à-dire :

$$\hat{K} |\{k_a\}\rangle = \left( \sum_{i=1}^N \varepsilon(k_i) \right) |\{k_a\}\rangle. \quad (1.24)$$

*Dans la base continue des positions  $\{|x\rangle\}$ .* En injectant les relation des changement de base d'état (1.11) et de champ (1.19) (qui prend la même forme pour  $\hat{a}_\lambda$  et pour  $\hat{a}_\lambda^\dagger$ ), dans (1.22) on obtient :

$$\hat{F} = \iint_0^L dx dy \hat{\Psi}^\dagger(x) \langle x| \hat{f} |y\rangle \hat{\Psi}(y). \quad (1.25)$$

*Exemple : Énergie cinétique totale des particules libres.* Reprenons l'exemple de l'énergie cinétique totale avec  $\hat{f} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ . En injectant  $\langle x| \hat{f} |x'\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_y^2 \delta(y-x)$  dans (1.25), on réécrit l'opérateur énergie cinétique total  $\hat{K}$  de l'équation (1.23) :

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L dx \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \cdot \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x). \quad (1.26)$$

Lorsque cet Hamiltonien agit sur l'état de Fock à  $N$  particules libres  $|\{k_a\}\rangle$ , les règles de commutation (1.17) ainsi que la définition des états de Fock (1.16) impliquent (cf. Annexe A) :

$$\hat{K} |\{k_a\}\rangle = \int_0^L d^N z \hat{\mathcal{K}}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{K}}_N = -\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2 \hat{\partial}_{z_i}^2}{2m}, \quad (1.27)$$

où  $-i\hbar \hat{\partial}_{z_i}$  désigne l'opérateur impulsion associé à la coordonnée  $z_i$  de la  $i$ -ème particule.

*Quantité de mouvement totale et nombre total de particules.* Dans l'exemple de l'énergie cinétique, l'opérateur  $\hat{f}$  est proportionnel à l'opérateur impulsion au carré  $\hat{p}^2$ . On peut appliquer un raisonnement similaire à d'autres observables : pour le **nombre total de particules**, on prend  $\hat{f} = \hat{p}^0$ , c'est-à-dire l'identité et pour la **quantité de mouvement totale**, on choisit  $\hat{f} = \hat{p}$  (puissance 1). On note  $\hat{Q}$  l'opérateur nombre total de particule et  $\hat{P}$  l'opérateur quantité mouvement totale .

Ces observables sont liées à des symétries fondamentales du système :  $\hat{Q}$  est associé à la symétrie  $U(1)$  (conservation du nombre de particules);  $\hat{P}$  est associé à la translation (conservation de la quantité de mouvement).

Pour ces observables, les états  $|\{k_a\}\rangle$  sont des états propres, et cela reste vrai **avec ou sans interaction**, tant que le système conserve ces symétries fondamentales. Ainsi,  $|\{k_a\}\rangle$  diagonalise directement  $\hat{Q}$  et  $\hat{P}$ , même en présence d'interactions locales qui respectent  $U(1)$  et la translation.

En seconde quantification, ces opérateurs s'écrivent dans la base  $\{|k\rangle\}$  :

$$\hat{Q} = \sum_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \quad \hat{P} = \hbar \sum_k k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \quad (1.28)$$

Lorsqu'on les applique à un état de Fock à  $N$  particules  $|\{k_a\}\rangle$ , on obtient :

$$\hat{Q} |\{k_a\}\rangle = \left( \sum_{i=1}^N 1 \right) |\{k_a\}\rangle, \quad \hat{P} |\{k_a\}\rangle = \hbar \left( \sum_{i=1}^N k_i \right) |\{k_a\}\rangle. \quad (1.29)$$

Dans la base position  $\{|x\rangle\}$ , les opérateurs s'écrivent :

$$\hat{Q} = \int_0^L dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x), \quad \hat{P} = \frac{i\hbar}{2} \int_0^L dx \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x) - [\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x)] \hat{\Psi}(x) \right\} \quad (1.30)$$

où l'expression symétrisée de  $\hat{P}$  assure son hermiticité.

Lorsqu'on applique ces opérateurs à l'état  $|\{k_a\}\rangle$ , on obtient (comme pour l'énergie cinétique) :

$$\hat{Q} |\{k_a\}\rangle = \int_0^L d^N z \hat{\mathcal{N}}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{N}}_N = \sum_{i=1}^N 1, \quad (1.31)$$

$$\hat{P} |\{k_a\}\rangle = \int_0^L d^N z \hat{\mathcal{P}}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{P}}_N = -i\hbar \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i} \quad (1.32)$$

*On s'avance sur le chapitre (2).* , en voulant généraliser avec  $\hat{f} = \hat{p}^q$  où  $q$  est un entier. Soit dans la base  $\{|k_a\}\rangle$  :  $\hat{F} = \hbar^q \sum_k k^q \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$  et en l'appliquant à  $|\{k_a\}\rangle$  : On peut généraliser cette construction en considérant des opérateurs à une particule de la forme  $\hat{f} = \hat{p}^q$ , où  $q$  est entier. Dans la base impulsion  $\{|k\rangle\}$ , l'opérateur à  $N$  corps associé s'écrit :  $\hat{F} = \hbar^q \sum_k k^q \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$  et son action sur un état de Fock libre est immédiatement

$$\hat{F} |\{k_a\}\rangle = \hbar^q \left( \sum_{i=1}^N k_i^q \right) |\{k_a\}\rangle, \quad (1.33)$$

En représentation position  $\{|x\rangle\}$ , on obtient l'opérateur hermitisé

$$\hat{F} = \frac{\hbar^q}{2} \int_0^L \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x^q \hat{\Psi}(x) + (-1)^q [\hat{\partial}_x^q \hat{\Psi}^\dagger(x)] \hat{\Psi}(x) \right\} dx \text{ et son action sur } |\{k_a\}\rangle \text{ se traduit par :}$$

$$\hat{F} |\{k_a\}\rangle = \int_0^L d^N z \hat{\mathcal{F}}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \text{ avec } \hat{\mathcal{F}}_N = (-1)^q \hbar^q \sum_{i=1}^N (\hat{\partial}_{z_i})^q.$$

L'opérateur  $\hat{K}$  (énergie cinétique) ne représente l'énergie totale que dans le cas d'un gaz libre, sans interaction ni potentiel externe. Dans ce régime, les états de Fock  $|k_a\rangle$  sont propres de  $\hat{K}$  ainsi que de tous les opérateurs  $\hat{F}$  construits pour  $q \geq 0$ .

Dès que des interactions entre particules sont introduites, ces états libres ne sont plus propres de l'Hamiltonien complet (cinétique + interaction), ni des opérateurs  $\hat{F}$ . Il faut alors considérer les états de Bethe  $|\theta_a\rangle$ , qui diagonalise l'Hamiltonien complet, mais aussi les charges conservées fondamentales ( $\hat{Q}$  et  $\hat{P}$ ) et l'ensemble infini de charges d'ordre supérieur.

Dans ce cadre, les opérateurs  $\hat{F}$  ne suffisent plus : il est nécessaire d'introduire des contributions à plusieurs corps pour tenir compte des interactions, ce qui conduit naturellement à la hiérarchie des charges locales d'intégrabilité.

Répétition initiale

## Opérateurs à deux corps

*Dans la base discrètes des modes  $\{|k\rangle\}$ .* Nous considérons à présent les termes d'interaction impliquant deux particules,  $\hat{v}$ , dont les éléments de matrices sont donnés par  $v_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle 1:\alpha; 2:\beta | \hat{v} | 1:\gamma; 2:\delta \rangle$ , où  $|i:\gamma; j:\delta\rangle$  représente l'état où la  $i^e$  particule est dans l'état  $\gamma$  et la  $j^e$  dans l'état  $\delta$ . Ceux-ci

correspondent à des opérateurs de la forme :  $\hat{V} = \sum_{j < i} \hat{v}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \hat{v}^{(i,j)}$ . ~~avec~~  $\hat{v}^{(i,j)}$  désigne l'interaction à deux corps entre les  $i^e$  et  $j^e$  particules, exprimés dans la base à deux états :  $\hat{v}^{(i,j)} = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\gamma} |i:\alpha; j:\beta\rangle v_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle i:\gamma; j:\delta|$ . On peut réécrire l'opérateur  $\hat{V}$  en termes d'opérateurs de création et d'annihilation comme suit :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \langle 1:\alpha; 2:\beta | \hat{v} | 1:\gamma; 2:\delta \rangle \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\delta \hat{a}_\gamma. \quad (1.34)$$

Cette forme est particulièrement utile pour le traitement des interactions dans l'espace de Fock.

*Dans la base continue des positions  $\{|x\rangle\}$ .* En injectant les relation des changement de base d'état (1.11) et de champ (1.19), dans (1.34) on obtient :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \iiint_0^L dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 \langle 1:x_1, 2:x_2 | \hat{v} | 1:x'_1, 2:x'_2 \rangle \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x'_2) \hat{\Psi}(x'_1) \quad (1.35)$$

*Exemple : Interactions ponctuelles.* Dans le cas d'une interaction ne dépendant que de la distance relative entre deux particules,  $\langle 1:x_1, 2:x_2 | \hat{v} | 1:x'_1, 2:x'_2 \rangle = v(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2)$ , l'expression (1.35) se simplifie :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 v(x_1 - x_2) \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x_2) \hat{\Psi}(x_1) \quad (1.36)$$

soit pour des interactions ponctuelles :

$$\hat{V} = \frac{g}{2} \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \quad (1.37)$$

et quand on l'applique à l'état  $|\{k_a\}\rangle$ , les règles de commutations (1.17) et la définition d'état de Fock (1.16) impliquent que (cf Annex A)

$$\hat{V} |\{k_a\}\rangle = \int d^N z \hat{\mathcal{V}}_N \varphi_{\{k_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{V}}_N = g \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \quad (1.38)$$

où  $g$  est la constante de couplage.

#### 1.1.1.4 Expression de l'Hamiltonien de Lieb-Liniger.

À partir d'ici, on fixe  $\hbar = m = 1$ . Ainsi, les dimensions (unités) des nombres d'onde  $k$  et des vitesses ne sont plus différenciées. Dans le formalisme des opérateurs de champs, l'Hamiltonien d'un système soumis à des interactions ponctuelles est la somme de l'énergie cinétique  $\hat{K}$  donnée par (1.26), et du terme d'interaction  $\hat{V}$  introduit dans (1.37) :

$$\hat{H} = \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \left[ -\frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 + \frac{g}{2} \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \right] \hat{\Psi}(x). \quad (1.39)$$

Lorsqu'on applique cet Hamiltonien à un état à  $N$  particules, il est important de distinguer deux situations :

- **Sans interaction** ( $g = 0$ ) : les états propres sont simplement les états de Fock en impulsion  $|\{k_a\}\rangle$  définie en (1.18). Ce sont des produits d'ondes planes symétrisées.
- **Avec interaction** ( $g \neq 0$ ) : les états propres ne sont plus des produits d'ondes planes. Ce sont les états de Bethe, que l'on note

$$|\{\theta_a\}\rangle \quad (1.40)$$

où les paramètres  $\theta_a$  jouent le rôle de **quasi-moments (rapidités)**. Ceux-ci sont homogènes à un nombre d'onde ou à une vitesse, mais ne coïncident pas directement avec les impulsions libres  $k_a$ . La fonction d'onde correspondante est une combinaison linéaire de morceaux d'ondes planes, reliés par des phases de diffusion fixées par l'interaction locale.

Ainsi, la notation  $|\{\theta_a\}\rangle$  est choisie pour rappeler que :

- en absence d'interaction,  $\theta_a = k_a$  et l'on retrouve les états de Fock,
- en présence d'interaction,  $\theta_a$  sont les quasi-moments de Bethe, qui généralisent les nombres d'onde libres.

En utilisant les équations (1.27) et (1.38), on obtient :

$$\hat{H} |\{\theta_a\}\rangle = \int d^N z \hat{\mathcal{H}}_N \varphi_{\{\theta_a\}}(\{z_a\}) \hat{\Psi}(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle, \quad (1.41)$$

avec  $\{\theta_a\} \equiv \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  et .

$$\hat{\mathcal{H}}_N = \hat{\mathcal{K}}_N + \hat{\mathcal{V}}_N \quad \text{où on rappelle} \quad \hat{\mathcal{K}}_N = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_{z_i}, \text{ et } \hat{\mathcal{V}}_N = g \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j). \quad (1.42)$$

**Équation du mouvement associée.** L'équation du mouvement du champ  $\hat{\Psi}(x)$  s'obtient à partir de l'équation de Heisenberg :

$$i\hat{\partial}_t \hat{\Psi} = [\hat{\Psi}, \hat{H}]. \quad (1.43)$$

En évaluant explicitement le commutateur (1.17), on trouve :

$$i\hat{\partial}_t \hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi} + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}. \quad (1.44)$$

Il est important de souligner que cette équation est encore **quantique** : elle décrit l'évolution de l'opérateur de champ  $\hat{\Psi}$ .

En revanche, si l'on prend l'approximation dite de **champ moyen**, où l'on remplace l'opérateur de champ par son espérance de valeur dans un état cohérent ou condensé

$$\Psi = \langle \hat{\Psi} \rangle, \quad (1.45)$$

on obtient alors l'équation de **Nonlinear Schrödinger (NLS)** (ou équation de **Gross–Pitaevskii (GP)**) pour une fonction d'onde classique :

$$i\partial_t \Psi = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \Psi + g |\Psi|^2 \Psi. \quad (1.46)$$

Ainsi, l'appellation « équation de Schrödinger non linéaire » n'est pertinente qu'au niveau **effectif classique** (champ moyen), et non au niveau fondamental de l'équation de Heisenberg pour les champs quantiques.

### Conservation et commutation.

*À propos d'autres interactions.* La conservation des opérateurs nombre total de particules  $\hat{Q}$  et quantité totale de mouvement  $\hat{P}$  dépend uniquement des **symétries** de l'interaction, et non de sa force :

- Une interaction **locale et à deux corps** de type  $g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}$  (cas du modèle de **LL**) est invariante par  $U(1)$  et par translation. Ainsi,  $\hat{Q}$  et  $\hat{P}$  sont conservés.
- Une interaction **à longue portée mais translationnellement invariante** (par exemple un potentiel dipolaire uniforme, ou un potentiel  $V(x - y)$  dépendant seulement de la distance relative) conserve encore  $\hat{P}$ , et si elle respecte la symétrie  $U(1)$ , alors  $\hat{Q}$  reste aussi conservé.
- Une interaction **non uniforme ou dépendant explicitement de la position** (par exemple un potentiel externe  $V(x)$ , ou des bords durs) brise l'invariance par translation :  $\hat{P}$  n'est alors plus conservé.
- Une interaction qui **crée ou détruit des particules** brise la symétrie  $U(1)$  :  $\hat{Q}$  n'est plus conservé.

En résumé, la conservation de  $\hat{Q}$  et  $\hat{P}$  ne dépend pas de la nature microscopique de l'interaction, mais uniquement des **symétries correspondantes** de l'Hamiltonien.

*Interactions de contact.* Dans le cas particulier du modèle de LL, les opérateurs nombre total de particules  $\hat{Q}$  et quantité totale de mouvement  $\hat{\mathbf{P}}$  commutent avec l'Hamiltonien  $\hat{\mathbf{H}}$  :

$$[\hat{\mathbf{H}}, \hat{Q}] = 0, \quad [\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{P}}] = 0. \quad (1.47)$$

Ils constituent donc des **intégrales du mouvement**. Cette propriété reflète directement la conservation du nombre de particules (symétrie  $U(1)$ ) et l'invariance par translation du système (symétrie spatiale).

Nous verrons au chapitre 2 que, dans les systèmes intégrables comme le modèle de LL, cette situation s'étend à une **infinité d'intégrales du mouvement**. Cette richesse supplémentaire de conservation conduit naturellement à l'introduction de l'ensemble de Gibbs généralisé, appelé en anglais **Generalized Gibbs Ensemble (GGE)**.

**États propres et valeurs propres.** Les états propres  $|\{\theta_a\}\rangle$ , construits dans le cadre de la seconde quantification à partir de la solution du modèle de LL, sont simultanément fonctions propres des opérateurs  $\hat{Q}$ ,  $\hat{\mathbf{P}}$  et  $\hat{\mathbf{H}}$  :

$$\hat{Q} |\{\theta_a\}\rangle = N |\{\theta_a\}\rangle, \quad \hat{\mathbf{P}} |\{\theta_a\}\rangle = \left( \sum_{a=1}^N \theta_a \right) |\{\theta_a\}\rangle, \quad \hat{\mathbf{H}} |\{\theta_a\}\rangle = \left( \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \theta_a^2 \right) |\{\theta_a\}\rangle. \quad (1.48)$$

**Conclusion.** La première quantification constitue la base indispensable pour comprendre le comportement quantique d'un nombre fixe de particules. La seconde quantification en est une extension naturelle, nécessaire pour décrire des systèmes plus complexes où le nombre de particules peut varier. Elle repose sur la quantification des champs et l'introduction d'opérateurs de création et d'annihilation, ouvrant ainsi la voie à la physique quantique des champs et à de nombreuses applications modernes.

Les opérateurs  $\hat{Q}$ ,  $\hat{\mathbf{P}}$  (1.30) et  $\hat{\mathbf{H}}$  (1.39) possèdent une structure diagonale commune dans la base des états propres  $|\{\theta_a\}\rangle$ , révélant la nature intégrable du modèle de LL. Leurs valeurs propres sont respectivement les 0<sup>e</sup>, 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> moments des  $\theta_a$ . Cette structure permet de généraliser la construction à une hiérarchie complète d'observables conservées, qui seront présentées au chapitre suivant.

En passant par la seconde quantification, nous avons pu relier l'Hamiltonien à une particule  $\hat{\mathcal{H}}_1$  (1.3) à un Hamiltonien à  $N$  particules  $\hat{\mathcal{H}}_N$  (1.42) dans le modèle de Lieb–Liniger (système avec interactions ponctuelles). Les états  $|\{\theta_a\}\rangle$  sont des états propres du nombre total de particules  $\hat{N}_N$  (1.31), de la quantité de mouvement totale  $\hat{\mathbf{P}}_N$  (1.32) et de l'hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}_N$ .

Dans le cas d'un système à une particule, les états de la forme (1.9) sont déjà propres de  $\hat{N}_1$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_1$  et  $\hat{\mathcal{H}}_1$  (cf. (1.4)). Mais quelle est leur forme pour  $N$  particules ? Et comment généraliser les conditions périodiques (1.7), valables pour une particule, à un système à  $N$  particules ?

Nous allons étudier le cas de  $N = 2$  corps, afin de simplifier l'analyse tout en capturant les premiers effets non triviaux des interactions. Cela permettra de comprendre plus facilement les implications physiques des interactions ponctuelles, en particulier leur influence sur la structure des états propres, les conditions de continuité des fonctions d'onde, ainsi que les relations de dispersion modifiées. Ce cas servira de base pour introduire les concepts clés de la résolution exacte par la méthode de Bethe ansatz, avant de les généraliser au cas  $N$ -corps.

### 1.1.2 Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à 2 corps

**Introduction au système de deux bosons avec interaction de contact.** Considérons maintenant un système de deux bosons confinés dans une boîte unidimensionnelle de longueur  $L$ , avec des conditions aux limites périodiques. Contrairement au cas à une seule particule, une interaction de contact intervient ici dans la dynamique. L'Hamiltonien à deux particules s'écrit :

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = \hat{\mathcal{K}}_2 + \hat{\mathcal{V}}_2, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{K}}_2 = -\frac{1}{2} \partial_{z_1}^2 - \frac{1}{2} \partial_{z_2}^2, \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{V}}_2 = g \delta(z_1 - z_2). \quad (1.49)$$

On rappelle que, pour des particules de masse unitaire (i.e.,  $\hbar = m = 1$ ), les énergies propres de l'opérateur cinétique  $\hat{\mathcal{K}}_2$ , associées aux fonctions d'onde symétrisées  $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}$ , sont données par :

$$\varepsilon(\theta_1) + \varepsilon(\theta_2) = \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}. \quad (1.50)$$

Afin de simplifier le problème, nous nous plaçons dans le référentiel du centre de masse.

**Changement de variables : coordonnées du centre de masse et relative.** En première quantification, on introduit les nouvelles variables :  $Z = \frac{z_1+z_2}{2}$  (centre de masse),  $Y = z_1 - z_2$  (coordonnée relative). Dans ce changement de variables, l'opérateur laplacien total  $\partial_{z_1}^2 + \partial_{z_2}^2$  devient  $\frac{1}{2}\partial_Z^2 + 2\partial_Y^2$ . L'Hamiltonien (1.49) se décompose alors en la somme de deux Hamiltoniens agissant respectivement sur  $Z$  et  $Y$  :

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = -\frac{1}{4}\partial_Z^2 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{rel}}, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{H}}_{\text{rel}} = -\partial_Y^2 + g\delta(Y). \quad (1.51)$$

**Résolution du problème du centre de masse et de la coordonnée relative.** L'Hamiltonien du centre de masse,  $-\frac{1}{4}\partial_Z^2$ , décrit une particule de masse totale  $\tilde{m} = 2$ . Ses états propres sont des ondes planes associées à une énergie  $\tilde{\theta}^2$ , avec :  $\tilde{\theta} = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ , jouant ici un rôle analogue à celui d'un pseudo-moment associé dans le référentiel de laboratoire. Le Hamiltonien relatif,  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{rel}}$ , correspond quant à lui à une particule de masse réduite  $\tilde{m} = \frac{1}{2}$  soumise à un potentiel delta centré en  $Y = 0$ . Son équation propre s'écrit :

$$-\partial_Y^2 \tilde{\varphi}(Y) + g\delta(Y)\tilde{\varphi}(Y) = \tilde{\varepsilon}\tilde{\varphi}(Y), \quad (1.52)$$

où  $\tilde{\varepsilon}$  désigne l'énergie associée au mouvement relatif.

**Forme symétrique de la fonction d'onde pour bosons.** Dans le référentiel du centre de masse, le système est le même que celui d'une particule de masse  $\tilde{m} = \frac{1}{2}$ . Le système étant composé de particules bosoniques, on cherche une solution symétrique que l'on écrit sous la forme :

$$\tilde{\varphi}(Y) = a e^{i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} + b e^{-i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} \propto \sin\left(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}|Y| + \Phi)\right). \quad (1.53)$$

Le paramètre  $\tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_2$  joue ici un rôle analogue à celui d'un pseudo-moment associé à la coordonnée relative, et la phase s'écrit

$$\Phi(\tilde{\theta}) = 2 \arctan\left(\frac{1}{i} \frac{a+b}{a-b}\right), \quad (1.54)$$

car  $a \exp(ix) + b \exp(-ix) = 2\sqrt{ab} \sin\left(x + \arctan\left(-i \frac{a+b}{a-b}\right)\right)$ . Pour  $\tilde{\theta} < 0$ , les termes exponentiels  $\exp(i\tilde{\theta}|Y|/2)$  et  $\exp(-i\tilde{\theta}|Y|/2)$  correspondent aux paires de particules entrantes et sortantes d'un processus de diffusion à deux corps.

En réinjectant l'ansatz (1.53) dans l'équation relative (1.52), on obtient l'énergie propre  $\tilde{\varepsilon}$  du problème réduit. Elle prend la forme cinétique usuelle  $\frac{1}{2} \times \text{masse} \times \text{vitesse}^2$ . La masse réduite vaut ici  $\tilde{m} = \frac{1}{2}$  et le paramètre  $\tilde{\theta}$  joue le rôle d'une impulsion ; ainsi

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^2}{4}. \quad (1.55)$$

Cette énergie gouverne la décroissance exponentielle de la fonction d'onde dans la coordonnée relative : plus  $\tilde{\theta}$  est grand, plus l'état est localisé autour de  $Y = 0$ , signe d'une interaction attractive plus forte entre les deux bosons.

La fonction d'onde relative présente des oscillations de fréquence  $\tilde{\theta}/2$ , et son énergie croît avec  $\tilde{\theta}^2$ . Cette solution correspond à un état de diffusion à deux corps en interaction ponctuelle. En revanche, une décroissance exponentielle autour de  $Y = 0$  n'apparaît que dans le cas d'un couplage attractif ( $g < 0$ ), où des états liés peuvent se former.

L'énergie totale se décompose enfin en la somme du mouvement du centre de masse et du mouvement relatif :  $\tilde{\theta}^2 + \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) = \varepsilon(\theta_1) + \varepsilon(\theta_2)$ , où  $\tilde{\theta} = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ .

**Condition de discontinuité à cause du potentiel delta.** En raison de la présence du potentiel delta centré en  $Y = 0$ , la dérivée première de la fonction d'onde  $\tilde{\varphi}(Y)$  présente une discontinuité en ce point. En effet, le potentiel étant infini en  $Y = 0$ , la phase  $\Phi$  du régime symétrique est déterminée en intégrant l'équation du mouvement autour de la singularité. En intégrant entre  $-\epsilon$  et  $+\epsilon$  et en faisant tendre  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient la condition de saut de la dérivée :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} -\partial_Y^2 \tilde{\varphi}(Y) + g\delta(Y)\tilde{\varphi}(Y) dY = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta})dY,$$

$$\tilde{\varphi}'(0^+) - \tilde{\varphi}'(0^-) - g\tilde{\varphi}(0) = 0.$$

**Détermination de la phase  $\Phi$ .** Et en évaluant la discontinuité de sa dérivée au point  $Y = 0$ , on trouve que la phase  $\Phi$  satisfait la condition :

$$\Phi(\tilde{\theta}) = 2 \arctan(\tilde{\theta}/g) \in [-\pi, +\pi]. \quad (1.56)$$

Cette relation exprime l'effet de l'interaction delta sur la phase de la fonction d'onde à deux particules. On en déduit que plus le couplage  $g$  est fort ( $g \rightarrow \infty$ ), plus la phase  $\Phi$  se rapproche de zéro. Cela correspond à une fonction d'onde qui s'annule en  $Y = 0$ , caractéristique d'un régime d'imperméabilité totale.

À l'inverse, dans la limite d'une interaction faible ( $g \rightarrow 0$ ), la phase  $\Phi$  tend vers  $\pi$  (ou  $-\pi$ , selon le signe de  $\tilde{\theta}$ ). Dans ce cas, la discontinuité de la dérivée de la fonction d'onde au point  $Y = 0$  devient négligeable, ce qui traduit une interaction absente entre les deux particules.

**Phase de diffusion à deux corps.** En combinant les équations (1.54) et (1.56) avec l'identité analytique valable pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ ,  $2 \arctan(z) = i \ln\left(\frac{1-i_z}{1+i_z}\right)$  i.e.  $e^{2i \arctan(z)} = \frac{1+iz}{1-iz}$ , on obtient que le rapport des amplitudes  $a$  et  $b$  de la fonction d'onde relative (1.53) définit la *phase de diffusion*  $\Phi(\tilde{\theta}) = i \ln\left(-\frac{b}{a}\right)$ . On introduit alors la *matrice de diffusion* (ou *facteur de diffusion*) noté  $S(\theta)$ , définie comme une phase complexe :

$$S(\theta) \doteq e^{i\Phi(\theta)} \quad (1.57)$$

Dans le cas d'une interaction de type delta, cette fonction prend la forme explicite :

$$S(\tilde{\theta}) = \frac{1 + i \tilde{\theta}/g}{1 - i \tilde{\theta}/g}. \quad (1.58)$$

Cette expression, unitaire et analytique, caractérise entièrement la diffusion élastique à deux corps dans le modèle considéré.

**Lien entre la phase de diffusion et le décalage temporel — interprétation semi-classique** Wigner (1955) [Wig55], à la suite d'Eisenbud (1948) [Eis48], a mis en évidence un lien entre la **phase de diffusion** et un *décalage temporel*, interprétation qui peut être éclairée dans une perspective semi-classique. L'idée de Wigner repose sur l'analyse d'un paquet d'ondes incident, constitué de la superposition de deux ondes planes de moments voisins,  $\tilde{\theta}/2$  et  $\tilde{\theta}/2 + \delta\tilde{\theta}$  :

$$\tilde{\varphi}_{\text{inc}}(Y) \propto e^{i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} + e^{i\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|}. \quad (1.59)$$

Cette superposition évolue dans le temps comme :

$$\tilde{\varphi}_{\text{inc}}(Y, t) \propto e^{i(\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|-t\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}))} + e^{i(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|-t\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta}))}. \quad (1.60)$$

Le centre de ce 'paquet d'ondes' se situe à la position où les phases des deux termes coïncident, c'est-à-dire au point où  $|Y|\delta\tilde{\theta} - t[\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta} + 2\delta\tilde{\theta}) - \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta})] = 0$ , ce qui donne  $|Y| \simeq \tilde{\theta} t$  avec la vitesse réduite  $\tilde{\theta} = 2\tilde{\varepsilon}'(\tilde{\theta})$ . Selon les équations (1.53) et (1.58), l'état sortant de la diffusion correspondant serait :

$$\tilde{\varphi}_{\text{outc}}(Y, t) \propto -e^{i\Phi(\tilde{\theta})} e^{-i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} - e^{i\Phi(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})} e^{-i\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|}. \quad (1.61)$$

En répétant l'argument précédent de la stationnarité de phase, on trouve que la coordonnée relative est à la position  $|Y| \simeq \tilde{\theta}t - 2\Delta(\tilde{\theta})$  au moment  $t$ .

$$|Y| \simeq \tilde{\theta}t - 2\Delta(\tilde{\theta}) \quad (1.62)$$

où le **déplacement collisionnel**  $\Delta(\theta)$  est donné par la dérivée de la *phase de diffusion*,

$$\Delta(\theta) \doteq \frac{d\Phi}{d\theta}(\theta) = \frac{2g}{g^2 + \theta^2}. \quad (1.63)$$

**Retour aux coordonnées du laboratoire.** En revenant aux coordonnées du laboratoire, la fonction d'onde à deux corps s'écrit  $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) = \langle \emptyset | \hat{\Psi}(z_1) \hat{\Psi}(z_2) | \{\theta_1, \theta_2\} \rangle / \sqrt{2}$ , dans le cas  $z_1 < z_2$ , c'est-à-dire pour une séparation relative  $Y = z_1 - z_2 < 0$  (on pourra symétriser ultérieurement). Dans le référentiel du laboratoire, le centre de masse évolue selon  $Z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \bar{\theta}t$ . Ainsi, la position semi-classique des deux particules après la collision s'écrit

$$z_1 = Z + \frac{Y}{2} \simeq \theta_1 t - \Delta(\theta_1 - \theta_2), \quad z_2 = Z - \frac{Y}{2} \simeq \theta_2 t + \Delta(\theta_1 - \theta_2). \quad (1.64)$$

La figure 1.1 illustre schématiquement la collision de deux particules et le décalage spatial  $\Delta(\theta_1 - \theta_2)$  qui en résulte dans l'évolution semi-classique de leurs positions.

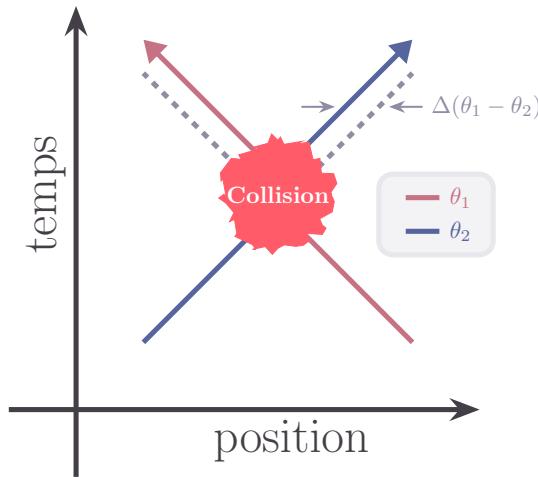


FIGURE 1.1 – Schéma de collision entre deux quasi-particules et du décalage spatial  $\Delta(\theta_1 - \theta_2)$ .

On peut vérifier les identités utiles suivantes :

$$z_1\theta_1 + z_2\theta_2 = 2Z\bar{\theta} + \frac{1}{2}Y\tilde{\theta}, \quad z_1\theta_2 + z_2\theta_1 = 2Z\bar{\theta} - \frac{1}{2}Y\tilde{\theta},$$

ce qui est en accord avec les masses associées : masse totale  $\bar{m} = 2$ , masse réduite  $\tilde{m} = \frac{1}{2}$ .

Pour revenir à la représentation observée dans le laboratoire, il est nécessaire de multiplier l'ansatz dans le référentiel du centre de masse (Eq. (1.53)) par un facteur de phase globale  $\exp(2iZ\bar{\theta})$ . On obtient alors l'expression de la fonction d'onde :

$$\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) \propto \begin{cases} (\theta_2 - \theta_1 - ig)e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2} - (\theta_1 - \theta_2 - ig)e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1} & \text{si } z_1 < z_2 \\ (z_1 \leftrightarrow z_2) & \text{si } z_1 > z_2 \end{cases} \quad (1.65)$$

Pour  $\theta_1 > \theta_2$ , les deux termes exponentiels  $e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2}$  et  $e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1}$  correspondent respectivement aux ondes entrantes et sortantes dans le canal de diffusion à deux corps [BD22]. Le rapport de leurs amplitudes définit la **phase de diffusion**  $\Phi$  et **matrice diffusion**  $S$  à deux corps (1.58), reste inchangé mais voici une autre écriture :

$$S(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\theta_1 - \theta_2 - ig}{\theta_2 - \theta_1 - ig}. \quad (1.66)$$

Cette phase caractérise entièrement le processus de diffusion dans le modèle de LL à deux particules.

**Conditions périodiques et équations de Bethe pour deux bosons.** Dans ce paragraphe, on écrit la fonction d'onde obtenue en (1.65) sous la forme

$$\varphi_{\{\theta_1 < \theta_2\}}(z_1, z_2) = a e^{iz_1 \theta_1 + iz_2 \theta_2} + b e^{iz_1 \theta_2 + iz_2 \theta_1}, \quad (1.67)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux coefficients complexes.

*Périodicité en  $z_2$ .* On impose une condition de périodicité sur la fonction (1.67) :  $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2 = L) = \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2 = 0)$ , avec  $0 < z_1 < z_2 = L$ . Au point  $z_2 = L$ , la configuration reste dans le secteur  $z_1 < z_2$ , tandis qu'à  $z_2 = 0$ , on entre dans le secteur  $z_2 < z_1$ . La continuité de la fonction d'onde impose alors d'échanger les coordonnées  $z_1 \leftrightarrow z_2$  :  $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, L) = \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(0, z_1)$ . En utilisant l'expression explicite de l'ansatz dans les deux secteurs, on obtient l'égalité suivante :

$$a e^{i\theta_1 z_1 + i\theta_2 L} + b e^{i\theta_2 z_1 + i\theta_1 L} = a e^{i\theta_2 z_1} + b e^{i\theta_1 z_1}. \quad (1.68)$$

Cette relation, valable pour tout  $z_1 \in [0, L]$ , fixe une contrainte sur le rapport  $b/a$ . En utilisant l'expression de la phase de diffusion introduite en (1.66) (valable pour  $z_1 < z_2$ ), on a :

$$-\frac{b}{a} = e^{i\Phi(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (1.69)$$

avec la fonction  $\Phi$  donnée par l'équation (1.56).

On obtient une condition sur les phases  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , cœur de la quantification imposée par le formalisme de Bethe. En identifiant les coefficients de  $e^{i\theta_1 z_1}$  et  $e^{i\theta_2 z_1}$  indépendamment dans (1.68), on obtient  $e^{i\theta_2 L} a = b$ ,  $e^{i\theta_1 L} b = a$ , c'est-à-dire en utilisant (1.69), les **équations de Bethe à deux particules** :

$$e^{i\theta_1 L} e^{i\Phi(\theta_1 - \theta_2)} = -1, \quad e^{i\theta_2 L} e^{i\Phi(\theta_2 - \theta_1)} = -1. \quad (1.70)$$

En prenant le logarithme, elles se réécrivent sous la forme usuelle :

$$\theta_1 L + \Phi(\theta_1 - \theta_2) = 2\pi I_1, \quad \theta_2 L + \Phi(\theta_2 - \theta_1) = 2\pi I_2, \quad (1.71)$$

où  $I_1, I_2 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  sont des nombres demi-entiers.

*Périodicité sur  $z_1$ .* Le raisonnement symétrique conduit exactement aux mêmes égalités (1.70) et (1.71). Ces équations constituent la quantification complète du gaz de Lieb–Liniger à deux bosons sur un cercle de longueur  $L$  et seront le point de départ pour l'étude de l'état fondamental et des excitations.

En comparaison avec le cas d'une seule particule (où la condition aux bords périodiques impose simplement  $\theta L = 2\pi n$  (1.7)), on voit que les équations de Bethe à deux particules (1.70)–(1.71) incorporent la fonction  $\Phi$ , qui encode explicitement l'**interaction entre particules**.

### 1.1.2.1 Interprétation physique pour deux particules et rôle de la rapidité

Pour bien comprendre le sens physique des équations de Bethe (1.71), nous avons commencé par le cas de deux particules. Dans ce cadre, les particules interagissent lorsqu'elles se croisent, et à chaque interaction elles acquièrent une **phase de diffusion**  $\Phi$ . L'état propre du système est obtenu en imposant que l'onde multi-corps soit périodique sur un cercle de longueur  $L$  : chaque particule effectue une rotation complète, accumule une phase cinématique  $e^{i\theta L}$  liée à son mouvement libre, ainsi que des contributions de phase dues aux diffusions avec l'autre particule. Cela donne lieu à une quantification des **pseudo-impulsions**  $\theta$  via l'équation de Bethe.

Pour décrire ces **excitations**, ces **quasi-particules**, on introduit le paramètre  $\theta$  appelé **rapidité**. Ce terme vient de la théorie relativiste [ZZ79 ; BBT03], mais reste pertinent même dans des modèles non relativistes, comme ici. La rapidité est choisie comme **paramètre spectral naturel** : elle étiquette les états propres, linéarise les relations de dispersion dans certains régimes, et elle simplifie considérablement les équations de Bethe.

On peut interpréter chaque  $\theta$  comme la **vitesse d'une quasi-particule** : une entité collective qui se comporte comme une particule libre, mais qui tient compte des effets des interactions avec les autres. Contrairement à une particule élémentaire, une **quasi-particule** est une excitation émergente du système à plusieurs corps : elle résume de façon efficace le comportement collectif d'une particule « habillée » par son environnement d'interactions. Cette notion est centrale en physique des systèmes quantiques à  $N$  corps, où les excitations ne sont plus des particules indépendantes, mais des objets collectifs.

Ainsi, dans l'image de Bethe, les états propres sont des configurations stables de  $N$  quasi-particules de rapidités  $\theta_1, \dots, \theta_N$ , dont les valeurs sont quantifiées par les conditions d'interférence imposées par les équations de Bethe.

## 1.2 Équation de Bethe et distribution de rapidité

### 1.2.1 Fonction d'onde dans le secteur ordonné et représentation de Gaudin

Sans en faire ici la démonstration, donnons une forme généralisée de la fonction propre à  $N$  particules (Eq. (1.21)), qui prolonge naturellement l'expression obtenue pour le cas à deux corps (Eq. (1.65)). Dans le domaine  $z_1 < z_2 < \dots < z_N$ , la fonction d'onde pour un état de Bethe à  $N$  particules s'écrit [KIB93; GC12; LL63; Fra16; Wou15]) :

$$\begin{aligned} \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1 < \dots < z_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle \emptyset | \hat{\Psi}(z_1) \cdots \hat{\Psi}(z_N) | \{\theta_a\} \rangle \\ &\propto \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \left( \prod_{1 \leq a < b \leq N} (\theta_{\sigma(b)} - \theta_{\sigma(a)} - ig) \right) e^{i \sum_{j=1}^N z_j \theta_{\sigma(j)}}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

où la somme s'étend sur toutes les permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, N\}$ . Le facteur  $(-1)^{|\sigma|}$  est la signature de la permutation, et les amplitudes dépendent des différences de quasi-moments  $\theta_j$  ainsi que du couplage  $g$ . Cette fonction d'onde est ensuite étendue par symétrie aux autres domaines du type  $z_{\pi(1)} < z_{\pi(2)} < \dots < z_{\pi(N)}$  via des propriétés d'échange symétriques.

### 1.2.2 Conditions aux bords périodiques

Les équations précédentes ont été établies pour un système défini sur la droite réelle. Cependant, dans une perspective thermodynamique, il est essentiel de considérer une densité finie  $N/L$ . Cela peut être obtenu en compactifiant l'espace sur un cercle de longueur  $L$ , i.e. en imposant les *conditions aux bords périodiques*.

Concrètement, cela consiste à identifier  $x = 0$  et  $x = L$  et à exiger que la fonction d'onde soit périodique lorsqu'une particule fait le tour du système :

$$\varphi_{\{\theta_a\}}(x_1, \dots, x_{N-1}, L) = \varphi_{\{\theta_a\}}(0, x_1, \dots, x_{N-1}). \quad (1.73)$$

Cette condition doit être satisfaite pour chaque particule. Or, déplacer la  $j$ -ième particule de  $x_j$  à  $x_j + L$  revient à la faire passer devant toutes les autres : cela introduit un facteur de diffusion à chaque croisement.

#### 1.2.2.1 Équations de Bethe exponentielles

En imposant les conditions de périodicité sur la fonction d'onde de type Bethe (1.72), on généralise l'équation (1.70) pour  $N$  particules. On obtient que chaque moment  $\theta_a$  doit satisfaire l'équation :

$$e^{i \theta_a L} \prod_{b \neq a} S(\theta_a - \theta_b) = (-1)^{N-1}, \quad a = 1, \dots, N, \quad (1.74)$$

où la matrice diffusion  $S(\theta)$  définie en (1.57), (1.58) et (1.66) est l'amplitude de diffusion à deux corps. Le signe  $(-1)^{N-1}$  vient du fait que chaque permutation change la signature du déterminant dans la représentation de Gaudin.

### 1.2.2.2 Équations de Bethe logarithmiques

En prenant le logarithme du membre gauche et du membre droit de l'équation (1.74), on généralise l'équation (1.71). On obtient sa forme *logarithmique* :

$$L\theta_a + \sum_{b=1}^N \Phi(\theta_a - \theta_b) = 2\pi I_a, \quad a = 1, \dots, N, \quad (1.75)$$

où les  $I_a$  sont des nombres quantiques. Ce sont des entiers  $I_a \in \mathbb{Z}$  si  $N$  est impair, et des demi-entiers  $I_a \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  si  $N$  est pair.

Dans la configuration d'état fondamental (ou de type “mer de Fermi”), ces nombres sont pris de manière symétrique autour de zéro (voir Fig 1.2(a)) :

$$I_a = a - \frac{N+1}{2}, \quad \text{pour } a \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.76)$$

ce qui correspond au choix symétrique des nombres quantiques pour l'état fondamental. Il en résulte une distribution uniforme des  $\theta_a$  dans l'intervalle autour de zéro  $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$  où  $\theta_{\max}$  est le paramètre de Fermi (ou rapidité maximale).

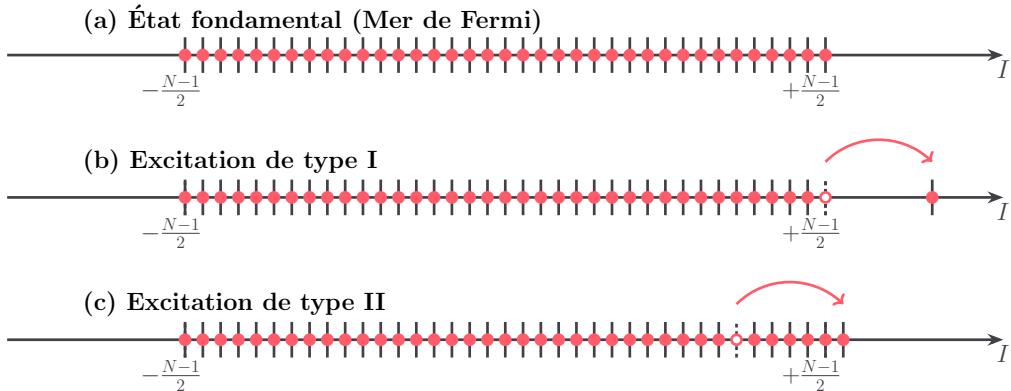


FIGURE 1.2 – Représentation schématique de la mer de Fermi pour un système de  $N$  particules : (a) distribution occupée à l'état fondamental, analogue à une mer de Fermi idéale ; (b) modification de cette distribution sous l'effet d'une excitation élémentaire de type I ; (c) modification correspondante en présence d'une excitation élémentaire de type II.

Tous les nombres  $I_a$  sont distincts. Cette propriété établit un lien direct avec un gaz de **fermions libres** en une dimension : bien que les particules du modèle de Lieb–Liniger soient bosoniques, la structure des équations de Bethe impose une exclusion effective au niveau des nombres quantiques. Pour cette raison, on parle de **nombres quantiques fermioniques**. L'équation de Bethe (1.75) définit ainsi une bijection entre une configuration de rapidité  $\{\theta_a\}$  (BA) et un ensemble de nombres quantiques  $\{I_a\}$  (Fermionic Bethe Ansatz (FBA)) [Gir60].

En particulier, dans la limite d'**interaction forte** (*i.e.*  $g \rightarrow \infty$  c'est-à-dire si  $\Phi = 0$ ), les équations (1.75) se réduisent à  $L\theta_a = 2\pi I_a$ , soit  $\theta_a = 2\pi I_a / L$ . Cela correspond exactement aux quantifications de l'impulsion pour des **fermions libres sans spin**, dans une boîte de taille  $L$ , avec conditions aux bords périodiques.

L'interprétation est alors la suivante : les solutions de Bethe  $\theta_a$  décrivent des quasi-particules interagissantes, dont la configuration est déterminée par l'ensemble des nombres quantiques  $I_a$ , eux-mêmes analogues aux **moments quantiques d'un gaz de fermions libres**.

### 1.2.2.3 Interprétation physique

Les équations de Bethe (1.75) représentent une *quantification des pseudo-impulsions*  $\theta_a$  des particules en interaction, résultant d'un *interféromètre multi-corps sur le cercle* : chaque particule accumule une phase  $e^{i\theta_a L}$  due au mouvement libre, ainsi que des phases de diffusion lorsqu'elle croise les autres.

Ce système d'équations détermine les états propres du système de LL en volume fini, et joue un rôle fondamental dans la description exacte de ses propriétés thermodynamiques et dynamiques.

### 1.2.3 Thermodynamique du gaz de Lieb–Liniger à l'état fondamental

Dans la limite thermodynamique, le nombre de particules  $N$  et la longueur  $L$  du système tendent vers l'infini de telle sorte que leur rapport reste fini :

$$\lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{N}{L} = n < \infty,$$

où  $n$  désigne la densité linéique de particules.

Considérons désormais le système à température nulle. L'état fondamental dans le secteur à nombre de particules fixé correspond à la configuration d'énergie minimale parmi les solutions des équations de Bethe (1.75).

Dans la limite thermodynamique ( $\lim_{\substack{\text{therm} \\ L \rightarrow \infty \\ N/L = \text{cst}}} \equiv$  ), les valeurs de  $\theta_a$  deviennent quasi-continues, avec un espace  $\theta_{a+1} - \theta_a = O(1/L)$ , et se condensent dans un intervalle symétrique autour de zéro  $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$ . En supposant l'ordre  $I_a \geq I_b$  implique  $\theta_a \geq \theta_b$ , cet intervalle constitue ce qu'on appelle la *mer de Dirac* (ou sphère de Fermi en dimension un). Fermi

**Distribution de rapidité  $\rho(\theta)$ .** Nous introduisons la **distribution de rapidité macroscopique** par unité de longueur, notée  $\rho(\theta)$ , et définie par

$$L\rho(\theta)\delta\theta \doteq \text{nombre de quasi-particules ayant une rapidité dans } [\theta, \theta + \delta\theta]. \quad (1.77)$$

Autrement dit, dans un petit intervalle  $\delta\theta$ , le nombre total de particules ayant une rapidité dans cet intervalle est approximativement :

$$\delta N(\theta) = L\rho(\theta)\delta\theta \quad (1.78)$$

Avec les rapidités  $\theta_a$  ordonnées i.e.  $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$ . Pour des intervalles  $[\theta_a, \theta_a + \delta\theta_a]$  assez petits  $\delta\theta_a = \theta_{a+1} - \theta_a$ , est correspond à  $\delta N(\theta_a) = 1$  quasi-particule (car une seule particule occupe l'intervalle entre deux rapidités consécutives). Dans la limite thermodynamique la dernière équation (1.78) se réécrit comme :

$$\rho(\theta_a) = \lim_{\text{therm}} \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\theta_{a+1} - \theta_a} > 0. \quad (1.79)$$

On peut aussi écrire la distribution de rapidité sous la forme :

$$\rho(\theta) = \lim_{\substack{\text{therm} \\ L \rightarrow \infty}} \frac{1}{L} \sum_{a=1}^N \delta(\theta - \theta_a). \quad (1.80)$$

**Densité d'états  $\rho_s(\theta)$ .** Intéressons-nous maintenant à la **densité d'états**  $\rho_s(\theta)$ , définie par

$$\rho_s(\theta_a) \doteq \frac{1}{L} \lim_{\text{therm}} \frac{|I_{a+1} - I_a|}{|\theta_{a+1} - \theta_a|}, \quad (1.81)$$

soit en notant la fonction  $I(\theta_a) = I_a$ , le passage discret-continu permet d'écrire :

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta_a). \quad (1.82)$$

L'application des équations de Bethe sous forme logarithmique (1.75) conduit alors à

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = 1 + \frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b), \quad (1.83)$$

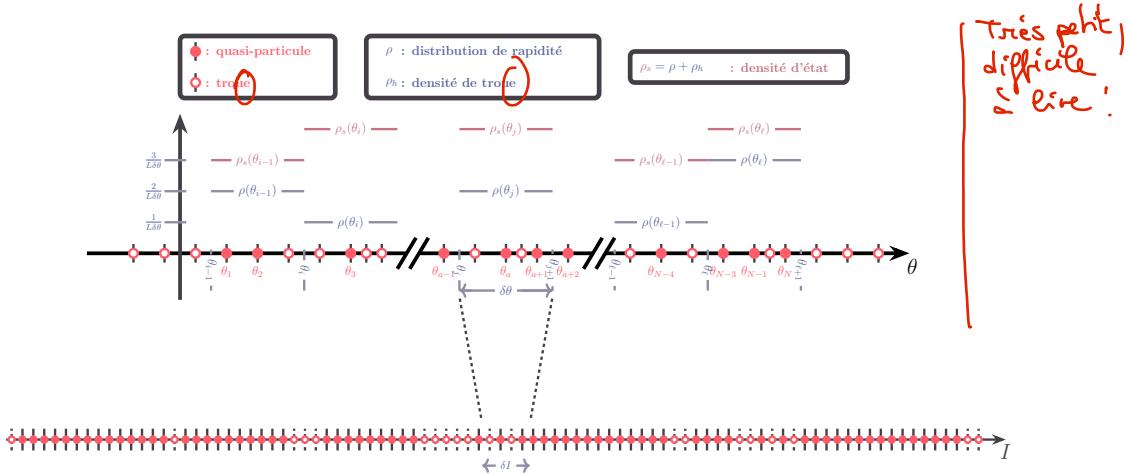


FIGURE 1.3 – Rapidités dans l'intervalle  $[\theta, \theta + \delta\theta]$  s'associent à un ensemble de nombres quantiques fermioniques situés dans  $[I, I + \delta I]$ . La densité d'états  $\rho_s$  se déduit alors de la relation  $\delta I \simeq L\rho_s(\theta)\delta\theta$

ce qui relie  $\rho_s$  à le déplacement collisionnel  $\Delta$  définie dans l'équation (1.63).

Dans l'état fondamental, toutes les positions disponibles dans l'intervalle  $[-\theta_{\max}, +\theta_{\max}]$  sont occupées. On a donc :

$$\rho(\theta) = \rho_s(\theta). \quad (1.84)$$

La quantité  $L\rho(\theta)d\theta$  représente le nombre de rapidités dans la cellule infinitésimale  $[\theta, \theta + d\theta]$ , tandis que  $N = L \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \rho(\theta) d\theta$  donne le nombre total de particules dans le système. Le passage de la somme discrète à l'intégrale dans le second membre de l'équation de Bethe s'effectue en utilisant la correspondance :

$$\frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b) \xrightarrow{\text{therm}} \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \Delta(\theta_a - \theta) \rho(\theta) d\theta. \quad (1.85)$$

Ainsi, l'équation pour la densité d'états (1.83) devient (Fig 1.3) :

$$2\pi\rho_s(\theta) = 1 + \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') d\theta', \quad (1.86)$$

et, comme  $\rho = \rho_s$ , à l'état fondamental, on obtient l'équation linéaire intégrale satisfaite par la distribution de rapidités :

$$\rho(\theta) - \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \frac{\Delta(\theta - \theta')}{2\pi} \rho(\theta') d\theta' = \frac{1}{2\pi}. \quad (1.87)$$

#### 1.2.4 Excitations élémentaires

À partir de l'état fondamental dans le régime d'interaction forte, les excitations élémentaires du modèle de LL ont été classifiées par Lieb en deux types distincts [Lie63]. Ces excitations peuvent être comprises comme des perturbations de la mer de Fermi formée par les quasi-particules.

- **Excitations de type I :** Il s'agit remplacer une quasi-particule avec un nombre fermionique au bord de Fermi  $I_N$  (ou  $I_{-N}$ ) par une quasi-particule avec un nombre fermionique  $I' > I_N$  (resp.  $I' < I_{-N}$ ), c'est-à-dire au-delà du bord de la mer de Fermi (voir Fig 1.2(b)). Ces excitations sont analogues à des excitations de particules libres et, dans la limite des faibles interactions ( $g \rightarrow 0$ ), leur relation de dispersion reproduit celle prédictive par la théorie de Bogoliubov .
- **Excitations de type II :** Ces excitations sont de type particule-trou. Elles sont obtenues en remplaçant une quasi-particule de la mer de Fermi avec une nombre fermionique  $I_a$  (i.e., en créant un trou dans

l'état fondamental) et de le remplacer par une quasi-particule avec  $I' = I_{N+1} = N/2$  ou  $I' = I_{N-1} = -N/2$  et en réarrangeant les autres nombres fermionique (voir Fig 1.2(c)). Cela correspond à une excitation interne du Fermi pseudo-mer, avec conservation du nombre de particules. Pour de petits  $I'$ , la dispersion est linéaire, correspondant à des modes phononiques. Dans la limite d'interaction faible  $g \rightarrow 0$ , ces excitations peuvent être interprétées comme des solitons sombres [IT80; Kar+15].

Ces deux types d'excitations définissent ensemble le spectre complet du modèle de Lieb-Liniger et permettent d'accéder aux propriétés dynamiques du système, telles que les fonctions de réponse ou la structure du spectre d'énergie.

**Équation de Bethe continue.** Hors de l'état fondamental, la notion de « mer de Fermi » n'est plus bien définie, et les équations (1.84) et (1.87) ne sont donc plus valides (en particulier, on n'a plus  $\rho = \rho_s$ ). Dans ce cadre, les équations discrètes de Bethe (1.86) se condensent, à la limite thermodynamique, en une équation intégrale reliant les densités de rapidité :

$$2\pi\rho_s(\theta) = 1 + (\Delta \star \rho)(\theta), \quad (1.88)$$

où le symbole  $\star$  désigne la *convolution* :

$$[\Delta \star \rho](\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta').$$

On introduit alors la **densité de trous**  $\rho_h(\theta)$  définie par

$$\rho_s(\theta) = \rho(\theta) + \rho_h(\theta), \quad (1.89)$$

ainsi que la *fonction d'occupation* (ou facteur d'occupation de type Fermi–Dirac)

$$\nu(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho_s(\theta)}. \quad (1.90)$$

### Opération de *dressing*.

**Définition.** À toute fonction  $f(\theta)$ , on associe sa version *habillée* (ou *dressed*)  $f_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta)$ , définie comme la solution de l'équation intégrale suivante :

$$f_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta) = f(\theta) + \frac{1}{2\pi} (\Delta \star [\nu f^{\text{dr}}])(\theta). \quad (1.91)$$

Ici,  $\nu(\theta)$  est le **facteur d'occupation**, et  $\Delta/2\pi$  est le **noyau de diffusion** caractéristique du modèle considéré.

**Interprétation physique** Le dressing incorpore à tous ordres les effets de rétrodiffusion entre quasi-particules. Il encode ainsi les corrections d'interaction aux grandeurs physiques initiales  $f(\theta)$ . L'opération de *dressing* joue un rôle central dans la description thermodynamique et dynamique des systèmes intégrables : elle permet d'exprimer les grandeurs physiques effectives (charges, courants, vitesses de groupe, etc.) en termes de leurs versions habillées par les interactions.

**Exemple : densité de sites** En prenant  $f(\theta) = 1$  dans l'équation (1.91), on obtient :  $1_{[\nu]}^{\text{dr}} = 1 + \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu 1_{[\nu]}^{\text{dr}})$  soit directement :

$$2\pi\rho_s = 1_{[\nu]}^{\text{dr}}, \quad (1.92)$$

ce qui n'est autre que la relation (1.88).

## Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons introduit le modèle de Lieb–Liniger (LL), qui décrit un gaz de bosons unidimensionnel soumis à une interaction de contact. Dans ce cadre, les grandeurs conservées naturelles ne sont pas seulement le nombre total de particules  $\hat{Q}$  et la quantité de mouvement totale  $\hat{P}$ , mais également l'énergie associée à l'Hamiltonien LL,  $\hat{H}$ , (plutôt qu'à la simple énergie cinétique  $\hat{K}$ ). Ces charges conservées correspondent respectivement aux moments d'ordre 0, 1 et 2 en rapidité. Comme nous le verrons au chapitre suivant, des charges d'ordre supérieur interviennent dans la description des états en équilibre, notamment via le GGE.

L'imposition de conditions aux bords périodiques conduit naturellement aux équations de Bethe Ansatz (BA), voir (1.75). Dans la limite thermodynamique, celles-ci se condensent en une équation intégrale reliant la densité d'états  $\rho_s(\theta)$  à la distribution de rapidités  $\rho(\theta)$ , cf. (1.88). Le Bethe Ansatz établit ainsi le lien fondamental entre ces deux grandeurs et constitue la base de la description thermodynamique du modèle.

Le chapitre suivant sera consacré à l'introduction du GGE et à l'écriture explicite du formalisme de Bethe Ansatz thermodynamique (TBA), qui fournit un cadre puissant pour décrire les propriétés thermodynamiques et hors équilibre des systèmes intégrables.

## Chapitre 2

# Relaxation et Équilibre dans les Systèmes Quantiques Intégrables : de l’Ensemble de Gibbs Généralisé à la Thermodynamique de Bethe

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Notion d’état d’Équilibre de Gibbs Généralisé (GGE)</b>	<b>24</b>
2.1.1	Introduction à l’Équilibre de Gibbs Généralisé	24
2.1.2	Moyenne dans l’Équilibre de Gibbs Généralisé	25
2.1.3	Rôle des charges conservées extensives et quasi-locales	27
<b>2.2</b>	<b>Thermodynamique de Bethe et relaxation</b>	<b>29</b>
2.2.1	Moyenne dans la limite thermodynamique	29
2.2.2	Statistique des macro-états : entropie de Yang-Yang	29
2.2.3	Équations intégrales de la TBA	32

---

### Introduction

Dans les systèmes quantiques intégrables, l’évolution vers l’équilibre à partir d’un état initial arbitraire — généralement hors d’équilibre — ne conduit pas, en général, à une thermalisation décrite par la statistique de Gibbs standard. Cette particularité résulte de l’existence d’une infinité de charges conservées, qui sont mutuellement en involution, c’est-à-dire qu’elles commutent entre elles. L’évolution du système est alors contrainte à un sous-espace restreint de l’espace des états accessibles. La relaxation vers un état stationnaire n’est donc pas décrite par l’ensemble canonique, mais par un **ensemble thermodynamique généralisé**, appelé *Ensemble de Gibbs Généralisé* (en anglais *Generalized Gibbs Ensemble (GGE)*), qui prend en compte l’ensemble des constantes du mouvement.

Ce chapitre est consacré à la mise en place rigoureuse de cette notion. Dans une première section, nous revenons brièvement sur la notion d’opérateurs à un corps exprimés en puissances de l’impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$  pour une particule, introduite au chapitre précédent (Chap. 1). Ce cadre permet de construire une hiérarchie naturelle de charges conservées, au-delà du simple nombre de particules, de la quantité totale de mouvement ou de l’énergie totale. Ces charges supplémentaires permettent alors de définir les moyennes d’observables dans un état stationnaire hors d’équilibre.

Dans la section suivante, nous poserons les bases nécessaires à la description quantitative de ces états stationnaires dans le cadre du formalisme du Bethe Ansatz thermodynamique (**Thermodynamic Bethe Ansatz (TBA)**), introduit initialement par Yang et Yang [YY69] afin d’étendre le Bethe Ansatz au régime

thermodynamique, au-delà de l'état fondamental. Nous considérerons un régime macroscopique à température finie (ou, plus précisément, à entropie de Yang–Yang finie), correspondant à des états hautement excités du spectre mais toujours décrits exactement grâce à l'intégrabilité du modèle.

## 2.1 Notion d'état d'Équilibre de Gibbs Généralisé (GGE)

### 2.1.1 Introduction à l'Équilibre de Gibbs Généralisé

**Configuration des états.** On désigne par  $\{\theta_a\} \equiv \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  la *configuration de rapidités* caractérisant un état propre à  $N \equiv N(\{\theta_a\})$  particules – le nombre de particules n'est donc pas fixé *a priori* mais dépend de la configuration. L'état propre correspondant est noté  $|\{\theta_a\}\rangle = |\{\theta_1, \dots, \theta_N\}\rangle$ .

**Rappel : Observables diagonales dans la base des états propres.** Dans le chapitre précédent (1), on a vu que l'état  $|\{\theta_a\}\rangle$  associé à cette configuration est une état propre des observables nombre d'atome, quantité de mouvement et énergie totale (1.48). Ces observables sont diagonales dans la base des états propres :

$$\hat{Q} = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad \hat{P} = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N \theta_a \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad \hat{H} = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N \frac{\theta_a^2}{2} \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|. \quad (2.1)$$

avec  $\sum_{\{\theta_a\}}$  une somme sur tous les états de Bethe.

**Contexte et GGE dans les systèmes intégrables.** Dans un système quantique **intégrable**, il existe une infinité de charges conservées locales  $\hat{Q}_i$  commutant entre elles et avec l'Hamiltonien  $\hat{H}$  [Rig+07; CCR11]. Concrètement, chaque charge se présente sous la forme  $\hat{Q}_i = \int dx \hat{q}_i(x)$ , où  $\hat{q}_i(x)$  est une densité d'observable locale à support borné. L'intégrabilité implique une caractérisation complète des états propres par un ensemble de paramètres (rapidités  $\{\theta_j\}$  dans le modèle de Lieb-Liniger) [NP16]. En particulier, contrairement aux systèmes génériques, un système intégrable ne thermalise pas au sens canonique classique, car la présence de toutes ces contraintes empêche l'oubli des conditions initiales. Les points clés sont alors :

- **Charges conservées** : infinité de locales  $\hat{Q}_i$  satisfaisant et  $[\hat{Q}_i, \hat{H}] = 0$  et  $[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = 0$ .
- **Densités locales** : chaque  $\hat{Q}_i$  s'écrit  $\hat{Q}_i = \int_{\mathbb{R}} dx \hat{q}_i(x)$  avec  $\hat{q}_i(x)$  à support fini.
- **Relaxation non canonique** : après un *quench* (changement brutal de paramètre), le système évolue vers un état stationnaire qui n'est pas décrit par l'ensemble canonique habituel.

Pour décrire cet état, on introduit le **GGE** [Rig+07], qui montre qu'une « extension naturelle de l'ensemble de Gibbs aux systèmes intégrables » prédict correctement les valeurs moyennes des observables après relaxation. Formellement, pour une région finie du système  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ , on définit la matrice densité locale :

$$\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(\mathcal{S})} = \frac{1}{Z^{(\mathcal{S})}} \exp \left( - \sum_i \beta_i \hat{Q}_i^{(\mathcal{S})} \right), \quad \hat{Q}_i^{(\mathcal{S})} = \int_{\mathcal{S}} dx \hat{q}_i(x), \quad (2.2)$$

où  $\beta_i \in \mathbb{R}$  sont les multiplicateurs de Lagrange (ou « températures généralisées ») associés aux charges locales conservées  $\{\hat{Q}_i\}$ . La fonction de partition

$$Z^{(\mathcal{S})} = \text{Tr} \left[ \exp \left( - \sum_i \beta_i \hat{Q}_i^{(\mathcal{S})} \right) \right] \quad (2.3)$$

assure la normalisation. L'**état GGE** ainsi défini est le seul permettant de prédire de manière cohérente les observables locales de  $\mathcal{S}$  à long temps [NP16]. Autrement dit, l'équilibre local après quench est un état stationnaire faisant perdurer la mémoire de chaque charge conservée, ce qui conduit à un nombre minfini de paramètres  $\beta_i$  thermodynamiques (une « température » par charge) [Nar+17a].

*Interprétation des multiplicateurs de Lagrange.* Les multiplicateurs de Lagranges  $\beta_i$  apparaissent naturellement lors de la maximisation de l'entropie sous contraintes, par exemple dans le formalisme du **GGE**, où il imposent la conservation des valeurs moyennes des charges  $\langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} = \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)} \hat{Q}_i^{(S)}]$ .

En résumé, le **GGE** généralise les ensembles canoniques standard : au lieu de retenir uniquement l'énergie, on impose la conservation de l'ensemble complet  $\{\hat{Q}_i\}$ . Cette construction rend compte du fait que, dans un système intégrable, les observables locaux convergent vers les valeurs moyennes calculées par  $\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}$ , et non vers celles d'un Gibbs thermique ordinaire [NP16; Rig+07]. On comprend ainsi pourquoi la *thermalisation habituelle* (canonique ou microcanonique) échoue : seul l'ensemble de Gibbs généralisé peut intégrer toutes les contraintes locales.

**Rappel sur le modèle de LL et distribution de rapidités.** Comme rappelé au chapitre précédent, le **modèle de LL** (gaz bosonique 1D à interactions de contact) est un exemple paradigmatic d'un système intégrable [NP16]. Ses états propres sont caractérisés par un ensemble de  $N$  rapidités  $\{\theta_a\}$ , qui jouent le rôle de quasi-momenta (**Bethe ansatz**). Dans ce contexte, l'état macroscopique du gaz après relaxation unitaire est entièrement déterminé par la **distribution des rapidités**. Formellement, on définit  $\rho(\theta)$  la distribution intensive des rapidités telle que  $\rho(\theta)d\theta$  donne le nombre de particules par unité de longueur ayant une rapidité dans la cellule  $[\theta, \theta + d\theta]$ .

Cette **distribution de rapidités** est d'autant plus pertinente qu'elle est *accessible expérimentalement*. En effet, lorsque le gaz bosonique 1D est libéré et que l'on laisse s'étaler longitudinalement, la distribution asymptotique des vitesses des atomes coïncide avec la distribution initiale des rapidités [Nar+17a].

Dans le **GGE**, cette distribution macroscopique  $\rho(\theta)$  est fixée par l'ensemble des charges conservées. Par exemple, on ajuste les  $\beta_i$  de sorte que les valeurs moyennes  $\langle \hat{Q}_i \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}}$  correspondent aux valeurs initiales. Ce processus détermine donc la fonction  $\rho(\theta)$  décrivant l'état d'équilibre local. Les observables locaux du gaz (densité, corrélations, etc.) en découlent alors via les équations de Bethe ansatz.

## 2.1.2 Moyenne dans l'Équilibre de Gibbs Généralisé

**Convention pour les moyennes d'observables.** Dans la suite du chapitre, nous noterons la moyenne d'une observable  $\hat{O}$  dans un état décrit par une matrice densité (ici noté  $\hat{\rho}$ ) par :

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} \doteq \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{O}], \quad (2.4)$$

En particulier, si la matrice densité est un projecteur, comme  $|\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|$ ,

$$\text{Tr}[|\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}| \hat{O}] = \langle\{\theta_a\}| \hat{O} |\{\theta_a\}\rangle$$

. dans ce cas on notera la moyenne :

$$\langle \hat{O} \rangle_{\{\theta_a\}} = \langle\{\theta_a\}| \hat{O} |\{\theta_a\}\rangle, \quad (2.5)$$

où l'on note simplement l'ensemble des rapidité  $\theta_a$  pour désigner l'état pur.

**Charges conservées locales diagonales dans la base des états propres.** Les charges conservées locales  $\hat{Q}_i^{(S)}$  est diagonale dans la base des états propres  $|\{\theta_a\}\rangle$ , avec pour valeurs propres  $\langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\{\theta_a\}}$  :

$$\hat{Q}_i^{(S)} |\{\theta_a\}\rangle = \langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\{\theta_a\}} |\{\theta_a\}\rangle. \quad (2.6)$$

**Probabilité d'un état à rapidités fixées.** On peut alors définir la probabilité d'occurrence d'un état  $|\{\theta_a\}\rangle$  comme la moyenne de la matrice densité locale  $\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}$  définie dans (2.2) :

$$\mathbb{P}_{\{\theta_a\}}^{(S)} \equiv \langle \hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)} \rangle_{\{\theta_a\}}, \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{Z^{(S)}} \exp \left( - \sum_i \beta_i \langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\{\theta_a\}} \right). \quad (2.8)$$

**Moyenne d'un charges conservées locales et dérivées de  $Z^{(S)}$ .** Les charges locales  $\hat{Q}_i^{(S)}$  sont diagonale dans la bases  $\{\{\theta_a\}\}$  [cf eq (2.6)]. On peut donc écrire la moyenne d'une observable comme une somme pondérée par cette probabilité [cf eqs (2.7)-(2.8)], ou encore comme une dérivée de la fonction de partition définie dans l'équation (2.3) :

$$\langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\{\theta_a\}} \mathbb{P}_{\{\theta_a\}} \quad (2.9)$$

$$= - \frac{1}{Z^{(S)}} \frac{\partial Z^{(S)}}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \quad (2.10)$$

Par le même raisonnement le **moment non centré** s'écrit :

$$\langle \hat{Q}_{i_1}^{(S)} \hat{Q}_{i_2}^{(S)} \cdots \hat{Q}_{i_q}^{(S)} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} = (-1)^q \frac{1}{Z^{(S)}} \left. \frac{\partial}{\partial \beta_{i_1}} \right|_{\beta_{j \neq i_1}} \left. \frac{\partial}{\partial \beta_{i_2}} \right|_{\beta_{j \neq i_2}} \cdots \left. \frac{\partial}{\partial \beta_{i_q}} \right|_{\beta_{j \neq i_q}} Z^{(S)}. \quad (2.11)$$

**Moments d'ordre supérieur et fluctuations.** On s'avance sur le chapitre (4). Le premier et second moments permettent d'accéder à la variance

$$\left\langle \left( \hat{Q}_i^{(S)} - \langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} \right)^2 \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} = \langle (\hat{Q}_i^{(S)})^2 \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} - \langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}}^2 \quad (2.12)$$

de la charge locale  $\hat{Q}_i^{(S)}$ , en injectant (2.10) et (2.11) et en utilisant  $\frac{1}{f} \partial_x^2 f - (\frac{1}{f} \partial_x f) = \partial_x^2 \ln f$  :

$$\left\langle \left( \hat{Q}_i^{(S)} - \langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} \right)^2 \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} = \left. \frac{\partial^2 \ln Z^{(S)}}{\partial \beta_i^2} \right|_{\beta_{j \neq i}}, \quad (2.13)$$

$$= - \left. \frac{\partial \langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}}}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_{j \neq i}}. \quad (2.14)$$

**Cas particulier de l'équilibre thermique.** Dans le cas particulier de l'équilibre thermique standard (c'est-à-dire l'équilibre statistique de Gibbs), le système est décrit par une seule contrainte d'énergie (ou par les contraintes d'énergie et de nombre de particules, dans le cas grand canonique). Les multiplicateurs de Lagrange associés aux charges conservées s'identifient alors à des grandeurs thermodynamiques classiques.

- Si la seule charge conservée est le nombre de particules  $\hat{Q}_0^{(S)} = \hat{Q}$ , le multiplicateur associé est  $\beta_0 = -\beta\mu$ , où  $\mu$  est le potentiel chimique et  $\beta = (k_B T)^{-1}$  l'inverse de la température (avec  $k_B = 1$ ).
- Si la charge conservée est  $\hat{Q}_2^{(S)} - \mu \hat{Q}_0^{(S)} = \hat{H} - \mu \hat{Q}$  (ensemble grand canonique), alors le multiplicateur est simplement  $\beta$ .

Dans le cadre de l'équilibre thermique, les moyennes et les fluctuations thermodynamiques usuelles s'expriment naturellement comme dérivées du logarithme de la fonction de partition  $Z^{(S)}$  :

$$\langle \hat{Q} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z^{(S)}}{\partial \mu} \Big|_\beta, \quad \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \hat{Q} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}}}{\partial \mu} \Big|_\beta = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z^{(S)}}{\partial \mu^2} \Big|_\beta \quad (2.15)$$

$$\langle \hat{H} - \mu \hat{Q} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} = - \frac{\partial \ln Z^{(S)}}{\partial \beta} \Big|_\mu, \quad - \frac{\partial \langle \hat{H} - \mu \hat{Q} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}}}{\partial \beta} \Big|_\mu = \frac{\partial^2 \ln Z^{(S)}}{\partial \beta^2} \Big|_\mu. \quad (2.16)$$

En combinant ces relations, on peut également exprimer l'énergie moyenne et ses fluctuations comme :

$$\langle \hat{H} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_\mu \right] \ln Z^{(S)}, \quad - \frac{\partial \langle \hat{H} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}}}{\partial \beta} \Big|_{-\mu \beta} = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_\mu \right]^2 \ln Z^{(S)}. \quad (2.17)$$

### 2.1.3 Rôle des charges conservées extensives et quasi-locales

**Écriture des observables thermodynamiques comme sommes sur les rapidités.** Dans un système à  $N$  particules caractérisé par des rapidités  $\{\theta_a\}_{a=1}^N$ , les charges conservées classiques — telles que le nombre de particules, l'impulsion ou l'énergie — s'écrivent comme des sommes de puissances des rapidités :  $\langle \hat{Q} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^0$ ,  $\langle \hat{P} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^1$ , et  $\langle \hat{H} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^2$ . (cf. équations (2.1)) Dans ce paragraphe précédent, nous avons sous-entendu — sans l'expliciter — qu'il est montré que l'ensemble des charges locales conservées forme une famille donnée par :

$$\hat{Q}_i^{(S)} |\{\theta_a\}\rangle \propto \sum_a \theta_a^i |\{\theta_a\}\rangle. \quad (2.18)$$

Ces charges agissent donc de manière diagonale sur les états de Bethe, avec des valeurs propres correspondant aux moments des rapidités.

**Charges locales conservées.** À toute fonction régulière  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on associe un opérateur-charge local :

$$\hat{Q}^{(S)}[f] = L^{(S)} \int d\theta f(\theta) \hat{\rho}^{(S)}(\theta). \quad (2.19)$$

où  $L^{(S)}$  est la taille du support  $S$  et  $\hat{\rho}^{(S)}(\theta)$  agit sur une état de Bethe comme

$$\hat{\rho}^{(S)}(\theta) |\{\theta_a\}\rangle = \frac{1}{L^{(S)}} \sum_{a=1}^N \delta(\theta - \theta_a) |\{\theta_a\}\rangle. \quad (2.20)$$

De sorte que  $\hat{Q}^{(S)}[f]$  agit sur une état de Bethe comme

$$\hat{Q}^{(S)}[f] |\{\theta_a\}\rangle = \sum_{a=1}^N f(\theta_a) |\{\theta_a\}\rangle \quad \text{de sorte que} \quad \langle \hat{Q}^{(S)}[f] \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^N f(\theta_a) \quad (2.21)$$

Les choix particuliers  $f_0(\theta) = 1$ ,  $f_1(\theta) = \theta$  et  $f_2(\theta) = \theta^2/2$  redonnent respectivement l'opérateur nombre  $\hat{Q} = \hat{Q}_0^{(S)} = \hat{Q}^{(S)}[1]$ , impulsion  $\hat{P} = \hat{Q}_1^{(S)} = \hat{Q}^{(S)}[\theta]$  et énergie  $\hat{H} = \hat{Q}_2^{(S)} = \hat{Q}^{(S)}[\theta^2/2]$ . Et dans le cadre des (GGE), pour tous les ordres  $i$  on note :

$$\hat{Q}_i^{(S)} = \hat{Q}^{(S)}[f_i], \quad \text{de sorte que} \quad \langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^N f_i(\theta_a) \quad (2.22)$$

avec les densités spectrales  $f_i(\theta) \propto \theta^i$ .

Ces charges conservées peuvent s'écrire sous la forme fonctionnelle  $\hat{Q}^{(S)}[f] = \int_0^L dx \hat{q}_{[f]}^{(S)}(x)$ , où la densité associée  $\hat{q}_{[f]}^{(S)}$  est une observable locale.

**Charges conservées généralisées.** Les fonctions  $f_i$  étant fixées, on note la fonction régulière  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — dorénavant appelée *poids spectral*, ou *potentiel spectral* —

$$w = \sum_i \beta_i f_i, \quad (2.23)$$

on associe un opérateur-charge généralisé  $\hat{Q}^{(S)}[w]$  :

$$\hat{Q}^{(S)}[w] |\{\theta_a\}\rangle = \sum_{a=1}^N w(\theta_a) |\{\theta_a\}\rangle \quad \text{de sorte que} \quad \langle \hat{Q}^{(S)}[w] \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_i \beta_i \langle \hat{Q}_i^{(S)} \rangle_{\{\theta_a\}} \quad (2.24)$$

**Expression de la matrice densité généralisée.** Dans le cas des modèles intégrables traités par le Bethe Ansatz, il est toutefois plus pratique de réécrire cette matrice densité  $\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}$  de (2.2) en termes du *poids spectral*  $w(\theta)$  introduit en (2.23). On obtient alors :

$$\hat{\rho}^{(S)}[w] = \frac{e^{-\hat{Q}^{(S)}[w]}}{Z^{(S)}[w]}, \text{ avec } e^{-\hat{Q}^{(S)}[w]} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)} |\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|, \quad (2.25)$$

et la fonction de partition (2.3) s'écrit  $Z^{(S)}[w] \doteq \mathbf{Tr} \left[ e^{-\hat{Q}^{(S)}[w]} \right]$  *vieux*

$$Z^{(S)}[w] = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}. \quad (2.26)$$

**Probabilité associée à une configuration de rapidités.** Dans ce formalisme, la probabilité d'occuper l'état  $|\{\theta\}\rangle$  (2.7) est donc

$$\mathbb{P}_{\{\theta_a\}}^{(S)} = Z^{(S)}[w]^{-1} e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}. \quad (2.27)$$

On voit ainsi que le poids statistique factorise naturellement sur les pseudo-moments, chaque particule étant pondérée par  $w(\theta_a)$ .

**Moyennes d'observables dans le GGE.** Pour tout opérateur local  $\hat{O}$  diagonal dans la base de Bethe, la moyenne généralisée vaut

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}^{(S)}[w]} = \frac{\sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{O} \rangle_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}}{\sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}} \quad (2.28)$$

Ainsi, la connaissance de la fonction  $w(\theta)$  suffit à déterminer les propriétés statistiques de toute observable diagonale, y compris les charges conservées elles-mêmes.

**Conclusion de la section : vers la thermodynamique de Bethe.** Nous avons vu que, dans un système intégrable, la description correcte de l'équilibre stationnaire ne peut se limiter aux seules constantes de mouvement usuelles, telles que l'énergie ou l'impulsion. Elle requiert l'introduction d'une *famille infinie de charges conservées*, qui forment la structure intégrable du modèle. Ces charges comprennent à la fois des charges strictement locales, construites comme des intégrales de densités dépendant d'un nombre fini de sites ou de points de l'espace, et des charges dites quasi-locales, dont la densité est faiblement non locale mais reste suffisamment bien définie pour jouer un rôle physique. L'ensemble de ces charges constraint fortement la dynamique et empêche la thermalisation au sens usuel (c'est-à-dire vers l'ensemble canonique ou microcanonique). La relaxation vers l'équilibre se fait alors vers un état stationnaire généralisé, décrit par le **GGE**, où chaque charge conservée intervient avec son propre multiplicateur de Lagrange.

Toutes ces charges se réunissent dans l'opérateur fonctionnel  $\hat{Q}^{(S)}[w]$ , défini par un *poids spectral*  $w(\theta)$  (cf. équations (2.21)). Cette construction conduit naturellement à la matrice densité généralisée  $\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)} \propto e^{-\hat{Q}^{(S)}[w]}$  (cf. équations (2.25)), et à la moyenne d'un opérateur local  $\hat{O}$  donnée par  $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}} = \mathbf{Tr}(\hat{O} \hat{\rho}^{(S)}[w])$  (cf. équations (2.28)). La connaissance de  $w(\theta)$  suffit donc pour prédire les valeurs moyennes de toutes les observables, y compris celles des charges elles-mêmes ; c'est le cœur du **GGE**.

Cette base est désormais posée : dans la section suivante, nous passerons à la **TBA**. Nous verrons comment, dans la limite thermodynamique, les sommes sur les configurations de rapidités se transforment en intégrales sur des fonctions continues, comment apparaît l'entropie de Yang-Yang, et comment les moyennes de l'ensemble généralisé se réexpriment à l'aide de ces densités macroscopiques. C'est ce formalisme qui permettra d'analyser finement la relaxation post-quench et de relier microscopie intégrable et hydrodynamique généralisée.

## 2.2 Thermodynamique de Bethe et relaxation

### 2.2.1 Moyenne dans la limite thermodynamique

**Observables locales dans la limite thermodynamique.** Dans la suite de ce chapitre, nous omettrons l'exposant ( $S$ ).

Dans la base des états de Bethe  $\{|\{\theta_a\}\rangle\}$ , l'opérateur  $\hat{\rho}(\theta)$  défini en (2.20) est diagonal, et ses valeurs propres correspondent aux **distributions de rapidité** associées à chaque état de Bethe.

Dans la limite thermodynamique, différentes configurations microscopiques  $\{\theta_a\}$  peuvent correspondre à la même distribution de rapidité macroscopique  $\rho(\theta)$ . Autrement dit, plusieurs états  $|\{\theta_a\}\rangle$  partagent la même valeur propre  $\rho(\theta)$  de l'opérateur  $\hat{\rho}(\theta)$ . Cela reflète une *dégénérescence macroscopique* induite par le passage à la limite thermodynamique ( $N, L \rightarrow \infty$  avec  $N/L \rightarrow \text{const}$ ).

Si l'observable  $O$  est suffisamment locale, sa valeur d'attente dans un état propre ne dépend pas des détails microscopiques, mais uniquement de la distribution de rapidité. On écrit alors :

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \hat{O} \rangle_{\{\theta_a\}} = \langle \hat{O} \rangle_{[\rho]}, \quad (2.29)$$

où  $\lim_{\text{therm.}}$  est la limite thermodynamique ( $N, L \rightarrow \infty$  avec  $N/L \rightarrow \text{const}$ ) et où  $\langle O \rangle_{[\rho]}$  désigne la valeur d'attente de  $O$  dans un état macroscopique caractérisé par la distribution de rapidité  $\rho(\theta)$ .

Dans un ensemble général (GGE), la valeur moyenne de l'observable (2.28) devient alors :

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\varrho}[w]} = \frac{\sum_{\rho} \langle \hat{O} \rangle_{[\rho]} \Omega[\rho] e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}}{\sum_{\rho} \Omega[\rho] e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}}, \quad (2.30)$$

où  $\sum_{\rho}$  est une somme ~~sus~~ tous les distribution de rapidité  $\rho$  et où  $\Omega[\rho]$  désigne le nombre de micro-états compatibles avec la distribution de rapidité  $\rho$ .

Pour établir la fonction  $\Omega[\rho]$ , rappelons-nous de la transformation des équations de Bethe dans la limite thermodynamique, hors état fondamental (1.90) et (1.92).

$$\nu = \frac{\rho}{\rho_s}, \quad 2\pi\rho_s = 1_{[\nu]}^{\text{dr}} \quad (2.31)$$

où  $f_{[\nu]}^{\text{dr}}$  est définie en (1.91).

Cette formalisation constitue la brique de base de la **hydrodynamique généralisée** et, dans la section suivante, permet de définir rigoureusement l'**entropie de Yang-Yang**, indispensable pour décrire la relaxation hors d'équilibre des systèmes intégrables.

### 2.2.2 Statistique des macro-états : entropie de Yang-Yang

**Motivation.** Dans la limite thermodynamique, une observable locale dans un GGE dépend uniquement d'un objet continu : le **poids spectral**  $w(\theta)$ , c'est-à-dire la « température généralisée » assignée à chaque quasi-particule.

Le **poids spectral**  $w(\theta)$  est en correspondance bijective avec la **distribution de rapidité à l'équilibre** :

$$\rho_{\text{eq}}(\theta) \doteq \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_{\hat{\varrho}[w]}, \quad (2.32)$$

Cette reformulation est particulièrement puissante car elle permet de décrire les propriétés locales du système sans se référer aux détails d'un état propre individuel.

Les travaux pionniers de YANG & YANG (1969) [YY69] ont fourni la justification de cette approche. Leur méthode repose sur l'analyse statistique des états propres partageant la même distribution  $\rho(\theta)$ , montrant ainsi comment la structure microscopique des états peut se traduire en une description thermodynamique complète.

**Distribution de rapidité comme macro-état.** Chaque distribution de rapidité  $\rho(\theta)$  ne correspond pas à un état propre unique, mais à un grand **ensemble de micro-états** : différents choix des ensembles de quasi-moments  $(\{\theta_a\}_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket})_{N \in \mathbb{N}^*}$  peuvent conduire à la même densité de rapidité à l'échelle macroscopique. Ainsi,  $\rho(\theta)$  doit être interprétée comme un **macro-état**, qui agrège un très grand nombre d'états propres microscopiques.

La question thermodynamique devient alors : **Combien de micro-états microscopiquement distincts sont compatibles avec un même macro-état de distribution de rapidité  $\rho(\theta)$  ?**

Plus précisément, dans l'expression de moyenne des opérateurs locaux (2.30), apparaît le facteur  $\Omega[\rho]$ , qui compte ces états propres. La détermination de  $\Omega[\rho]$  (ou équivalement de l'entropie de Yang–Yang  $S_{YY}[\rho]$  car  $\Omega[\rho] = e^{L S_{YY}[\rho]}$  avec  $L$  la taille du système) est donc la clé pour relier (i) le poids spectral  $w(\theta)$  imposé dans le GGE et (ii) la distribution de rapidité moyenne  $\rho_{eq}(\theta)$  observée à l'équilibre.

**Dénombrement local des configurations microcanoniques.** Pour répondre à cette question, on subdivise l'axe des rapidités en petites tranches ou cellules de largeur  $\delta\theta$ , chacune centrée en un point  $\theta_a$ . Dans une tranche  $[\theta_a, \theta_a + \delta\theta]$ , on suppose que la densité  $\rho(\theta)$  est à peu près constante. Le nombre de quasi-particules dans cette tranche est alors approximativement :

$$N_a = L\rho(\theta_a)\delta\theta,$$

et le nombre total d'états disponibles (*i.e.*, le nombre d'états possibles si toutes les positions en moment étaient disponibles) est donné par la densité totale de niveaux

$$M_a = L\rho_s(\theta_a)\delta\theta.$$

Les particules occupent ces niveaux de manière analogue à des fermions libres (principe d'exclusion de Pauli), le nombre de manières différentes de choisir  $N_a$  niveaux parmi  $M_a$  (Fig 2.1) est donné par :

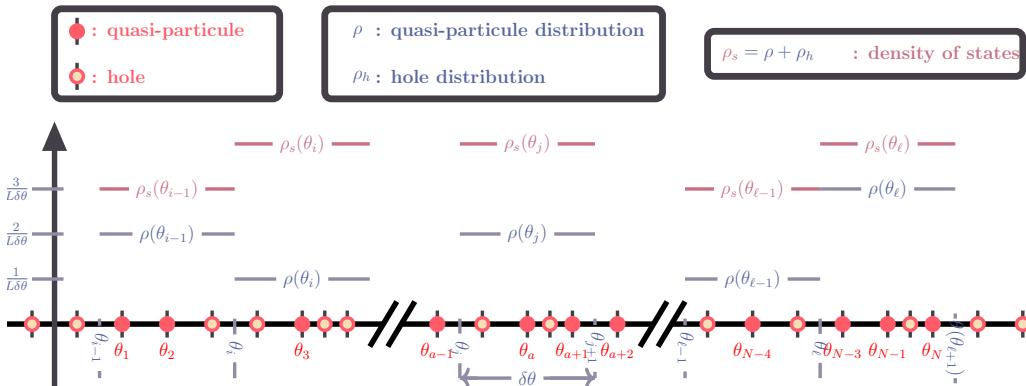


FIGURE 2.1 – Schéma illustrant la discréttisation de l'espace des rapidités en cellules de largeur  $\delta\theta$ .

$$\Omega(\theta_a) \approx \binom{M_a}{N_a} = \frac{[L\rho_s(\theta)\delta\theta]!}{[L\rho(\theta)\delta\theta]![L(\rho_s(\theta) - L\rho(\theta))\delta\theta]!}. \quad (2.33)$$

**Estimation asymptotique à l'aide de Stirling.** En utilisant la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad (2.34)$$

composé avec la fonction logarithmique, on obtient :

$$\ln n! \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} n \ln n - \underbrace{n + \ln \sqrt{2\pi n}}_{o(n \ln n)}, \quad (2.35)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n \quad (2.36)$$

$\Omega(\theta)$  est jamais null donc on peut approximer, pour de grandes valeurs de  $L$  :

$$\ln \Omega(\theta) \underset{\substack{L\rho \delta\theta \rightarrow \infty \\ \rho(\theta) \leq \rho_s(\theta)}}{\sim} L[\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho)](\theta) \delta\theta. \quad (2.37)$$

Cette expression donne la contribution à l'**entropie** associée à la cellule autour de  $\theta_a$  de taille  $\delta\theta$ .

**Entropie de Yang-Yang : définition .** Le nombre total de micro-états compatibles avec une distribution macroscopique donnée  $\rho(\theta)$  est obtenu en prenant le produit des nombres de configurations pour chaque cellule de rapidité  $[\theta_a, \theta_a + \delta\theta] : \Omega(\theta_a)$ . En prenant le logarithme de ce produit, on accède à l'entropie totale. Pour alléger la notation, cette somme sur les cellules est notée  $\sum_a^{\theta-\text{cellules}}$  où chaque  $a$  indexe une cellule de rapidité  $[\theta_a, \theta_a + \delta\theta]$ . On écrit alors :

$$\ln \Omega[\rho] = \sum_a^{\theta-\text{cellules}} \ln \Omega(\theta_a), \quad (2.38)$$

$$\approx L S_{YY}[\rho], \quad (2.39)$$

où l'on définit l'**entropie de Yang-Yang** par unité de longueur, par la formule discrétisée :

$$S_{YY}[\rho] \doteq \sum_a^{\theta-\text{cellules}} [\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho)](\theta_a) \delta\theta. \quad (2.40)$$

**Énergie généralisée par unité de longueur : définition.** L'**énergie généralisée** associée à une distribution de rapidité  $\rho(\theta)$  et à un poids spectral  $w(\theta)$  est définie comme la somme des poids assignés à chaque quasi-particule. Dans la limite thermodynamique, en supposant que  $w(\theta)$  varie lentement sur chaque tranche  $[\theta_a, \theta_a + \delta\theta]$ , cette somme soit l'**énergie généralisée par unité de longueur**  $\mathcal{W}$  se définit par :

$$\mathcal{W}(\{\theta_a\}) \doteq \frac{1}{L} \sum_{a=1}^N w(\theta_a) \underset{\text{therm.}}{\sim} \mathcal{W}[\rho] \doteq \sum_a^{\theta-\text{cellules}} w(\theta_a) \rho(\theta_a) \delta\theta. \quad (2.41)$$

**Moyenne des Observables locales dans la limite thermodynamique.** Dans un ensemble général (GGE), la valeur moyenne de l'observable (2.30) devient :

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}[w]} \approx \frac{\sum_{\rho} \langle \hat{O} \rangle_{[\rho]} e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}}{\sum_{\rho} e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}}, \quad (2.42)$$

où la somme  $\sum \rho$  porte sur toutes les distributions possibles de rapidité  $\rho$

**Passage à la limite continue.** En faisant tendre  $\delta\theta \rightarrow 0$ , les sommes deviennent des intégrales et l'entropie de Yang-Yang ainsi que l'énergie généralisée par unité de longueur prennent la forme :

$$S_{YY}[\rho] = \int d\theta [\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho)](\theta), \quad (2.43)$$

$$\mathcal{W}[\rho] = \int w(\theta) \rho(\theta) d\theta \quad (2.44)$$

**Formule fonctionnelle pour les moyennes.** Dans la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ , la somme sur les distributions de rapidité  $\rho$  admissibles peut être approximée par une intégrale fonctionnelle sur l'espace des densités de rapidité continues, munie d'une mesure fonctionnelle  $\mathcal{D}\rho : \sum_{\rho} \sim \int \mathcal{D}\rho$ . Cette correspondance repose sur l'idée que les macro-états admissibles deviennent denses dans l'espace fonctionnel, et que le poids statistique associé à chaque configuration est donné par l'entropie de Yang-Yang. La mesure fonctionnelle  $\mathcal{D}\rho$  parcourt l'espace des densités  $\rho(\theta)$  continues, *chaque configuration étant pondérée par le facteur*

exponentiel  $e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}$ . Finalement, la moyenne d'une observable dans le **GGE** (2.42) s'écrit comme une intégrale fonctionnelle/de chemin :

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\varrho}[w]} = \frac{\int \mathcal{D}\rho e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\rho]}}{\int \mathcal{D}\rho e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}}. \quad (2.45)$$

### Interprétation thermodynamique.

- $S_{YY}[\rho]$  compte le logarithme du nombre de micro-états par unité de longueur associé à la distribution  $\rho(\theta)$  : c'est l'**entropie combinatoire**.
- $\mathcal{W}[\rho]$  mesure le *coût énergétique généralisé* associé à cette distribution, dicté par le poids spectral  $w(\theta)$ .

Leur différence

$$(S_{YY} - \mathcal{W})[\rho] \quad \text{énergie} \quad (2.46)$$

joue donc le rôle d'une *fonction thermodynamique effective* (analogue à une *entropie libre*). L'exposant  $e^{L(S_{YY} - \mathcal{W})[\rho]}$  fixe la **probabilité relative** d'un macro-état  $\rho(\theta)$  dans le GGE : le terme entropique favorise les états, tandis que le terme énergétique pénalise les configurations coûteuses — d'où la compétition caractéristique de l'équilibre statistique.

### 2.2.3 Équations intégrales de la TBA

**Approximation au point selle (« méthode de la selle statique »)** Dans la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ , l'intégrale (2.45) est dominée par la configuration  $\rho_{eq}$  qui maximise le poids exponentiel  $e^{L(S_{YY} - \mathcal{W})[\rho]}$  dans l'expression (2.45). Il s'agit de la densité de rapidité la plus probable, solution d'un problème de maximisation. On obtient à l'ordre principal

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\hat{\varrho}[w]} \approx \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\rho_{eq}]}, \quad (2.47)$$

où  $\rho_{eq}$  est la distribution de rapidité à l'équilibre (2.32). Cette approximation correspond à une méthode de *selle statique*, où l'on développe la *fonction thermodynamique effective*,  $S_{YY} - \mathcal{W}$  au voisinage de la distribution dominante.

**Dérivée fonctionnelle comme dérivée directionnelle.** Dans le cadre des systèmes continus, les observables physiques dépendent souvent d'un champ  $\phi(x)$ , et sont représentées par des *fonctionnelles*, notées  $F[\phi]$ . Afin d'étudier la sensibilité de ces fonctionnelles à une variation infinitésimale du champ, on introduit la notion de **dérivée fonctionnelle**, définie par analogie avec la dérivée directionnelle en espace vectoriel de dimension finie.

Considérons une variation infinitésimale du champ de la forme  $\phi(x) \mapsto \phi(x) + \epsilon \lambda(x)$ , où  $\lambda(x)$  est une fonction test lisse de support compact. La variation induite sur la fonctionnelle est donnée par :

$$\mathcal{D}_{[\lambda]} F[\phi] \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \epsilon \lambda] - F[\phi]}{\epsilon} \quad (2.48)$$

La quantité  $\mathcal{D}_{[\lambda]} F[\phi]$  est linéaire en  $\lambda(x)$ , et peut donc s'écrire sous forme d'un produit scalaire dans l'espace fonctionnel :

$$\mathcal{D}_{[\lambda]} F[\phi] = \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \lambda(x) \quad (2.49)$$

La fonction  $\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)}$  est appelée **dérivée fonctionnelle** de  $F[\phi]$  au point  $x$ . Elle joue un rôle analogue au gradient dans les espaces de dimension finie, en ce qu'elle encode la variation de  $F[\phi]$  sous une perturbation infinitésimale du champ au point  $x$ .

On peut interpréter la dérivée fonctionnelle  $\delta F[\phi]/\delta \phi(x)$  comme le résultat de la dérivation directionnelle de  $F[\phi]$  dans la direction de la distribution  $\delta(x - x_0)$ , qui représente une perturbation localisée du champ au point  $x_0$  :

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} F[\phi + \epsilon \delta(x - x_0)] \right|_{\epsilon=0} = \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x_0)} \quad (2.50)$$

Cette construction générale sera utilisée dans la suite pour formuler des conditions d'extremum (par exemple dans des principes variationnels), ou pour dériver les équations de mouvement associées à une action.

**Développement fonctionnel au premier ordre.** Écrivons  $\rho = \rho_{\text{eq}} + \delta\rho$  et développons  $(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W})[\rho]$  à l'ordre linéaire :

$$(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W})[\rho] \approx (\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W})[\rho_{\text{eq}}] + \mathcal{D}_{[\delta\rho]}(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W})[\rho_{\text{eq}}] + \mathcal{O}(\delta\rho^2),$$

La condition de stationnarité au point selle impose :  $\mathcal{D}_{[\delta\rho]}(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W})[\rho_{\text{eq}}] = 0$  soit

$$\mathcal{D}_{[\delta\rho]}\mathcal{S}_{YY}[\rho_{\text{eq}}] = \mathcal{D}_{[\delta\rho]}\mathcal{W}[\rho_{\text{eq}}]. \quad (2.51)$$

**Équation intégrale de la TBA.** La condition de stationnarité au point selle  $\rho = \rho_{\text{eq}}$  (2.51) réécrit de la forme de produit scalaire (2.49) implique que pour tous  $\theta$  :

$$\frac{\delta\mathcal{S}_{YY}[\rho_{\text{eq}}]}{\delta\rho(\theta)} = \frac{\delta\mathcal{W}[\rho_{\text{eq}}]}{\delta\rho(\theta)}, \quad (2.52)$$

et la forme de l'*énergie généralisée* (2.44) et le rappel (2.50) impliquent que le second membre de l'équation précédente (2.52) est

$$\frac{\delta\mathcal{W}[\rho_{\text{eq}}]}{\delta\rho(\theta)} = w(\theta). \quad (2.53)$$

Ainsi (2.52) se réécrit en

$$\frac{\delta\mathcal{S}_{YY}[\rho_{\text{eq}}]}{\delta\rho(\theta)} = w(\theta), \quad (2.54)$$

En utilisant l'expression explicite de l'entropie de Yang–Yang (2.43), on obtient l'identité fonctionnelle

$$w = \ln(\nu_{\text{eq}}^{-1} - 1) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln(1 - \nu_{\text{eq}}). \quad (2.55)$$

où  $\nu_{\text{eq}} = \rho_{\text{eq}}/\rho_{s,\text{eq}}$  est le **facteur d'occupation** à l'équilibre.

**Forme pseudo-énergie.** La **pseudo-énergie**  $\epsilon$  se donne alors par la statistique de type Fermi-Dirac

$$\epsilon = \ln(\nu_{\text{eq}}^{-1} - 1), \quad \nu_{\text{eq}} = \frac{1}{1 + e^\epsilon}. \quad (2.56)$$

En réinjectant (2.56) dans (2.55) on obtient l'équation intégrale canonique de la thermodynamique de Bethe :

$$\epsilon = w - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln(1 + e^{-\epsilon}). \quad (2.57)$$

Les relations (2.56)–(2.57) déterminent de façon univoque la distribution de rapidité d'équilibre  $\rho_{\text{eq}}$  à partir du poids spectral  $w$ , caractéristique du **GGE**.

Ainsi, la méthode du point selle relie *explicitement* le *poids spectral*,  $w$  (caractéristique du GGE) au *macro-état le plus probable*,  $\rho_{\text{eq}}$ , et permet d'évaluer les observables par la formule d'ensemble (2.47).

**Résolution numérique de l'équation TBA.** Prenons un poids spectral quelconque, par exemple :

$$w(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2. \quad (2.58)$$

En injectant  $w$  dans l'équation intégrale pour la pseudo-énergie (2.57), on obtient l'équation non linéaire. Cette équation définit un opérateur contractant sur l'espace des fonctions  $\epsilon(\theta)$ ; son Jacobien a une norme strictement inférieure à 1, garantissant la convergence de l'itération de Picard.

*Algorithme d'itération.* La structure contractante de l'équation garantit l'absence de cycles ou de points fixes multiples, assurant la convergence de l'itération vers l'unique solution admissible. L'équation ?? est non linéaire ; pour la résoudre numériquement, on utilise une méthode itérative de type Picard. On initialise  $\epsilon_0 = w$ , puis on construit une suite de fonctions  $\epsilon_n$  définie par

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_0 - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln(1 + e^{-\epsilon_n}), \quad n \geq 0 \quad (2.59)$$

L'itération est poursuivie jusqu'à convergence, que l'on peut tester via le critère numérique  $\beta \|\epsilon_{n+1} - \epsilon_n\|_\infty < 10^{-12}$ , où  $\|\cdot\|_\infty$  désigne la norme  $L^\infty$  (ou un maximum discret après discréétisation). 2.57

*Facteur d'occupation et densités.* Une fois l'itération (2.59) convergée vers la **pseudo-énergie**  $\epsilon(\theta)$ , le facteur d'occupation à l'équilibre est déterminé en substituant  $\epsilon(\theta)$  dans l'équation (2.56), ce qui fournit  $\nu_{\text{eq}}$ .

On en déduit ensuite la densité d'état à l'équilibre  $\rho_{s,\text{eq}}$  via le **dressing** de la fonction constante  $f(\theta) = 1$ , selon (1.92), rappelée ici pour mémoire :  $2\pi\rho_{s,\text{eq}} = 1^{\text{dr}}_{[\nu_{\text{eq}}]}$ .

L'opérateur de dressing (1.91) étant linéaire, il se résout numériquement sous la forme :

$$\left\{ \text{id} - \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu * \cdot) \right\} f_{[\nu]}^{\text{dr}} = f,$$

où  $\text{id}: f \mapsto f$  est l'identité fonctionnelle, et  $*$  désigne la multiplication. Après discréétisation de la variable  $\theta$ , cette équation devient un système linéaire de type  $Ax = b$ , facilement résoluble numériquement.

La distribution de rapidité est alors obtenue par  $\rho_{\text{eq}} = \nu_{\text{eq}} * \rho_{s,\text{eq}}$ .

Ainsi en fixant le poids spectral  $w(\theta)$ , l'algorithme fournit la pseudo-énergie  $\epsilon$ , le facteur d'occupation  $\nu_{\text{eq}}$  et la distribution de rapidité  $\rho_{\text{eq}}$  (Fig 2.2).

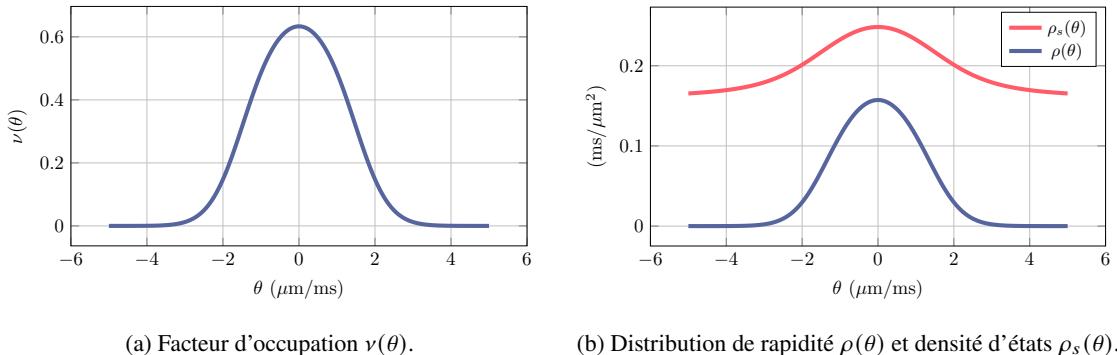


FIGURE 2.2 – Représentation spectrale pour le poids  $w(\theta) = \theta^2/2$ , avec  $\hbar = m = q = 1$ . (a) Facteur d'occupation  $\nu(\theta)$ . (b) Distribution de rapidité  $\rho(\theta)$  et densité d'états  $\rho_s(\theta)$ .

### 2.2.3.1 Équilibre thermique

**État fondamental.** À l'état fondamental, le facteur d'occupation vaut

$$\nu(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [-\theta_{\max}, \theta_{\max}], \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.60)$$

où  $\theta_{\max}$  dépend de la densité du système. La distribution de rapidités à l'état fondamental peut alors être obtenue à partir des équations constitutives de Lieb [LL63]. Cette distribution ne dépend que d'un paramètre adimensionné, appelé *paramètre de Lieb* :

$$\gamma = \frac{mg}{\hbar^2 n}, \quad (2.61)$$

avec  $g$  le paramètre d'interaction 1D et  $n$  la densité linéique du gaz.

En fonction de  $\gamma$ , deux régimes limites apparaissent :

- **Régime de Tonks-Girardeau** : ce régime correspond à des interactions fortes,  $\gamma \rightarrow \infty$  (ou  $g \rightarrow \infty$ , densité faible). Dans ce cas, la distribution de rapidités ressemble à une *mer de Fermi*.
- **Régime de quasi Bose-Einstein Condensate (qBEC)** : pour  $\gamma \ll 1$ , les interactions sont faibles et la distribution de rapidités se déforme par rapport à la mer de Fermi. Dans la limite  $\gamma \rightarrow 0$ , la distribution attendue est un demi-cercle [LL63] :

$$\rho(\theta) = \frac{n}{\pi c} \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2c}\right)^2}, \quad c = \sqrt{gn/m}. \quad (2.62)$$

Pour des  $\gamma$  petits mais non nuls, la distribution est proche du demi-cercle mais présente une discontinuité aux bords, comme illustré sur la Fig. 2.3.

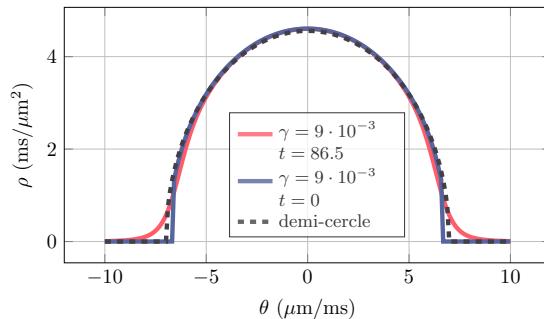


FIGURE 2.3 – Distributions de rapidités pour différents paramètres de Lieb  $\gamma$  et différentes températures  $T$ . Distribution dans le régime de faible interaction ( $\gamma \ll 1$ ) : le demi-cercle gris représente la distribution attendue pour  $\gamma \rightarrow 0$ , tandis que le profil bleu correspond à  $\gamma$  petit mais non nul, montrant une discontinuité aux extrémités. La distribution jaune illustre l'état excité au-delà de l'état fondamental, avec apparition d'ailes aux extrémités.

### Diagramme des régimes du gaz de Lieb-Liniger.

*Paramètres fixés.* Dans le cas de l'équilibre thermique usuel (ensemble de Gibbs), seules deux charges sont conservées : le **nombre total de particules**  $\hat{Q}[f_0]$  et l'**énergie totale**  $\hat{Q}[f_2]$ . Cela correspond au choix suivant :

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= 1, && \text{(densité de particules)} \\ f_2(\theta) &= \frac{1}{2}m\theta^2, && \text{(densité d'énergie } \varepsilon \text{)} \end{aligned}$$

les coefficients de Lagrange associés sont :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\beta\mu, && \text{(potentiel chimique)} \\ \beta_2 &= \beta, && \text{(inverse de la température),} \end{aligned}$$

avec  $\beta = 1/(k_B T)$  et  $k_B$  constante de Boltzmann.

Le poids spectral s'écrit comme une combinaison linéaire :

$$w(\theta) = \beta_0 f_0(\theta) + \beta_2 f_2(\theta), \quad (2.63)$$

où  $f_i(\theta)$  sont les densités locales associées aux charges conservées.

Les densités locales  $f_i$  sont fixées. Pour spécifier le *poids spectral*  $w$ , on choisit les coefficients de Lagrange  $\beta_0$  et  $\beta_2$  en imposant une température  $T$  et un potentiel chimique  $\mu$ .

À l'équilibre thermique, les propriétés du système ne dépendent pas uniquement du paramètre de Lieb  $\gamma$ , mais également de la température  $T$ , que l'on peut rendre adimensionnelle via le paramètre :

$$t = \frac{k_B T}{mg^2/\hbar^2}. \quad (2.64)$$

La densité linéaire  $n$  ne paramétrise pas directement le poids spectral  $w$  (4.61), mais est liée au potentiel chimique  $\mu$  via :

$$Ln = \langle \hat{Q}[f_0] \rangle_w \left( = \int d\theta \rho_{\text{eq}}(\theta) \right). \quad (2.65)$$

C'est ainsi que les simulations numériques seront effectuées en utilisant  $\gamma$  et  $t$ .

Un exemple de ce profil avec ( $\gamma = 9 \cdot 10^{-3}$ ,  $t = 86.5$ ) est représenté sur la Fig. 2.3

Pour synthétiser les différents comportements, les régimes principaux peuvent être représentés dans le plan  $(\gamma, t)$ . Le diagramme de la Fig. 2.4 distingue trois zones : gaz de Bose idéal, gaz de Tonks-Girardeau et qBEC. Les courbes qui délimitent ces zones correspondent à des conditions analytiques sur  $\gamma$  et  $t$ , par exemple  $\gamma^{3/2}t = 1$ ,  $\gamma^2t = 1$  et  $\gamma t = 1$ . Il ne s'agit pas de transitions de phase, mais de cross-over entre régimes asymptotiques. Les expériences sur puce atomique du LCF ont permis d'étudier ces régimes. La plupart des résultats présentés dans cette thèse correspondent à  $\gamma \sim 0.9 \times 10^{-2}$ . La zone grise indique la gamme de paramètres expérimentaux explorés pendant cette thèse.

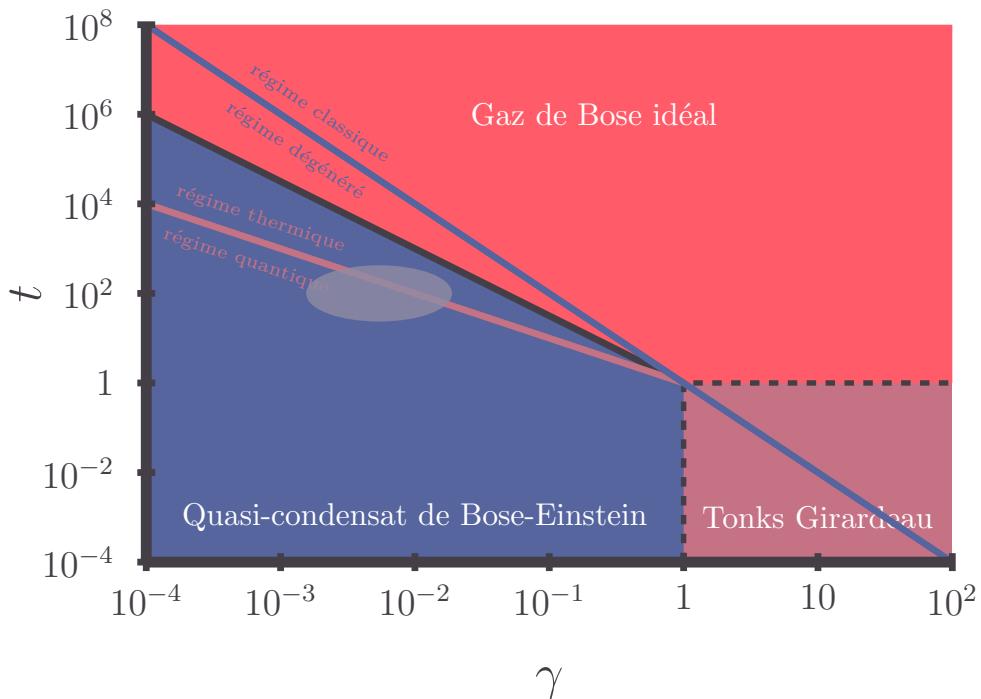


FIGURE 2.4 – Diagramme des régimes principaux du gaz de Lieb–Liniger : gaz de Bose idéal, Tonks–Girardeau et qBEC, en fonction des paramètres adimensionnés  $\gamma$  et  $t$ . Les courbes noires, bleues et orange délimitent les cross-overs entre régimes. La zone grise correspond aux paramètres expérimentaux explorés pendant la thèse. Figure adaptée de [BDW11].

## Conclusion du chapitre

Dans les systèmes intégrables, l'état stationnaire hors équilibre est correctement décrit par un GGE basé sur une infinité de charges conservées. Ces charges sont liées aux puissances des rapidités des quasi-particules.

La description via le *poids spectral*  $w(\theta)$  permet de relier ces charges aux distributions de rapidité à l'équilibre. En moyenne,  $w(\theta)$  définit à la fois les valeurs moyennes des charges conservées et la distribution de rapidité correspondante.

Dans la limite thermodynamique,  $w(\theta)$  sert de donnée d'entrée pour les équations de le **TBA**, qui permettent, par un calcul numérique, de reconstruire la distribution de rapidité à partir de  $w(\theta)$ .

Enfin, le formalisme du **GGE** offre un cadre puissant non seulement pour les moyennes des observables, mais également pour l'étude des corrélations et des fluctuations, comme nous le verrons au Chapitre 4.



## Chapitre 3

# Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Manipulation de l'opération d'<i>habillage</i></b>	<b>41</b>
3.1.1	Dérivation intuitive de la vitesse effective	41
3.1.2	Diagonalisation et invariants de Riemann dans la GHD spatiale étendue	42
<b>3.2</b>	<b>Formulation hamiltonienne de la GHD</b>	<b>44</b>
3.2.1	Crochet de Poisson fonctionnel	44
3.2.2	Crochet avec l'Hamiltonien	45
3.2.3	Modèle de Lieb–Liniger	46
3.2.4	Cas “no dressing”	46
<b>3.3</b>	<b>Régime de quasi-condensation et limite Gross–Pitaevskii</b>	<b>47</b>
3.3.1	Évolution temporelle selon l'équation de Gross–Pitaevskii	47
3.3.2	Description par les équations Hydrodynamique Généralisé	48
3.3.3	Connexion hydrodynamique : de la GHD à l'équation de Gross–Pitaevskii	48

---

### Introduction

**De l'état stationnaire à la dynamique** Après avoir étudié les propriétés stationnaires du gaz de bosons unidimensionnel, nous abordons maintenant sa dynamique hors équilibre. Un outil théorique qui permet de décrire cette évolution macroscopique à grande échelle est **l'Hydrodynamique Généralisée**, en anglais **Generalized Hydrodynamics (GHD)**. Cette approche, développée au cours des dernières années (voir par exemple [Doy20a; BD22; Ess23; KK23]), fournit un cadre uniifié pour la dynamique des systèmes intégrables.

**Principe général de l'approche hydrodynamique** L'hydrodynamique vise à décrire la dynamique dite à l'échelle d'Euler, c'est-à-dire après un lissage sur des échelles intermédiaires de temps et d'espace. Le système est découpé en cellules spatio-temporelles de taille  $\ell \times \tau$ , avec

$$L \gg \ell \gg \ell_c,$$

où  $\ell_c$  est une longueur microscopique caractéristique (par exemple la distance inter-particules ou la longueur de corrélation). On suppose alors que, dans chaque cellule, le système est localement relaxé et décrit par un état quasi-stationnaire. C'est ce que l'on appelle l'**Approximation de Densité Locale** (en anglais **Local Density Approximation (LDA)**).

**Équations de type Euler** À cette échelle, les équations de mouvement prennent la forme d'équations de conservation locales

$$\partial_t q_i + \partial_x j_i = F_i, \quad (3.1)$$

où  $q_i$  sont les densités conservées,  $j_i$  leurs courants associés, et  $F_i$  des termes de force provenant d'éventuels champs externes. Ces équations d'Euler apparaissent dans de nombreux contextes physiques : fluides galiléens, hydrodynamique relativiste, etc.

**Cas intégrable et hydrodynamique généralisée** Dans un système intégrable en dimension un, il existe une infinité de quantités conservées, et donc une infinité d'équations de type (3.1). **GHD** fournit une reformulation de cet ensemble d'équations sous une forme compacte et universelle. Elle s'applique aussi bien aux systèmes quantiques (modèle de Lieb–Liniger, chaînes de spins) qu'aux systèmes classiques (bâtons durs, gaz de solitons).

**Paramétrisation spectrale** Dans le modèle de Lieb–Liniger, nous avons vu que localement un système relaxé est décrit par une distribution de rapidité homogène  $\rho(\theta)$  (voir chapitres précédents).

Avec l'**LDA**, on considère désormais des situations où le système présente des variations sur des longueurs d'espace beaucoup plus grandes que les échelles microscopiques  $l_c$ . Dans ce cadre hydrodynamique, la distribution de rapidité dépend donc explicitement de la position et du temps :

$$\rho(x, \theta, t).$$

On introduit ainsi la description dans l'*espace des phases*  $(x, \theta)$  : la variable de rapidité  $\theta$  caractérise l'état asymptotique des quasi-particules (leur quantité de mouvement effective), tandis que la variable  $x$  encode l'inhomogénéité spatiale. La fonction  $\rho(x, \theta, t)$  représente alors la densité locale de rapidité dans cet espace étendu.

**Équation de GHD avec force externe** En présence d'un champ de force, l'équation **GHD** prend la forme [DY17]

$$\partial_t \rho + \partial_x \left( v^{\text{eff}} \rho \right) + \partial_\theta \left( a^{\text{eff}} \rho \right) = 0, \quad (3.2)$$

où  $v^{\text{eff}}$  et  $a^{\text{eff}}$  sont des fonctionnels déterminés par la structure intégrable du modèle. Le terme en  $\partial_\theta$  traduit la déviation des quasi-particules sous l'effet des forces appliquées.

Dans la **LDA**, nous pouvons revoir les charges définies dans le chapitre précédent.

**Charges globales conservées** Les charges locales conservées ont été définies dans les équations (2.19). Dans le même formalisme, on définit les *charges globales* comme des fonctionnelles linéaires agissant sur une fonction réelle et régulière  $f(x, \theta)$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ , selon

$$\hat{Q}[f] = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f(x, \theta) \hat{\rho}(x, \theta), \quad (3.3)$$

où  $\hat{\rho}(x, \theta)$  est l'opérateur distribution de rapidité. Cette quantité correspond à la charge totale associée à une observable prenant la valeur  $f(x, \theta)$  pour chaque quasi-particule.

**Remarque :** pour que  $\hat{Q}[f]$  soit strictement conservée dans le temps, la fonction  $f$  doit être indépendante de  $x$ , c'est-à-dire  $f(x, \theta) = f(\theta)$ . Si  $f$  dépend de  $x$ ,  $\hat{Q}[f]$  n'est pas nécessairement conservée au cours de l'évolution du système. En revanche, si  $f$  dépend uniquement de  $\theta$ , alors  $\hat{Q}[f]$  correspond à une véritable charge conservée. Dans le cadre de ce chapitre, la dépendance en  $x$  est introduite pour faciliter certaines dérivations et l'étude des profils locaux, mais la conservation stricte n'est garantie que pour les fonctions  $f(\theta)$  indépendantes de  $x$ .

La valeur moyenne  $\langle \hat{Q}[f] \rangle_{\hat{\rho}[w]}$  a été définie en (2.4). La matrice densité locale  $\hat{\rho}^{(S)}[w]$  a été introduite en (2.25). De manière analogue, la *matrice densité globale*  $\hat{\rho}[w]$  s'écrit

$$\hat{\rho}[w] = \frac{1}{Z[w]} e^{-\hat{Q}[w]}, \quad Z[w] = \text{Tr} \left[ e^{-\hat{Q}[w]} \right], \quad (3.4)$$

où la charge globale  $\hat{Q}[w]$  est définie par (3.3), et  $w$  désigne le poids spectral.

**Limite thermodynamique.** Dans notre étude de la dynamique, nous n'avons pas besoin de l'information détaillée sur le poids spectral  $w$ . Nous noterons donc, dans ce chapitre, et dans la limite thermodynamique, les moyennes des opérateurs en supprimant leur chapeau, *i.e.*

$$\lim_{\text{therm}} \langle \hat{O} \rangle_{\varrho[w]} \equiv O, \quad (3.5)$$

de sorte que, dans cette limite, la moyenne de la charge globale s'écrit

$$Q[f] = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f(x, \theta) \rho(x, \theta), \quad (3.6)$$

où  $f$  est une fonction régulière sur  $\mathbb{R}^2$ .

Dans la suite, nous détaillons la construction de ces équations pour le modèle de Lieb–Liniger, ainsi que leurs principales conséquences physiques.

## 3.1 Manipulation de l'opération d'*habillage*

Un point technique central de la GHD est la dérivation de la vitesse effective et de l'accélération effective qui apparaissent dans l'équation (3.2). Ces quantités ont été calculées pour la première fois par Bertini *et al.* (2016) [Ber+16] et Castro-Alvaredo *et al.* (2016) [CDY16]. Cette observation clé a déclenché l'ensemble des développements ultérieurs de la dynamique hydrodynamique généralisée dans les systèmes quantiques intégrables. Les travaux de Bertini *et al.* s'appuient en partie sur ceux de Bonnes *et al.* (2014) [BEL14], où la formule de la vitesse effective (voir Eq. (3.8)) était apparue pour la première fois dans le contexte d'un système intégrable quantique.

On note  $h(x, \theta)$  la densité de l'hamiltonien  $nu$  telle que

$$H = Q[h]. \quad (3.7)$$

La fonction d'occupation  $\nu$ , la vitesse effective  $v^{\text{eff}}$  et l'accélération effective  $a^{\text{eff}}$  sont définies par

$$2\pi\rho = 1_{[\nu]}^{\text{dr}} \nu, \quad 2\pi v^{\text{eff}} \rho = (\partial_\theta h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \nu, \quad 2\pi a^{\text{eff}} \rho = -(\partial_x h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \nu, \quad (3.8)$$

toutes trois étant des fonctions de  $\rho(\cdot, \cdot, t)$  et l'opération d'*habillage* (notée  $(\cdot)_{[\nu]}^{\text{dr}}$ ) a été définie au chapitre 1, Eq. (1.91).

Les équations (3.1) et (3.2) (ainsi que plus loin (3.23) et (3.32)) décrivent la dynamique dans le régime d'Euler. En dehors de cette approximation, il est nécessaire de prendre en compte des contributions supplémentaires associées aux effets diffusifs [DBD18; NBD19; Hüb+24].

### 3.1.1 Dérivation intuitive de la vitesse effective

En partant de la définition de la vitesse effectif en (3.8) et en utilisant la définition de l'opération d'*habillage* (1.91), il vient que

$$2\pi v^{\text{eff}} \rho = \nu \partial_\theta h + \nu \left( \Delta \star (\rho v^{\text{eff}}) \right), \quad (3.9)$$

où  $\Delta$  désigne le déplacement collisionnel défini dans le modèle Lieb–Liniger en équation(1.63) et en soustrayant  $v^{\text{eff}}(\theta)\nu(\theta)(\Delta \star \rho)(\theta)$  des deux cotés et on obtient

$$v^{\text{eff}}(\theta) (2\pi \rho(\theta) - \nu(\theta) (\Delta \star \rho)(\theta)) = \nu(\theta) \left( \partial_\theta h(\theta) + \int d\theta' \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') (v^{\text{eff}}(\theta') - v^{\text{eff}}(\theta)) \right), \quad (3.10)$$

En partant de la l'écriture de la fonction d'occupation en (3.8) et en utilisant la définition de l'opération d'*habillage* (1.91), il vient que

$$2\pi\rho - \nu \Delta \star \rho = \nu, \quad (3.11)$$

On obtient

$$\nu^{\text{eff}}(\theta) = \partial_\theta h(\theta) + \int d\theta' \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') (\nu^{\text{eff}}(\theta') - \nu^{\text{eff}}(\theta)). \quad (3.12)$$

définition ? Explication ? Références ?

Dans le cadre général du GHD, l'équation (3.12) s'interprète comme une extension naturelle du résultat classique obtenu pour le gaz de tiges dures. La distinction essentielle réside dans le fait que le décalage de diffusion  $\Delta(\theta - \theta_0)$  dépend désormais explicitement de la rapidité relative entre les quasi-particules, alors que, dans le cas du gaz de tiges dures,  $\Delta$  est une constante égale à l'opposé du diamètre des particules.

Sur le plan cinématique, on peut décrire la situation de la manière suivante : un quasi-particule *traceur* de rapidité  $\theta$  — c'est-à-dire de moment asymptotique  $\theta$  en l'absence d'interactions — se déplacerait, dans le vide, à vitesse constante  $\theta$  (Figs 1.1 et 3.1). En présence d'une densité finie  $\rho(\theta_0)$  de quasi-particules de rapidité  $\theta_0$ , cette vitesse est modifiée par les processus de diffusion à deux corps.

Pendant un intervalle de temps infinitésimal  $[t, t + \delta t]$ , le traceur subit en moyenne

$$\delta t \times |\nu^{\text{eff}}(\theta) - \nu^{\text{eff}}(\theta_0)| \rho(\theta_0)$$

collisions avec des quasi-particules de rapidité  $\theta_0$ . Chaque interaction provoque un décalage spatial  $\Delta(\theta - \theta_0)$  vers l'arrière (Figs 1.1 et 3.1). L'équation (3.12) formalise précisément cet effet cumulatif, résultant de l'intégration des contributions de toutes les collisions binaires sur l'espace des rapidités. La Fig. 3.1 illustre les trajectoires d'un gaz de hard rods en 1D [Per76; BDS83], avec diamètre  $-\Delta$ . Les trajectoires effectives sont calculées via la vitesse GHD, et le graphique a été généré en Python.

Cette analyse microscopique s'étend naturellement aux modèles à  $N$  corps, où les processus de diffusion se combinent et interagissent de manière non triviale, la fonction  $\Delta(\theta - \theta_0)$  encapsulant alors l'intégralité de la structure intégrable du système.

### 3.1.2 Diagonalisation et invariants de Riemann dans la GHD spatiale étendue

En dérivant la définition de l'opération d'*habillage* (1.91), on obtient la relation suivante :

$$\partial_X(f_{[\nu]}^{\text{dr}}) = \partial_X f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu \partial_X f_{[\nu]}^{\text{dr}}) + \frac{\Delta}{2\pi} \star (f_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_X \nu), \quad (3.13)$$

où les variables  $X = t, x, \theta$ . Soit

$$\left(1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star \nu \cdot\right) \partial_X(f_{[\nu]}^{\text{dr}}) = \partial_X f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (f_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_X \nu), \quad (3.14)$$

En utilisant la définition (1.91), on obtient également que

$$(\partial_X f)_{[\nu]}^{\text{dr}} = \left(1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star \nu \cdot\right)^{-1} \partial_X f, \quad (3.15)$$

donc en injectant dans (3.14) il vient que

$$\partial_X(f_{[\nu]}^{\text{dr}}) = (\partial_X f)_{[\nu]}^{\text{dr}} + \Theta(f_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_X \nu), \quad (3.16)$$

où  $X \in \{t, x, \theta\}$  et où nous avons introduit l'opérateur  $\Theta$  linéaire construit à partir de  $(1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star \nu \cdot)^{-1}$  et de convolutions par  $\frac{\Delta}{2\pi}$  i.e.

$$\Theta \equiv \left(1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star \nu \cdot\right)^{-1} \frac{\Delta}{2\pi} \star \quad (3.17)$$

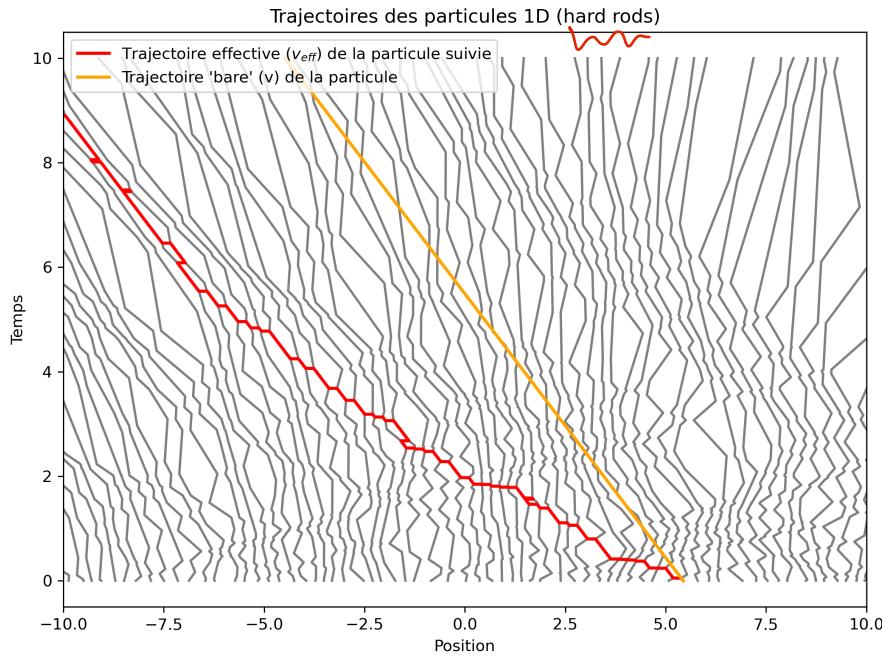


FIGURE 3.1 – Trajectoires des particules d'un gaz de hard rods en 1D. Les lignes noires représentent les particules individuelles, la ligne rouge la trajectoire effective (vitesse GHD) de la particule suivie, et la ligne orange la trajectoire si la particule conservait sa vitesse initiale (bare velocity). Le graphique a été généré en Python.

Les déviation définitions (3.8) donnent :

$$2\pi \partial_t \rho = 1_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_t \nu + \nu \left( (\partial_t 1)_{[\nu]}^{\text{dr}} + \Theta \left( 1_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_t \nu \right) \right) \quad (3.18)$$

$$2\pi \partial_x (\nu^{\text{eff}} \rho) = (\partial_\theta h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_x \nu + \nu \left( (\partial_x \partial_\theta h)_{[\nu]}^{\text{dr}} + \Theta \left( (\partial_\theta h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_x \nu \right) \right) \quad (3.19)$$

$$2\pi \partial_\theta (\alpha^{\text{eff}} \rho) = -(\partial_x h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_\theta \nu - \nu \left( (\partial_\theta \partial_x h)_{[\nu]}^{\text{dr}} + \Theta \left( (\partial_x h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_\theta \nu \right) \right) \quad (3.20)$$

En injectant dans l'équation GHD (3.1) on obtient après calculs (regroupement des termes et mise en facteur)

$$\left( (\partial_t 1)^{\text{dr}} + (\partial_x \partial_\theta h)^{\text{dr}} - (\partial_\theta \partial_x h)^{\text{dr}} \right) \nu + (1 + \Theta) \left( 1_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_t \nu + (\partial_\theta h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_x \nu - (\partial_x h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_\theta \nu \right) = 0. \quad (3.21)$$

Puisque  $\partial_t 1 = 0$  et  $\partial_x \partial_\theta h = \partial_\theta \partial_x h$ , le premier crochet s'annule. Il reste donc

$$(1 + \Theta) \left( 1_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_t \nu + (\partial_\theta h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_x \nu - (\partial_x h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_\theta \nu \right) = 0.$$

Sous l'hypothèse standard d'inversibilité des opérateurs de dressing (i.e.  $\hat{O} = 1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star \nu$  est inversible et  $\Theta$  n'a pas de noyau pathologique), on en déduit l'annulation du membre intérieur. En divisant par  $1_{[\nu]}^{\text{dr}}$  on obtient l'équation de transport locale

$$\partial_t \nu + \nu^{\text{eff}} \partial_x \nu + \alpha^{\text{eff}} \partial_\theta \nu = 0, \quad (3.22)$$

(avec  $\nu^{\text{eff}} = (\partial_\theta h)_{[\nu]}^{\text{dr}} / 1_{[\nu]}^{\text{dr}}$  et  $\alpha^{\text{eff}} = -(\partial_x h)_{[\nu]}^{\text{dr}} / 1_{[\nu]}^{\text{dr}}$ ).

Dans les systèmes hyperboliques, la *diagonalisation* d'une équation consiste à trouver une transformation des variables qui permet de décomposer le système couplé en un ensemble de modes indépendants, appelés *invariants de Riemann* ou *modes normaux*.

Dans le cadre de la GHD spatiale étendue, l'équation d'évolution de la densité  $\rho(x, \theta, t)$  est couplée de manière non triviale en  $(x, \theta)$  par la vitesse effective  $\nu^{\text{eff}}$  et l'accélération effective  $\alpha^{\text{eff}}$ . La fonction d'occupation  $\nu(x, \theta, t)$  est définie par une transformation non locale dite *dressing* qui incorpore les interactions du système.

Grâce à cela, on peut affirmer que la fonction  $\nu(x, \theta)$  s'interprète comme un continuum d'**invariants de Riemann**, c'est-à-dire des variables normales qui restent constantes le long des caractéristiques du système.

Cette diagonalisation est essentielle pour comprendre la structure hamiltonienne du système et simplifier l'analyse de sa dynamique, notamment dans le cadre spatialement étendu avec un dressing dépendant de la position.

## 3.2 Formulation hamiltonienne de la GHD

Dans [BCD22], il est montré que les équations **GHD** peuvent avoir une formulation Hamiltonienne dans le cadre d'une théorie de champ classique, moyennant une redéfinition du crochet de Poisson. J'ai trouvé cette approche intéressante et je présente ici ce résultat. En aucun cas les calculs ci-dessous ne sont une dérivation de **GHD**.

### 3.2.1 Crochet de Poisson fonctionnel

*Parler d'un système classique et non pas d'hydrodynamique*

**Interprétation et limite non-interactive** À ce niveau de généralité, l'équation **GHD** (3.2) peut être interprétée comme la dynamique hydrodynamique d'un fluide bidimensionnel dont la densité est conservée dans l'espace des phases spectral. Les effets d'interaction se traduisent par un couplage non local dans la direction des rapidités  $\theta$ , reflétant les processus de diffusion élastique entre quasi-particules possédant des paramètres spectraux distincts.

Dans le cas limite d'un système *sans interactions*, l'espace spectral coïncide avec l'espace des phases classique, et l'équation de **GHD** se réduit alors à l'équation de Liouville (ou, de façon équivalente, à l'équation de Boltzmann sans terme de collisions) issue de la théorie cinétique élémentaire.

En l'absence de phénomènes dissipatifs, la densité de distribution  $\rho$  est conservée le long du flot hamiltonien associé à l'énergie  $H$ , ce qui s'exprime par

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0, \quad (3.23)$$

où  $\{\cdot, \cdot\}$  désigne le crochet de Poisson canonique dans l'espace des phases. Dans cette perspective, **GHD** apparaît comme une extension naturelle de l'équation de Liouville aux systèmes intégrables, incorporant les effets collectifs induits par les interactions tout en préservant une description exacte à grande échelle.

**Structure hamiltonienne et crochet de Poisson fonctionnel** Bonnemain *et al.* [BCD22] introduisent un crochet de Poisson fonctionnel agissant sur des fonctionnelles  $F$  et  $G$  de la distribution de rapidité  $\rho(x, \theta)$  en présence d'interactions. Celui-ci s'écrit

$$\{F, G\} = \iint dx d\theta \frac{\nu}{2\pi} \left[ \partial_x \left( \frac{\delta F}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \left( \partial_\theta \left( \frac{\delta G}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \right)^{dr} - \partial_x \left( \frac{\delta G}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \left( \partial_\theta \left( \frac{\delta F}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \right)^{dr}_{[\nu]} \right], \quad (3.24)$$

où  $\nu$  désigne la fonction d'occupation. Dans ce crochet l'application de l'opération d'*habillage*  $(\cdot)^{dr}_{[\nu]}$  (1.91) traduit les interactions entre particules.

Le crochet de Poisson (défini en (3.24)) entre deux charges  $Q[f]$  et  $Q[g]$  prend la forme

$$\{Q[f], Q[g]\} = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta \frac{\nu}{2\pi} \left[ \partial_x f (\partial_\theta g)^{dr}_{[\nu]} - \partial_x g (\partial_\theta f)^{dr}_{[\nu]} \right]. \quad (3.25)$$

Cette application de *dressing* satisfait la relation de symétrie [Doy20b] :

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta \nu f g^{dr}_{[\nu]} = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta \nu f^{dr}_{[\nu]} g. \quad (3.26)$$

Pour appliquer la relation de symétrie (3.26) au crochet (3.25), il suffit de considérer que les fonctions impliquées  $f$  et  $g$  sont des fonctions scalaires régulières sur  $(x, \theta)$ . Dans ce cas, la relation de symétrie reste pleinement valide et l'intégrale est bien définie.

<sup>1</sup>

En utilisant cette symétrie ainsi qu'une intégration par parties, le crochet (3.25) se réécrit

$$\{Q[f], Q[g]\} = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f \left[ \partial_\theta \left( \frac{\nu}{2\pi} (\partial_x g)^{\text{dr}}_{[\nu]} \right) - \partial_x \left( \frac{\nu}{2\pi} (\partial_\theta g)^{\text{dr}}_{[\nu]} \right) \right]. \quad (3.27)$$

### 3.2.2 Crochet avec l'Hamiltonien

On reprend un Hamiltonien de la forme de (3.7),  $H = Q[h]$ .

**Densité hamiltonienne et grandeurs effectives** La vitesse effective et l'accélération effective données à l'équation (3.8) interviennent dans les équations de mouvement

$$\dot{x} = v^{\text{eff}}, \quad \dot{\theta} = a^{\text{eff}}, \quad (3.28)$$

montrant que les dérivées  $\partial_x$  et  $\partial_\theta$  présentes dans le crochet de Poisson correspondent respectivement à l'action de l'accélération effective sur  $\theta$  et de la vitesse effective sur  $x$ .

En utilisant la définition de  $v^{\text{eff}}$  et  $a^{\text{eff}}$  données à l'équation (3.8), on trouve que le crochet (3.27) appliqué à  $(f, h)$  devient

$$\{Q[f], Q[h]\} = - \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f \left[ \partial_x (\rho v^{\text{eff}}) + \partial_\theta (\rho a^{\text{eff}}) \right]. \quad (3.29)$$

**Forme locale : densités conservées.** En choisissant  $(x, \theta) \mapsto \delta(\cdot - x)f(\theta)$  dans (3.6), on obtient la moyenne de la densité conservée *i.e.*

$$q_{[f]}(x, t) = Q[(x, \theta) \mapsto \delta(\cdot - x)f(\theta)] = \int d\theta f(\theta) \rho(x, \theta, t). \quad (3.30)$$

Appliqué à (3.29), on obtient

$$\{q_{[f]}(x), Q[h]\} = -\partial_x \left[ \int_{\mathbb{R}} d\theta f \rho v^{\text{eff}} \right] + \int_{\mathbb{R}} d\theta f' \rho a^{\text{eff}}. \quad (3.31)$$

En appliquant l'équation de Liouville (3.23), on retrouve la forme de convection (3.1) :

$$\partial_t q_{[f]} + \partial_x j_{[f]} = F_{[f]}, \quad (3.32)$$

où le flux  $j_{[f]}$  et le terme de force  $F_{[f]}$  sont donnés par

$$j_{[f]} = \int_{\mathbb{R}} d\theta v^{\text{eff}} f \rho, \quad F_{[f]} = \int_{\mathbb{R}} d\theta a^{\text{eff}} f' \rho. \quad (3.33)$$

**Forme locale : équation sur  $\rho$**  De manière analogue, pour la distribution de rapidité à l'équilibre thermodynamique, on note

$$\rho(x, \theta) = Q[\delta(\cdot - x) \delta(\cdot - \theta)]. \quad (3.34)$$

Appliqué à (3.29), on obtient

$$\{\rho(x, \theta), Q[h]\} = -\partial_x (v^{\text{eff}} \rho) - \partial_\theta (a^{\text{eff}} \rho). \quad (3.35)$$

En appliquant l'équation de Liouville (3.23), on retrouve l'équation GHD (3.2) :

$$\partial_t \rho + \partial_x (v^{\text{eff}} \rho) + \partial_\theta (a^{\text{eff}} \rho) = 0.$$

1. La relation de symétrie (3.26) est générale, et le formalisme des types tensoriels introduit dans [Doy20b] sert à traiter des objets plus complexes (tenseurs dépendant de  $x$  et  $\theta$ ). Pour des fonctions scalaires comme ici, aucune condition supplémentaire n'est nécessaire.

### 3.2.3 Modèle de Lieb–Liniger

Dans le modèle de LL, l'Hamiltonien,  $H = Q[h]$  (3.7) s'écrit ici avec :

$$h(x, \theta) = \varepsilon(\theta) + V(x), \quad (3.36)$$

où l'énergie cinétique est  $\varepsilon(\theta) = \theta^2/2$  et  $V(x)$  représente le potentiel extérieur.

Dans ce modèle, la vitesse effective et l'accélération effective de (3.8) se réécrivent :

$$v^{\text{eff}} = \frac{(\text{id})_{[v]}^{\text{dr}}}{1_{[v]}^{\text{dr}}}, \quad a^{\text{eff}} = -V'(x). \quad (3.37)$$

Avec l'équation (3.12) la vitesse effectif dans le modèle de LL s'écrit

$$v^{\text{eff}} = \theta + \int d\theta' \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') (v^{\text{eff}}(\theta') - v^{\text{eff}}(\theta)) \quad (3.38)$$

Ainsi, les termes de force dans (3.32) et (3.33) prennent la forme :

$$\text{3.2}^\dagger, \quad F_{[f]} = -V'(x) \int_{\mathbb{R}} d\theta f'(\theta) \rho(x, \theta). \quad (3.39)$$

L'équation GHD (3.1) devient alors :

$$\partial_t \rho + \partial_x \left( v^{\text{eff}} \rho \right) - V'(x) \partial_\theta \rho = 0, \quad (3.40)$$

et (3.22) devient :

$$\partial_t v + v^{\text{eff}} \partial_x v - V'(x) \partial_\theta \rho = 0, \quad (3.41)$$

### 3.2.4 Cas “no dressing”

**Hypothèse “opérateur d’habillage identité” :**  $\text{dr} = \text{Id}$ . Si l'opérateur d'habillage correspond à l'identité (*no dressing*), les crochets (3.24) et (3.29) se simplifient en :

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \iint dx d\theta \rho \left[ \partial_x \left( \frac{\delta F}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \partial_\theta \left( \frac{\delta G}{\delta \rho(x, \theta)} \right) - \partial_x \left( \frac{\delta G}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \partial_\theta \left( \frac{\delta F}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \right] \\ \{Q[f], Q[h]\} &= - \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f \left[ \partial_x (\rho v^{\text{eff}}) + \partial_\theta (\rho a^{\text{eff}}) \right]. \end{aligned} \quad (3.42) \quad (3.43)$$

Les flux et termes de force (3.33) s'expriment alors en remplaçant la vitesse effective  $v^{\text{eff}}$  et l'accélération effective  $a^{\text{eff}}$  (de (3.8)) par leurs expressions issues de la dynamique hamiltonienne *nu* :

$$v = 2\pi\rho, \quad v^{\text{eff}}(\theta) \rightarrow \partial_\theta h(x, \theta), \quad a^{\text{eff}}(\theta) \rightarrow -\partial_x h(x, \theta), \quad (3.44)$$

où  $h(x, \theta)$  est l'hamiltonien *nu* (par exemple  $h = \varepsilon(\theta) + V(x)$ ). L'équation (3.2) devient alors une équation de transport collisionless (type Vlasov) :

$$\partial_t \rho + \partial_x (\partial_\theta h \rho) - \partial_\theta (\partial_x h \rho) = 0. \quad (3.45)$$

**Hiérarchie des moments (charges nues).** Pour toute fonction test  $f(\theta)$ , l'équation (3.31) devient

$$j_{[f]}(x, t) = \int d\theta f(\theta) \partial_\theta h \rho(x, \theta, t), \quad F_{[f]}(x, t) = - \int_{\mathbb{R}} d\theta \partial_x h f'(\theta) \rho(x, \theta, t). \quad (3.46)$$

Pour  $f(\theta) = 1$ ,  $\theta$  et  $\theta^2/2$  et  $h(\theta, x) = \varepsilon(\theta) + V(x)$ , l'équation (3.32) avec la charge local (3.30) et les flux et forces (3.46), dévient les équations d'Euler classiques (Annex B) :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x (n u) = 0, \\ \partial_t (n u) + \partial_x (n u^2 + \mathcal{P}) = -n \partial_x V(x), \\ \partial_t E + \partial_x (u (E + \mathcal{P})) = 0, \end{cases} \quad (3.47)$$

avec la densité de particule  $n = q_{[1]}$ , la vitesse moyenne du fluide  $u = q_{[\theta]}/q_{[1]}$ , la pression cinétique du fluide  $\mathcal{P} = q_{[\theta^2]} - q_{[\theta]}^2/q_{[1]}$ , l'énergie totale  $E = nu^2/2 + nV + ne_{\text{int}}$  où  $e_{\text{int}} = q_{[\theta^2/2]}$  est l'énergie interne d'une particule .

**Remarques sur les charges globales** En l'absence de potentiel externe ( $V = 0$ ), le système conserve certaines charges globales. Dans un système classique non intégrable, seules ces quelques charges sont conservées. Par exemple dans un système de Gibbs sont conservé , nombre total de particules , quantité de mouvement totale , énergie cinétique totale soit respectivement  $Q[1] = \int dx q[1]$  ,  $Q[\theta] = \int dx q[\theta]$  et  $Q[\theta^2/2] = \int dx q[\theta^2/2]$ .

En revanche, dans un système intégrable, une infinité de charges sont conservées. Chaque valeur de la rapidité  $\theta$  définit une charge globale

$$\rho(\theta, t) = Q[\delta(\cdot - \theta)] = \int dx \rho(x, \theta, t),$$

et les charges associées à une observable  $f(\theta)$  quelconque s'écrivent  $Q[f] = \int d\theta f(\theta) \rho(\theta, t)$ .

Cette structure constitue l'analogue classique de la description en termes de **distribution de rapidité** dans le cadre intégrable et fournit le point de départ naturel pour développer la théorie **GHD**.

En particulier, pour décrire la dynamique à l'échelle d'Euler, il devient nécessaire de suivre l'évolution de  $\rho(x, \theta, t)$  pour toutes les valeurs de  $\theta$ , contrairement au cas non intégrable où seules quelques densités locales suffisent.

### 3.3 Régime de quasi-condensation et limite Gross–Pitaevskii

Dans cette section, nous considérons un système décrit par le modèle LL ,sans potentiel extérieur, dans le régime (qBEC), correspondant à la limite  $t \rightarrow 0$  et  $\gamma \rightarrow 0$  (paramètres définis en (2.64) et (2.61)). Dans ces conditions, la dynamique du gaz peut être décrite par les équations hydrodynamiques issues de l'équation de GP. L'objectif est de montrer que les équations de GHD reproduisent, dans certaines situations, les équations hydrodynamiques dérivées de GP.

#### 3.3.1 Évolution temporelle selon l'équation de Gross–Pitaevskii

Dans le régime qBEC, la dynamique d'un gaz unidimensionnel décrit par le modèle LL à l'état fondamental peut être décrite par l'équation GP dépendante du temps. On a vu l'équation GP dépendante du temps dans (1.46), avec  $\hbar = m = 1$ . Pour généraliser et pour l'utiliser dans un autre chapitre, écrivons-la avec un potentiel externe :

$$i\partial_t \psi = \left( -\frac{1}{2} \partial_x^2 + V + g|\psi|^2 \right) \psi. \quad (3.48)$$

En utilisant la représentation de Madelung  $\psi(x, t) = \sqrt{n(x, t)} e^{i\theta(x, t)}$ , on obtient les équations dites hydrodynamiques de la forme de (3.47) :

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \quad (3.49)$$

$$\partial_t(nu) + \partial_x \left( nu^2 + \mathcal{P} + \tilde{\mathcal{P}}_Q \right) = -n\partial_x V, \quad (3.50)$$

où la vitesse du fluide, la *pression classique* et un terme de *pression quantique* sont définis par

$$u = \partial_x \theta, \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2}gn^2, \quad \tilde{\mathcal{P}}_Q = -\frac{n}{2}\partial_x \left( \frac{\partial_x \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right). \quad (3.51)$$

On peut aussi écrire (3.50) sous la forme

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} + \frac{2\mathcal{P} + \mathcal{P}_Q}{n} + V \right) = 0, \quad (3.52)$$

où l'on nomme dans la littérature la *pression quantique* :

$$\mathcal{P}_Q = \frac{1}{2}\sqrt{n} \partial_x^2 \sqrt{n}. \quad (3.53)$$

Dans la suite nous nous intéressons à la dynamique en l'absence de potentiel extérieur  $V$ .

Dans la limite dite de **Thomas-Fermi (TF)** 1D, les fluctuations de densité sont faibles et le terme de *pression quantique* peut être négligé [Str98]. Le terme de pression se réduit alors à la pression classique  $\mathcal{P} = \frac{1}{2}gn^2$ . En utilisant la relation de Gibbs-Duhem  $\frac{d\mathcal{P}}{d\mu} = n$ , on obtient l'équation d'état classique du gaz qBEC :

$$\mu = gn. \quad (3.54)$$

Les équations de Madelung ((3.49) (3.50)), se réduisent à :

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \quad (3.55)$$

$$\partial_t(nu) + \partial_x(nu^2 + \mathcal{P}) = 0. \quad (3.56)$$

### 3.3.2 Description par les équations Hydrodynamique Généralisé

Dans la suite nous allons montrer que les eq. (3.55) et (3.56) peuvent être retrouvées à partir des équations GHD.

À  $t = 0$ , le facteur d'occupation  $\nu(x, \theta, 0)$  ne peut prendre que deux valeurs : il vaut 1 si  $\theta$  appartient à l'intervalle  $[\theta_-(x, 0), \theta_+(x, 0)]$ , et 0 sinon. Comme  $\nu$  satisfait l'équation de transport (3.41), sa valeur est conservée le long des caractéristiques.

Ainsi, la distribution prend la forme d'une *mer de Fermi*, délimitée par deux bords  $\theta_{\pm}(x, t)$  :

$$\nu(x, \theta, t) = \begin{cases} 1, & \theta \in [\theta_-(x, t), \theta_+(x, t)], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.57)$$

L'évolution temporelle des bords est donnée par deux équations de type transport (Fig. 3.2) [Doy+17] :

$$\partial_t \theta_+(x, t) + v^{\text{eff}}(\theta_+) \partial_x \theta_+(x, t) = 0, \quad (3.58)$$

$$\partial_t \theta_-(x, t) + v^{\text{eff}}(\theta_-) \partial_x \theta_-(x, t) = 0. \quad (3.59)$$

### 3.3.3 Connexion hydrodynamique : de la GHD à l'équation de Gross–Pitaevskii

**Vitesse efficace aux bords de la mer de Fermi.** La vitesse du fluide au point  $x$  s'écrit simplement :

$$u = \frac{\theta_- + \theta_+}{2}. \quad (3.60)$$

Dans la limite  $\gamma \rightarrow 0$ , la distribution de rapidité prend la forme d'un demi-cercle [LL63] :

$$\rho(\theta) = \frac{n}{2\pi c^2} \sqrt{-(\theta - \theta_-)(\theta - \theta_+)}, \quad (3.61)$$

avec la vitesse du son

$$c = \sqrt{gn}. \quad (3.62)$$

La largeur de la mer de Fermi,  $\theta_+ - \theta_-$ , est reliée à la densité par

$$n = \int_{\theta_-}^{\theta_+} d\theta \rho(\theta), \quad (3.63)$$

ce qui donne après intégration :

$$\theta_+ - \theta_- = 4c. \quad (3.64)$$

Considérons d'abord le cas où le centre de masse de la mer de Fermi est nul, c'est-à-dire  $\theta_+ = -\theta_-$ . Les bords se déplacent alors à la vitesse du son  $\pm c$ . Pour  $\gamma \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow 0$ , les bords se situent en  $\theta_{\pm} = \pm 2c$  [LL63], et la vitesse effective s'écrit simplement :

$$v^{\text{eff}}(\theta_{\pm}) = \frac{1}{2}\theta_{\pm}. \quad (3.65)$$

Si le centre de masse n'est pas nul ( $\theta_+ \neq -\theta_-$ ), la vitesse effective peut être décomposée en une translation correspondant à la vitesse du barycentre  $u$ , à laquelle s'ajoute un décalage de  $\pm c$  lié à l'écart des bords. On obtient alors les expressions explicites :

$$v^{\text{eff}}(\theta_+) = \frac{3}{4}\theta_+ + \frac{1}{4}\theta_-, \quad (3.66)$$

$$v^{\text{eff}}(\theta_-) = \frac{3}{4}\theta_- + \frac{1}{4}\theta_+. \quad (3.67)$$

Autrement dit, une petite déformation localisée aux extrémités de la mer de Fermi se propage à la vitesse du son par rapport au centre de masse du système, ce qui correspond à la valeur de  $v^{\text{eff}}$  aux bords.

**Forme hydrodynamique des équations de Gross–Pitaevskii.** En introduisant la densité  $n$  (via  $4\sqrt{gn} = \theta_+ - \theta_-$ ) et la vitesse du fluide  $u$  définies plus haut, les équations (3.58)–(3.59) se réécrivent sous la forme

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \quad (3.68)$$

$$\partial_t(nu) + \partial_x(nu^2) = -g n \partial_x n. \quad (3.69)$$

Il s'agit exactement des équations de continuité et d'Euler (3.55)–(3.56), mais écrites sans le terme de *pression quantique* ni le potentiel extérieur.

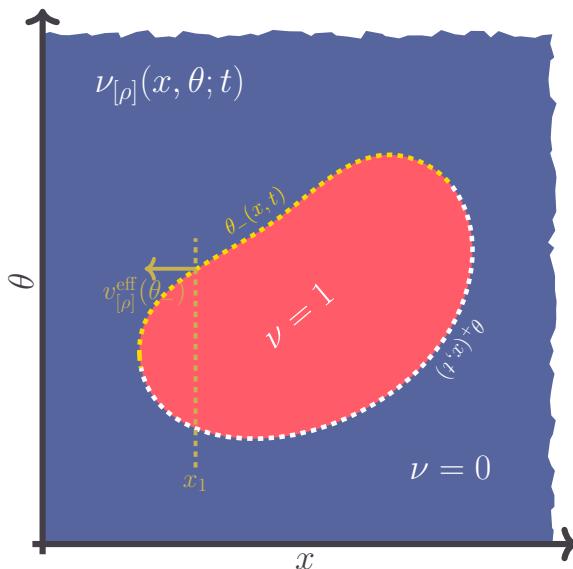


FIGURE 3.2 – Schéma de l'évolution du facteur d'occupation  $\nu(x, \theta, t)$  dans la limite  $\gamma \rightarrow 0$ . Initialement rectangulaire et homogène, la distribution forme une mer de Fermi délimitée par  $\theta_{\pm}(x, t)$  : rouge  $\nu = 1$ , bleu  $\nu = 0$ .

**Correspondance avec les équations GP.** Les équations (3.68)–(3.69) correspondent exactement aux équations hydrodynamiques (3.55)–(3.56), obtenues à partir de GP lorsque le terme de pression quantique est négligé. La correspondance est donc valable pour une configuration initiale correspondant à une seule mer de Fermi. En revanche, si le système initial contient plusieurs mers de Fermi (par exemple deux pics de densité séparés), cette équivalence avec les équations GP n'est plus vérifiée.

## Résumé sur la dynamique hydrodynamique généralisée (GHD)

La dynamique d'un système quantique isolé intégrable possède des propriétés de relaxation particulières.

Dans un système chaotique (non intégrable), l'état localement relaxé est bien décrit par un ensemble de Gibbs classique, caractérisé par les trois quantités locales conservées : la densité de particules  $n$ , la quantité de mouvement par unité de longueur  $p$  et l'énergie par unité de longueur  $e_{\text{mathrmint}}$ .

En revanche, pour un système intégrable, l'état stationnaire local ne peut pas être capturé par un simple ensemble de Gibbs : il est correctement décrit par un **GGE**, entièrement déterminé par la distribution de rapidités  $\rho(\theta)$ .

Lorsque l'on considère des variations spatiales lentes, cette description s'étend naturellement à une distribution de rapidités dépendant de la position,  $\rho(x, \theta)$ .

L'évolution de cette fonction est alors gouvernée, à l'échelle d'Euler, par les équations de **GHD**. Ces équations traduisent la propagation des quasiparticules et la réorganisation locale des charges conservées.

Dans certaines limites particulières, la **GHD** se connecte aux descriptions hydrodynamiques plus familières. En particulier, dans l'état fondamental et pour un paramètre de Lieb  $\gamma \rightarrow 0$ , les équations de **GHD** se réduisent à celles de l'hydrodynamique issues de l'équation de Gross–Pitaevskii dépendante du temps, lorsque le terme de pression quantique peut être négligé.

Ainsi, la **GHD** fournit un cadre cohérent et rigoureux pour décrire la dynamique hors équilibre des systèmes intégrables, reliant la description microscopique en termes de rapidités aux équations effectives de l'hydrodynamique macroscopique.

## Chapitre 4

# Fluctuation de la distribution de rapidité dans des état d'équilibre

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Fluctuation-réponse et susceptibilités dans les états d'équilibre généralisés . . . . .</b>	<b>52</b>
4.1.1	Charges généralisées et dérivées fonctionnelles . . . . .	52
4.1.2	Poids spectral et formulation du GGE . . . . .	54
4.1.3	Vérification numérique : Echantillonnage du GGE . . . . .	56
<b>4.2</b>	<b>Limite thermodynamique, structure variationnelle et susceptibilité . . . . .</b>	<b>59</b>
4.2.1	Susceptibilité spectrale et structure variationnelle de l'entropie . . . . .	59
4.2.2	Fluctuations gaussiennes autour de l'équilibre thermodynamique . . . . .	61
4.2.3	Expression de la Hessienne . . . . .	63
4.2.4	Fluctuations autour de la distribution moyenne et inversion de la Hessienne . . . . .	63
4.2.5	Vérification numérique thermodynamique : inversion de la courbure et dérivée fonctionnelle . . . . .	64

---

### Introduction

**Pourquoi étudier les fluctuations ?** L'hypothèse selon laquelle, après relaxation, le système est décrit par un *Generalized Gibbs Ensemble* (**GGE**) constitue un fondement majeur de notre compréhension des dynamiques hors équilibre dans les systèmes intégrables. Cette hypothèse, bien que robuste théoriquement, appelle à être testée expérimentalement.

Toutefois, la seule connaissance de la distribution de rapidité moyenne  $\rho_{\text{eq}}$  ne permet pas, à elle seule, de confirmer la validité du GGE. En effet, plusieurs ensembles statistiques peuvent mener à une même valeur moyenne de  $\rho(\theta)$ . Pour lever cette ambiguïté, il est nécessaire d'étudier les **fluctuations** autour de la distribution typique, notées  $\delta\rho$ , définies par :  $\rho = \rho_{\text{eq}} + \delta\rho$ . Cela nécessite de pousser le développement fonctionnel de la *fonction thermodynamique effective* ( $\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}[\rho]$ ) à l'ordre quadratique en  $\delta\rho$ .

Si la **GGE** décrit correctement la valeur moyenne de  $\rho(\theta)$  après relaxation, il est naturel de se demander si elle capture également les *fluctuations* autour de cette moyenne. Autrement dit, notre objectif est de tester si la **GGE** constitue le *bon ensemble statistique* pour l'état stationnaire, en analysant non seulement la distribution moyenne des quasi-particules, mais aussi ses fluctuations.

Plusieurs travaux récents ont mis en lumière l'intérêt expérimental de sonder ces fluctuations. De Nardis et al. ont notamment montré que la mesure de la *structure dynamique* de la densité, après un quench, permet de reconstruire entièrement l'état stationnaire, c'est-à-dire la distribution  $\rho(\theta)$  du **GGE** [Nar+17b]. En particulier, l'analyse du facteur de structure dynamique permet d'extraire les différentes *températures effectives*  $\beta_i$  du **GGE**, et donc d'accéder à la distribution macroscopique des quasi-particules [GA14; CK12].

Ainsi, en mesurant les corrélations dynamiques du gaz — accessibles expérimentalement via la spectroscopie ou les fluctuations de densité — on peut tester si les fluctuations observées concordent avec celles prédictes par la GGE.

Concrètement, cela consiste à analyser la dispersion des rapidités sur plusieurs répétitions expérimentales d'un même quench. Si la GGE décrit correctement l'état stationnaire, la variance et les corrélations des fluctuations de  $\rho(\theta)$  devraient être en accord avec les prédictions du formalisme fluctuationnel issu de l'entropie  $\hat{\rho}_{\text{GGE}}^{(S)}$ , cf. (2.2).

**7** Le lien entre fluctuations, fonctions de réponse, et GGE a suscité un intérêt croissant dans les systèmes quantiques intégrables. Le formalisme des charges quasi-locales et des potentiels conjugués dans le GGE a été précisé dans le modèle de Lieb–Liniger par Pálmai et Konik [PK18], qui montrent comment structurer la matrice densité en termes de fonctionnelles de rapidité. L'identité fondamentale liant la dérivée fonctionnelle de l'entropie de Yang–Yang au noyau de fluctuations  $\chi_w(\theta, \theta')$  est également dérivée dans ce cadre.

La relation fluctuation–réponse dans les gaz bosoniques unidimensionnels a été étudiée en profondeur par De Nardis et al. [Nar+17b], qui proposent une méthode pour reconstruire les fluctuations thermiques à partir de fonctions de réponse dynamiques, en comparant mesures expérimentales et théories thermodynamiques. D'autres travaux, comme ceux de Goldstein et Andrei [GA14], ou de Caux et Konik [CK12], examinent en détail la relaxation vers un GGE à la suite d'un quench quantique, et en particulier le rôle de la distribution de rapidité dans la description des états stationnaires.

En résumé, l'étude des fluctuations de la distribution de rapidités fournit un test clé de la validité du GGE pour modéliser les résultats expérimentaux dans le modèle de LL [Nar+17b].

Ce chapitre est consacré à cette extension, qui permettra :

- d'obtenir les matrices de susceptibilité  $\chi_w$  et les corrélations gaussiennes du GGE;
- de fournir la base théorique des équations d'hydrodynamique généralisée au second ordre.

Nous commencerons par rappeler le formalisme variationnel, puis nous dériverons l'action quadratique régissant  $\delta\rho$ .

## 4.1 Fluctuation-réponse et susceptibilités dans les états d'équilibre généralisés

### 4.1.1 Charges généralisées et dérivées fonctionnelles

**Rappel : Formulation fonctionnelle des moments et cumulants des charges.** Considérons un système unidimensionnel de taille finie  $L$ . Dans le chapitre (2), aux équations (2.19) et (2.20), nous avons introduit l'opérateur de charge généralisée  $\hat{Q}[f]$ , défini à partir d'une fonction test  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et de l'opérateur densité de rapidité  $\hat{\rho}(\theta)$ , selon la relation intégrale :

$$\hat{Q}[f] = L \int d\theta f(\theta) \hat{\rho}(\theta), \quad \text{où } \hat{\rho}(\theta) \text{ agit comme } \hat{\rho}(\theta) |\{\theta_a\}\rangle = \frac{1}{L} \sum \delta(\theta - \theta_a) |\{\theta_a\}\rangle \quad (4.1)$$

**États d'équilibre généralisés et poids spectral.** Dans un système intégrable, on a vus dans l'équation (2.25) qu'un état d'équilibre est décrit par une matrice densité de la forme :

$$\hat{\rho}^{(S)}[w] \doteq \frac{1}{Z^{(S)}[w]} e^{-\hat{Q}^{(S)}[w]}, \quad \text{avec} \quad Z^{(S)}[w] \doteq \text{Tr} \left( e^{-\hat{Q}^{(S)}[w]} \right), \quad (4.2)$$

associée à  $w$ , où  $w(\theta)$  est **poids spectral** (ou **potentiel spectral**), et  $\hat{Q}^{(S)}[w]$  est une **charge généralisée** associée à ce poids.

Dans ce chapitre, le caractère local des charges est implicite ; nous omettrons l'exposant  $(S)$ , introduit au chapitre (2), qui indiquait le caractère local  $S$  associé au support fini des charges.

**Rappel : Dérivée fonctionnelle directionnelle.** Nous avons introduit dans l'équation (2.48), la **dérivée fonctionnelle dans la direction d'une fonction test**  $f$  appliquée à un fonctionnel  $F[g]$ , comme :

$$\mathcal{D}_{[f]} F[g] \doteq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[g + \epsilon f] - F[g]}{\epsilon}. \quad (4.3)$$

À partir de la définition précédente (4.3), il est clair que  $\mathcal{D}_{[f]} F[g]$  est, en ce qui concerne sa dépendance en  $f$ , un fonctionnel linéaire :

$$\mathcal{D}_{[c_1 f_1 + c_2 f_2]} F[g] = c_1 \mathcal{D}_{[f_1]} F[g] + c_2 \mathcal{D}_{[f_2]} F[g], \quad (4.4)$$

avec  $c_1$  et  $c_2$  des réelles et  $f_1$  et  $f_2$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

La linéarité de  $\hat{Q}[g]$  implique que sa différentielle fonctionnelle dans la direction  $f$  :

$$\mathcal{D}_{[f]} \hat{Q}[g] = \hat{Q}[f]. \quad (4.5)$$

Cette notation permet une différentiation fonctionnelle claire, notamment dans les calculs de moments et cumulants.

Dans la suite, pour alléger les notations, nous noterons les moyennes  $\langle \cdot \rangle_w$  au lieu de  $\langle \cdot \rangle_{\hat{\rho}^{(S)}[w]}$ .

**Moments non centrés.** À l'aide de cette notation, on a défini les **moments non centrés** d'ordre  $q$  des charges sous la forme :

$$\langle \hat{Q}[f_1] \hat{Q}[f_2] \cdots \hat{Q}[f_q] \rangle_w = (-1)^q \frac{1}{Z[w]} \mathcal{D}_{[f_1]} \mathcal{D}_{[f_2]} \cdots \mathcal{D}_{[f_q]} Z[w], \quad (4.6)$$

De même, on a défini les moments d'ordre  $q$  de la distribution de rapidité à l'aide des dérivées ponctuelles :

$$\langle \hat{\rho}(\theta_1) \hat{\rho}(\theta_2) \cdots \hat{\rho}(\theta_q) \rangle_w = (-1)^q \frac{1}{L^q} \frac{1}{Z[w]} \frac{\delta}{\delta w(\theta_1)} \frac{\delta}{\delta w(\theta_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta w(\theta_q)} Z[w], \quad (4.7)$$

**Cumulants et fluctuations.** On définit les **fluctuations des charges et des distributions de rapidité** par :

$$\delta \hat{Q}[f] \doteq \hat{Q}[f] - \langle \hat{Q}[f] \rangle_w, \quad \delta \hat{\rho}(\theta) \doteq \hat{\rho}(\theta) - \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w. \quad (4.8)$$

Les **cumulants** d'ordre  $q$  des **charges** s'obtiennent comme dérivées fonctionnelles du logarithme de la fonction de partition :

$$\langle \delta \hat{Q}[f_1] \delta \hat{Q}[f_2] \cdots \delta \hat{Q}[f_q] \rangle_w = (-1)^q \mathcal{D}_{[f_1]} \mathcal{D}_{[f_2]} \cdots \mathcal{D}_{[f_q]} \ln(Z[w]), \quad (4.9)$$

et la cumulant d'ordre  $q$  des **distribution de rapidité** comme dérivées ponctuelles du logarithme de la fonction de partition

$$\langle \delta \hat{\rho}(\theta_1) \delta \hat{\rho}(\theta_2) \cdots \delta \hat{\rho}(\theta_q) \rangle_w = (-1)^q \frac{1}{L^q} \frac{\delta}{\delta w(\theta_1)} \frac{\delta}{\delta w(\theta_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta w(\theta_q)} \ln(Z[w]). \quad (4.10)$$

**Moyennes et corrélations d'ordre faible.** À l'ordre 1, les **moments non centrés** sont simplement les **valeurs moyennes**. Les moyennes des charges (4.6) et des distributions de rapidité (4.7) peuvent être exprimées comme dérivées fonctionnelles respectivement ponctuelles du logarithme de la fonction de partition :

$$\langle \hat{Q}[f_1] \rangle_w = -\mathcal{D}_{[f_1]} \ln(Z[w]), \quad \langle \hat{\rho}^{(S)}(\theta_1) \rangle_w = -\frac{1}{L} \frac{\delta \ln(Z[w])}{\delta w(\theta_1)}. \quad (4.11)$$

Pour un état donné, la fonction  $\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w$  n'est rien d'autre que la distribution de rapidités par unité de longueur.

À l'ordre 2, les **cumulants** correspondent aux **corrélations**. On constate, à partir des expressions ci-dessus (4.11), que les fluctuations des charges (4.9) et des distributions de rapidité (4.10) peuvent être obtenues comme dérivées fonctionnelles respectivement ponctuelles des moyennes :

$$\langle \delta \hat{Q}[f_1] \delta \hat{Q}[f_2] \rangle_w = -\mathcal{D}_{[f_2]} \langle \hat{Q}[f_1] \rangle_w, \quad \langle \delta \hat{\rho}(\theta_1) \delta \hat{\rho}(\theta_2) \rangle_w = -\frac{1}{L} \frac{\delta \langle \hat{\rho}^{(S)}(\theta_1) \rangle_w}{\delta w(\theta_2)} \quad (4.12)$$

Cette identité relie la fonction de corrélation des fluctuations aux dérivées fonctionnelles de la valeur moyenne : elle exprime une *susceptibilité fonctionnelle*, au sens où elle mesure la réponse linéaire d'une observable à une perturbation infinitésimale du poids  $w(\theta)$ . La susceptibilité s'identifie ainsi à la covariance entre charges généralisées, illustrant le principe de *fluctuation-réponse*.

**Notation susceptibilité et fluctuations.** Considérons deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$ . On définit la **susceptibilité** (ou **fonction de réponse croisée**),  $\chi_w[f_1, f_2]$  par

$$\chi_w[f_1, f_2] \doteq -\mathcal{D}_{[f_2]} \langle \hat{Q}[f_1] \rangle_w. \quad (4.13)$$

Cette fonction de réponse est reliée aux fluctuations dans le GGE. Plus précisément,  $\chi_w[f_1, f_2]$  vérifie

$$C_w[f_1, f_2] = \chi_w[f_1, f_2], \quad (4.14)$$

où les **corrélations à deux points**  $C_w(f_1, f_2)$ , défini par

$$C_w[f_1, f_2] \doteq \langle \hat{Q}[f_1] \hat{Q}[f_2] \rangle_w - \langle \hat{Q}[f_1] \rangle_w \langle \hat{Q}[f_2] \rangle_w, \quad (4.15)$$

quantifie les fluctuations dans le GGE.

L'équation précédente, qui relie la réponse linéaire aux fluctuations, est une relation très importante qui sera utilisée pour des tests numériques dans cette section.

**Lien entre distributions de rapidités et observables locales.** À partir de l'équation (4.1), on remarque que

$$\hat{Q}[\delta(\cdot - \theta)/L] = \hat{\rho}(\theta). \quad (4.16)$$

Les moments non centrés des charges (4.6) ainsi que leurs cumulants (4.9) deviennent alors ceux des distributions de rapidités (respectivement (4.7) et (4.10)), en prenant les fonctions  $f_i(\theta) = \delta(\cdot - \theta_i)/L$ .

Cela est en accord avec le fait que les dérivées fonctionnelles deviennent :

$$\mathcal{D}_{[\delta(\cdot - \theta)]} F[g] \doteq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[g + \epsilon \delta(\cdot - \theta)] - F[g]}{\epsilon}, \quad (4.17)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial g(\theta)}. \quad (4.18)$$

L'équation (4.13) s'écrit dans ce cas, en utilisant la notation de l'équation (4.17) et la propriété (4.4) :

$$\chi_w(\theta, \theta') \doteq -\frac{1}{L} \frac{\delta \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w}{\delta w(\theta')} \quad (4.19)$$

où l'on a utilisé la notation  $\chi_w(\theta, \theta') = \chi_w \left[ \frac{\delta(\cdot - \theta)}{L}, \frac{\delta(\cdot - \theta')}{L} \right]$ .

L'équation (4.15), quant à elle, s'écrit :

$$C_w(\theta, \theta') \doteq \langle \hat{\rho}(\theta) \hat{\rho}(\theta') \rangle_w - \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w \langle \hat{\rho}(\theta') \rangle_w \quad (4.20)$$

où l'on utilise la notation  $C_w(\theta, \theta') = C_w \left[ \frac{\delta(\cdot - \theta)}{L}, \frac{\delta(\cdot - \theta')}{L} \right]$ .

La relation (4.14), qui relie la susceptibilité aux corrélations, implique alors :

$$C_w(\theta, \theta') = \chi_w(\theta, \theta'). \quad (4.21)$$

## 4.1.2 Poids spectral et formulation du GGE

**Rappel : Lien entre poids spectral et multiplicateurs de Lagrange.** Dans la formulation fonctionnelle, un **GGE** est entièrement déterminé par une fonction arbitraire  $w(\theta)$ , appelée *poids spectral*. Cette description est donc plus générale que l'approche usuelle, où l'on considère uniquement une combinaison discrète de charges locales (ou quasi-locales). Dans ce cas particulier, le poids spectral prend la forme :

$$w(\theta) = \sum_i \beta_i f_i(\theta), \quad (4.22)$$

ce qui ramène le **GGE** à la forme standard définie par les *multiplicateurs de Lagrange*  $\beta_i$ . Les fonctions régulières  $f_i$  sont des densités spectrales associées aux charges  $\hat{Q}_i$ , de sorte que les charges soient bien  $\hat{Q}_i = \hat{Q}[f_i]$ .

**Lien entre dérivées fonctionnelles, paramétrisation spectrale et moments des charges.** Alors on peut considérer la variation fonctionnelle d'une fonctionnelle  $F[w]$  par rapport à la direction  $f_i$ , ce qui revient à effectuer une perturbation  $w \rightarrow w + \epsilon f_i$ , autrement dit  $\beta_i \rightarrow \beta_i + \epsilon$ . La dérivée fonctionnelle de  $F[w]$  dans la direction  $f_i$  s'écrit alors :

$$\mathcal{D}_{[f_i]} F[w] \doteq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\sum_j (\beta_j + \delta_{ij}\epsilon) f_j] - F[\sum_j \beta_j f_j]}{\epsilon}, \quad (4.23)$$

$$= \left. \frac{\partial F}{\partial \beta_i} \right)_{\beta_{j \neq i}}. \quad (4.24)$$

Cette expression est valable tant que les fonctions  $f_j$  sont considérées comme fixées. En revanche, si les  $f_j$  peuvent varier, alors la différentiation par rapport aux  $\beta_j$  ne correspond plus à une dérivée fonctionnelle au sens strict. En injectant cette expression dans l'expression du *moment non-centré* (4.6) nous l'obtenons l'expression (2.11).

Avec la condition (4.22) et la définition (4.23), nous pouvons donc réécrire les moments non centrés (des charges) (4.6) et les cumulants (des charges) (4.9), et donc les moyennes (4.11) et corrélations (4.12), en remplaçant les dérivées fonctionnelles  $\mathcal{D}_{[f_i]}$  par  $\left. \frac{\partial}{\partial \beta_i} \right)_{\beta_{j \neq i}}$ .

De plus en remarquant que  $\left. \frac{\partial w(\theta)}{\partial \beta_i} \right)_{\beta_{j \neq i}} = f_i(\theta)$ , alors la dérivé selon  $\beta_i$  s'écrit

$$\begin{aligned} - \left. \frac{\partial}{\partial \beta_i} \right)_{\beta_{j \neq i}} &= - \int d\theta \left. \frac{\partial w(\theta)}{\partial \beta_i} \right)_{\beta_{j \neq i}} \frac{\delta}{\delta w(\theta)}, \\ &= L \int d\theta f_i(\theta) \left( - \frac{1}{L} \frac{\delta}{\delta w(\theta)} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Nous pouvons donc, encore une fois, en utilisant (4.25), réécrire les moments non centrés des charges (4.6) en fonction des moments non centrés des distributions de rapidités (4.7) :

$$\langle \hat{Q}[f_1] \cdots \hat{Q}[f_q] \rangle_w = L^q \int d\theta_1 f_1(\theta_1) \cdots \int d\theta_q f_q(\theta_q) \langle \hat{\rho}(\theta_1) \cdots \hat{\rho}(\theta_q) \rangle_w, \quad (4.26)$$

De même, nous pouvons réécrire les cumulants des charges (4.9) à partir des cumulants des distributions de rapidités (4.10) :

$$\langle \delta \hat{Q}[f_1] \cdots \delta \hat{Q}[f_q] \rangle_w = L^q \int d\theta_1 f_1(\theta_1) \cdots \int d\theta_q f_q(\theta_q) \langle \delta \hat{\rho}(\theta_1) \cdots \delta \hat{\rho}(\theta_q) \rangle_w. \quad (4.27)$$

Ces relations sont naturelles. En particulier, on retiendra que les moyennes et les corrélations des charges s'écrivent :

$$\langle \hat{Q}[f] \rangle_w = L \int d\theta f(\theta) \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w, \quad (4.28)$$

$$\langle \delta \hat{Q}[f_1] \delta \hat{Q}[f_2] \rangle_w = L^2 \iint d\theta_1 d\theta_2 f_1(\theta_1) \langle \delta \hat{\rho}(\theta_1) \delta \hat{\rho}(\theta_2) \rangle_w f_2(\theta_2). \quad (4.29)$$

### 4.1.3 Vérification numérique : Echantillonnage du GGE

On souhaite tester notre capacité à échantillonner le GGE avec l'algorithme de Metropolis. Pour cela, nous utiliserons le principe de *fluctuation-réponse*, défini à l'équation (4.21). Deux approches numériques seront comparées : (i) le calcul direct des corrélations de la distribution de rapidité à l'aide d'un algorithme de Monte Carlo basé sur les états propres du modèle de LL, et (ii) le calcul indirect à partir de la susceptibilité.

Pour introduire les notations employées dans cette sous-section, rappelons brièvement quelques éléments du chapitre (1) :

#### Rappel : Cadre de Bethe pour le modèle de Lieb–Liniger.

*Équations de Bethe.* Les états propres du gaz de LL sont décrits par les équations de Bethe (1.75) :

$$L\theta_a + \sum_{b \neq a} 2 \arctan\left(\frac{\theta_a - \theta_b}{g}\right) = 2\pi I_a, \quad (4.30)$$

où  $\{I_a\}$  est un ensemble d'entiers (ou demi-entiers) caractérisant une configuration de type Bethe .

*État fondamental.* Dans le cas du fondamental, les nombres quantiques sont distribués de façon régulière selon (1.76) :

$$I_a = a - \frac{N+1}{2}, \quad a \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (4.31)$$

*Distribution de rapidité.* La configuration  $\{\theta_a\}$  définit une densité de rapidité, notée  $\rho(\theta)$  (cf Eq (1.80)) :

$$\rho(\theta) = \frac{1}{L} \sum_{a=1}^N \delta(\theta - \theta_a). \quad (4.32)$$

**Méthode numérique de Monte Carlo.** Nous travaillons avec  $\hbar = m = g = 1$ .

*Paramètres fixés.* On fixe un poids spectral , par exemple quadratique

$$w(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2, \quad (4.33)$$

et on fixe les paramètres physiques du système :  $N = 7$  particules,  $L = 10$  la taille du système et  $g = 1$  l'intensité des interactions.

*Initialisation : état fondamental.*

1. On commence par proposer une configuration d'entier de Bethe  $\{I_a\}$  correspondant à l'état fondamental. Celle-ci est donnée par l'équation (4.31).
2. On résout ensuite les équations de Bethe (4.30) associées afin d'obtenir l'ensemble des rapidités  $\{\theta_a\}$ .
3. Ces rapidités définissent une distribution empirique de rapidité, notée  $\rho^e(\theta)$ , que l'on enregistre sous la forme (4.32). Pour rendre cette distribution exploitable numériquement, on la binne sur une grille discrète  $\{\theta_a\}$ .

*À chaque étape du Monte Carlo :*

1. Une nouvelle configuration  $\{I'_a\}$  est proposée en faisant varier chaque entier  $I_a$  aléatoirement de  $\pm 1$ , c'est-à-dire en posant  $I'_a = I_a \pm 1$ , le signe étant choisi au hasard.
  - Si les  $\{I'_a\}$  sont tous distincts, on continue ; sinon, on propose une autre configuration.
2. À partir de cette configuration  $\{I'_a\}$ , on résout les équations de Bethe pour obtenir un nouvel ensemble de rapidités  $\{\theta'_a\}$ .

3. La nouvelle configuration est ensuite soumise au critère de Metropolis afin de décider si elle est acceptée ou rejetée. L'acceptation se fait avec une probabilité  $\min\left(1, e^{-(\sum_a w(\theta_a) - w(\theta'_a))}\right)$ , en se basant sur l'énergie associée à la fonction  $w$ .
  - Si la configuration est acceptée, on met à jour les ensembles :  $\{I_a\} \leftarrow \{I'_a\}$  et  $\{\theta_a\} \leftarrow \{\theta'_a\}$ .
4. Enfin, on enregistre la  $i$ -ième distribution de rapidité empirique,  $\rho_i^e$ , associée à la configuration  $\{\theta_a\}$ , en la discrétilisant sur une grille.

Un grand nombre d'itérations est réalisé, conduisant à la génération  $N_{\text{conf}}$  de configurations (non nécessairement distinctes), permettant d'assurer une bonne convergence statistique des moyennes.

*Cela permet de construire numériquement :*

- la moyenne empirique du profil de distribution de rapidité, notée  $\langle \rho^e(\theta) \rangle$ , obtenue en effectuant la moyenne sur l'ensemble des configurations  $N_{\text{conf}}$  générées par la méthode de Monte Carlo. Il faudra vérifier que  $N_{\text{conf}}$  suffisamment grand pour pourvoir faire l'approximation

$$\langle \rho^e(\theta) \rangle \approx \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w, \quad (4.34)$$

- les fluctuations locales de la densité de rapidité définies par  $\delta\rho_i^e(\theta) = \rho_i^e(\theta) - \langle \rho^e(\theta) \rangle$ , obtenues en soustrayant à chaque profil sa valeur moyenne,
- la corrélation empirique, est obtenue en calculant, sur l'ensemble des configurations Monte Carlo, la moyenne du produit des fluctuations locales aux points  $\theta$  et  $\theta'$  :

$$C_w(\theta, \theta') \approx \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{conf}}} \delta\rho_k^e(\theta) \delta\rho_k^e(\theta'). \quad (4.35)$$

Autrement dit, il s'agit de la covariance empirique des profils générés, et l'approximation devient une égalité dans la limite  $N_{\text{conf}} \rightarrow \infty$ .

*Vérification de la convergence numérique.* Les algorithmes de Monte Carlo produisent des estimations bruitées des grandeurs physiques, notamment de la densité de rapidité moyenne empirique  $\langle \rho^e(\theta) \rangle$ . Cette quantité présente une incertitude statistique (écart-type) entre deux réalisations indépendantes de la procédure de Monte Carlo. Pour réduire ce bruit, il est nécessaire un grand nombre ( $N_{\text{conf}}$ ) de configuration de  $I_a$ , ce qui alourdit le coût numérique du calcul.

Pour  $N_{\text{conf}} = 2 \cdot 10^6$ , nous avons répété dix fois l'algorithme de Monte Carlo afin de calculer l'écart-type des moyennes  $\text{std}(\langle \rho^e(\theta) \rangle)$ . On observe que, pour les valeurs de  $\theta$  où  $\langle \rho^e(\theta) \rangle$  est petite, le rapport

$$\frac{\text{std}(\langle \rho^e(\theta) \rangle)}{\langle \rho^e(\theta) \rangle} \quad (4.36)$$

est plus grand que pour les valeurs de  $\theta$  où  $\langle \rho^e(\theta) \rangle$  est plus grande. Ainsi, pour quantifier globalement la convergence, nous considérons la moyenne de ce rapport sur l'ensemble des  $\theta$ . Dans notre cas, cette quantité est inférieure à 2%, ce qui montre que  $\langle \rho^e(\theta) \rangle$  constitue une très bonne approximation de la moyenne  $\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w$ . Ainsi, pour  $N_{\text{conf}} = 2 \cdot 10^6$ , les équations (4.34) et (4.35) sont bien vérifiées.

Dans la suite, pour plus de lisibilité, nous noterons  $\langle \rho^e(\theta) \rangle$  par  $\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w$  et la matrice obtenue empiriquement par  $C_w(\theta, \theta')$  (Fig 4.1).

**Calcul numérique de la susceptibilité par dérivée fonctionnelle.** Pour évaluer la susceptibilité linéaire, définie comme la dérivée de  $\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w$  par rapport à une perturbation infinitésimale du poids spectral  $w(\theta')$ , on adopte une approche numérique fondée sur les différences finies. La procédure est la suivante :

1. On modifie localement le potentiel  $w(\theta)$  en y ajoutant une perturbation delta centrée en  $\theta'$ , selon :

$$w(\theta) \rightarrow w(\theta) + \varepsilon \delta_{\theta'}(\theta), \quad (4.37)$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre de perturbation.

2. On relance ensuite le Monte Carlo avec ce potentiel perturbé, ce qui permet d'estimer la nouvelle moyenne  $\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_{w+\varepsilon\delta_{\theta'}}$ .
3. Enfin, on évalue la dérivée fonctionnelle par la formule de différence finie suivante :

$$\chi_w(\theta, \theta') \approx -\frac{1}{L} \cdot \frac{\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_{w+\varepsilon\delta_{\theta'}} - \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w}{\varepsilon}. \quad (4.38)$$

Cette méthode permet ainsi d'approcher numériquement la matrice de réponse linéaire entre les coordonnées spectrales  $\theta$  et  $\theta'$ , que l'on peut comparer à la matrice de corrélation obtenue précédemment.

*Difficultés numériques :* Le calcul de la susceptibilité nécessite d'estimer la dérivée fonctionnelle de la densité de rapidité par rapport au poids  $w$ .

Cependant, pour que cette approximation soit valable,  $\varepsilon$  doit être suffisamment petit. Or, si  $\varepsilon$  est trop petit, la différence  $\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_{w+\varepsilon\delta_{\theta'}} - \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w$  devient du même ordre que leur bruit statistique, et la dérivée est alors noyée dans le bruit.

Pour limiter l'erreur statistique, on peut dans un premier temps ajuster à la fois le nombre de configuration (on  $N_{\text{conf}}$ ) et la valeur de  $\varepsilon$ , de sorte que l'écart-type de plusieurs  $\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w$  soit au moins dix fois plus petit que la variation  $\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_{w+\varepsilon\delta_{\theta'}} - \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w$ , de sorte que (4.38) soit vérifié.

Nous avons généré  $N_{\text{conf}} = 2 \cdot 10^6$  configurations et calculé les susceptibilités avec un paramètre de perturbation  $\varepsilon = 10^{-1}$ . Et (4.38) était vérifier, la matrice obtenue sera notée  $\chi_w(\theta, \theta')$  (Fig 4.1).

**Comparaison numérique.** Les deux matrices obtenues présentent des différences. Pour quantifier leur similarité, on calcule une *norme relative* en utilisant la norme 2 :

$$\frac{\|C_w - \chi_w\|_2}{\|C_w\|_2} = 13,5\%$$

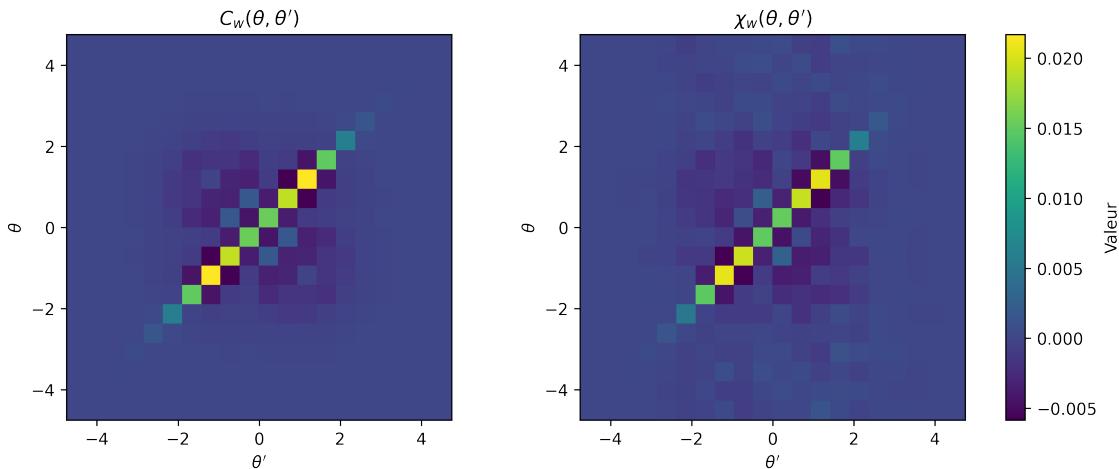


FIGURE 4.1 – Comparaison des matrices pour  $\langle \hat{\rho}(\theta)\hat{\rho}(\theta') \rangle_w$  : à gauche la corrélation  $C_w(\theta, \theta')$  ; à droite la susceptibilité  $\chi_w(\theta, \theta')$  obtenue par dérivée fonctionnelle

**Discussion.** Les figures montrent une concordance satisfaisante entre les deux matrices. L'écart résiduel visible sur la troisième image, d'environ 13,5%, provient principalement des erreurs statistiques liées à la méthode Monte Carlo et de l'approximation par différences finies dans le calcul de la dérivée fonctionnelle.

Le principe de fluctuation-réponse dans le cadre du GGE étant supposé valide, l'objectif de cette analyse n'est pas de le confirmer, mais de vérifier que l'on reste en capacité d'échantillonner correctement les fluctuations à partir de  $\chi_w(\theta, \theta')$  avec un nombre fini de configurations. L'erreur relative observée est donc acceptable et reflète les limites statistiques de l'expérience numérique.

La précision peut être améliorée en augmentant le nombre de configurations  $N_{\text{conf}}$  :

- Le calcul de  $C_w(\theta, \theta')$  est en  $O(N_{\text{conf}})$  et celui de  $\chi_w(\theta, \theta')$  en  $O(N_{\text{conf}} \cdot N_{\text{cell}})$ , où  $N_{\text{cell}}$  est le nombre de points de la grille en  $\theta$ .
- Pour  $N_{\text{conf}} = 2 \times 10^6$  et  $N_{\text{cell}} = 20$ , la matrice  $C_w(\theta, \theta')$  se calcule en environ 6 minutes et  $\chi_w(\theta, \theta')$  en environ 2 heures.
- On peut envisager  $N_{\text{conf}} = 10^7$  :  $C_w(\theta, \theta')$  en 30 minutes et  $\chi_w(\theta, \theta')$  en 10 heures.

Pour de petits  $N_{\text{conf}}$ , la perturbation  $\varepsilon$  doit être augmentée pour que les fluctuations calculées ne soient pas noyées dans le bruit. Si  $\varepsilon$  est trop grand, on observe toujours la structure globale de  $\chi_w(\theta, \theta')$ , mais avec une amplitude réduite :

$$\chi_w(\theta, \theta') \approx \alpha C_w(\theta, \theta'), \quad 0 < \alpha < 1$$

Par exemple, pour  $N_{\text{conf}} = 10^5$ , la mesure (4.36) est de 8% ; on peut utiliser  $N_{\text{cell}} = 100$  et  $\varepsilon = 1$ , et obtenir :

$$\frac{\|\alpha C_w - \chi_w\|_2}{\|\alpha C_w\|_2} \sim 27\%$$

avec  $\alpha = 0.078$  et pour une temps de calcul de 26 min (Fig 4.2).

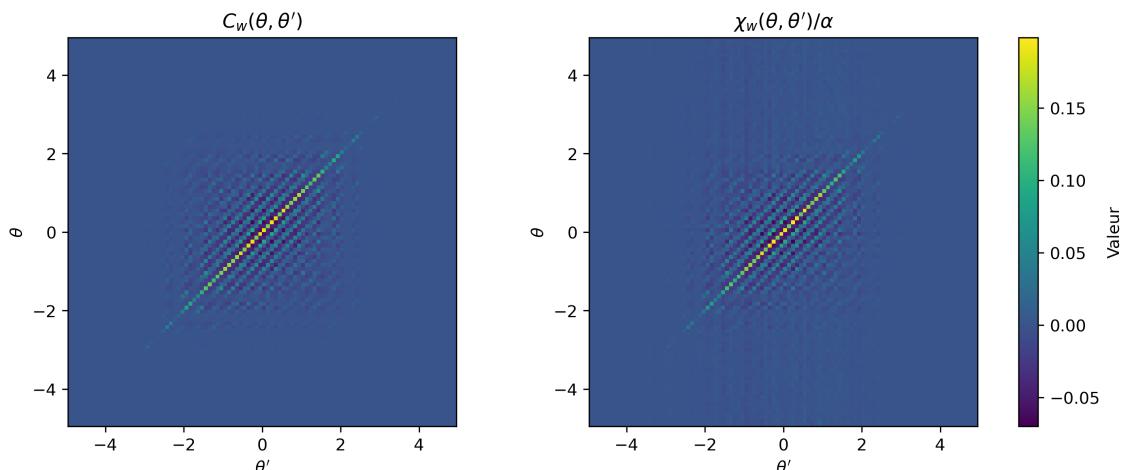


FIGURE 4.2 – Comparaison des matrices pour  $\langle \hat{\rho}(\theta)\hat{\rho}(\theta') \rangle_w$  : à gauche la corrélation  $C_w(\theta, \theta')$  ; à droite la susceptibilité  $\chi_w(\theta, \theta')/\alpha$  obtenue par dérivée fonctionnelle  
*Qu'est-ce qu'il illustre cette figure ?  
 Quels paramètres changent par rapport à la Fig. 4.1 ?*

Physiquement,  $\alpha < 1$  reflète le fait que pour un nombre limité de configurations, la réponse calculée par différences finies sous-estime légèrement l'amplitude des fluctuations par rapport à la covariance brute  $C_w$ , mais la structure globale reste correcte. En augmentant  $N_{\text{conf}}$ ,  $\alpha \rightarrow 1$  et  $\chi_w(\theta, \theta')$  converge vers  $C_w(\theta, \theta')$  dans la limite des grandes statistiques.

## 4.2 Limite thermodynamique, structure variationnelle et susceptibilité

### 4.2.1 Susceptibilité spectrale et structure variationnelle de l'entropie

**Rappel : Approche thermodynamique (Yang–Yang et énergie généralisée).** Dans l'approximation thermodynamique, le système est décrit en termes de grandeurs macroscopiques, notamment par la distribution de rapidité  $\rho(\theta)$ . Dans l'équation (2.45), nous avons vu que, dans la limite thermodynamique, la moyenne d'un observable s'écrit :

$$\langle \hat{O} \rangle_w = \frac{\int \mathcal{D}\rho e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])} \langle \hat{O} \rangle_{[\rho]}}{\int \mathcal{D}\rho e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}}. \quad (4.39)$$



où  $S_{YY}$  est l'entropie de Yang–Yang et  $\mathcal{W}$  l'énergie généralisée, introduites respectivement dans (2.43) et (2.44), que l'on rappelle.

$$S_{YY}[\rho] = \int d\theta [\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho)](\theta), \quad (4.40)$$

$$\mathcal{W}[\rho] = \int w(\theta) \rho(\theta) d\theta, \quad (4.41)$$

où  $\rho_s(\theta)$  désigne la *densité d'états* liée à  $\rho$  par les équations de Bethe (1.88) :

$$2\pi\rho_s = 1 + \Delta \star \rho. \quad (4.42)$$

La quantité  $\langle \hat{O} \rangle_{[\rho]}$  désigne la valeur propre de l'observable associée aux états caractérisés par la distribution de rapidité  $\rho$ .

**Rappel : Condition variationnelle du GGE.** À l'équilibre thermodynamique ; dans la limite  $L \rightarrow \infty$ , la distribution  $\rho_{eq}(\theta)$  satisfait l'équation (2.32), et coïncide alors avec la moyenne de l'opérateur de densité de rapidité :

$$\rho_{eq}(\theta) = \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w, \quad (4.43)$$

représentant ainsi la densité continue de quasi-particules dans l'état stationnaire d'équilibre.

Dans le cadre du GGE continu, l'état macroscopique est entièrement déterminé par une densité spectrale  $\rho(\theta)$  qui maximise l'entropie de Yang–Yang,  $S_{YY}[\rho]$ , sous la contrainte de conservation des charges généralisées. Le poids spectral  $w(\theta)$  est alors fixé. Comme nous l'avons vu (au chapitre (2)), la condition d'équilibre (2.54) peut s'écrire sous la forme variationnelle :

$$\left. \frac{\delta S_{YY}[\rho]}{\delta \rho(\theta)} \right|_{\rho=\rho_{eq}} = w(\theta). \quad (4.44)$$

**Dérivée fonctionnelle.** On peut considérer l'équation d'équilibre comme une relation implicite définissant le poids spectral  $w$  comme une fonctionnelle de la distribution de rapidité  $\rho$ . La dérivée fonctionnelle de cette relation s'écrit :

$$\left. \frac{\delta w(\theta)}{\delta \rho(\theta')} \right|_{\rho=\rho_{eq}} = \left. \frac{\delta^2 S_{YY}[\rho]}{\delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta')} \right|_{\rho=\rho_{eq}}, \quad (4.45)$$

où le membre de droite représente l'opérateur hessien (ou courbure fonctionnelle) de l'entropie de Yang–Yang, évalué à l'équilibre. Cet opérateur est négatif défini, conformément à l'interprétation de  $S_{YY}$  comme une entropie à maximiser.

**Inversion.** On en déduit que la réponse de  $\rho$  à une variation infinitésimale du poids spectral  $w$  est donnée par l'inverse fonctionnel de (4.45) :

$$-\frac{1}{L} \left. \frac{\delta \rho(\theta)}{\delta w(\theta')} \right|_{\rho=\rho_{eq}} = - \left( L \left. \frac{\delta^2 S_{YY}[\rho]}{\delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta')} \right|_{\rho=\rho_{eq}} \right)^{-1}. \quad (4.46)$$

La susceptibilité fonctionnelle  $\chi_w(\theta, \theta')$ , définie dans (4.19), coïncide avec cette expression.

## 4.2.2 Fluctuations gaussiennes autour de l'équilibre thermodynamique

Une autre approche pour accéder aux fluctuations de la distribution de rapidité  $\rho = \rho_{eq} + \delta\rho$  en étudiant

$$(S_{YY} - \mathcal{W})[\rho_{eq} + \delta\rho] = \exp\{\mathcal{D}_{[\delta\rho]}\} ((S_{YY} - \mathcal{W})[\rho_{eq}]).$$

Dans la limite thermodynamique, l'intégrale fonctionnelle définissant le GGE est dominée par les configurations proches du point-selle  $\rho_{\text{eq}}$ . Cette approximation, dite gaussienne, repose alors sur le développement quadratique de l'action effective en  $\delta\rho$ .

On peut alors développer l'action  $S_{YY} - \mathcal{W}$  à second ordre autour de ce point d'équilibre :

$$(S_{YY} - \mathcal{W})[\rho] \approx (S_{YY} - \mathcal{W})[\rho_{\text{eq}}] - \frac{1}{2} \int d\theta d\theta' \delta\rho(\theta) \mathcal{H}(\theta, \theta') \delta\rho(\theta') + \mathcal{O}(\delta\rho^3) \quad (4.47)$$

où  $\mathcal{H}(\theta, \theta') = - \left. \frac{\delta^2(S_{YY} - \mathcal{W})[\rho]}{\delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta')} \right|_{\rho=\rho_{\text{eq}}}$  est la *hessienne* de l'action effective.

Sous l'approximation gaussienne autour de l'état d'équilibre (en particulier lorsque  $L \rightarrow \infty$ , cf. Fig. 4.3), la covariance des fluctuations s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta') \rangle_w &= \frac{\int \mathcal{D}\delta\rho \delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta') \exp \left[ -\frac{L}{2} \iint d\theta_1 d\theta_2 \delta\rho(\theta_1) \mathcal{H}(\theta_1, \theta_2) \delta\rho(\theta_2) \right]}{\int \mathcal{D}\delta\rho \exp \left[ -\frac{L}{2} \iint d\theta_1 d\theta_2 \delta\rho(\theta_1) \mathcal{H}(\theta_1, \theta_2) \delta\rho(\theta_2) \right]}, \\ &= (L\mathcal{H})^{-1}(\theta, \theta'), . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ces relations posent les bases d'une description quantifiée des fluctuations de densité de rapidité, essentielles pour tester expérimentalement la validité du GGE, comprendre les corrélations à longue distance, et accéder aux propriétés dynamiques fines des systèmes intégrables en une dimension.

Ce développement quadratique justifie le caractère gaussien des fluctuations dans le régime thermodynamique, et sera à la base des extensions hydrodynamiques de type MFT (Macroscopic Fluctuation Theory).

**Structure de  $\mathcal{H}$ .** L'opérateur hessien de l'action effective se décompose naturellement comme la différence entre deux contributions fonctionnelles :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(\mathcal{W})} - \mathcal{H}^{(S_{YY})}, \quad (4.49)$$

$$\text{où } \mathcal{H}^{(\mathcal{W})}(\theta, \theta') \doteq \left. \frac{\delta^2 \mathcal{W}[\rho]}{\delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta')} \right|_{\rho=\rho_{\text{eq}}}, \text{ et } \mathcal{H}^{(S_{YY})}(\theta, \theta') \doteq \left. \frac{\delta^2 S_{YY}[\rho]}{\delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta')} \right|_{\rho=\rho_{\text{eq}}}. \quad (4.50)$$

L'opérateur inverse  $\mathcal{H}^{-1}$  est défini par la relation fonctionnelle :

$$(\mathcal{H}^{-1} \cdot \mathcal{H})(\theta, \theta') = (\mathcal{H} \cdot \mathcal{H}^{-1})(\theta, \theta') = \int d\theta'' \mathcal{H}(\theta, \theta'') \mathcal{H}^{-1}(\theta'', \theta') = \delta(\theta - \theta'), \quad (4.51)$$

où  $\delta(\theta - \theta')$  désigne la distribution de Dirac, et non une variation.

On remarque tout d'abord que  $\mathcal{H}^{(\mathcal{W})} = 0$ , car l'énergie généralisée par unité de longueur s'écrit simplement comme un couplage linéaire en  $\rho$  avec un poids spectral  $w(\theta)$  fixé (4.41).

En revanche, la courbure fonctionnelle provient entièrement de l'entropie de Yang–Yang, donnée par l'expression (4.40).

Ainsi, l'opérateur de fluctuation  $\mathcal{H}$  coïncide avec la hessienne négative de l'entropie  $S_{YY}$ , et détermine complètement la covariance spectrale à l'équilibre.

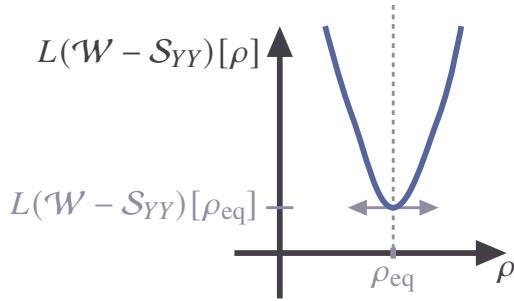


FIGURE 4.3 – Représentation schématique de l'action effective  $L(S_{YY}[\rho] - W[\rho])$  en fonction de la distribution de rapidité  $\rho$ . La configuration la plus probable, (associée à  $\rho_{\text{ed}}$ ) , correspond au minimum (point-selle) de l'action. Les fluctuations autour de l'équilibre sont modélisées par un développement quadratique de l'action, conduisant à une approximation gaussienne des fluctuations de  $\rho$ . Pour faciliter la compréhension, on représente ici  $\rho$  comme une variable unidimensionnelle, alors qu'en réalité il s'agit d'une fonction définie dans un espace de dimension infinie.

### 4.2.3 Expression de la Hessienne

En calculant la dérivée fonctionnelle seconde de l'entropie de Yang–Yang, définie en (4.40), dans la direction d'une variation  $\delta\rho$ , on obtient l'opérateur hessien  $\mathcal{H}^{(S_{YY})}$ . L'opérateur hermien  $\mathcal{H}$  est donné par  $\mathcal{H} = -\mathcal{H}^{(S_{YY})}$ , et se décompose comme suit :

$$\mathcal{H}(\theta, \theta') = \mathcal{D}(\theta, \theta') + \mathcal{V}(\theta, \theta') \quad (4.52)$$

La contribution diagonale locale, notée  $\mathcal{D}(\theta, \theta')$ , présente une singularité caractéristique d'une structure de type Fermi–Dirac. Elle reflète l'exclusion statistique effective induite par l'intégrabilité, y compris dans un système bosonique. Elle s'écrit :

$$\mathcal{D}(\theta, \theta') = \left( \frac{1}{\rho_{s,eq}(\theta)\nu_{eq}(\theta)(1-\nu_{eq}(\theta))} \right) \delta(\theta, \theta'). \quad (4.53)$$

La partie régulière symétrique, notée  $\mathcal{V}(\theta, \theta')$ , regroupe quant à elle les contributions non locales issues des interactions entre quasi-particules.

$$\mathcal{V}(\theta, \theta') = \left. \begin{aligned} & - \left( \frac{1}{\rho_{s,eq}(\theta)(1-\nu_{eq}(\theta))} + \frac{1}{\rho_{s,eq}(\theta')(1-\nu_{eq}(\theta'))} \right) \frac{\Delta(\theta - \theta')}{2\pi} \\ & + \int d\theta'' \frac{1}{\rho_{s,eq}(\theta'')(1-\nu_{eq}(\theta''))} \frac{\Delta(\theta - \theta'')}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

avec  $\rho_{eq}(\theta) = \nu_{eq}(\theta)\rho_{s,eq}(\theta)$ .

### 4.2.4 Fluctuations autour de la distribution moyenne et inversion de la Hessienne

On cherche alors  $\mathcal{H}^{-1}$  aussi sous la forme

$$\mathcal{H}^{-1}(\theta, \theta') = \mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta') + \mathcal{B}(\theta, \theta') \quad (4.55)$$

avec une partie diagonale sans interaction

$$\mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta') = (\rho_{s,eq}(\theta)\nu_{eq}(\theta)(1-\nu_{eq}(\theta)))\delta(\theta, \theta') \quad (4.56)$$

tel que

$$(\mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{D})(\theta, \theta') = (\mathcal{D} \cdot \mathcal{D}^{-1})(\theta, \theta') = \int d\theta'' \mathcal{D}(\theta, \theta'') \mathcal{D}^{-1}(\theta'', \theta') = \delta(\theta - \theta'), \quad (4.57)$$

avec une partie symétrique régulière avec interaction  $\mathcal{B}$ .

Les équations (4.52), (4.55), (4.51) et (4.57), il vient que cette série d'équivalences

$$\begin{cases} \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}^{-1} = \delta \\ \mathcal{H}^{-1} \cdot \mathcal{H} = \delta \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} \mathcal{H} \cdot \mathcal{B} = -\mathcal{V} \cdot \mathcal{D}^{-1} \\ \mathcal{B} \cdot \mathcal{H} = -\mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{V} \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} \mathcal{B} = -\mathcal{H}^{-1} \cdot \mathcal{V} \cdot \mathcal{D}^{-1} \\ \mathcal{B} = -\mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{V} \cdot \mathcal{H}^{-1} \end{cases}$$

Du fait que tous ces fonctions ( $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{V}$  et inverse) soit symétriques alors l'équation ci-dessus sont tous équivalentes et  $\mathcal{B}$  étant donc symétrique. Donc en utilisant (4.54) et (4.56)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\theta, \theta') &= -(\mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{V} \cdot \mathcal{H}^{-1})(\theta, \theta'), \\ &= (\rho_{s,eq}(\theta) \nu_{eq}(\theta) (1 - \nu_{eq}(\theta))) \times \\ &\quad \left\{ \frac{\Delta}{2\pi} \star \left[ \left( \frac{1}{\rho_{s,eq}(\theta) (1 - \nu_{eq}(\theta))} + \frac{1}{\rho_{s,eq}(\cdot) (1 - \nu_{eq}(\cdot))} \right) \mathcal{H}^{-1}(\cdot, \theta') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\nu_{eq}(\cdot)}{\rho_{s,eq}(\cdot) (1 - \nu_{eq}(\cdot))} \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \mathcal{H}^{-1}(\cdot, \theta') \right) \right] \right\}(\theta), \end{aligned} \quad (4.58)$$

où  $(f \star g)(x)$  désigne la convolution  $\int f(x-t) g(t) dt$ . En injectant cette dernière équation et (4.55), dans (4.48), il vient que une équation implicite :

$$(L\mathcal{H})^{-1}(\theta, \theta') = (L\mathcal{D})^{-1}(\theta, \theta') + \left. \begin{aligned} &\frac{1}{L} (\rho_{s,eq}(\theta) \nu_{eq}(\theta) (1 - \nu_{eq}(\theta))) \times \\ &\quad \left\{ \frac{\Delta}{2\pi} \star \left[ \left( \frac{1}{\rho_{s,eq}(\theta) (1 - \nu_{eq}(\theta))} + \frac{1}{\rho_{s,eq}(\cdot) (1 - \nu_{eq}(\cdot))} \right) \mathcal{H}^{-1}(\cdot, \theta') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\nu_{eq}(\cdot)}{\rho_{s,eq}(\cdot) (1 - \nu_{eq}(\cdot))} \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \mathcal{H}^{-1}(\cdot, \theta') \right) \right] \right\}(\theta), \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

Cette expression explicite des corrélations permet d'évaluer les fluctuations des grandeurs macroscopiques comme le nombre total de particules ou l'énergie, en les exprimant comme des observables linéaires de la densité  $\rho(\theta)$ . Une autre dérivation alternative est en annexe C.

## 4.2.5 Vérification numérique thermodynamique : inversion de la courbure et dérivée fonctionnelle

Dans cette sous-section, nous proposons de tester l'expression (4.59).

### 4.2.5.1 Méthode.

**Calcul de la matrice hermitienne.** On considère un gaz de bosons unidimensionnels intégrable, décrit par l'équation de Bethe, dans un état d'équilibre généralisé caractérisé par la *taille du système*  $L$ , l'*intensité d'interaction*  $g$ , et un *poids spectral* fixé  $w(\theta)$ .

À partir de ces paramètres, on résout numériquement les *équations TBA* (cf (2.57)), ce qui permet d'obtenir les grandeurs thermodynamiques d'équilibre :

- la *distribution de rapidité*  $\rho_{eq}(\theta)$ ,
- la *densité d'états*  $\rho_{s,eq}(\theta)$
- et la *fonction d'occupation*  $\nu_{eq}(\theta) = \rho_{eq}(\theta) / \rho_{s,eq}(\theta)$ .

Ces quantités permettent ensuite de construire :

- la contribution diagonale singulière  $\mathcal{D}(\theta, \theta')$ , définie par (4.53), ainsi que son inverse  $\mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta')$  (voir (4.56));
- la contribution régulière non locale  $\mathcal{V}(\theta, \theta')$ , définie par (4.54).

La matrice de fluctuations  $\mathcal{H}(\theta, \theta')$ , définie par (4.52), est obtenue en combinant ces deux contributions. Son inverse  $(L\mathcal{H})^{-1}(\theta, \theta')$  s'obtient en inversant directement la matrice  $L\mathcal{H}(\theta, \theta')$ .

La partie avec interaction,  $\mathcal{B}(\theta, \theta')/L$  (définie par (4.58)), peut être déterminée de deux façons équivalentes : soit en soustrayant la partie sans interaction (diagonale),  $(L\mathcal{D})^{-1}(\theta, \theta')$ , de l'inverse  $(L\mathcal{H})^{-1}(\theta, \theta')$ , soit directement en utilisant (4.58).

**Susceptibilité.** Le membre de gauche de l'équation (4.46), à savoir

$$\chi_w(\theta, \theta') \left( = -\frac{1}{L} \frac{\delta \rho_{\text{eq}}(\theta)}{\delta w(\theta')} \right),$$

peut être évalué numériquement sans avoir à recourir à l'entropie de Yang–Yang. Il suffit en effet de calculer la variation de la *distribution de rapidité à l'équilibre*  $\rho_{\text{eq}}(\theta)$  en réponse à une petite perturbation  $\varepsilon$  du *poids spectral*  $w(\theta')$  (exactement (4.38)).

#### 4.2.5.2 Dans une équilibre thermodynamique généralisé

*Paramètres fixés.* On fixe un *poids spectral*, par exemple quadratique

$$w(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2, \quad (4.60)$$

et on fixe les paramètres physiques du système :  $L = 10$ , et  $g = 1$ .

Le nombre de particule  $N$ , est fixé par ces paramètres contrairement pour les simulations de la partie Monte-Carlos fais dans la section précédent.

On fait ce calcules numériques avec  $\varepsilon = 10^{-10}$  suffisamment petit pour que l'approximation (4.38) soit vérifiée.

**Comparaison.** Nous obtenons deux matrices  $(L\mathcal{H})^{-1}(\theta, \theta')$  et  $\chi_w(\theta, \theta')$  (Fig (4.4)). Afin de tester la validité l'expression (4.59), nous quantifions leur similarité, en calculant une *norme relative* en utilisant la norme 2 :

$$\frac{\|(L\mathcal{H})^{-1} - \chi_w\|_2}{\|(L\mathcal{H})^{-1}\|_2} = 0.015\%$$

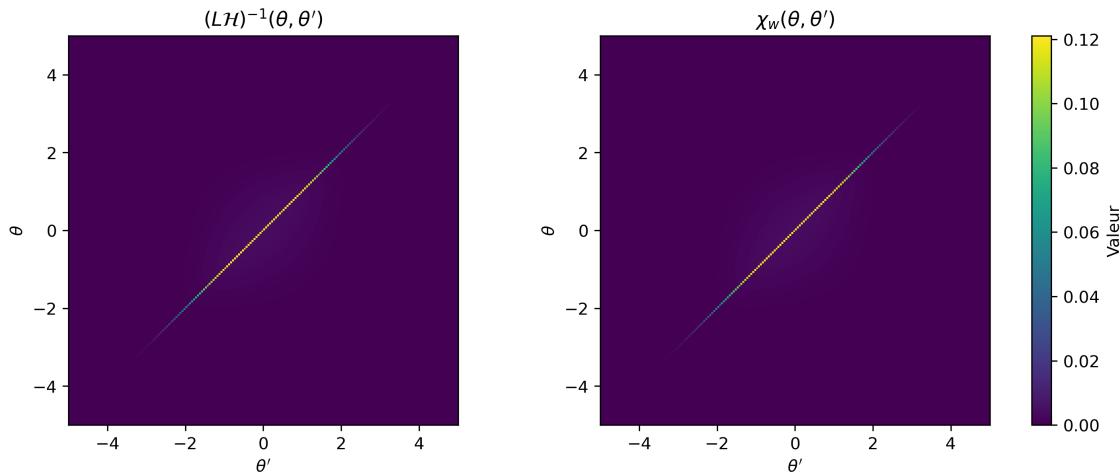


FIGURE 4.4 – Vérification numérique dans le régime thermodynamique. Gauche :  $(L\mathcal{H})^{-1}$  par inversion de la courbure. Droite :  $\chi_w$  par dérivée fonctionnelle.

**Conclusion.** Nous avons vérifié la formule (4.59) de deux manières. D'une part, en évaluant directement à un *poids spectral*  $w$  fixé  $(L\mathcal{H})^{-1}$ ; d'autre part, en calculant le différentiel de la distribution de rapidité par rapport au poids spectral  $\chi_w$ , c'est-à-dire en appliquant le principe de fluctuation–réponse. Pour le *poids spectral* et les paramètres considérés, les deux approches donnent des résultats numériques concordants, ce qui constitue une validation de la formule (4.59).

Dans un second temps, il est naturel de vouloir tester ce principe pour différentes formes du *poids spectral*  $w$ . Dans le cas général du GGE,  $w$  appartient à un espace de dimension infinie. Afin de réduire cette complexité, nous nous restreignons à une sous-famille à deux paramètres, en nous plaçant dans le cadre de l'équilibre thermique. Ce choix permet de comparer explicitement les fluctuations de grandeurs thermodynamiques macroscopiques, telles que le nombre total de particules et l'énergie cinétique.

#### 4.2.5.3 Vérification numérique thermique : énergie et nombre de particules

Nous testons à présent notre expression des fluctuations dans le cas particulier de l'équilibre thermique. Le système est supposé en contact avec un bain à température  $T$  et potentiel chimique  $\mu$ .

**Calcul de la matrice hermitienne.** Dans la section 2.2.2, nous avons présenté les différentes étapes de la résolution numérique de l'équation de TBA. Nous reprenons ici le formalisme de l'équation (4.22), dans lequel le poids spectral s'écrit comme une combinaison linéaire :

$$w(\theta) = \beta_0 f_0(\theta) + \beta_2 f_2(\theta), \quad (4.61)$$

où  $f_0(\theta) = 1$  et  $f_2(\theta) = \frac{1}{2}m\theta^2$  correspondent aux densités locales associées aux charges conservées. Les coefficients  $\beta_0 = -\beta\mu$  et  $\beta_2 = \beta (= (k_B T)^{-1})$  sont fixés de manière à imposer une température  $T$  et un potentiel chimique  $\mu$ .

Le **paramètre de Lieb** et la **température réduite**, définis respectivement en (2.61) et (2.64),

$$\gamma = \frac{mg}{\hbar^2 n}, \quad t = \frac{\hbar^2}{m\beta g^2},$$

permettent également de paramétriser le couple  $(T, \mu)$  (voir section 2.2.2).

*Paramètres fixes.* Dans toute la suite, nous travaillons avec les conventions  $\hbar = m = k_B = 1$ , ainsi que  $L = 100$  et  $g = 1$ .

*Choix des paramètres.* Nous considérons le point

$$\gamma = 10^{-1.7}, \quad t = 89.125,$$

qui est représenté par un **point rouge** dans le diagramme de phase du modèle de LL, présenté en figure 4.5a.

À partir de ce paramètre, et suivant la même procédure numérique que dans la sous-section précédente, on obtient la distribution de rapidité à l'équilibre  $\langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w \equiv \rho_{\text{eq}}(\theta)$ , ainsi que les composantes de l'inverse de l'opérateur hessien  $(L\mathcal{H})^{-1}$  : la contribution diagonale sans interaction  $(L\mathcal{D})^{-1}$  (Fig. 4.5b) et la contribution non locale issue des interactions  $\mathcal{B}/L$  (Fig. 4.5c).

Plus précisément, dans la figure 4.5b, on représente

$$\frac{\mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta')}{\delta(\theta - \theta')} \quad (= \rho_{s,\text{eq}}(\theta) \nu_{\text{eq}}(\theta) (1 - \nu_{\text{eq}}(\theta))),$$

la fonction delta dans (4.56) étant approximée numériquement par un pas de discréétisation, la matrice  $\mathcal{D}^{-1}$  est proportionnelle à ce pas.

Enfin, en faisant varier  $t$  (*i.e.* la température  $T$ ), on répète l'ensemble des calculs précédents. Les régimes ainsi obtenus sont indiqués par des **points bleus** dans le diagramme de phase (figure 4.5a).

**Corrélation des observables thermodynamiques.** Conformément à l'équation (4.29), nous calculons les fluctuations du nombre total de particules ainsi que celles de l'énergie totale, respectivement données par :

$$C_w[f_0, f_0] = L^2 \iint d\theta d\theta' f_0(\theta) (L\mathcal{H})^{-1}(\theta, \theta') f_0(\theta'), \quad (4.62)$$

$$C_w[f_2, f_2] = L^2 \iint d\theta d\theta' f_2(\theta) (L\mathcal{H})^{-1}(\theta, \theta') f_2(\theta'). \quad (4.63)$$

Pour chaque régime simulé (correspondant aux **points bleus** et **rouges** sur la figure 4.5a), nous évaluons numériquement les quantités  $C_w[f_0, f_0]$  et  $C_w[f_2, f_2]$ , qui représentent les fluctuations extensives des observables associées aux charges  $\hat{Q}_0$  (nombre de particules) et  $\hat{Q}_2$  (énergie cinétique).

Ces résultats sont représentés par des **points orange** dans la figure 4.6, illustrant l'évolution des fluctuations en fonction du régime thermodynamique du système.

**Susceptibilité des observables thermodynamiques.** En parallèle, pour chaque régime simulé (correspondant aux **points bleus** et **rouges** de la figure 4.5a), et conformément à l'équation (4.28), nous calculons les moyennes des charges associées au nombre total de particules et à l'énergie cinétique totale, données respectivement par :

$$\langle \hat{Q}[f_0] \rangle_w = L \int d\theta f_0(\theta) \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w, \quad (4.64)$$

$$\langle \hat{Q}[f_2] \rangle_w = L \int d\theta f_2(\theta) \langle \hat{\rho}(\theta) \rangle_w. \quad (4.65)$$

Nous souhaitons ensuite approximer les susceptibilités thermodynamiques définies par :

$$\chi_w[f_i, f_i] = - \left. \frac{\partial \langle \hat{Q}[f_i] \rangle_w}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_j \neq i \text{ fixés}}. \quad (4.66)$$

Pour cela, nous procédons à une variation infinitésimale du poids spectral  $w$  :

- Une variation infinitésimale  $\epsilon_\mu$  du potentiel chimique  $\mu$  correspond à une perturbation du poids spectral de la forme :

$$w \rightarrow w - \beta \epsilon_\mu f_0.$$

On résout alors numériquement les équations TBA pour ce nouveau poids, afin de calculer :

$$\langle \hat{Q}[f_0] \rangle_{w-\beta \epsilon_\mu f_0}.$$

- On effectue ensuite une variation infinitésimale  $\epsilon_\beta$  de l'inverse de la température, de sorte que la combinaison  $(\beta + \epsilon_\beta)(\mu + \epsilon_\mu) = \beta\mu$  reste constante, maintenant ainsi  $\beta_0$  fixe. Cela conduit à une variation du poids spectral de la forme :

$$w \rightarrow w + (\beta + \epsilon_\beta)(-\epsilon_\mu f_0 + f_2).$$

On résout à nouveau les équations TBA pour obtenir :

$$\langle \hat{Q}[f_2] \rangle_{w+(\beta+\epsilon_\beta)(-\epsilon_\mu f_0+f_2)}.$$

Ces simulations permettent d'estimer numériquement les susceptibilités :

$$\chi_w[f_0, f_0] \approx \frac{\langle \hat{Q}[f_0] \rangle_{w-\beta \epsilon_\mu f_0} - \langle \hat{Q}[f_0] \rangle_w}{\beta \epsilon_\mu}, \quad (4.67)$$

$$\chi_w[f_2, f_2] \approx - \frac{\langle \hat{Q}[f_2] \rangle_{w+(\beta+\epsilon_\beta)(-\epsilon_\mu f_0+f_2)} - \langle \hat{Q}[f_2] \rangle_w}{\epsilon_\beta}. \quad (4.68)$$

Ces approximations numériques sont représentées par des **points bleus** dans la figure 4.6, et permettent de confronter les résultats issus de la dérivée fonctionnelle avec ceux provenant de la réponse directe à une perturbation du poids spectral.

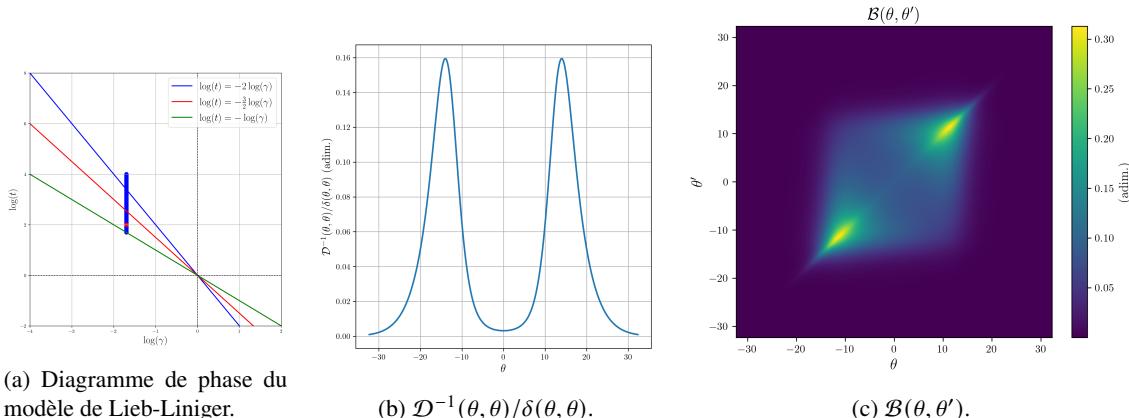


FIGURE 4.5 – (a) Diagramme de phase du modèle de Lieb–Liniger à l'équilibre thermique. Différents régimes asymptotiques sont séparés par des transitions progressives. Les points bleus représentent les fluctuations calculées numériquement pour différentes températures. Les coordonnées sont données par  $\gamma = \frac{mg}{\hbar^2 n}$  et  $t = \frac{k_B T}{mg^2/\hbar^2}$ . Les régimes choisis pour les simulations sont indiqués par les points bleus ( $\gamma = 10^{-1.7}$  constant) et le point rouge correspond à  $t = 89.125$ , utilisé dans les sous-figures (b) et (c). (b) Représentation de la diagonale  $D^{-1}(\theta, \theta)/\delta(\theta, \theta)$ . (c) Représentation en niveaux de couleur de la partie régulière  $\mathcal{B}$  des fluctuations  $\delta\rho$  pour  $t = 89.125$  et  $\gamma = 10^{-1.7}$  (point rouge dans (a)).

**Comparaison avec les dérivées thermodynamiques.** Les résultats obtenus à partir de l'analyse quadratique de l'action (fluctuations de  $\rho$ ) sont comparés aux fluctuations extraites directement par différentiation des observables thermodynamiques  $\langle \hat{Q} \rangle_w$  et  $\langle \hat{H} \rangle_w$ . Ces comparaisons sont présentées dans la Fig. 4.6 et révèlent une excellente concordance. On le quantifie avec :

$$\left| \frac{C_w[f_0, f_0] - \chi_w[f_0, f_0]}{C_w[f_0, f_0]} \right| < 0.004\%, \quad \left| \frac{C_w[f_2, f_2] - \chi_w[f_2, f_2]}{C_w[f_2, f_2]} \right| < 0.14\%.$$

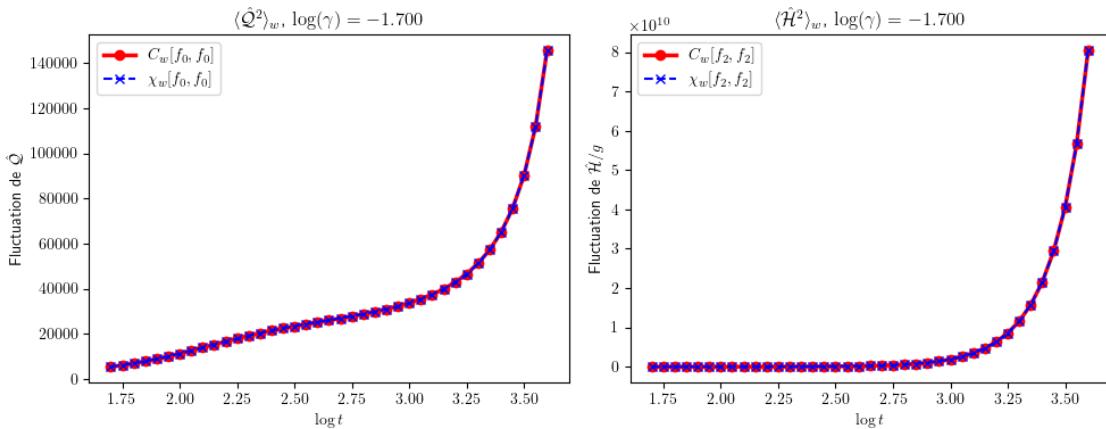


FIGURE 4.6 – Comparaison numérique entre  $C_w[f_0, f_0]$  et  $\chi_w[f_0, f_0]$  et entre  $C_w[f_2, f_2]$  et  $\chi_w[f_2, f_2]$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les fluctuations de la distribution de rapidité dans les états GGE, en mettant en lumière le lien fondamental entre corrélations et réponse linéaire.

Nous avons d'abord introduit le formalisme général des GGE, dans lequel les observables macroscopiques sont dérivées fonctionnellement du potentiel conjugué  $w(\theta)$ . Dans ce cadre, nous avons montré que

la matrice de susceptibilité spectrale  $\chi_w(\theta, \theta')$  décrit à la fois la réponse linéaire de la densité spectrale moyenne à une perturbation infinitésimale du potentiel, et les corrélations entre fluctuations de la densité, conformément au principe de fluctuation-réponse. En utilisant ce lien nous avons ~~vus~~ que nous pouvons échantillonner GGE.

Nous avons ensuite approfondi l'étude de la limite thermodynamique, où les fluctuations autour de l'état d'équilibre deviennent gaussiennes. Dans cette approximation, les susceptibilités s'expriment comme l'inverse de la courbure fonctionnelle de l'entropie de Yang-Yang, formalisée par l'opérateur hessien  $\mathcal{H}^{(S_{YY})}$ . Nous avons donné une formulation explicite de cet opérateur, ainsi que de sa matrice inverse.

Enfin, nous avons relié ces objets locaux à des susceptibilités globales via une projection sur les fonctions test  $f_i(\theta)$ , en considérant le poids spectral  $w(\theta)$  comme une combinaison linéaire des charges  $\hat{Q}_i$ . Ce formalisme nous a permis d'interpréter la dérivée de l'observable  $\langle \hat{Q}_i \rangle_w$  par rapport au multiplicateur de Lagrange  $\beta_i$  comme une dérivée fonctionnelle projetée de la matrice  $\chi_w(\theta, \theta')$ , et d'en valider la structure par une comparaison numérique explicite sur l'énergie et le nombre de particules.

Nous avons vérifié numériquement la validité de notre formule des fluctuations (Eq. (4.59)), ce qui confirme son exactitude et sa pertinence dans le cadre du formalisme développé.



# Chapitre 5

## Dispositif expérimental

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Le dispositif expérimental</b>	<b>72</b>
5.1.1	Système laser et contrôle de fréquence	72
5.1.2	Production et refroidissement des atomes	72
5.1.3	Piégeage magnétique sur puce	74
5.1.4	Génération de potentiels modulés	77
<b>5.2</b>	<b>Sélection spatiale avec DMD</b>	<b>78</b>
5.2.1	Motivation et principe	78
5.2.2	Mise en place technique	79
5.2.3	Utilisation dans les protocoles	80
<b>5.3</b>	<b>Techniques d'imagerie et d'analyse</b>	<b>81</b>
5.3.1	Imagerie par absorption	81
<b>5.4</b>	<b>Expériences et protocoles étudiés</b>	<b>82</b>
5.4.1	Expansion longitudinale	82
5.4.2	Sonde locale de distribution de rapidité	87

---

### Introduction

Ce chapitre présente l'expérience utilisée pour étudier les gaz unidimensionnels de rubidium ultra-froids. Nous décrivons l'architecture du dispositif, les méthodes d'imagerie et d'analyse, ainsi que les protocoles expérimentaux auxquels j'ai participé. Le développement initial du refroidissement et du piégeage avant la puce a été réalisé par d'anciens doctorants [Jac12; Fan14; Joh16]. La mise en place du piégeage sur la puce a été réalisé par d'anciens doctorants [Jac12; Fan14; Joh16; Sch19; Dub24]. La mise en place du système de sélection spatiale à l'aide d'un DMD a été initiée par Léa Dubois [Dub24], alors en première année de doctorat à mon arrivée. Mon travail s'est concentré principalement sur la prise de données, l'analyse et la participation à certaines expériences spécifiques telles que l'étude de l'expansion longitudinale et la mesure de la distribution de rapidité locale.

**Objectif du chapitre** Ce chapitre a pour objectif de fournir une présentation synthétique et structurée du dispositif expérimental utilisé pour étudier la dynamique de gaz de Bose unidimensionnels ultra-froids. Il constitue un socle indispensable pour comprendre les protocoles expérimentaux développés au cours de ma thèse et les analyses présentées dans les chapitres suivants.

**Architecture générale** Nous présentons d'abord l'architecture complète de l'expérience, depuis la production des atomes jusqu'à leur imagerie, en passant par les étapes de refroidissement, de piégeage magnétique sur puce, de manipulation optique, et de génération de potentiels. Cette description s'accompagne d'une mise en contexte des contributions historiques au dispositif.

**Contributions successives et personnelles** Une attention particulière est portée à la répartition chronologique des contributions. Les étapes initiales (source atomique, **Piège Magnéto-Optique (PMO)**, piège DC pour **Direct Current** en anglais) ont été développées par d'anciens doctorants. La mise en place du piégeage 1D sur puce ainsi que l'utilisation du **DMD** pour la sélection spatiale ont été réalisées au cours de la thèse de L. Dubois [Dub24]. Mon travail s'inscrit dans cette continuité et concerne principalement la prise de données, l'analyse de protocoles dynamiques, ainsi que la participation à certaines opérations de maintenance et d'optimisation du système.

**Rôle du dispositif dans la thèse** Ce dispositif permet d'explorer des phénomènes hors équilibre dans des gaz quantiques 1D. Il constitue une plateforme particulièrement adaptée à l'étude de protocoles d'expansion, de sondes locales, ou de dynamiques guidées par **GHD**, qui sont au cœur de cette thèse.

## 5.1 Le dispositif expérimental

### 5.1.1 Système laser et contrôle de fréquence

**Laser maître 1 : référence de fréquence** La stabilité en fréquence de l'ensemble des faisceaux employés dans l'expérience est assurée par un laser à cavité étendue conçu selon un schéma du **Systèmes de Référence Temps-Espace (SYRTE)**. Ce laser est verrouillé par spectroscopie d'absorption saturée sur la raie D2 du  $^{87}\text{Rb}$ , en ciblant le croisement des transitions  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2, 3\rangle$ . Ce verrouillage fournit la référence absolue de fréquence à partir de laquelle les autres sources laser sont synchronisées par battement optique.

**Laser repompeur** Le faisceau de repompage, qui transfère les atomes tombé dans l'état  $|F = 1\rangle$  vers l'état  $|F = 2\rangle$ , est produit par une diode **Distributed Feedback (DFB)**. Sa fréquence est décalée de 6 GHz par rapport au maître 1 par battement optique et mélange avec un oscillateur à micro-ondes de 6.6 GHz. Une diode Fabry-Perot, injectée par la **DFB**, élève la puissance de sortie au-delà de 200 mW.

**Laser maître 2 : source principale de manipulation** Un second laser à cavité étendue, est verrouillé par battement optique sur la fréquence du maître 1. L'émission est amplifiée au moyen d'un amplificateur à semi-conducteur évasé (**Tapered Amplifier (TA)**), fournissant plus de 1 W en sortie. Le faisceau ainsi produit est distribué vers différentes parties de l'installation expérimentale : alimentation du piège magnéto-optique **PMO**, formation de la mélasse optique, réalisation du pompage optique, imagerie par absorption, génération du faisceau de sélection.

**Gestion des fréquences et polarisations** Les faisceaux peuvent être interrompus soit à l'aide d'obturateurs mécaniques, soit via des modulateurs acousto-optiques (en anglais **Acousto-Optic Modulator (AOM)**). Ces derniers offrent un temps de commutation beaucoup plus court que les systèmes mécaniques, car ils permettent de sélectionner uniquement un ordre de diffraction non nul et d'éteindre en quelque ms le faisceau en interrompant l'alimentation radiofréquence. L'intensité et la polarisation sont réglées via des cubes séparateurs (**Polarizing Beam Splitter (PBS)**) associés à des lames demi-onde, fixes ou motorisées. Ce dispositif offre une grande souplesse pour adapter la configuration optique aux différentes étapes de l'expérience.

**Note** Une présentation plus exhaustive du montage laser et de son système de verrouillage est disponible dans la thèse de A.Johnson[Joh16]. Le dispositif a été conservé dans son architecture d'origine tout au long de mes travaux, avec seulement un entretien régulier.

### 5.1.2 Production et refroidissement des atomes

Le dispositif expérimental permet de produire des gaz ultra-froids de rubidium, en vue d'obtenir des gaz unidimensionnels dans le régime quantique dégénéré. La séquence expérimentale suit un protocole établi, initialement développé par d'anciens doctorants (voir par exemple la thèse d'A. Johnson [Joh16]) et réoptimisé au début de la thèse de L. Dubois [Dub24] sous la supervision d'I. Bouchoule.

**Libération des atomes de rubidium** Les atomes de  $^{87}\text{Rb}$  sont émis à partir d'un dispositif appelé *dispenser*, placé directement dans l'enceinte à vide à proximité de la monture de la puce atomique. Un courant de 4.5 A y est appliqué pendant environ 5 s, ce qui génère un flux d'atomes thermiques dans la chambre à vide.

**Capture par le piège magnéto-optique (PMO)** Les atomes thermiques sont ralentis et confinés dans un piège magnéto-optique. Quatre faisceaux laser (dont deux réfléchis par la puce) combinés à un champ quadrupolaire magnétique produit par des bobines permettent de former un nuage atomique situé à quelques millimètres de la surface de la puce.

**Rapprochement vers la puce** Le nuage est rapproché de la surface de la puce en transférant le champ quadrupolaire des bobines vers un champ homogène produit par ces bobines, combiné au champ généré par le fil en forme de U de la puce (fil bleu, Fig. 5.2). Le courant dans ce fil est ajusté lentement de 3.6 A à 1.5 A, ce qui positionne le nuage à quelques centaines de micromètres de la surface.

**Mélasse optique** Après la capture dans le PMO, une étape de mélasse optique est appliquée pour refroidir davantage le nuage atomique, au-delà de la limite de Doppler. La mélasse optique repose sur l'utilisation de faisceaux laser légèrement désaccordés en fréquence par rapport à la résonance de la transition atomique utilisée pour le refroidissement et polarisés de manière appropriée, qui interagissent avec les atomes selon le mécanisme de refroidissement sub-Doppler.

Le principe physique est le suivant : les atomes en mouvement voient les faisceaux laser avec un décalage Doppler, ce qui modifie la probabilité d'absorption selon leur vitesse et leur position. Combiné avec les effets de polarisation (notamment les forces de type Sisyphus dans un champ de polarisation variable), cela crée un potentiel de friction optique qui ralentit les atomes. Contrairement au refroidissement Doppler standard, la mélasse optique permet de réduire l'énergie cinétique des atomes en dessous de la limite Doppler, atteignant des températures beaucoup plus basses.

Ainsi, cette étape permet d'obtenir un nuage plus dense et plus froid, condition essentielle pour les manipulations ultérieures et la formation de gaz unidimensionnels dans le régime quantique dégénéré.

**Pompage optique** Enfin, les atomes sont préparés dans l'état magnétique  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  par pompage optique. Un faisceau circulairement polarisé  $\sigma^+$ , résonant sur la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ , assure la polarisation du nuage (Fig 5.1).

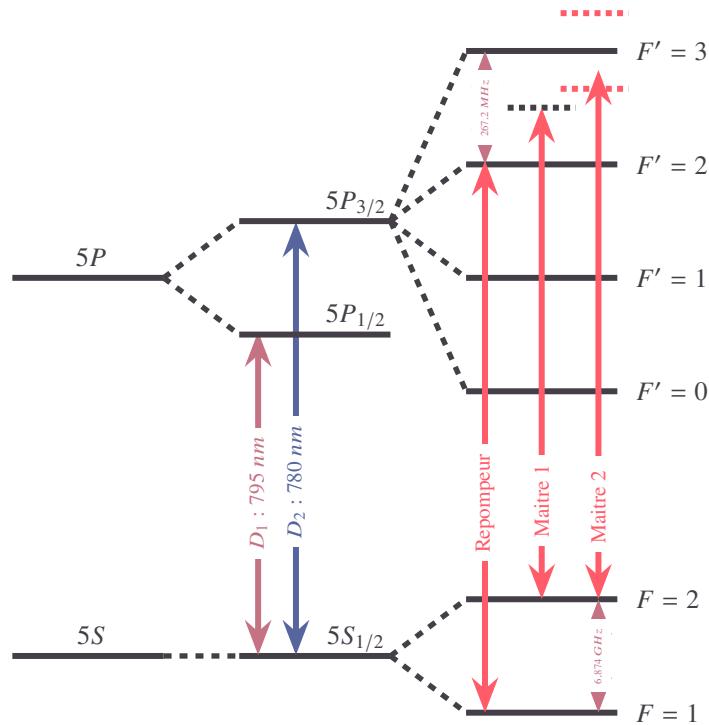


FIGURE 5.1 – Structure hyperfine (transitions D1 et D2) de l'atome de Rubidium  $^{87}\text{Rb}$ . Les longueurs d'onde des différents lasers utilisés dans l'expérience sont représentées en rouge vif

### 5.1.3 Piégeage magnétique sur puce

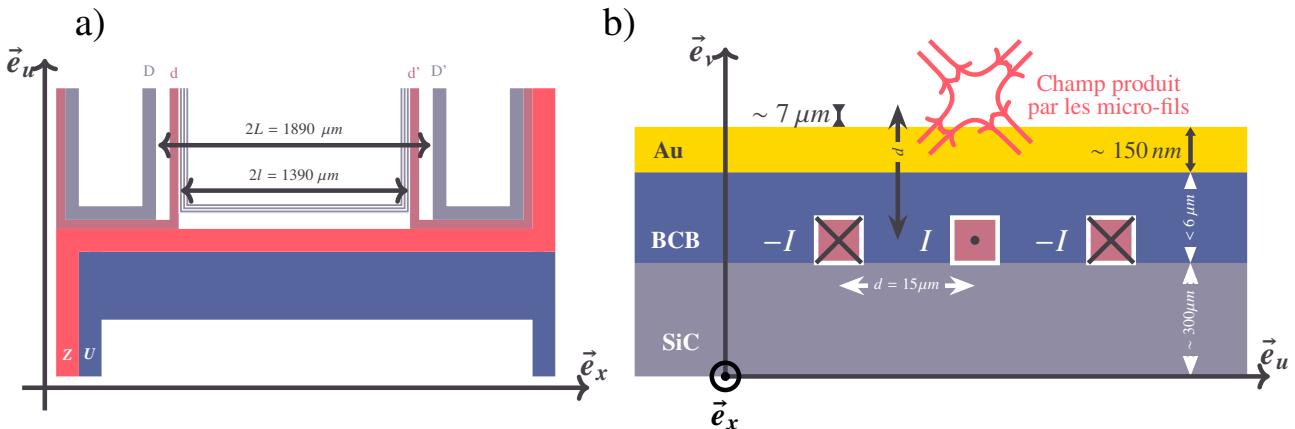


FIGURE 5.2 – a) **Zoom sur la zone d'intérêt.** Les fils U (bleu) et Z (rouge vif) créent des pièges magnétiques intermédiaires, les trois micro-fils jaunes forment le guide longitudinal, et les fils d/d' (marron) et D/D' (gris) assurent le confinement longitudinal. b) Schéma des différentes couches constituant la puce atomique.

#### 5.1.3.1 Piégeage magnétique sur puce

On peut créer des structures atomiques allongées en utilisant des techniques de piégeage optique. Par exemple, plusieurs groupes de recherche ont recours à des réseaux optiques bidimensionnels (2D) pour former un ensemble de tubes atomiques longitudinaux [KWW04; Tol+04; Par+04; Mor+03]. Ces réseaux 2D permettent de produire un grand nombre de systèmes atomiques quasi-unidimensionnels, offrant ainsi une plateforme idéale pour l'étude des gaz 1D. Ce type de dispositif est particulièrement adapté à l'étude de gaz faiblement denses, car les densités peuvent être moyennées sur l'ensemble des tubes. Cependant, avec ce type de configuration, on observe essentiellement une moyenne sur l'ensemble des tubes, ce qui rend

difficile l'étude des fluctuations locales dans chaque tube individuellement. Pour surmonter cette limitation, on utilise le piégeage à l'aide de puces atomiques.

**Principe général** Pour contourner cette contrainte, les puces atomiques offrent une solution efficace. Ces dispositifs microfabriqués intègrent de micro-fils parcourus par des courants, générant des champs magnétiques de géométrie contrôlée et permettant des confinements très forts [DCS99; For+98; Fol+00; RHH99]. La miniaturisation ainsi obtenue a permis l'obtention des premiers condensats de Bose-Einstein sur puce dès 2001 [Hän+01; Ott+01], et dès 2003 au LCF [Aus03]. Grâce à ces confinements, il devient possible d'étudier expérimentalement les propriétés d'un nuage unique de gaz de Bose unidimensionnel et ses fluctuations locales [Sch+05; Tre+06]..

**Structure de la puce utilisée** La puce utilisée au cours de cette expérience a été conçue en collaboration avec S. Bouchoule, A. Durnez et A. Harouri (**Centre de nanosciences et de nanotechnologies (C2N)**). Elle repose sur un substrat de carbure de silicium (**silicon carbide (SiC)**) sur lequel est déposé le circuit électrique. Ce dernier est recouvert d'une couche de résine **benzocyclobutène (BCB)**, aplatie par des cycles d'enduction et d'attaque plasma. Une fine couche d'or (**aurum (Au)**) ( $\sim 150 \text{ nm}$ ) est finalement évaporée afin de permettre l'utilisation de la puce comme miroir pour l'imagerie à 780 nm (Fig. 5.2 b)). La puce est soudée à l'indium sur une monture en cuivre inclinée à  $45^\circ$  par rapport à l'axe optique.

**Fils de piégeage et géométrie des champs** La puce atomique intègre plusieurs ensembles de conducteurs, chacun conçu pour une étape spécifique de la capture, du transport et du confinement des atomes. L'ensemble de la séquence de transfert, depuis le **PMO** jusqu'au guide unidimensionnel, repose sur une succession de configurations magnétiques générées par ces différents fils.

*Phase U : approche de la surface* Après la phase de pré-refroidissement, le nuage est initialement capturé dans un **PMO** situé au-dessus de la puce. Il est ensuite rapproché de la surface en transférant progressivement le champ quadrupolaire des bobines externes vers celui produit par un fil en forme de U intégré à la puce (fils bleus dans la Fig. 5.2 a)). Cette étape (*phase U*) est accompagnée d'un mélange optique et d'un pompage optique afin de préparer les atomes pour le piégeage magnétique.

*Phase Z : piège DC et refroidissement* À l'issue du pompage optique, les atomes sont transférés dans un piège magnétique combinant un courant continu circulant dans un fil en forme de Z (fil rouge vif) et un champ magnétique externe. Ce *piège (DC) pour Direct Current* assure un confinement transverse fort. Un refroidissement par évaporation radiofréquence, d'une durée d'environ 2.3 s, abaisse la température du nuage à environ  $1 \mu\text{K}$ , pour un nombre typique d'atomes de l'ordre de  $2.5 \times 10^5$ .

*Transfert vers le guide unidimensionnel* Une fois refroidi, le nuage est acheminé vers la zone expérimentale où trois micro-fils parallèles et symétriques (fils jaunes) parcourus par des courants alternatifs (**Alternating Current (AC)**) génèrent un guide magnétique unidimensionnel assurant le confinement transverse. Le confinement longitudinal est fourni par deux paires de fils :  $d/d'$  (marron) et  $D/D'$  (gris).

Le passage du piège **Direct Current (DC)** au guide 1D est réalisé de manière adiabatique grâce à cinq rampes linéaires de courant d'une durée comprise entre 50 et 60 ms chacune. Durant cette opération : (i) le courant dans le fil Z est progressivement réduit, (ii) le courant dans les micro-fils du guide est augmenté jusqu'à environ 50 mA, (iii) un courant initial de 0.5 A est appliqué dans les fils  $D$  et  $D'$ , puis ajusté pour maintenir fixe la position du centre de masse du nuage.

La configuration des fils de cette puce permet de réduire au minimum les oscillations résiduelles dans le guide. Sa géométrie assure également un découplage efficace entre la dynamique longitudinale et le confinement transverse. Ce dispositif, développé dans le cadre des thèses [Fan14; Sch19; Dub24], a été utilisé dans mes protocoles expérimentaux pour étudier l'expansion longitudinale et réaliser des mesures locales de la distribution de rapidité.

*Optimisation géométrique* La géométrie des conducteurs de la puce a été conçue pour réduire la dissipation thermique, limiter les couplages parasites et garantir une bonne symétrie des champs magnétiques. Dans la zone expérimentale, les atomes sont piégés à environ  $15 \mu\text{m}$  au-dessus des fils, soit  $8 \mu\text{m}$  au-dessus de la surface de la puce.

**Refroidissement final et accès au régime unidimensionnel** Une dernière phase de refroidissement par évaporation radiofréquence est effectuée directement dans le guide **AC**. Grâce à l'anisotropie marquée du piège, le confinement transverse atteint une fréquence  $\omega_{\perp}$  telle que l'énergie quantique  $\hbar\omega_{\perp}$  dépasse largement les énergies thermique et chimique du système. On atteint ainsi le régime unidimensionnel, caractérisé par la hiérarchie d'énergies :

$$k_B T, \mu \ll \hbar\omega_{\perp},$$

où  $\mu$  désigne le potentiel chimique et  $T$  la température du gaz.

Dans ce régime, le confinement transverse est assuré principalement par la géométrie des micro-fils et la présence de champs magnétiques externes, tandis que le confinement longitudinal, plus faible, est ajustable via une combinaison de champs magnétiques externes et de courants circulant dans des fils additionnels ( $d/d'$  et  $D/D'$ ).

Les gaz obtenus contiennent typiquement entre  $3 \times 10^3$  et  $1.5 \times 10^4$  atomes, pour des températures de l'ordre de 50 à 200 nK.

**Avantages du piégeage sur puce** Comparé aux systèmes utilisant des réseaux optiques 2D, le piégeage sur puce ne fournit qu'un seul tube, ce qui permet un meilleur accès aux fluctuations locales de densité et aux observables résolues spatialement. Ce type de dispositif est ainsi particulièrement adapté à l'étude de la thermodynamique et de la dynamique de gaz 1D isolés.

**Limitations et effets parasites** Parmi les limitations spécifiques au piégeage sur puce, on peut citer la rugosité des potentiels magnétiques liée aux imperfections des fils, pouvant induire des défauts parasites dans le confinement longitudinal. De plus, la stabilité du dispositif est sensible aux champs magnétiques externes parasites et aux échauffements provoqués par les courants continus, qui peuvent entraîner une déformation de la puce.

**Remarques expérimentales** Lorsque j'ai rejoint l'équipe, la première année thèse de L.Dubois touchait à sa fin et le dispositif expérimental était en fonctionnement stable. Les différentes étapes du cycle (dispenser, **PMO**, mélasse, pompage optique, piège **DC**, transfert vers le guide, évaporation finale) avaient été mises en place et optimisées pendant les premières années de sa thèse, sous la supervision d'I. Bouchoule. Le cycle expérimental complet dure environ 15 secondes. Une description plus détaillée peut être trouvée dans la thèse d'A. Johnson [Joh16].

Pendant ma première année, j'ai principalement participé à la prise de données en collaboration avec L. Dubois . Grâce à la qualité de son travail, le dispositif était globalement très fiable, ce qui a permis de mener des campagnes expérimentales riches sans intervention lourde. Néanmoins, cette stabilité avait pour contrepartie que je n'ai pas été directement impliqué dans la résolution des pannes complexes ou dans le reconditionnement complet de la manipulation, ce qui a limité ma formation sur les aspects de maintenance approfondie du dispositif.

En revanche, peu avant la fin de la thèse de L. Dubois et au début de ma troisième année, nous avons observé que le nombre d'atomes tombait à zéro. Il s'est avéré que les connecteurs du "dispenser", responsable de la libération de  $^{87}\text{Rb}$ , étaient rompus. Cette opération a été mise à profit pour installer un nouveau "dispenser". Cette opération nécessite une intervention assez lourde et implique de rompre le vide de l'enceinte. Comme la puce avait déjà plus de trois ans, nous avons décidé de la remplacer par une nouvelle puce atomique.

Cette opération a mobilisé plusieurs personnes du laboratoire et de ses partenaires : Sophie Bouchoule (**C2N**) et Anne-Lise Coutrot (**LCF**) ont participé à la manipulation et à la pose de la puce, tandis que j'ai pu assister à l'étuvage de l'enceinte à vide avec Florence Nogrette (**LCF**). Après cette intervention, j'ai suivi avec I. Bouchoule le réajustement progressif de la séquence de refroidissement : alignement des faisceaux, réglages de la mélasse, optimisation du chargement dans le piège (**DC**), puis dans le guide.

Cet épisode m'a permis de me confronter plus directement aux paramètres critiques du cycle d'évaporation et à la reprise d'une séquence complète. Toutefois, le départ de L. Dubois, qui maîtrisait tous les aspects de la manipulation, a marqué une rupture importante dans la continuité des savoir-faire pratiques liés à cette expérience.

### 5.1.4 Génération de potentiels modulés

**Champ des micro-fils.** Puisque les atomes, préparés dans l'état  $m_F = 2$  (l'axe de quantification étant donné par le champ magnétique  $\vec{B}$ ) par pompage optique. Le potentiel magnétique ressenti par les atomes est donné par  $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r})$ , où  $\vec{\mu}$  est le moment dipolaire magnétique de l'atome et  $\vec{B}(\vec{r})$  le champ magnétique total. Pour cet état, ce potentiel est proportionnel à  $|\vec{B}(\vec{r})|$ , de sorte que les atomes sont attirés vers les régions de champ magnétique minimal.

Les micro-fils, alignés selon l'axe horizontal  $\vec{e}_x$ , sont parcourus par des courants alternatifs déphasés  $\pm I$ , produisant le champ de confinement. Un fil central est parcouru par un courant  $I$ , tandis que deux fils latéraux portent des courants opposés  $-I$  (Fig. 5.2b).

**Champ d'Ioffe.** Afin d'éviter les pertes de Majorana [BS06] liées à la présence d'un champ nul, un champ longitudinal  $B_0 \vec{e}_x$  est ajouté, garantissant que le minimum de champ reste non nul.

**Fréquence de piégeage transverse.** Dans la configuration étudiée, les atomes sont confinés à  $d = 15 \mu\text{m}$  au-dessus de la puce, soit l'espacement entre deux micro-fils. Cette faible distance maximise le gradient de champ et donc la fréquence de piégeage transverse, qui s'écrit

$$\omega_{\perp}^{(0)} = \sqrt{\frac{\mu_B}{mB_0}} \frac{\mu_0 I}{2\pi d^2}$$

avec  $\mu_B$  le magnéton de Bohr,  $m$  la masse atomique et  $\mu_0$  la perméabilité du vide.

**Rugosité et suppression par modulation** Les imperfections géométriques des micro-fils engendrent des fluctuations parasites du champ magnétique le long du guide, créant une rugosité du potentiel [Kra+02; Est+04]. Pour la supprimer, les courants sont modulés à haute fréquence ( $\sim 400 \text{ KHz}$ ) [Tre+07; Jac12], bien au-delà des fréquences de piégeage. Dans ce régime, les atomes ne perçoivent que le potentiel moyen temporellement, où la composante parasite longitudinale est fortement réduite. Le confinement effectif reste harmonique, avec une fréquence transverse donnée par

$$\omega_{\perp} = \frac{\omega_{\perp}^{(0)}}{\sqrt{2}}. \quad (5.1)$$

**Découplage des confinements transverses et longitudinaux.** Les courants qui parcourent les fils  $D, D'$ ,  $d$  et  $d'$  sont orientés selon  $\vec{e}_u$ . Les champs magnétiques induits possèdent alors une composante selon  $\vec{e}_x$ , notée  $B_{\parallel}^x$ , et une composante selon  $\vec{e}_v$  (axe normal à la puce), notée  $B_{\parallel}^v$ . Si le champ selon  $\vec{e}_x$  est négligeable devant  $B_0$ , alors le potentiel moyen se sépare en une partie transverse et une partie longitudinale découpées :  $\langle V \rangle = V_{\perp}(y, z) + V_{\parallel}(x)$ .

**Potentiel longitudinal harmonique.** Dans la configuration où seuls les fils  $D$  et  $D'$  sont utilisés, le potentiel longitudinal peut, à l'ordre 2 en  $x$ , être considéré comme harmonique :

$$V_{\parallel}(x) = V_0 + \frac{1}{2} m \omega_{\parallel}^2 x^2, \quad (5.2)$$

On note  $2L = 1.89 \text{ mm}$  est la distance séparant les fils  $D$  et  $D'$  (Fig 5.2a)). Les courants circulant dans ces deux fils sont identiques et notés  $I_D = I_{D'}$ . Si la condition  $B_0 \gg \mu_0 I_D d / (\pi L)^2$  est vérifiée, alors le terme constant du potentiel vaut approximativement  $V_0 \simeq \mu_B B_0$ .

La pulsation longitudinale totale  $\omega_{\parallel}$  se décompose en deux contributions [Jac12] : (i) une pulsation  $\omega_{\parallel}^x = \sqrt{\frac{6d\mu_B\mu_0 I_D}{\pi L^4 m}}$  induite par le champ longitudinal  $B_{\parallel}^x$  et (ii) une pulsation  $\omega_{\parallel}^v = \sqrt{\frac{\mu_B}{mB_0} \frac{\mu_0 I_D}{\pi L^2}}$  liée au champ  $B_{\parallel}^v$ . Pour des courants  $I > 1A$ , on a  $\omega_{\parallel}^v \gg \omega_{\parallel}^x$ , et ainsi :

$$\omega_{\parallel} \propto \frac{I_D}{\sqrt{B_0} L^2}.$$

La fréquence longitudinale est donc réglée expérimentalement en ajustant  $I_D$ .

Avec les dimensions caractéristiques de la puce et des fils, il est possible d'atteindre des confinements longitudinaux de fréquence  $f_{\parallel} = \omega_{\parallel}/2\pi$  allant jusqu'à  $\sim 150 H_z$ , la limite étant imposée par le chauffage des fils pour  $I_D \leq 4 A$ .

*Mesure des fréquences transverse et longitudinale.* Pour caractériser le piège, la pulsation transverse  $\omega_{\perp}$  a été mesurée en excitant le mode de respiration transverse. On s'attend à ce que ce mode oscille à une fréquence  $2f_{\perp}$ , quel que soit le régime considéré (qBEC, Tonks, ...)[KSS96]. La pulsation longitudinale  $\omega_{\parallel}$  a, quant à elle, été obtenue à partir des oscillations dipolaires longitudinales. Les détails expérimentaux de ces méthodes sont décrits dans le manuscrit de thèse de L. Dubois [Dub24], pp. 73 et 78.

**Potentiel longitudinal quartique.** Si l'on ajoute un courant dans les fils  $d$  et  $d'$ , on peut générer un potentiel longitudinal comportant un terme significatif à l'ordre 4 en  $x$ . Pour simplifier, on suppose  $I_d = I_{d'}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} V_{\parallel}(x) &= \mu_B B_0 + \frac{\mu_B \mu_0}{\pi} d \left[ \frac{I_D}{L^2} + \frac{I_d}{l^2} + 3 \left( \frac{I_D}{L^4} + \frac{I_d}{l^4} \right) x^2 + 5 \left( \frac{I_D}{L^6} + \frac{I_d}{l^6} \right) x^4 \right] \\ &\quad + \frac{\mu_B}{B_0} \left( \frac{\mu_0}{\pi} \right)^2 \left[ \left( \frac{I_D}{L^2} + \frac{I_d}{l^2} \right) x^2 + 2 \left( \frac{I_D}{L^2} + \frac{I_d}{l^2} \right) \left( \frac{I_D}{L^4} + \frac{I_d}{l^4} \right) x^4 \right]. \end{aligned}$$

En ajustant  $I_D$  et  $I_d$ , on peut réaliser par exemple un double puits [Sch+19], ou bien supprimer le terme quadratique  $x^2$  afin d'obtenir un potentiel quartique pur :

$$V_{\parallel}(x) = a_0 + a_4 x^4$$

comme on le fais ~~fait~~ dans [Dub+25].

En pratique, la puce présente des dimensions finies et n'est pas parfaitement symétrique. Un calcul plus précis, prenant en compte la géométrie exacte (disposition et épaisseur des fils), est présenté en annexe de la thèse de Thibault Jacqmin [Jac12], p. 151. Cela impose un ajustement fin et asymétrique des courants  $I_D$ ,  $I_{D'}$ ,  $I_d$  et  $I_{d'}$ .

**Caractérisation des potentiels longitudinal et transverse.** Pour atteindre le régime unidimensionnel, les confinements doivent être fortement anisotropes : un piégeage transverse très fort et un piégeage longitudinal faible. La condition  $\mu, k_B T \ll \hbar \omega_{\perp}$  garantit le gel des degrés de liberté transverses.

Cette configuration est particulièrement adaptée pour obtenir des profils de densité homogènes, nécessaires à certaines expériences de transport. Le transfert des atomes du piége harmonique vers le piége quartique est réalisé de manière *adiabatique* (changement rapide du potentiel), car un transfert adiabatique entraîne des pertes importantes.

**Caractérisation des potentiels longitudinal et transverse.** Pour atteindre le régime unidimensionnel, les potentiels de piégeage doivent être très asymétriques : un confinement transverse fort est souhaité avec un confinement longitudinal faible. La fréquence transverse  $\omega_{\perp}$  doit être suffisamment élevée pour geler les degrés de liberté dans cette direction, avec la condition  $\mu, k_B T \ll \hbar \omega_{\perp}$ .

## 5.2 Sélection spatiale avec DMD

### 5.2.1 Motivation et principe

**Objectif du dispositif de sélection** L'outil de sélection spatiale a été conçu pour permettre une action locale sur le gaz atomique. Il présente deux objectifs principaux. D'une part, il permet de mesurer la distribution de rapidité localement résolue, en sélectionnant une tranche du gaz avant de la libérer et de suivre son expansion. D'autre part, il offre la possibilité de créer des situations hors équilibre en retirant une partie du gaz à l'équilibre, ce qui perturbe la configuration initiale et initie une dynamique.

**Intérêt pour les protocoles hors équilibre** Ce dispositif permet ainsi de générer des protocoles analogues à des configurations classiques comme le pendule de Newton, ou de sonder directement la dynamique d'un gaz de Lieb–Liniger dans des conditions contrôlées. Il constitue une brique essentielle pour les expériences de dynamique et de transport quantique.

### 5.2.2 Mise en place technique

**Principe de sélection par pression de radiation.** La sélection s'effectue en illuminant une zone définie du gaz avec un faisceau quasi-résonant sur la transition cyclique  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  de la ligne D2 du rubidium  $^{87}\text{Rb}$  (Fig. 5.1). Les atomes subissent alors une pression de radiation au cours d'une vingtaine de cycles d'absorption et d'émission spontanée, ce qui les expulse du piège ou les place dans un état non piégé.

**Façonnage spatial du faisceau.** La sélection doit être spatialement résolue. Le profil d'intensité dans le plan des atomes est de type binaire :

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ I_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui permet de préserver ou d'éjecter les atomes selon leur position longitudinale.

**Utilisation du DMD.** Pour générer ce profil, un **DMD** (Dispositif de Micromiroirs Digitaux) est utilisé. Il s'agit d'une matrice de  $1024 \times 768$  micro-miroirs de  $14\ \mu\text{m}$  de côté et orientables individuellement ( $\pm 12^\circ$ ). En inclinant ces miroirs, on contrôle localement la réflexion de la lumière. L'image du DMD est projetée directement sur le plan des atomes, en imagerie directe.

**Avantages du DMD.** Le DMD permet une reconfiguration rapide et programmable du motif de lumière. Cette technologie est largement utilisée dans les expériences d'atomes froids pour produire des potentiels structurés, homogénéiser un faisceau ou adresser localement les atomes.

**Alternatives possibles.** Il est possible, en théorie, d'atteindre un effet similaire par un transfert cohérent des atomes vers un état anti-piégié via un pulse micro-onde ou une transition Raman. Cependant, la méthode par pression de radiation est plus simple à mettre en œuvre et adaptée à nos objectifs expérimentaux.

**Principe de l'expulsion par pression de radiation** Un atome illuminé par un faisceau proche de la résonance peut être expulsé du piège soit par transition vers un état anti-piégié, soit par effet de pression de radiation. Cette dernière génère une accélération suffisante pour fournir une énergie cinétique supérieure à la profondeur du puits magnétique. Le nombre de photons diffusés nécessaire peut être estimé à partir de la conservation de l'impulsion : une vingtaine de photons suffisent typiquement à extraire un atome du piège dans nos conditions.

**Modèle de diffusion et estimation du seuil** Le taux de diffusion de photons est modélisé à l'aide d'un taux  $\Gamma_{\text{sc}}$ , dépendant de l'intensité  $I$ , de l'intensité de saturation  $I_{\text{sat}}$ , d'un paramètre  $\alpha$  (lié à la polarisation et au champ magnétique) et du désaccord. À résonance, et pour un temps d'illumination  $\tau_p$ , on peut estimer le nombre total de photons diffusés par atome par  $N_{\text{sc}} = \tau_p \Gamma_{\text{sc}}$ .

**Mesures expérimentales de la puissance nécessaire** La puissance minimale nécessaire pour éjecter tous les atomes d'une zone illuminée est déterminée en fixant un temps d'illumination donné, puis en variant l'intensité du faisceau. L'analyse est réalisée après un délai d'attente de  $\sim 10\ \text{ms}$ , pour s'assurer que seuls les atomes encore piégés soient détectés. Il est observé que 99% des atomes sont retirés à partir d'un rapport  $I/I_{\text{sat}} \approx 0.12$ .

**Mesures de photons diffusés par fluorescence** La quantité de photons diffusés est également mesurée par l'analyse du signal de fluorescence capté par la caméra. En calibrant le rapport entre photons détectés et photons diffusés (en tenant compte de l'efficacité optique du système), le nombre moyen de photons nécessaires pour éjecter un atome est confirmé expérimentalement autour de 20. Un ajustement du modèle de diffusion permet d'estimer le paramètre  $\alpha \approx 0.4$ .

**Saturation et effets Doppler** À fort temps d'illumination ( $\tau_p > 150 \mu\text{s}$ ), une saturation du nombre de photons diffusés est observée, interprétée comme un effet géométrique : les atomes accélérés atteignent physiquement la puce atomique et cessent de contribuer au signal. Une correction Doppler peut être introduite dans le modèle, mais reste négligeable (< 5%) dans les régimes expérimentaux utilisés.

**Limitations expérimentales de la sélection** Plusieurs effets peuvent limiter l'efficacité ou la propreté de la sélection :

- La diffraction liée à la taille finie de l'objectif entraîne un flou de l'ordre de 1–2  $\mu\text{m}$  au bord des zones éclairées.
- Une diffusion parasite par la puce peut se produire à forte intensité si tout le DMD est illuminé ; cela est évité en réduisant la taille transverse du faisceau à quelques micro-miroirs seulement.
- Des inhomogénéités d'éclairage dues à la gaussienne du faisceau et au speckle peuvent conduire à une sur-illumination de certaines zones. Un effort a été fait pour homogénéiser l'intensité en sortie de fibre.
- La réabsorption des photons diffusés pourrait entraîner un échauffement du gaz restant. Un désaccord en fréquence de 15 MHz a été testé pour éviter ce phénomène, sans effet visible sur la température du gaz.

**Mesures de l'impact sur le gaz restant** La température du gaz sélectionné est comparée avant et après sélection via l'analyse des fluctuations de densité après temps de vol. Aucun changement significatif de température ni d'élargissement n'a été observé. Ces résultats suggèrent que, dans les conditions expérimentales utilisées, la sélection ne perturbe pas significativement les atomes restants.

### 5.2.3 Utilisation dans les protocoles

**Sélection locale et mesure de rapidité.** En sélectionnant une tranche du gaz, on peut ensuite couper le confinement longitudinal et laisser cette tranche s'étendre. Le profil de densité asymptotique obtenu après un long temps d'expansion est proportionnel à la distribution de rapidité locale du gaz initial. Ce protocole permet ainsi une mesure résolue en  $x$  de  $t n(x, t \rightarrow \infty) \sim \tilde{n}(x/t, t \rightarrow \infty)$ .

**Génération d'états hors équilibre** La sélection permet également de créer des discontinuités dans le profil de densité, et donc d'initier une dynamique hors équilibre. Par exemple, on peut ne conserver que deux paquets séparés de gaz, qui vont alors osciller l'un vers l'autre. Cette configuration est analogue à un pendule de Newton quantique [Cau+19 ; KWW06].

**Formes utilisées** Les motifs projetés par le DMD peuvent prendre différentes formes : boîtes, barrières, coupures, etc. Cette flexibilité rend l'outil extrêmement précieux pour explorer diverses configurations initiales et protocoles dynamiques.

**Contrôle logiciel du DMD** Le pilotage du DMD repose sur l'utilisation d'un module intégré fourni par Vialux (V7001-SuperSpeed), qui comprend les bibliothèques logicielles ALP-4. Plusieurs configurations du DMD peuvent être chargées en mémoire au début de chaque cycle expérimental, puis sélectionnées en cours de séquence à l'aide d'un signal digital. Le temps de commutation des miroirs est inférieur à 30  $\mu\text{s}$ , ce qui est compatible avec les protocoles étudiés.

**Partage du faisceau avec la voie d'imagerie** Le faisceau utilisé pour la sélection spatiale est prélevé à partir du faisceau sonde déjà accordé sur la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  de la raie D2. Le partage est réalisé à l'aide d'un cube séparateur de polarisation placé en aval d'une lame demi-onde, permettant de contrôler la puissance injectée dans la fibre optique. Ce choix simplifie la mise en œuvre en évitant d'ajouter une source laser supplémentaire.

**Blocage du faisceau de sélection** Deux systèmes permettent de couper le faisceau de sélection pendant le cycle expérimental :

- un cache mécanique (type électro-aimant), utilisé pour un blocage longue durée ;
- un **AOM**, permettant de produire des impulsions brèves de quelques dizaines de  $\mu\text{s}$ , en amont du séparateur.

Pour garantir que le faisceau ne perturbe pas l'imagerie, le cache mécanique reste fermé pendant l'utilisation du faisceau sonde, l'AOM étant placé avant la lame séparatrice des faisceaux.

**Montage optique de projection** Le faisceau façonné par le DMD est projeté dans le plan des atomes à l'aide d'un système optique permettant de sélectionner l'ordre 0 de diffraction. L'ensemble des optiques est dimensionné (diamètre 50 mm) pour limiter la diffraction. L'alignement est effectué en superposant le faisceau de sélection à la voie d'imagerie.

**Grandissement et champ couvert** Le montage permet de couvrir une zone de l'ordre de  $600 \mu\text{m}$  dans le plan des atomes, soit plus que la longueur typique d'un nuage ( $\sim 400 \mu\text{m}$  pour  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 5 \text{ Hz}$ ). Le grandissement est déterminé par les focales utilisées : une focale  $f_{\text{DMD}} = 750 \text{ mm}$  du côté du DMD, et  $f_{\text{at}} = 32 \text{ mm}$  pour l'objectif côté atomes, donnant  $G = f_{\text{at}}/f_{\text{DMD}} \approx 0.043$  (Fig. 5.3).

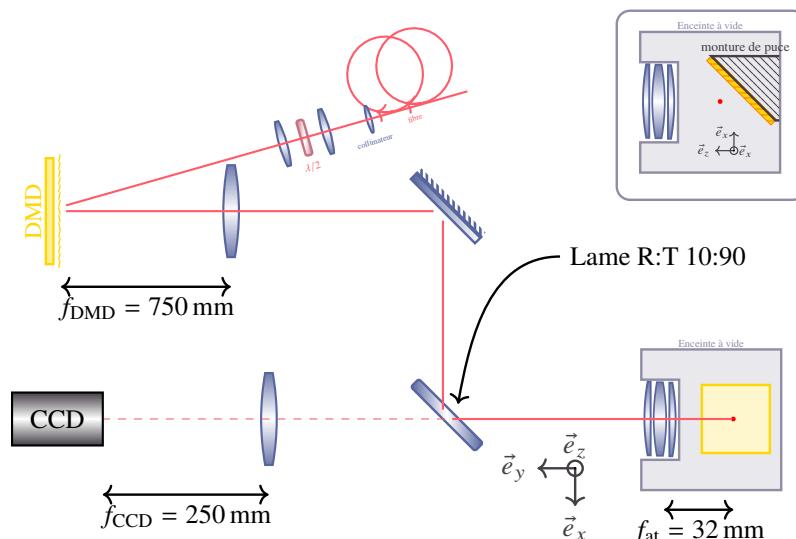


FIGURE 5.3 – Schéma du montage optique

**Visualisation et interface** Le contrôle du DMD s'effectue via une interface graphique permettant de prévisualiser les configurations de miroirs. Cette interface graphique a été programmé par F. Nogrette. Cette interface est pilotée de manière automatisée pendant le déroulement de la séquence expérimentale.

## 5.3 Techniques d'imagerie et d'analyse

### 5.3.1 Imagerie par absorption

**Système d'imagerie par absorption** L'imagerie est réalisée à l'aide d'une caméra **Charge-Coupled Device (CCD)** à déplétion profonde, optimisée pour une grande efficacité quantique à la longueur d'onde de 780 nm. On utilise des techniques d'imagerie par absorption permettant d'extraire la densité optique  $D(x, z)$ , elle-même reliée à la densité atomique 3D via la loi de Beer-Lambert. Le profil de densité linéaire  $n(x)$  est obtenu par intégration sur les directions transverses.

**Imagerie après temps de vol** En appliquant un champ magnétique vertical ( $B = 8\text{ G}$ ), la polarisation du faisceau peut être rendue circulaire ( $\sigma^+$ ) pour adresser la transition fermée  $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3, m'_F = 3\rangle$ . Cette configuration assure une meilleure définition de la section efficace d'absorption. Un temps de vol de quelques ms est utilisé avant l'imagerie, permettant également de décompresser le nuage.

**Imagerie "in situ"** Les atomes sont imités à  $7\text{ }\mu\text{m}$  de la puce, ce qui implique une double absorption du faisceau incident et réfléchi. Dans ce cas, la transition n'est pas fermée, ce qui nécessite une calibration du facteur de conversion entre la densité mesurée et la densité réelle. Un ajustement linéaire permet de relier les profils *in situ* aux profils obtenus après temps de vol. En pratique, un temps de vol d'une centaine de microsecondes est utilisé.

**Choix des paramètres d'imagerie** L'intensité du faisceau sonde est choisie typiquement à  $I_0/I_{\text{sat}} \approx 0.3$  pour optimiser le rapport signal sur bruit tout en restant dans une zone de linéarité acceptable. Dans ces conditions, le nombre de photons diffusés est de l'ordre de  $N_{\text{sc}} \approx 230$ .

**Défauts et instabilités expérimentales** Plusieurs limitations instrumentales ont été identifiées :

- La caméra initialement utilisée montrait des motifs parasites aléatoires ainsi qu'un offset variant au cours du temps. Le remplacement de la caméra a permis de résoudre ces problèmes.
- Des franges d'interférences apparaissaient lors de la division des images d'absorption, probablement dues à des effets Fabry-Pérot dans les optiques. Le désaxage du faisceau d'imagerie a permis d'en limiter l'impact.
- Des photons résiduels, même en l'absence de faisceau sonde, ont été détectés. Ces derniers proviennent vraisemblablement de diffusions multiples dans le système optique.

**Conclusion** La combinaison de l'imagerie *in situ* et après temps de vol, ainsi qu'une calibration soigneuse des paramètres optiques et expérimentaux, permettent d'accéder à des profils de densité fiables malgré les limites intrinsèques du système d'imagerie. Une attention particulière a été portée à la réduction des artefacts expérimentaux afin de garantir la précision des mesures.

## 5.4 Expériences et protocoles étudiés

### 5.4.1 Expansion longitudinale

#### 5.4.1.1 Motivation et protocole expérimental d'expansion longitudinale

**Motivation.** Une partie essentielle de mon travail de thèse a consisté à sonder la distribution de rapidités résolue spatialement, ce qui constitue une information clé pour comprendre la dynamique hors équilibre d'un gaz quantique unidimensionnel. Pour accéder à cette observable, il est nécessaire de réaliser un protocole qui relie la distribution de rapidités à des profils de densité mesurables expérimentalement.

**Considérations physiques.** Au-delà de son intérêt pratique, l'expansion longitudinale offre une fenêtre sur la physique des gaz bosoniques 1D. Elle permet d'étudier comment un système initialement confiné évolue vers un état dilué, révélant à la fois l'impact du régime transverse (TF 3D vs (TF) 1D).

**Protocole expérimental.** Concrètement, l'expansion longitudinale est réalisée selon la séquence :

- Le nuage est initialement piégé dans un potentiel magnétique caractérisé par une fréquence longitudinale  $\omega_{||} = 2\pi \times 5.0$  ou  $2\pi \times 9.4\text{ Hz}$  selon les jeux de données, et une fréquence transverse  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 2.56\text{ kHz}$ .
- À  $t = 0$ , le confinement longitudinal est éteint en annulant les courants  $I_D = I_{D'} = 0$ . La coupure est réalisée sur un temps fini  $t_{||} = 70\text{ }\mu\text{s} \ll 2\pi/\omega_{||}$ , ce qui évite un pic de courant parasite.
- Le nuage se dilate librement dans la direction longitudinale pendant une durée  $\tau$ . Ensuite, le confinement transverse est relâché en annulant  $I_{\perp}$ , avec un temps de coupure  $t_{\perp} = 5\text{ }\mu\text{s} \ll 2\pi/\omega_{\perp}$ .
- Une image par absorption est enfin prise après un temps de vol  $t_v$ . Pour l'étude des profils de densité, on utilise typiquement  $t_v = 1\text{ ms}$ .

**Perspective.** La mise en œuvre de ce protocole d’expansion longitudinale ne répond donc pas seulement à un besoin technique de mesure, mais s’inscrit dans une stratégie plus générale : relier les prédictions théoriques de la GHD.

**Équations Gross-Pitaevskii dépendantes du temps.** Pour un système dans le régime BEC (pour un paramètre de Lieb défini en 2.61,  $\gamma \ll 1$  et  $T \sim 0$ ), la dynamique du système étudié est décrite par l’équation de GP (3.48) :

$$i\partial_\tau\phi = \left\{ -\frac{1}{2}\Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) + g_{3D}N|\phi|^2 \right\} \phi,$$

avec  $g_{3D} = 4\pi a_{3D}$  et en présence d’un potentiel externe (voir (5.1) et (5.1)) :

$$V(\vec{r}) = V_\perp(\vec{r}_\perp) + V_\parallel(x), \quad V_\perp(\vec{r}_\perp) = \frac{1}{2}\omega_\perp^2\vec{r}_\perp^2, \quad V_\parallel(x) = \frac{1}{2}\omega_\parallel^2x^2.$$

**Séparation des degrés de liberté.** Dans un piège de type cigare, caractérisé par  $\omega_\perp \gg \omega_\parallel$ , la dynamique transverse se déroule sur des temps caractéristiques beaucoup plus courts que la dynamique longitudinale. On fait alors l’hypothèse d’un *suivi adiabatique transverse* : l’état reste en permanence dans son état fondamental transverse. Ainsi, les degrés de liberté transverses et longitudinaux se découplent et la fonction d’onde peut se factoriser sous la forme

$$\phi(r, \tau) = \psi(x, \tau) \Phi(\vec{r}_\perp, n(x, \tau)), \quad (5.3)$$

où  $\psi(x, \tau)$  décrit la dynamique longitudinale et  $\Phi$  est la fonction d’onde transverse dépendant paramétriquement de la densité linéaire  $n(x, \tau)$ . La condition de normalisation  $\int d\vec{r}_\perp |\Phi(\vec{r}_\perp, n)|^2 = 1$  permet de réécrire la densité linéaire définie par  $n \doteq N \int d\vec{r}_\perp |\phi|^2$  sous la forme

$$n(x, \tau) = N |\psi(x, \tau)|^2.$$

L’équation de Gross-Pitaevskii se réécrit alors

$$\left( i\partial_\tau + \frac{1}{2}\partial_x^2 - V_\parallel(x) - \mu(n) \right) \psi = 0, \quad \mu(n) \Phi = \left( -\frac{1}{2}\Delta_{\vec{r}_\perp} + V_\perp + g_{3D}n|\Phi|^2 \right) \Phi. \quad (5.4)$$

**Équations hydrodynamiques.** En utilisant la transformation de Madelung  $\psi(x, \tau) = \sqrt{n(x, \tau)} e^{i\vartheta(x, \tau)}$ , et en introduisant la vitesse  $u = \partial_x \vartheta$ , on obtient les équations hydrodynamiques associées :

$$\begin{cases} \partial_\tau n + \partial_x(nu) = 0, \\ \partial_\tau u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} + V_\parallel(x) + \mu(n) + \frac{\mathcal{P}_Q}{n} \right) = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

où le terme de pression quantique est donné par  $\mathcal{P}_Q = -\frac{1}{2}\sqrt{n}\partial_x^2\sqrt{n}$ .

En tenant compte de la relation thermodynamique  $dP = n d\mu$ , ce sont les mêmes équations que (3.49) et (3.52).

En négligeant le terme de pression quantique  $\mathcal{P}_Q$ , on obtient :

$$\begin{cases} \partial_\tau n + \partial_x(nu) = 0, \\ \partial_\tau u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} + V_\parallel(x) + \mu(n) \right) = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

Pour notre protocole, pour  $\tau < 0$  le système est à l’équilibre, avec la condition

$$\mu(n) + V_\parallel(x) = \mu(n(x=0)). \quad (5.7)$$

Pour  $\tau \geq 0$ , le potentiel longitudinal est éteint :  $V_\parallel(x) = 0$ .

**Solutions analytiques homothétiques.** Si  $n$  est solution des équations hydrodynamiques (5.6), pour  $\tau \geq 0$ . On fait l'hypothèse que la densité linéaire suit une forme homothétique

$$n(x, \tau) = \frac{1}{\lambda(\tau)} n_0 \left( \frac{x}{\lambda(\tau)} \right), \quad (5.8)$$

avec  $n_0$  le profil de densité à  $\tau = 0$  et  $\lambda(\tau)$  le facteur d'échelle à un temps d'expansion  $\tau$ . Avec les contraintes  $\lambda(0) = 1$  et  $\lambda'(0) = 0$  et  $N = \int dx n(x, \tau)$ . En injectant dans (5.5) il vient que

$$\begin{cases} u(x, \tau) &= \frac{\dot{\lambda}(\tau)}{\lambda(\tau)} x, \\ \partial_x \mu(n(x, \tau)) &= -\frac{\ddot{\lambda}(\tau)}{\lambda(\tau)} x, \end{cases} \quad (5.9)$$

(car  $\partial_\tau u = (\ddot{\lambda}/\lambda - \dot{\lambda}^2/\lambda^2)x$  et  $v\partial_x v = (\dot{\lambda}/\lambda)^2x$ , leur somme donne  $(\ddot{\lambda}/\lambda)x$ ) et initialement

$$\mu_0(x) = \mu_p - \frac{1}{2}\omega_{\parallel}^2 x^2, \quad (5.10)$$

avec  $\mu_0(x) = \mu(n_0(x))$  et  $\mu_p = \mu(n_0(x=0))$ .

Calculons maintenant  $\partial_x \mu(n(x))$ . Tout d'abord, on utilise

$$\partial_x \mu(n(x)) = \mu'(n) \partial_x n. \quad (5.11)$$

Intéressons nous maintenant à  $\partial_x n$ . Comme  $n(x)$  vérifie (5.8) :

$$\partial_x n(x) = \frac{1}{\lambda^2} n'_0 \left( \frac{x}{\lambda} \right). \quad (5.12)$$

En utilisant q'à l'équilibre  $\mu(n_0(y)) = \mu_p - \frac{1}{2}\omega_{\parallel}^2 y^2$ , soit  $\mu'(n_0(y)) n'_0(y) = -\omega_{\parallel}^2 y$  soit

$$n'_0(y) = -\frac{\omega_{\parallel}^2 y}{\mu'(n_0(y))}. \quad (5.13)$$

En injectant (5.13) dans (5.12) et en injectant evoutre (5.12) dans (5.11) on obtient finalement

$$\partial_x \mu(n(x)) = -\frac{\omega_{\parallel}^2}{\lambda^3} f(\lambda, n) x \quad (5.14)$$

où

$$f(\lambda, n) \equiv \frac{\mu'(n)}{\mu'(\lambda n)}. \quad (5.15)$$

En substituant dans la deuxième équation d'Euler (5.9), on obtient

$$\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\omega_{\parallel}^2}{\lambda^3} f(\lambda, n). \quad (5.16)$$

On en déduit que  $f$  ne dépend que du facteur d'échelle  $\lambda$ , c'est-à-dire

$$f(\lambda, n) = f(\lambda). \quad (5.17)$$

En utilisant le résultat de l'annexe D, l'équation (5.17) conduit à

$$\mu \propto n^\alpha. \quad (5.18)$$

Et de plus

$$f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}. \quad (5.19)$$

**Équation pour le facteur d'échelle  $\lambda$ .** En utilisant (5.19), l'équation d'évolution du facteur d'échelle obtenue précédemment (5.16) s'écrit :

$$\ddot{\lambda} \lambda^{\alpha+1} = \omega_{\parallel}^2 \quad (5.20)$$

On pose  $v = \dot{\lambda}$ . Comme  $\ddot{\lambda} = \dot{\lambda} \frac{d\dot{\lambda}}{d\lambda}$ , on obtient

$$\dot{\lambda} \frac{d\dot{\lambda}}{d\lambda} = \omega_{\parallel}^2 \lambda^{-(\alpha+1)}. \quad (5.21)$$

*Cas  $\alpha \neq 0$ .* Intégration par rapport à  $\lambda$  :

$$\frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 = \omega_{\parallel}^2 \int \lambda^{-(\alpha+1)} d\lambda = -\frac{\omega_{\parallel}^2}{\alpha} \lambda^{-\alpha} + C, \quad (5.22)$$

où  $C$  est une constante d'intégration déterminée par les conditions initiales  $\lambda(0) = \lambda_0$ ,  $\dot{\lambda}(0) = \dot{\lambda}_0$  :

$$C = \frac{1}{2} \dot{\lambda}_0^2 + \frac{\omega_{\parallel}^2}{\alpha} \lambda_0^{-\alpha}. \quad (5.23)$$

On a donc la première intégrale

$$\dot{\lambda}^2 = \dot{\lambda}_0^2 + \frac{2\omega_{\parallel}^2}{\alpha} (\lambda_0^{-\alpha} - \lambda^{-\alpha}). \quad (5.24)$$

*Cas  $\alpha = 0$ .* L'équation devient  $\ddot{\lambda} \lambda = \omega_{\parallel}^2$ . On obtient

$$\dot{\lambda}^2 = \dot{\lambda}_0^2 + 2\omega_{\parallel}^2 \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right). \quad (5.25)$$

On impose les conditions initiales  $\lambda(0) = 1$ ,  $\dot{\lambda}(0) = 0$ , et l'on considère le cas  $\alpha > 0$ .

**Régime à temps courts ( $\tau \ll 1/\omega_{\parallel}$ ).** On linéarise l'équation autour de l'équilibre  $\lambda = 1$  en posant  $\lambda(\tau) = 1 + \epsilon(\tau)$  avec  $|\epsilon| \ll 1$ . L'équation de mouvement se réduit alors à un oscillateur harmonique forcé :

$$\ddot{\epsilon} + (1 + \alpha) \omega_{\parallel}^2 \epsilon - \omega_{\parallel}^2 = 0. \quad (5.26)$$

Pour les conditions initiales choisies, la solution à petits temps est approximativement

$$\epsilon(\tau) \simeq \frac{1}{2} \omega_{\parallel}^2 \tau^2, \quad (5.27)$$

ce qui conduit à

$$\lambda(\tau) \simeq 1 + \frac{\omega_{\parallel}^2 \tau^2}{2}. \quad (5.28)$$

Ce comportement est indépendant de l'équation d'état  $\mu(n)$ .

**Régime à temps longs ( $\tau \gg 1/\omega_{\parallel}$ ).** Lorsque  $\lambda^{-\alpha} \ll 1$ , l'intégration de l'équation de mouvement montre que la vitesse  $\dot{\lambda}$  tend vers  $\sqrt{2\omega_{\parallel}^2/\alpha}$ . En conséquence, à longs temps, l'évolution de  $\lambda(\tau)$  est approximativement linéaire et s'écrit

$$\lambda(\tau) \simeq \frac{2}{\alpha} \omega_{\parallel} \tau. \quad (5.29)$$

En particulier, pour le régime TF 1D, correspondant à  $\alpha = 1$ , on obtient  $\lambda(\tau) \simeq \sqrt{2} \omega_{\parallel} \tau$ . Pour le régime TF 3D, correspondant à  $\alpha = 1/2$ , on a  $\lambda(\tau) \simeq 2 \omega_{\parallel} \tau$ .

**Le potentiel chimique.** Dans le régime quasi-1D on utilise l’expression d’interpolation [FLC03].

$$\mu(n) = \hbar\omega_{\perp} \left( \sqrt{1 + 4a_{3D}n} - 1 \right), \quad (5.30)$$

où  $n$  désigne la densité linéique et  $a_{3D}$  la longueur de diffusion en trois dimensions, dont la valeur est  $a_{3D} = 5.3$  nm. De cette formule on obtient deux limites asymptotiques :

- *Régime transverse Thomas–Fermi (TF 3D)*,  $4a_{3D}n \gg 1$ . Alors  $\sqrt{1 + 4a_{3D}n} \simeq 2\sqrt{a_{3D}n}$  et

$$\mu(n) \simeq 2\hbar\omega_{\perp}\sqrt{a_{3D}n}, \quad (5.31)$$

ce qui correspond à  $\mu \propto n^{1/2}$  (donc  $\alpha = \frac{1}{2}$ ). Ce régime décrit la situation où  $\mu \gg \hbar\omega_{\perp}$  et de nombreux niveaux transverses sont excités.

- *Régime quasi-1D (transverse fondamental) (TF 1D)*,  $4a_{3D}n \ll 1$ . Alors  $\sqrt{1 + 4a_{3D}n} \simeq 1 + 2a_{3D}n$  et

$$\mu(n) \simeq 2\hbar\omega_{\perp}a_{3D}n \equiv g n, \quad (5.32)$$

avec  $g = 2\hbar\omega_{\perp}a_{3D}$ . Ici  $\mu \propto n$  (donc  $\alpha = 1$ ); on est proche de l’état fondamental.

Les deux formes ci-dessus sont bien les limites asymptotiques de l’expression d’interpolation donnée plus haut.

#### 5.4.1.2 Analyse des données expérimentales

L’étude de la dynamique du profil de densité a été réalisée sur un nuage atomique initialement à l’équilibre dans un potentiel harmonique de fréquence longitudinale  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 9.4$  Hz et transverse  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 2.5$  kHz.

Le profil de densité mesuré est représenté en bleu sur la Fig. 5.4(a), tandis que le profil attendu à l’équilibre dans le piège harmonique est tracé en noir pointillé. Ce dernier est obtenu à partir de l’expression (5.30) du potentiel chimique :

$$\mu_p - \frac{1}{2}\omega_{\parallel}^2x^2 = \hbar\omega_{\perp} \left[ \sqrt{1 + 4n_0(x)a_{3D}} - 1 \right], \quad (5.33)$$

avec  $\mu_p/\hbar\omega_{\perp} = 1.4$ . L’ajustement est très bon au centre du nuage, mais les données expérimentales présentent des ailes supplémentaires, dues à un effet d’entropie non nulle.

Après un temps d’expansion longitudinal  $\tau$ , un facteur d’échelle  $\lambda$  est extrait en ajustant les profils expérimentaux avec un profil de la forme (5.8).

Les facteurs d’échelle extraits expérimentalement sont montrés sur la Fig. 5.4(b) et sont en bon accord avec les résultats numériques obtenus en résolvant les équations hydrodynamiques (Eq. (5.30)) avec  $\mu_p/\hbar\omega_{\perp} = 1.40$ .

L’évolution des profils de densité mesurée expérimentalement est en bon accord avec les simulations numériques réalisées dans le régime cros-over (Fig. 5.4(b)).

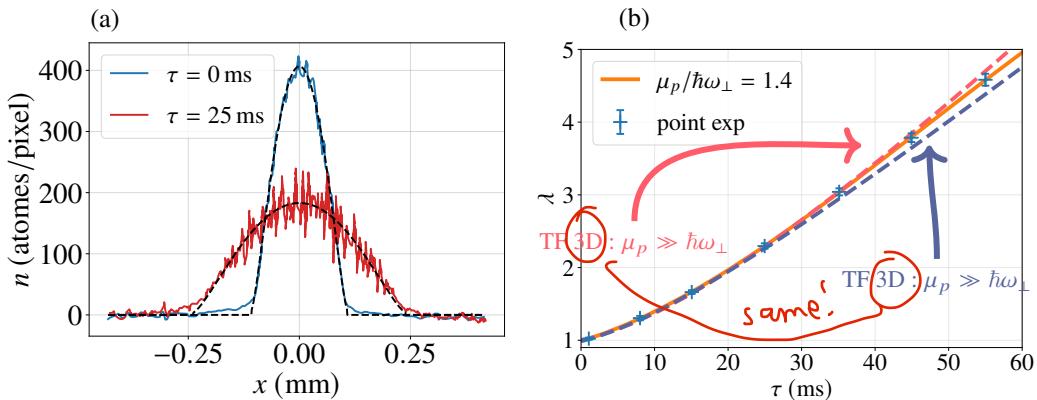


FIGURE 5.4 – (a) Profil de densité à l'équilibre dans le piège harmonique longitudinal (bleu), ajusté par  $n_0(x)$  selon Eq. (5.33) (noir pointillé). La courbe rouge montre le profil après une expansion longitudinale  $\tau = 25$  ms, avec un facteur d'échelle  $\lambda$  extrait en ajustant le profil par une courbe homothétique à la densité initiale (noir pointillé), cf. Eq. (5.8). (b) Points bleus : facteurs d'échelle  $\lambda(\tau)$  extraits expérimentalement. Courbe orange : résultats numériques obtenus en résolvant les équations hydrodynamiques (Eq. (5.30)) avec  $\mu_p/\hbar\omega_{\perp} = 1.4$ . Les courbes pointillées montrent les évolutions attendues de  $\lambda$  en résolvant Eq. (5.20) pour  $\alpha = 1$  (TF 1D) et  $\alpha = 1/2$  (TF 3D).

## 5.4.2 Sonde locale de distribution de rapidités

### 5.4.2.1 Distribution de rapidités locale dans les gaz 1D

**Motivation.** La compréhension des gaz de bosons unidimensionnels avec interactions de contact répulsives repose sur la notion de distribution de rapidités  $\rho(\theta)$ . Chaque état propre du système peut être caractérisé par un ensemble de rapidités  $\{\theta_i\}$ , interprétées comme les vitesses de quasi-particules à durée de vie infinie.

Dans le cadre des expansions 1D, une définition pratique consiste à assimiler les rapidités aux vitesses asymptotiques des atomes après une expansion libre, via la relation  $x_j \simeq \tau\theta_j$  pour un temps d'expansion long  $\tau^1$ .

Ainsi, la distribution de vitesses mesurée à long temps tend vers la distribution de rapidités  $\Pi(v)$  :

$$\tilde{n}(v, \tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} \Pi(v).$$

Cette définition est directement exploitable expérimentalement : à temps long, la distribution spatiale devient homothétique à la distribution de vitesses,

$$\tau n(x, \tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} \Pi(x/\tau).$$

**Distribution locale et LDA.** Pour un nuage atomique piégé dans un potentiel longitudinal variant lentement, on peut appliquer la **LDA**. Le gaz est alors vu comme un fluide décomposé en cellules mésoscopiques de densité homogène et relaxée. Dans chaque cellule, l'état d'équilibre est décrit par un **GGE**, ou équivallement par une distribution de rapidités locale  $\rho(x, \theta)$ . Cette description permet d'étudier non seulement l'équilibre, mais aussi la dynamique hors équilibre à grandes échelles spatiales et temporelles, via la théorie **GHD**.

**Protocole expérimental.** Pour mesurer  $\rho(x, \theta)$  localement :

- Une zone du nuage atomique de taille  $\ell$  centrée en  $x_0$  est sélectionnée à l'aide du **DMD**. La pression de radiation supprime instantanément les atomes en dehors de la zone, laissant uniquement ceux de la cellule (Fig. 5.5).

1. Dans la limite champ classique, le gaz de Lieb–Liniger est décrit par l'équation de Schrödinger non-linéaire. La théorie de diffusion inverse permet alors de construire un ensemble de quantités conservées. Dans ce cadre, la distribution de rapidités peut être définie comme la distribution en impulsions asymptotiques des atomes après une expansion 1D, ce qui établit un lien direct entre rapidités et quantités conservées [BDB23].

2. Après la sélection, le confinement longitudinal est relâché, tandis que le confinement transverse reste actif. Les atomes réalisent une expansion 1D pendant un temps  $\tau$ , puis le profil de densité est imageré (typiquement pour  $\tau \sim 60$  ms).
3. Le protocole est répété pour plusieurs positions  $x_0$ , permettant d'obtenir la distribution de rapidités locale sur l'ensemble du nuage.

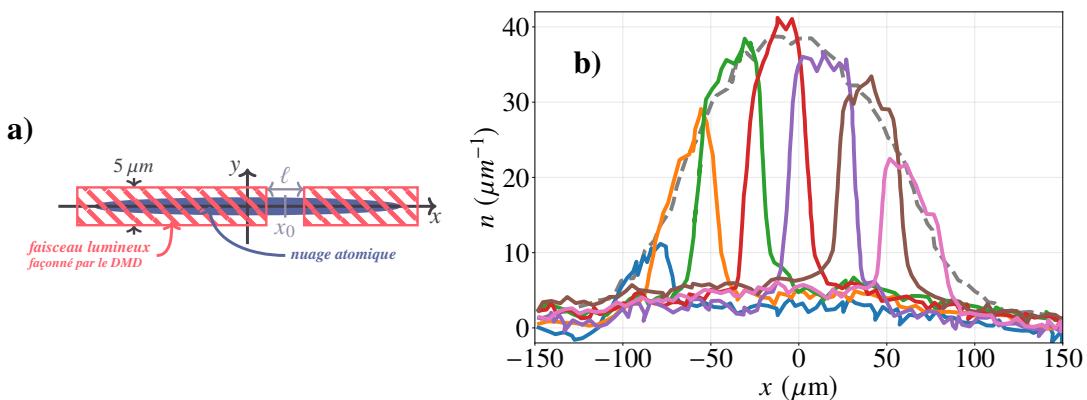


FIGURE 5.5 – (a) Schéma illustrant la sélection d'une région du nuage atomique, ici représentée par un ellipse bleu illuminé par un faisceau modulé à l'aide du DMD.  
(b) Exemple de sélections sur un gaz initialement à l'équilibre : superposition du profil de densité initial du nuage (courbe grise) et des profils mesurés après  $\tau = 1$  ms pour différentes régions de sélection de taille  $\ell = 37 \mu\text{m}$  centrées en différentes positions  $x_0$  (courbes colorées).

**Mesures à l'équilibre.** Pour un gaz initialement à l'équilibre dans un piège harmonique, le profil de densité de chaque zone sélectionnée est analysé via **TBA** et la **LDA**, donnant température  $T$  et potentiel chimique  $\mu$ . Après un temps d'expansion long, le profil devient homothétique à la distribution de rapidités locale  $\rho(x, \theta)$ . La comparaison avec les prédictions numériques montre une bonne cohérence, confirmant que le protocole permet de sonder efficacement  $\rho(x, \theta)$ .

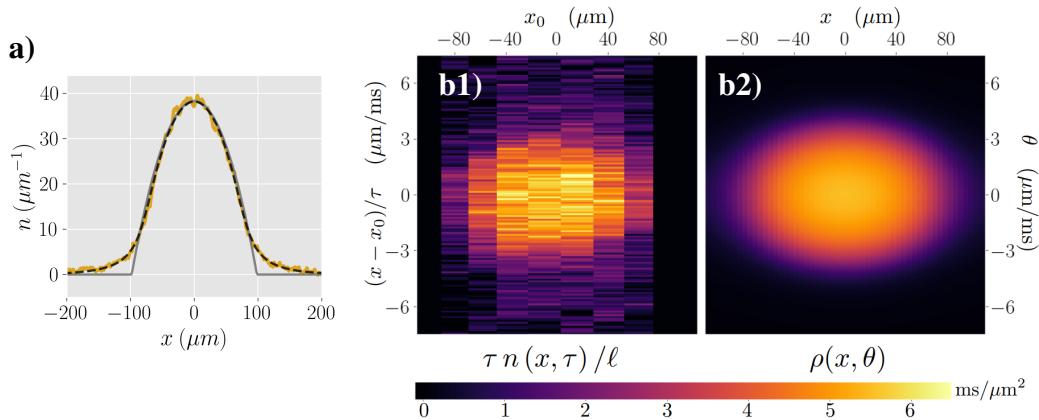


FIGURE 5.6 – a) Profil de densité d'un nuage atomique initialement à l'équilibre dans un piège harmonique avec  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 2.6 \text{ kHz}$  et  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 5 \text{ Hz}$  (jaune). La courbe grise représente le profil parabolique attendu à l'état fondamental dans le régime qBEC, décrit par l'équation d'état  $n(x) = [\mu - V_{\parallel}(x)]/g$ . La courbe noire en pointillés correspond à un ajustement des données expérimentales en supposant que le système soit bien décrit par un ensemble thermique (TBA) (Sec. 2.2.2)). Cet ajustement permet d'extraire une température  $T = 90 \text{ nK}$  et un potentiel chimique  $\mu/k_B = 49 \text{ nK}$ . (b1) Profils de densités pour différents centres de sélection  $x_0$  représentés sur la Fig. 5.5(b). Les sélections sont de taille  $\ell = 37 \mu\text{m}$  et les profils obtenus après un temps d'expansion  $\tau = 40 \text{ ms}$ . Pour comparer les résultats à une distribution de rapidités, les profils de densités sont multipliés par le rapport  $\tau/\ell$  et sont tracés en fonction de  $(x - x_0)/\tau$  (b2). (b2) Prédiction théorique de la distribution de rapidités spatialement résolue  $\rho(x, \theta)$  à l'équilibre thermique dans un potentiel harmonique longitudinal avec  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 5 \text{ Hz}$ . La température  $T$  et le potentiel chimique  $\mu$  utilisés sont eux obtenus à partir du profil in situ (a).

**Résumé.** Nous avons développé une méthode permettant de sonder localement la distribution de rapidités à l'aide du DMD. Les atomes extraits par la sélection sont ensuite laissés en expansion le long du guide unidimensionnel. Après un temps d'évolution suffisamment long, la forme du profil de densité obtenu correspond directement à la distribution de rapidités locale. Ce protocole a été testé avec succès sur un gaz initialement préparé à l'équilibre.

### Dynamique.

*Motivation.* Pour vérifier si le régime asymptotique des expansions longitudinales est atteint, il est nécessaire de comparer les résultats expérimentaux à une théorie dynamique. L'outil adapté est de GHD, déjà introduite au Chapitre 3, qui décrit l'évolution spatio-temporelle de la distribution de rapidités.

*Invariance d'échelle hydrodynamique.* On considère une sélection initiale homogène de taille  $\ell$  centrée en  $x_0$ . Dans ce cas, les équations GHD (3.40) s'écrivent sans potentiel, avec la condition initiale  $\rho(x, \theta, 0) = \rho_0(\theta)$  si  $|x - x_0| \leq \ell/2$ , et 0 sinon. En introduisant les variables sans dimension  $\alpha = (x - x_0)/\ell$  et  $\beta = \tau/\ell$ , l'équation devient indépendante de  $\ell$ .

$$\begin{cases} \partial_\beta \tilde{\rho}(\alpha, \theta; \beta) + \partial_x (\nu_{[\tilde{\rho}]}^{\text{ell}}(\theta) \tilde{\rho}(\alpha, \theta; \beta)) = 0 \\ \tilde{\rho}(\alpha, \theta; 0) = \begin{cases} \rho_0(\theta) & \text{si } |\alpha| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases}$$

Il en résulte que les profils de densité  $n(x, \tau)$ , exprimés en fonction de  $\alpha$ , ne dépendent que du rapport  $\beta$ . Autrement dit, deux sélections de tailles différentes mais telles que  $\tau/\ell$  soit constant doivent conduire aux mêmes profils après expansion. Cette invariance a été vérifiée expérimentalement : les profils se superposent de manière remarquable (Fig. 5.7 a)).

*Lien avec les équations de Gross–Pitaevskii* Dans le régime qBEC, à basse température, la dynamique peut aussi être décrite par les équations hydrodynamiques issues de GP (en négligeant la pression quantique) Après changement de variables ( $\alpha = (x - x_0)/\ell$ ,  $\beta = \tau/\ell$ ,  $\tilde{n} = n/n_0$ ), on retrouve un système d'équations qui ne dépend plus de  $\ell$ , mais uniquement du rapport adimensionné  $\eta = \beta g n_0/m$ .

$$\begin{cases} \partial_\beta \tilde{n} + \partial_\alpha (\tilde{v} \tilde{n}) = 0, & \partial_\beta \tilde{v} + \tilde{v} \partial_\alpha \tilde{v} = -\frac{gn_0}{m} \partial_\alpha \tilde{n}, \\ \tilde{n}(\alpha, \beta = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\alpha| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} & \tilde{v}(\alpha, \beta = 0) = 0. \end{cases}$$

Il en découle que les profils de densité sont universels lorsqu'ils sont exprimés en fonction de  $(\alpha, \eta)$ . Expérimentalement, ce comportement est bien confirmé : les centres des profils se superposent pour des conditions initiales différentes, et l'accord est même bon sur les bords.

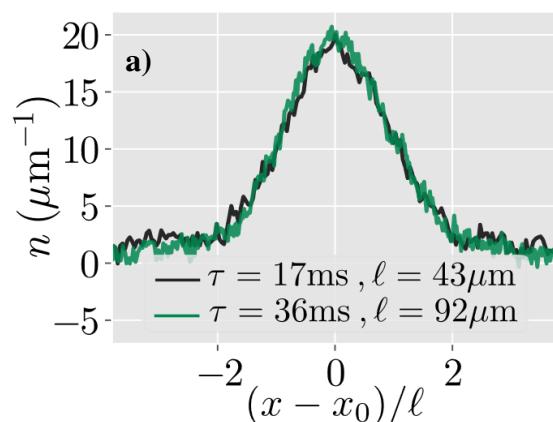


Figure b)  
manquante !

FIGURE 5.7 – (a) Illustration du comportement hydrodynamique prédict par les équations de GHD. Deux profils de densité sont représentés en fonction de  $\alpha$  pour un même paramètre  $\beta = \tau/\ell = 0.39$  ms/ $\mu\text{m}$  (b) Analyse du comportement hydrodynamique selon le formalisme GP. Deux profils de densité sont tracés pour un même ratio  $\eta = (\tau/\ell) gn_0/m = 2.65$ , avec une taille de sélection  $\ell = 37 \mu\text{m}$ , mais pour des densités initiales  $n_0$  différentes. Les sélections ont été réalisées sur plusieurs régions distinctes d'un même nuage.

*Régime asymptotique.* L'expansion des tranches est bien décrite par GHD. Les comparaisons entre données expérimentales et simulations GHD (avec des distributions thermiques initiales) montrent un bon accord au centre des profils, mais révèlent que le régime asymptotique complet n'est pas atteint dans les temps accessibles expérimentalement. On définit un écart-type

$$\sigma(\tau) = \sqrt{\frac{\int |\frac{\tau}{\ell} n_{\text{GHD}}(\frac{x-x_0}{\tau}) - \rho(\frac{x-x_0}{\tau})|^2 d\tau}{\int |\rho(\frac{x-x_0}{\tau})|^2 d\tau}} \quad (5.34)$$

avec  $n_{\text{GHD}}$  les profils tirés des simulations GHD. Pour  $\tau = 50$  ms, l'écart-type reste d'environ 12%, et une convergence complète nécessiterait des temps irréalistes ( $\sim 500$  ms). L'extraction de la distribution de rapidité à partir des profils reste donc approximative.

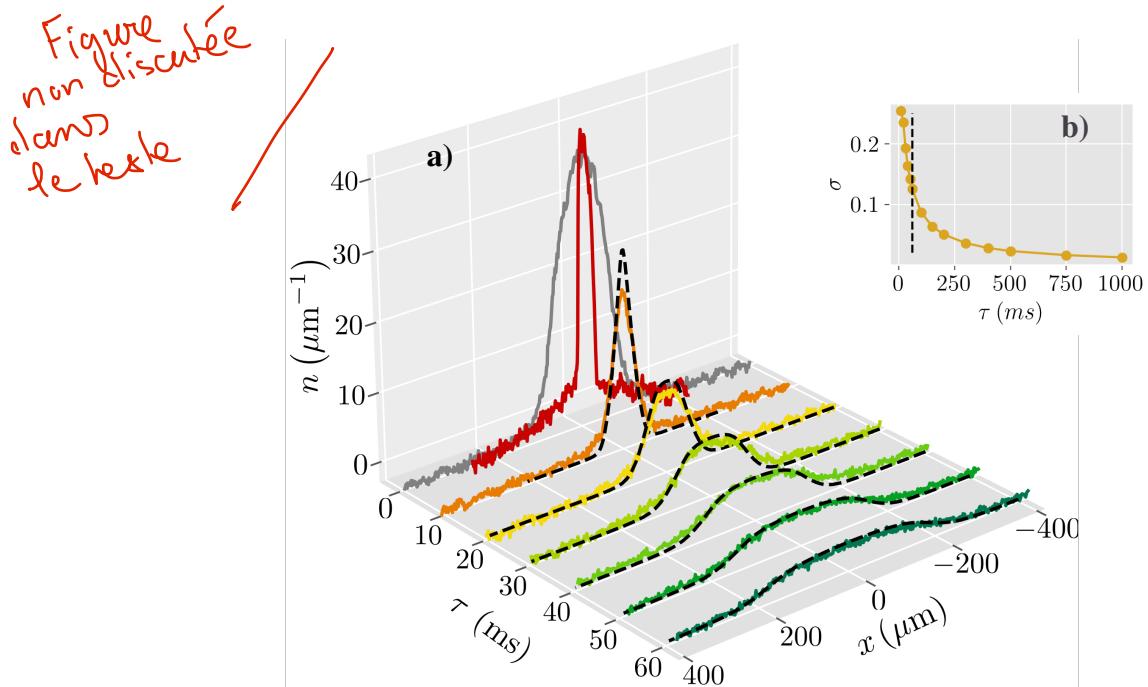


FIGURE 5.8 – (a) La tranche , centrée en  $x_0 = 0 \mu\text{m}$  , subit une expansion le long de l’axe longitudinal d’une largeur  $\ell = 37 \mu\text{m}$ . Le profil initial du gaz est montré en gris. Les variations de densité pour différents temps d’expansion sont représentées par des courbes colorées. Les lignes pointillées noires indiquent les résultats des simulations GHD pour une distribution de rapidités initialement thermique, paramétrée par la température  $T$  et le potentiel chimique  $\mu(x_0) = \mu$ , tels qu’ils sont extraits du profil de densité in situ.(b) L’écart-type  $\sigma(\tau)$  (Eq. (5.34)) est calculé entre la distribution de rapidités et les résultats des simulations GHD en fonction du temps d’expansion  $\tau$ . La ligne verticale noire correspond au temps d’expansion utilisé dans l’expérience.

## 8.6 Mesure locale de distribution de rapidités hors équilibre

**Mise en place d’une distribution locale hors équilibre.** Le faisceau pousseur (DMD) permet non seulement de sonder la distribution de rapidités locale, mais aussi de créer des situations hors équilibre. Un protocole illustratif consiste à retirer les atomes d’une région centrale de taille  $\ell_0 = 70 \mu\text{m}$ , puis à laisser le gaz évoluer librement longitudinalement (1D). Après un temps  $\tau = 15 \text{ ms}$ , la distribution de rapidités développe une structure doublement piquée, très différente d’une distribution thermique. Une seconde sélection locale ( $\ell = 35 \mu\text{m}$ ) suivie d’une expansion révèle expérimentalement ce profil, en excellent accord avec les simulations GHD (Fig. 5.9).

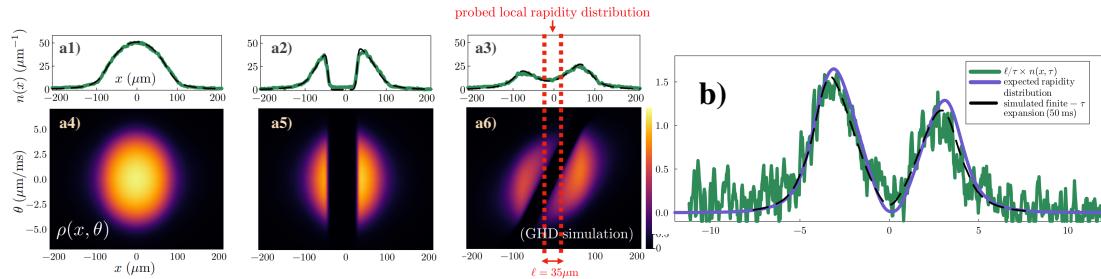


FIGURE 5.9 – Les profils de densité sont montrés à différents stades : à l'équilibre initial (a1), 1 ms après la première sélection (a2), et 15 ms après une expansion le long du guide 1D (a3). Les distributions de rapidités résolues spatialement correspondantes sont illustrées dans les panels (a4) à (a6). Les lignes pointillées rouges indiquent la deuxième sélection. (b) Pour obtenir la distribution locale de rapidités, on trace  $\tau n(x, \tau)/\ell$  sur une région de largeur  $\ell = 36 \mu\text{m}$  après un temps d'expansion longitudinal  $\tau = 50 \text{ ms}$ . Le profil présente une double crête et montre un excellent accord avec la prédition théorique de la distribution de rapidités (courbe violette), y compris les corrections dues à un temps d'expansion fini (courbe noire pointillée).

**Analyse des distributions locales hors équilibre** Cette approche démontre l'importance d'une mesure locale : alors que la distribution globale  $\int dx \rho(x, \theta)$  est conservée, la distribution locale  $\rho(x, \theta)$  reflète directement la dynamique hors équilibre. Le dispositif basé sur le DMD offre ainsi un outil puissant pour générer et caractériser divers protocoles hors équilibre (cisaillement, jonctions de densité, états stationnaires non thermiques, etc.), ouvrant de nouvelles perspectives pour l'étude des gaz de Bose 1D. Pour une présentation plus détaillée de ces résultats, le lecteur pourra se référer à notre article [Dub+24].

## Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons décrit les principaux dispositifs expérimentaux utilisés dans notre étude. Le système atomique est préparé dans une géométrie unidimensionnelle, avec un confinement longitudinal réalisé par un potentiel de la forme  $V_{||}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ , qui permet d'ajuster finement la forme du piège. Par ailleurs, l'utilisation du DMD joue un rôle essentiel : cet outil permet non seulement de sélectionner localement une portion du nuage atomique afin de sonder la distribution des rapidités, mais également de générer des dynamiques hors équilibre. Ces protocoles incluent, par exemple, l'analogie de la pendule de Newton, ainsi que la situation présentée dans la dernière section.

## Chapitre 6

# Étude du protoc~~al~~ de bi-partition : Mesure de distribution de rapidités locales $\rho(x, \theta)$ pour des systèmes hors équilibre

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Dynamique balistique d'un gaz 1D après une coupure bipartite</b>	<b>95</b>
6.1.1	Préparation expérimentale et protocole de coupure	95
6.1.2	Cadre de la GHD et dynamique balistique	95
6.1.3	Validation expérimentale de la dynamique hydrodynamique	97
<b>6.2</b>	<b>Sondier la distribution locale des rapidités</b>	<b>98</b>
6.2.1	Sélection d'une tranche localisée après déformation du bord	99
6.2.2	Expansion de la tranche et observation d'une asymétrie	100
<b>6.3</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>102</b>
6.3.1	Système homogène à l'équilibre thermique	102
6.3.2	Dynamique du contour dans l'espace des phases $(x, \theta)$	102
6.3.3	Simulation de la déformation du bord	103
6.3.4	Simulation de l'expansion.	104
6.3.5	Comparaison aux données expérimentales et discussion	106

---

### Introduction

**Objectif de ce chapitre :** Ce chapitre est consacré à l'étude de la dynamique hors équilibre d'un gaz quantique unidimensionnel intégrable, soumis à une discontinuité initiale de densité induite par un protocole de type **quench bipartite**. L'objectif principal est d'évaluer dans quelle mesure la Théorie **GHD** permet de décrire cette dynamique, tant sur le plan théorique qu'expérimental. Nous nous appuyons sur une préparation initiale contrôlée, un protocole de coupure abrupte, et une analyse des profils de densité et des facteurs d'occupation pour tester les prédictions de la théorie **GHD**.

**Le problème de Riemann en hydrodynamique :** Un test fondamental de la dynamique hors équilibre est fourni par le problème dit de Riemann [Rie60; Bre13], qui consiste à étudier l'évolution d'un système à partir d'une discontinuité initiale dans l'espace. Dans sa formulation générale, on considère une équation de conservation de la forme

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0. \quad (6.1)$$

Le problème de Riemann correspond au cas où la situation initial est composé de deux régions homogènes, juxtaposées de part et d'autre de l'origine :

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases}. \quad (6.2)$$

Ce type de configuration, appelé problème de Riemann à données discontinues, permet de sonder la réponse non linéaire du système.

**Le problème de Riemann quantique : un cadre paradigmique.** Nous considérons le cas d'un système quantique intégrable. Un macro état est alors défini par une infinité de paramètre chacun correspondant à la quantité local conservé d'une quantité global comme expliqué dans le chapitre 2. L'équation de continuité liée au quantité conservé qui sont de type (6.1) sont de nombre infini. Le problème de Riemann (6.2) au dessus se généralise au cas où on a un nombre infini de paramètres  $u$ .

**Le problème de Riemann quantique : un cadre paradigmique.** Considérons le cas d'un système quantique intégrable. Un macro-état est caractérisé par un ensemble infini de paramètres, chacun associé à une charge conservée locale reliée à une charge globale, comme discuté au chapitre 2. Les équations de continuité correspondantes, de la forme (6.1), forment alors un système infini de relations couplées. Dans ce cadre, le problème de Riemann (6.2) se généralise naturellement au cas d'un nombre infini de champs hydrodynamiques  $u$ , engendrant une dynamique gouvernée par une hiérarchie de lois de conservation.

**Notre système : un gaz de bosons 1D faiblement interactifs :** Nous considérons un gaz quantique unidimensionnel de bosons faiblement interactifs, confiné dans une géométrie strictement 1D, et bien décrit par le modèle intégrable de LL avec interactions répulsives.

**Préparation expérimentale et protocole de coupure :** La configuration initiale consiste à préparer un gaz homogène à densité constante  $n_0$ , et à température contrôlée (voir Fig. 6.3). Un protocole de coupe abrupte est ensuite appliquée : la partie gauche du système ( $x < 0$ ) est vidée de ses atomes, tandis que la partie droite ( $x > 0$ ) reste occupée. Ce *quench bipartite* génère une discontinuité initiale de densité, analogue au problème de Riemann, mais dans un système quantique doté d'un nombre infini de lois de conservation. Ce protocole a déjà fait l'objet d'une première étude expérimentale dans la thèse de L. Dubois [Dub24], qui en a révélé le potentiel pour sonder la dynamique hors équilibre.

**Observation d'une propagation balistique.** Nous analysons la dynamique unitaire du gaz à l'aide du formalisme de GHD. À l'échelle d'Euler, le cadre de la GHD ne décrit pas l'état initial de type Riemann (6.2), mais devient valide après une courte évolution temporelle. Nous montrons que la discontinuité initiale engendre une propagation balistique, en accord avec la solution du problème de Riemann généralisé. Le profil de densité, mesuré à différents instants  $t$ , présente une dépendance universelle en  $x/t$  (voir Fig. 6.4 (e)–(g)). De légers écarts subsistent néanmoins, que nous attribuons à des effets entropiques ainsi qu'à des imperfections expérimentales.

**Reconstruction de la distribution de rapidité :** Un aspect central de notre approche repose sur la reconstruction de la distribution initiale de rapidité à partir des profils de densité mesurés dans la région de transition. Cette démarche s'apparente à une forme de **thermométrie généralisée**, et permet à priori d'inférer des informations fines sur les états locaux du système.

**Accès expérimental au facteur d'occupation  $v(x, \theta)$  :** Nous développons également une méthode expérimentale originale permettant de mesurer localement le facteur d'occupation  $v(x, \theta)$  dans la région de déformation. La GHD prédit que cette quantité révèle une forte asymétrie : large et lisse du côté initialement occupé, abrupte et tronquée du côté initialement vide. Cette assymétrie reflète le fait que, localement, le système est dans un état non thermique puisque ces derniers ont un facteur d'occupation  $v(\theta)$  symétrique.

**Conclusion :** Ce chapitre explore ainsi, à la fois théoriquement et expérimentalement, la dynamique d'un gaz intégrable soumis à une discontinuité initiale de densité.

## 6.1 Dynamique balistique d'un gaz 1D après une coupure bipartite

### Introduction

Dans cette section, nous étudions la dynamique hors équilibre d'un gaz quantique unidimensionnel de bosons soumis à une coupure bipartite. Ce protocole expérimental permet de générer une discontinuité nette dans le profil de densité initial, menant à une évolution balistique non triviale.

L'objectif est double :

- du point de vue expérimental, suivre en temps réel l'évolution du gaz et caractériser ses propriétés locales et globales ;
- du point de vue théorique, confronter ces observations aux prédictions de la théorie GHD, qui fournit un cadre analytique pour décrire la relaxation de systèmes intégrables à grande échelle.

Cette étude constitue une illustration directe du problème de Riemann quantique, dans lequel un état initial composé de deux régions thermodynamiques différentes évolue selon une dynamique déterministe. Elle permet également d'accéder à des signatures locales de la distribution de rapidités, jusque-là difficiles à sonder expérimentalement.

#### 6.1.1 Préparation expérimentale et protocole de coupure

**Contexte expérimental et références** Les détails concernant l'imagerie, le piégeage et la sélection spatiale sont présentés de manière approfondie dans le chapitre (5), ainsi que dans la thèse de L. Dubois [Dub24]. Dans cette sous-section, nous nous limitons aux éléments essentiels à la compréhension du protocole de coupure et de la dynamique qui en résulte.

**Préparation et coupure bipartite** Comme décrit en détail au Chap. 5, nous préparons un gaz unidimensionnel de bosons  $^{87}\text{Rb}$  dans l'état hyperfin  $|F = 2, m_F = 2\rangle$ , piégé sur une puce atomique. Le confinement transverse, assuré par des microfils RF, place le système dans le régime 1D ( $\mu, k_B T \ll \hbar\omega_\perp$ ), tandis qu'un confinement longitudinal quartique  $V(x) = a_4x^4$  assure une densité homogène sur environ 250  $\mu\text{m}$ . Cette homogénéité est cruciale pour simuler le problème de Riemann.

La coupure bipartite est ensuite obtenue par illumination sélective d'une extrémité du gaz à l'aide d'un faisceau quasi-résonant modulé par un **DMD**, expulsant localement les atomes par pression de radiation [Dub+24]. On crée ainsi une discontinuité nette de densité entre une région vide ( $x < 0$ ) et une région homogène ( $x > 0$ ).

**Évolution après coupure** Une fois la coupure effectuée, le confinement longitudinal est supprimé tandis que le confinement transverse est maintenu. Le gaz évolue alors librement dans une direction, ce qui est analogue à (6.1) mais depuis une condition initiale de deux régions homogène (problème de Riemann) (6.2). L'évolution du profil de densité  $n(x, t)$  est mesuré par imagerie après différentes durées  $t$  d'évolution.

#### 6.1.2 Cadre de la GHD et dynamique balistique

Dans cette section, nous présentons le cadre théorique de GHD appliquée à l'expérience décrite précédemment. L'objectif est de décrire analytiquement la dynamique balistique induite par une coupure bipartite dans un gaz quantique unidimensionnel, en exploitant les équations de GHD appliquées au modèle de LL.

#### Pourquoi travailler avec $v$ plutôt qu'avec $\rho$ ?

*Équation de GHD en termes de  $\rho$ .* L'évolution à grande échelle du système est gouvernée par les équations de GHD [Ber+16; CDY16]. L'évolution pour la distribution des rapidités  $\rho(x, \theta; t)$  (Eq (3.40)), en l'absence de potentiel extérieur, prend la forme d'une équation convective :

$$\partial_t \rho + \partial_x (v_{[\rho]}^{\text{eff}} \rho) = 0, \quad (6.3)$$

où  $v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta)$  est la vitesse effective des quasi-particules de rapidité  $\theta$ , fonctionnelle non linéaire de  $\rho$  et où un terme de compression  $\partial_x(v_{[\rho]}^{\text{eff}}\rho)$  apparaît lorsqu'on développe la dérivée. Cela complique l'analyse, notamment lorsque les vitesses effectives varient fortement dans l'espace ou le temps.

Pour chaque rapidité  $\theta$ , l'équation (6.3) constitue un cas particulier de (6.1). Nous considérons ici une condition initiale de type « coupure bipartite », représentant un état homogène à droite ( $x > 0$ ) et vide à gauche ( $x < 0$ ) :

$$\rho(x, \theta; t = 0) = \begin{cases} \rho_0(\theta) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Ce type de condition correspond, pour chaque rapidité  $\theta$ , au condition introduit dans l'introduction (6.2).

*Équation de GHD en termes de  $\nu$ .* En comparaison, l'évolution du facteur d'occupation  $\nu(x, \theta; t)$  (Eq (3.41)) , qui, en l'absence de potentiel extérieur suit une équation de transport pur :

$$\partial_t \nu + v_{[\nu]}^{\text{eff}} \partial_x \nu = 0, \quad (6.5)$$

où la dérivée temporelle est directement couplée à une dérivée spatiale. Cette forme préserve l'information le long des caractéristiques associées aux vitesses effectives  $v_{[\nu]}^{\text{eff}}$ , ce qui rend la dynamique plus lisible et plus simple à analyser.

Les équation de transport pur (6.5) ne sont pas des cas particuliers de (6.1). Et donc même si les conditions initiales de type « coupure bipartite », pour  $\nu$  :

$$\nu(x, \theta; t = 0) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

sont du type (6.2).

Dans ce travail, nous choisissons de formuler la dynamique hydrodynamique généralisée en termes de la fonction d'occupation  $\nu(x, \theta; t)$ , plutôt que de la distribution de rapidité  $\rho(x, \theta, t)$ . Cette approche présente plusieurs avantages. D'une part, l'équation vérifiée par  $\nu$  est une équation de transport pur (6.5), ce qui permet une résolution naturelle par la méthode des caractéristiques, plus simplement que dans (6.3). D'autre part,  $\nu$  possède une interprétation physique claire comme facteur d'occupation, borné entre 0 et 1, ce qui en fait une variable plus stable et mieux adaptée aux calculs analytiques ou numériques. De plus, la dynamique effective des observables s'exprime naturellement en fonction de  $\nu$ . Enfin,  $\nu$  et  $\rho$  étant liés (par (1.90)), résoudre l'équation en  $\nu$  revient, une fois  $v_{[\nu]}^{\text{eff}}$  déterminé, à résoudre complètement la dynamique de  $\rho$ .

**Structure auto-similaire de la solution.** Un point central est que les conditions initiales (6.6) sont invariantes par dilatation. En effet quelque soit  $\alpha > 0$ , et pour tout  $x$  réelle, on a  $\nu(\alpha x, \theta; t = 0) = \nu(x, \theta; t = 0)$ . Un autre point central de la GHD est l'invariance d'échelle des solutions de l'équation (6.5) ( (6.3) aussi et plus généralement de (6.1)) . En effet, si  $\nu(x, \theta; t)$  est solution de l'équation (6.5), alors  $\nu(\alpha x, \theta; \alpha t)$  l'est également, pour tout  $\alpha > 0$ , avec les conditions initiales  $\nu(\alpha x, \theta; t = 0)$ . Comme les fonctions  $\nu(\alpha \cdot, \theta; t = 0)$  et  $\nu(\alpha x, \theta; t = 0)$  coïncident, alors si (6.5) admet au plus une solution physique ("entropique" Cf Annex ??) pour chaque données initiales, on doit avoir  $\nu(\alpha x, \theta; \alpha t) = \nu(x, \theta; t)$  pour tout  $\alpha > 0$  . Cette propriété implique que :

$$\nu(x, \theta; t) = \nu^* \left( \frac{x}{t}, \theta \right), \quad (6.7)$$

autrement dit, les solutions dépendent uniquement du rapport  $\xi = x/t$  (, appelé *variable auto-similaire*).

**Résolution de l'évolution de  $\nu$ .** L'équation (6.7) montre que la dynamique est entièrement encodée dans la fonction  $\nu^*(\xi, \theta)$ , qui décrit la structure locale du gaz le long des rayons de vitesse  $\xi$ . Pour différent  $\theta$  , (6.5), se réécrit , en utilisant (6.7), avec un dérivé selon  $\xi$  :

$$(\xi - v_{[\nu^*(\xi, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta)) \partial_\xi \nu^* = 0. \quad (6.8)$$

Soit simplement pour chaque  $\theta$ , soit la vitesse effective est égale à  $\xi$ , soit  $\partial_\xi \nu^*(\xi, \theta) = 0$ .

La vitesse effective,  $v^{\text{eff}}[\nu^*(\xi, \cdot)](\theta)$ , est strictement monotone en  $\theta$ ; il existe donc au plus un unique point  $\theta^*$  tel que  $\xi = v^{\text{eff}}[\nu^*](\theta^*)$ , c'est-à-dire une seule discontinuité dans la solution.

Autrement dit : pour une  $\theta$  donnée, la fonction  $\nu^*(\xi, \theta)$  est constante en  $\xi$ , sauf au point  $\xi = v^{\text{eff}}_{[\nu^*(\xi, \cdot)]}(\theta^*)$ , où une discontinuité apparaît.

La solution  $\nu^*(\xi, \theta)$  s'écrit comme une fonction en escalier paramétrée par une valeur de coupure  $\theta^*$  :

$$\nu^*(\xi, \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } \theta < \theta^*, \\ 0 & \text{si } \theta > \theta^*, \end{cases} \quad \theta^* \text{ est tel que } v^{\text{eff}}_{[\nu^*(\xi, \cdot)]}(\theta^*) = \xi. \quad (6.9)$$

L'équation implicite peut être résolue numériquement afin d'obtenir  $\theta^*(\xi)$  pour chaque valeur de  $\xi$ .

**Résumé** Une prédiction remarquable de la GHD est l'apparition d'une discontinuité dans la fonction du facteur d'occupation local  $\nu^*(\xi, \theta)$ . Cette discontinuité se produit en  $\theta^*$ , avec  $\nu^*(\xi, \theta) = 0$  pour  $\theta > \theta^*$ . Un tel comportement est analogue à la discontinuité présente au bord de la mer de Fermi dans l'état fondamental du système (voir Chapitre 2). Du côté des petites valeurs de  $\theta$ , la fonction  $\nu^*(\xi, \theta)$  coïncide avec la distribution initiale  $\nu_0(\theta)$ . Ainsi, pour un état initial thermique, ce côté reste lisse et sans discontinuité.

Le fait qu'à grande échelle le gaz présente localement un facteur d'occupation avec une singularité typique d'un état d'entropie nulle constitue une conséquence directe de l'intégrabilité du système. En effet, dans un système intégrable, les quasi-particules conservent leur individualité et se propagent à vitesse bien définie, sans diffusion. Cela permet de maintenir, à temps long, des structures non thermalisées telles que des discontinuités, qui disparaîtraient dans un système non intégrable.

Dans le cadre de la GHD, la dynamique balistique résultant du quench bipartite est décrite par une solution auto-similaire paramétrée par une coupure en rapidité  $\theta^*(\xi)$ . Cette solution permet de prédire les profils de densité et d'occupation mesurables dans l'expérience. Elle fournit également un point de comparaison direct avec les données expérimentales obtenues à différents temps  $t$ , comme nous le verrons dans les sections suivantes.

### 6.1.3 Validation expérimentale de la dynamique hydrodynamique

Dans cette section, nous présentons les résultats expérimentaux obtenus après la coupure bipartite, et les comparons aux prédictions de la GHD à l'échelle d'Euler. L'objectif est de vérifier que la dynamique du gaz est bien décrite, à court et moyen terme, par une solution auto-similaire des équations hydrodynamiques.

**Mise en évidence de l'auto-similarité (régime d'Euler).** Avec l'équation (6.9) on a  $\nu^*(\xi, \theta)$ , puis  $\rho^*(\xi, \theta)$  via les équations (1.92) et (1.90), ce qui permet finalement de déterminer le profil de densité linéaire  $n^*(\xi)$  à un instant donné :

$$n^*(\xi) = \int d\theta \rho^*(\xi, \theta). \quad (6.10)$$

Or (6.7) implique que  $\rho(x, \theta; t) = \rho^*(\xi, \theta)$ . En injectant dans l'équation (6.10), il vient que :

$$n(x; t) = n^*(\xi). \quad (6.11)$$

Cette propriété est testée expérimentalement en superposant les profils mesurés à différents temps, après mise à l'échelle selon  $\xi = x/t$ . La Fig. 6.1 montre les profils normalisés mesurés entre  $t = 10$  ms et  $t = 18$  ms. L'excellent recouvrement obtenu confirme la validité du régime balistique et la pertinence de la description auto-similaire prédictive par la GHD.

**Contraintes expérimentales.** L'application de la GHD à l'échelle d'Euler dans notre expérience est limitée par des contraintes pratiques qui définissent une fenêtre temporelle  $t \in [t_m, t_{\max}]$  d'observation fiable :

- Pour  $t > t_{\max} \simeq 18$  ms, la densité atomique devient trop faible et les effets de taille finie compromettent l'approximation d'un système quasi-infini.

- Pour  $t < t_{\min} \approx 6 \pm 2$  ms, plusieurs facteurs réduisent la pertinence de la comparaison avec la GHD :
  - la coupure initiale n'est pas parfaitement abrupte (longueur caractéristique  $\sim 1 \mu\text{m}$ );
  - la résolution de l'imagerie limite la détection précise du bord de densité;
  - la GHD décrit par construction les grandes échelles spatio-temporelles.

Ainsi, dans nos conditions expérimentales, la comparaison avec la GHD est la plus pertinente pour des temps compris entre  $t_{\min} \approx 6$  ms et  $t_{\max} \approx 18$  ms.

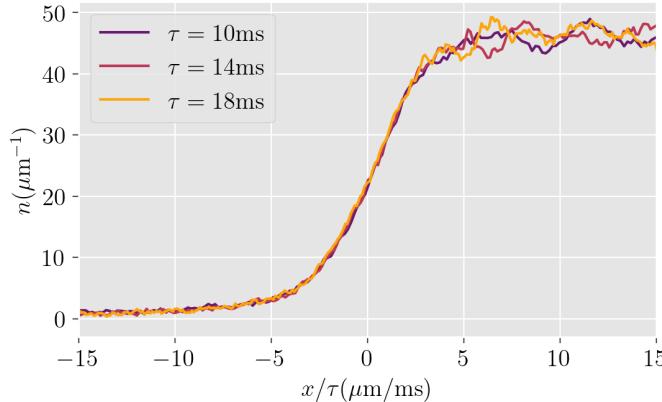


FIGURE 6.1 – Profils de densité mesurés pour différents temps  $t$ , représentés en fonction de la variable  $x/\tau$ . L'excellent recouvrement des courbes confirme l'auto-similarité et la dynamique balistique. Z

**Conclusion** Nous avons étudié la dynamique hors équilibre d'un gaz unidimensionnel de bosons après une coupure bipartite, créant une discontinuité initiale dans le profil de densité. Cette configuration, analogue au problème de Riemann quantique, engendre une évolution balistique qui peut être décrite par la Théorie d'Hydrodynamique Généralisée (GHD).

Sur le plan expérimental, un protocole précis a été mis en œuvre pour préparer un gaz homogène, le scinder spatialement à l'aide d'un DMD, puis le libérer dans un guide unidimensionnel. L'évolution du profil de densité  $n(x, t)$  a été mesurée pour différents temps, révélant une structure auto-similaire caractéristique du régime hydrodynamique.

Côté théorique, nous avons présenté les équations de GHD dans leur forme convective et montré que la solution du problème de Riemann s'exprime sous la forme d'une distribution auto-similaire  $\nu(\xi, \theta)$ , avec  $\xi = x/t$ . Cette structure permet de prédire analytiquement les profils de densité et de comparer directement les résultats expérimentaux aux prédictions théoriques.

La confrontation entre données expérimentales et GHD à température nulle montre une bonne correspondance dans un régime temporel intermédiaire ( $t \in [6, 18]$  ms). Ces observations confirment que la dynamique induite par une coupure bipartite est bien capturée par la GHD à l'échelle d'Euler, validant ce cadre pour décrire la relaxation balistique des systèmes quantiques intégrables. Elles ouvrent également la voie à des explorations plus fines des effets thermiques et des corrections hors-échelle d'Euler.

## 6.2 Sonder la distribution locale des rapidités

### Introduction

Dans la section précédente, nous avons analysé l'autosimilarité des profils de densité  $n(\xi)$ , confirmant la description hydrodynamique de la dynamique bipartite. Nous poursuivons ici en considérant un observable plus fin : la distribution locale en rapidité  $\rho(\xi, \theta)$ . Contrairement à la densité, cette distribution révèle une asymétrie marquée entre les deux côtés de la jonction. En particulier, la GHD prédit l'apparition d'une

discontinuité abrupte dans le facteur d'occupation du côté occupé, signature d'un état local proche du fondamental, tandis que du côté vide la distribution demeure lisse.

Pour accéder expérimentalement à cette observable, nous nous appuyons sur un protocole développé dans notre équipe [Dub+24] (présenté en détail en fin du Chapitre 5), qui permet de reconstruire indirectement la distribution en rapidité à partir de l'expansion libre d'une tranche localisée du gaz. En parallèle, nous comparons ces mesures aux simulations numériques issues de la GHD, afin de tester directement la présence de la discontinuité prédictive.

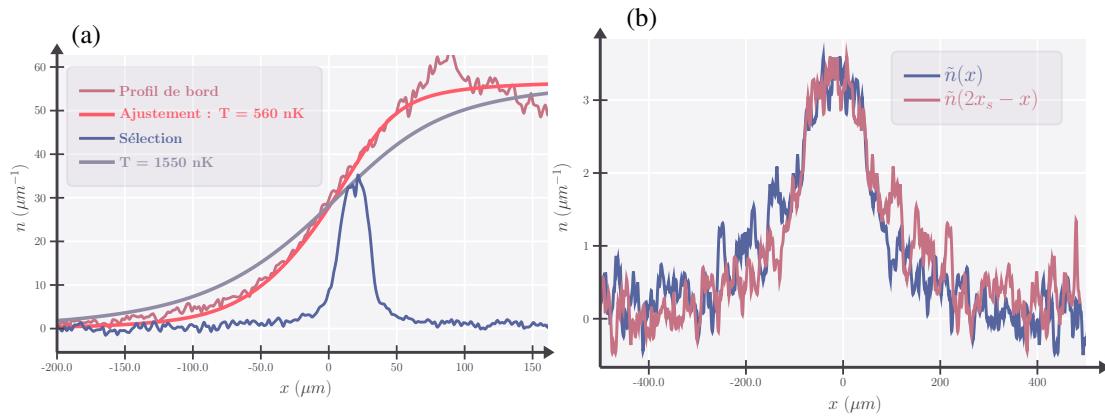


FIGURE 6.2 – (a) *Profil de bord et tranche sélectionnée*. Le profil de bord après 18 ms est montré en rouge. L'ajustement thermique donne une température  $T = 560 \text{ nK}$  (orange). Le profil de densité mesuré 1 ms après la sélection de la tranche est en bleu. (b) *Asymétrie du profil d'expansion de la tranche*. Le profil de densité après une expansion pendant  $\tau = 30 \text{ ms}$  est comparé à son image miroir. Le centre de symétrie  $x_s = -17 \mu\text{m}$  minimise la distance quadratique  $\delta^2(x_s) = \int dx \left[ \frac{\tilde{n}(x) - \tilde{n}(2x_s - x)}{2} \right]^2 / \int dx n(x)^2$ .

### 6.2.1 Sélection d'une tranche localisée après déformation du bord

**Sélection locale d'une tranche du gaz.** Afin d'accéder localement à la distribution de rapidité, nous exploitons le fait qu'après un temps  $t = 18 \text{ ms}$ , le bord du gaz s'étale sur plusieurs centaines de microns — environ  $350 \mu\text{m}$  — comme illustré en Fig. 6.4(e)-(f) et Fig. 6.2(a). Cette large extension spatiale permet d'identifier des régions à la fois assez étendues pour être sélectionnées expérimentalement, et suffisamment étroites pour que le gaz puisse y être considéré comme localement homogène dans le cadre de l'hydrodynamique généralisée.

Pour isoler une telle région, un **faisceau pousseur** est appliqué afin d'**éliminer tous les atomes situés hors d'un intervalle spatial** centré en  $x_0 = 18 \mu\text{m}$  et de largeur  $\ell$ . Cette technique, inspirée de la Réf. [Dub+24] (cf Chap 5), permet de ne conserver qu'une **tranche localisée du gaz**, dont la distribution en rapidité reflète l'état local  $\rho(x, \theta)$  aux abords de  $x \approx x_0$ , comme illustré en Fig. 6.5(a)–(c).

**Contrôle expérimental du faisceau de sélection.** Le profil du faisceau pousseur est caractérisé par sa position centrale  $x_0$  et sa largeur  $\ell$ . Lors des expériences présentées ici, seule la position  $x_0$  a été enregistrée (ici  $x_0 = 18 \mu\text{m}$ ). tandis que la largeur  $\ell$  n'a pas été enregistrée. Cette limitation a depuis été corrigée, mais pour les données utilisées dans cette thèse, la valeur de  $\ell$  sera déterminée a posteriori par analyse des profils expérimentaux.

**Inhomogénéité de la tranche sélectionnée** Dans l'idéal, la tranche sélectionnée devrait être suffisamment étroite pour assurer l'homogénéité de la densité locale. Avec le protocole utilisé, la largeur minimale des tranches est d'environ  $20 \mu\text{m}$ . Pour des tranches plus fines, les effets de bord deviennent significatifs. Même avec cette largeur minimale, l'inhomogénéité de la distribution de rapidité dans la tranche n'est pas négligeable, comme le montre la figure 6.4(e). Cette inhomogénéité a été prise en compte dans les calculs.

**Estimation de  $\ell$  et conséquences** Une difficulté provient du fait que les paramètres programmés du DMD n'ont pas été sauvegardés pour ces acquisitions. Cette erreur a été corrigée pour les mesures ultérieures. Pour les données actuelles, la position et la largeur de la tranche ont été extraites directement des profils expérimentaux :

- le profil de densité du nuage juste avant l'impulsion du faisceau pousseur (courbe rose de la figure 6.2 a));
- le profil de densité après l'application du faisceau pousseur, après un délai incompressible de 1 ms (courbe bleue de la figure 6.2 a)).

Les simulations GHD indiquent que, pendant ce délai, la distribution réelle de densité ne subit ni déplacement significatif ni déformation notable.

*Détermination de la taille de la tranche  $\ell$ .* La largeur  $\ell$  est estimée à partir de la conservation du nombre d'atomes : elle est ajustée de sorte que le nombre d'atomes contenus dans l'intervalle  $[x_0 - \ell/2, x_0 + \ell/2]$  corresponde au nombre total d'atomes effectivement expulsés par la sélection.

Les simulations d'expansion conservent le nombre de particules à mieux que 3 %. Nous avons donc choisi d'ajuster  $\ell$  de manière à ce qu'après une expansion unidimensionnelle, le nombre total de particules prédict par la simulation coïncide avec celui mesuré expérimentalement (voir Fig. 6.6(b)).

Une première simulation a été effectuée pour une température  $T = 560$  nK, valeur déterminée précédemment par ajustement sur la déformation du bord. Pour reproduire correctement le nombre total de particules après une expansion unidimensionnelle de durée  $\tau = 30$  ms, il est nécessaire de fixer la largeur de la tranche à  $\ell = 24$   $\mu\text{m}$ .

### 6.2.2 Expansion de la tranche et observation d'une asymétrie

**Principe de l'expansion et lien avec la distribution en rapidité** Après la sélection, la tranche est laissée en expansion libre unidimensionnelle pendant un temps  $\tau$ , puis son profil de densité longitudinal  $\tilde{n}(x, \tau)$  est mesuré. Cette expansion permet de convertir l'information spatiale en une information sur la distribution en rapidité. En effet, pour un temps  $\tau$  suffisamment grand, on s'attend à ce que la densité observée soit proportionnelle à la distribution totale des rapidités dans la tranche :

$$\tau \tilde{n}(\tau\theta - x_0; \tau) \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} \Pi(\theta), \quad (6.12)$$

où la distribution de rapidité  $\Pi(\theta)$  extensive est  $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta; \tau \geq 0) dx$  est une constante du mouvement. Cette distribution peut être calculée en utilisant l'état initial :

$$\Pi(\theta) = \int_{x_0 - \ell/2}^{x_0 + \ell/2} \rho(x, \theta; \tau = 0) dx. \quad (6.13)$$

**Observation expérimentale de l'asymétrie** Comme discuté en section 6.1.2, la théorie prédit que la distribution locale de rapidités  $\rho(x, \theta)$  est fortement asymétrique en  $\theta$ . Cette asymétrie se retrouve dans  $\Pi(\theta)$  et doit donc se manifester dans le profil d'expansion  $\tilde{n}(x, \tau)$ . Cette asymétrie est effectivement observée dans nos données expérimentales, comme illustré en Fig. 6.2(b) pour un temps d'expansion  $\tau = 30$  ms.

*Mise en évidence de l'asymétrie par symétrisation.* La figure 6.2(b) présente deux courbes : le profil mesuré  $\tilde{n}(x)$  (abréviation de  $\tilde{n}(x, \tau)$ ) et son image par symétrie par rapport à un axe  $x = 2x_s$ . L'objectif est de rendre visible l'asymétrie du profil. Pour ce faire, nous considérons une décomposition naturelle du profil autour d'un centre  $x = x_s$  :

$$\tilde{n}(x) = \tilde{n}_{\text{pair}}^{(x_s)}(x) + \tilde{n}_{\text{impair}}^{(x_s)}(x), \quad \text{où } \begin{cases} \tilde{n}_{\text{pair}}^{(x_s)}(x) &= \frac{\tilde{n}(x) + \tilde{n}(2x_s - x)}{2}, \\ \tilde{n}_{\text{impair}}^{(x_s)}(x) &= \frac{\tilde{n}(x) - \tilde{n}(2x_s - x)}{2} \end{cases}. \quad (6.14)$$

Cette décomposition correspond à une projection du profil sur les fonctions paires et impaires centrées en  $x = x_s$ .

Un profil asymétrique est un profil pour lequel il n'existe aucune valeur de  $x_s$  pour laquelle la composante impaire s'annule. Pour le profil expérimental obtenu après expansion de la tranche, nous avons ajusté  $x_s$  de façon à minimiser la composante impaire. Plus précisément, nous avons minimisé la quantité

$$\delta^2(x_s) = \int dx \left[ \frac{\tilde{n}(x) - \tilde{n}(2x_s - x)}{2} \right]^2 / \int dx n(x)^2 \quad (6.15)$$

La valeur optimale de  $x_s$  minimise  $\delta^2(x_s)$  et fournit un axe de symétrie effectif pour le profil. Cette méthode permet de comparer de manière robuste différentes conditions expérimentales, ou différents temps d'expansion, en s'affranchissant d'un ajustement arbitraire de centre. Le profils  $\tilde{n}_{\text{pair}}^{(x_s)}(x)$  et  $\tilde{n}_{\text{impair}}^{(x_s)}(x)$  obtenus pour cette valeur de  $x_s$  sont montré figure 6.2 (b). *Un* ~~asymétrie~~ est bien visible. Nous pouvons donc affirmer que le profil expérimental présente une asymétrie.

*Effet de l'homogénéité de la tranche sélectionnée*  $\Pi$  est l'intégrale (6.13). Si  $\rho(x, \theta)$  est uniforme sur la largeur  $\ell$ ,  $\Pi(\theta) \simeq \ell \rho(x_0, \theta)$  soit :

$$\tau \tilde{n}(\tau\theta - x_0; \tau) \simeq \ell \rho(x_0, \theta), \quad (6.16)$$

ce qui permet d'accéder directement à la distribution locale, y compris à d'éventuelles discontinuités.

Deux stratégies permettent d'améliorer cette homogénéité :

- Diminuer la largeur  $\ell$  de la sélection,
- Augmenter le temps  $t$  de déformation du bord avant sélection, pour étendre la région d'intérêt spatialement.

Cependant, ces deux approches ont des limitations : une plus petite valeur de  $\ell$  réduit le nombre d'atomes sélectionnés, ce qui diminue le rapport signal/bruit, et des temps  $t$  trop longs font sortir le système du régime semi-infini, introduisant des effets de bord non désirés.

La figure 6.6(a) montre que la courbe en pointillé bleu  $\ell\rho(\theta)$  s'annule pour  $\theta^*(x/\tau) < \theta$ . La valeur  $\theta^*(x/\tau)$  correspond à l'abscisse de la discontinuité. Pour un temps d'expansion  $\tau$  fixé,  $\theta^*(x/\tau)$  dépend de  $x$ . L'intégrale (6.13), calculée sur l'intervalle  $[x - \ell/2, x + \ell/2]$ , atténue donc cette discontinuité, mais l'asymétrie reste néanmoins visible (voir Fig. 6.6(a), courbe  $\Pi$ ).

*Limites sur le temps d'expansion* Allonger le temps d'expansion  $\tau$  permet d'approcher plus fidèlement le régime asymptotique  $\tau \rightarrow \infty$  où la correspondance avec  $\Pi(\theta)$  est exacte. Toutefois, cette expansion est limitée expérimentalement par la taille longitudinale du confinement 1D, de l'ordre de 1 mm, correspondant à la taille typique des microfils (Fig. 5.2a)). Comme illustré en Fig. 6.2(b), le nuage atteint cette taille à  $\tau \sim 30$  ms, ce qui constitue une limite pratique. Par ailleurs, des simulations GHD (voir Ref. [Dub+24]) montrent que des temps significativement plus longs seraient nécessaires pour que  $\tau \tilde{n}$  converge véritablement vers  $\Pi(\theta)$ .

*Renforcer l'asymétrie observée* Enfin, une asymétrie plus marquée peut être obtenue en modifiant l'état initial du gaz. En particulier, une bipartition réalisée à partir d'un état initial légèrement excité, donc plus éloigné du fondamental, renforcerait le contraste entre les deux côtés. Cette stratégie permet d'amplifier la discontinuité attendue dans la distribution de rapidité, et par conséquent dans le profil d'expansion. C'est pour cette raison que nous avons utilisé un nuage plus chaud que celui employé pour l'étude de l'autosimilarité (Fig. 6.1, Sec 6.1.3), tout en restant dans le régime unidimensionnel.

## Résumé

Dans cette section, nous avons présenté un protocole permettant de sonder la distribution locale des rapidités dans un gaz unidimensionnel hors équilibre, en sélectionnant une tranche étroite après déformation du bord, puis en la laissant s'étendre librement. Cette procédure permet d'accéder indirectement à la distribution intégrée en rapidité  $\Pi(\theta)$  dans la tranche, et de tester les prédictions de la GHD sur la structure locale du facteur d'occupation  $\nu(x, \theta)$ .

L'analyse expérimentale révèle une forte asymétrie du profil d'expansion, signature d'une distribution de rapidité non thermique. La méthode de symétrisation introduite permet de mettre en évidence cette asymétrie de manière robuste.

Pour approfondir cette analyse, nous nous appuyons sur des simulations numériques basées sur l'équation de GHD. Celles-ci permettent de modéliser la dynamique complète de la tranche sélectionnée, depuis la déformation du bord jusqu'à son expansion, et de confronter quantitativement les distributions mesurées aux prédictions théoriques.

## 6.3 Simulations numériques

Cette section présente en détail les étapes nécessaires à la résolution numérique de l'équation de GHD dans le cadre des simulations effectuées. Dans un premier temps, nous explicitons le calcul du facteur d'occupation  $\nu(\theta)$  et de la densité de rapidité  $\rho(\theta)$  à l'équilibre thermique, obtenus à partir d'un couple  $(T, \mu)$  donné. Nous décrivons ensuite l'évolution du système sous l'effet du potentiel de piégeage : en particulier, nous nous intéressons à la dynamique du contour délimitant la région occupée dans l'espace des phases  $(x, \theta)$ , en exploitant la conservation lagrangienne du facteur d'occupation. La simulation permet alors de suivre la déformation du bord au cours du temps. Une fois ce bord suffisamment évolué, nous extrayons une tranche du système pour en simuler l'expansion. Enfin, nous comparons la distribution de rapidité issue de cette expansion numérique avec celle mesurée expérimentalement, dans des conditions analogues.

### 6.3.1 Système homogène à l'équilibre thermique

Nous considérons d'abord un gaz unidimensionnel homogène infini, à l'équilibre thermique, caractérisé par le couple de paramètres thermodynamiques  $(T, \mu)$ . Comme expliqué au chapitre 2, la thermodynamique de Bethe-Ansatz **TBA** permet de déterminer le facteur d'occupation  $\nu_0(\theta)$  et la distribution de rapidités  $\rho_0(\theta)$  et densité d'état  $\rho_s(\theta)$  via (1.91).

Pour les simulations présentées ici, nous utilisons la densité expérimentale  $n_0 = 45 \mu\text{m}^{-1}$  et une température  $T = 560 \text{nK}$ . La figure 6.3(a-c) illustre le facteur d'occupation  $\nu_0(\theta)$  ainsi que la densité spatiale homogène correspondante.

Dans ce régime homogène, la distribution est indépendante de la position :

$$\nu(x, \theta) = \nu_0(\theta), \quad \forall x, \quad (6.17)$$

### 6.3.2 Dynamique du contour dans l'espace des phases $(x, \theta)$ .

Une fois le facteur d'occupation initial  $\nu_0(\theta)$  déterminé, nous cherchons à décrire l'évolution temporelle de la région occupée dans l'espace des phases  $(x, \theta)$ . Cette région, notée  $\Gamma_t$ , est définie comme le support du facteur d'occupation  $\nu(x, \theta, t)$  : elle contient l'ensemble des points pour lesquels  $\nu$  est non nul à l'instant  $t$ .

Dans ce qui suit, nous proposons de dériver l'équation (6.9) en adoptant une approche plus générale, qui sera utilisée par la suite.

**Interprétation lagrangienne et trajectoires caractéristiques.** Dans le formalisme de l'hydrodynamique généralisée, l'évolution de  $\nu$  est gouvernée par l'équation de transport (6.5). Cette équation admet une interprétation **lagrangienne** : le facteur d'occupation  $\nu$  reste constant lorsqu'on le suit le long des trajectoires caractéristiques  $(x(t), \theta(t))$ , c'est-à-dire

$$\nu(x(t), \theta(t); t) = \nu(x(0), \theta(0); 0). \quad (6.18)$$

Autrement dit,  $\frac{d\nu}{dt}(x, \theta; t) = 0$ , ce qui conduit au système d'équations caractéristiques (3.28) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} \dot{x}(t) &= \nu_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta), \\ \dot{\theta}(t) &= \theta(0) \equiv \theta. \end{cases} \quad (6.19)$$

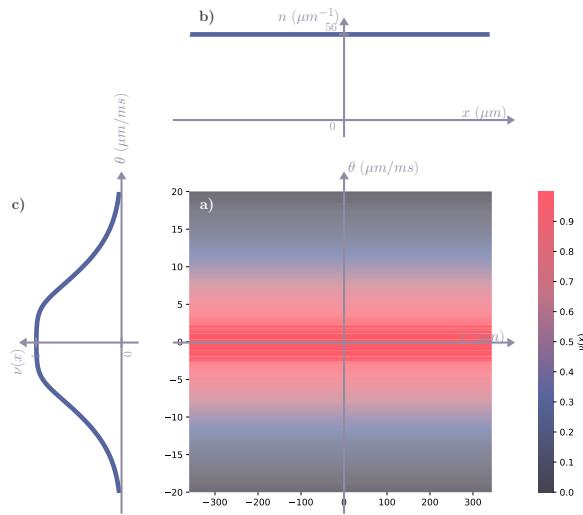


FIGURE 6.3 – a) Facteur d’occupation initial  $v(x, \theta) = v_0(\theta)$  correspondant à un état d’équilibre thermique à la température  $T = 560$  nK, pour une densité linéaire homogène  $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$ . Ces paramètres correspondent à une potentiel chimique  $\mu = 65$  nK. b) Densité spatiale linéaire  $n(x) = \int \rho_{[v]}(x, \theta) d\theta$ , constante et égale à  $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$ . c) Facteur d’occupation  $v_0(\theta)$  correspondant à la distribution thermique illustrée en a).

**État initial en "patch" et Propagation du support .** Nous définissons un état de type «patch» comme un état pour lequel le facteur d’occupation  $v(x, \theta; 0)$  prend la valeur  $v_0(\theta)$  à l’intérieur d’une région initiale  $\Gamma_0$ , et est nul en dehors de cette région, où  $t$  représente le temps d’évolution.

En suivant chaque point  $(x(t), \theta)$  de cette région selon l’équation (6.19), on détermine la région atteinte à l’instant  $t$ , notée  $\Gamma_t$ . Par construction, le facteur d’occupation reste constant le long de ces trajectoires d’après (6.18),  $v(x(t), \theta, t) = v(x(0), \theta, 0)$  soit :

$$v(x(t), \theta, t) = v_0(\theta). \quad (6.20)$$

Par conséquent, on peut écrire l’évolution du facteur d’occupation de manière explicite :

$$v(x, \theta, t) = \begin{cases} v_0(\theta) & \text{si } (x, \theta) \in \Gamma_t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.21)$$

Cette propriété est une conséquence directe du cadre intégrable sous-jacent et de la forme particulière de l’équation de GHD, qui assure que les caractéristiques  $(x(t), \theta)$  suivent une dynamique conservant localement le facteur d’occupation.

Enfin, notons que, dans ce cadre, la vitesse efficace  $v_{[v]}^{\text{eff}}(x, \theta, t)$  est fonctionnelle de la fonction  $v(x, \cdot; t)$

### 6.3.3 Simulation de la déformation du bord

Dans la configuration initiale correspondant à l’expérience de déformation du bord (Fig. 6.4), la région occupée par le gaz est  $x > 0$ , avec un facteur d’occupation uniforme  $v(x, \theta; t = 0) = v_0(\theta)$  pour  $x > 0$ , et nul pour  $x < 0$ . Le contour initial séparant ces deux domaines dans le plan  $(x, \theta)$  est la ligne  $x = 0$ .

Avec cette condition initiale, le contour  $\partial\Gamma_t^b$  reste bijectif, c’est-à-dire que pour une position donnée  $x$ , il n’existe qu’une seule rapidité  $\theta^*$  appartenant à  $\partial\Gamma_t^b$ . Réciproquement, pour chaque  $\theta^*$ , il n’existe qu’un unique  $x$  appartenant à  $\partial\Gamma_t^b$ , noté  $x(\theta^*, t)$ . Nous pouvons donc paramétriser le contour par  $\theta^*$ .

La théorie GHD permet de calculer  $x(\theta^*, t)$  de la manière suivante. D'après l'équation (6.21), la distribution du facteur d'occupation au point  $x(\theta^*, t)$  est donnée par

$$v^*(x(\theta^*, t), \theta) = \begin{cases} v_0(\theta), & \text{si } \theta < \theta^*, \\ 0, & \text{si } \theta > \theta^*. \end{cases} \quad (6.22)$$

Nous avons retrouvé l'équation (6.9).

Cette distribution est indépendante du temps. La vitesse effective au point  $(x(\theta^*, t), \theta^*)$ , notée  $v_{[v^*]}^{\text{eff}}(\theta^*)$ , est donc constante. L'intégration de l'équation (6.19) donne alors

$$x(\theta^*, t) = v_{[v^*]}^{\text{eff}}(\theta^*) t, \quad (6.23)$$

ce qui définit le contour  $\partial\Gamma_t^b$ . Notons que cette expression reprend l'équation (6.9) de la section 6.1.2. Cette dérivation est intéressante car elle peut être adaptée à d'autres configurations initiales, comme nous le verrons dans la section suivante.

Pour reconstruire le profil de densité du gaz, nous procédons de la manière suivante. Nous échantillonnons  $\theta^*$  de façon linéaire avec  $N$  points répartis entre une valeur inférieure  $\theta_1^*$  suffisamment petite pour que  $v_0(\theta < \theta_1^*) \approx 0$  et une valeur supérieure  $\theta_N^*$  telle que  $v_0(\theta > \theta_N^*) \approx 0$ . Pour chaque  $\theta^*$ , les équations (6.21) et (3.37) permettent de calculer  $v_{[v^*]}^{\text{eff}}(\theta^*)$ , ce qui donne  $x(\theta^*, t)$  via l'équation précédente.

Au point  $x(\theta^*, t)$ , la densité d'atomes  $n$  est obtenue en utilisant les équations (6.21) et (1.90). Nous obtenons ainsi un ensemble de données  $(x_i, n_i)$  pour  $i = 1, \dots, N$ . La densité linéique en tout point  $x$  est ensuite estimée par interpolation linéaire à partir de ces points (Fig. 6.4). Cette méthode permet de comparer directement les prédictions numériques aux données expérimentales.

Enfin, en fixant  $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$ , nous ajustons la température  $T$  des simulations GHD pour reproduire les données expérimentales de déformation du bord (Fig. 6.2). Cet ajustement donne  $T = 560 \text{ nK}$ .

### 6.3.4 Simulation de l'expansion.

Après la déformation du bord, une sélection spatiale est réalisée pour isoler une tranche du gaz (voir Fig. 6.5(a)), que l'on laisse ensuite se dilater librement en une dimension pendant un temps  $\tau$ . Contrairement au cas de la déformation du bord, le contour de la région occupée dans  $(x, \theta)$  n'est plus bijectif ( $\theta x, (x, \theta) \in \partial\Gamma_\tau$  n'est pas injectif) : pour une position donnée de  $x$ , plusieurs rapidité  $\theta$  peuvent exister telles que  $(x, \theta)$  appartiennent au contour  $\partial\Gamma_\tau$  de la région occupée.

Pour surmonter cette difficulté, nous décomposons le contour  $\Gamma_\tau$  en deux branches bijectives : le bord gauche, noté  $\partial\Gamma_\tau^g$ , constitué des points  $(x_g(\tau), \theta_g)$ , et le bord droit, noté  $\partial\Gamma_\tau^d$ , constitué des points  $(x_d(\tau), \theta_d)$ . Cette décomposition garantit que, sur chaque branche, la correspondance  $\theta \mapsto x$  est bijective, c'est-à-dire  $(x, \theta) \in \Gamma_\tau^{g/d}$ .

Pour une position  $x(\tau)$  donnée,  $\theta_g$  et  $\theta_d$  sont définis de sorte que  $(x(\tau), \theta_g) \in \partial\Gamma_\tau^g$  et  $(x(\tau), \theta_d) \in \partial\Gamma_\tau^d$ . Le facteur d'occupation après un temps  $\tau$  est alors donné par (6.21) :

$$v(x(\tau), \theta) = \begin{cases} v_0(\theta) & \text{si } \theta \in [\theta_g, \theta_d], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.24)$$

La vitesse efficace dépend désormais explicitement du temps  $\tau$  et de la position, puisqu'elle est fonction du facteur d'occupation local :

$$v_{[v(x(\tau), \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta), \quad (6.25)$$

Pour résoudre numériquement (6.19) on est ici obligé d'induire des pas de temps  $d\tau$  :

$$x(\tau + d\tau) = x(\tau) + v_{[v(x(\tau), \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta)d\tau. \quad (6.26)$$

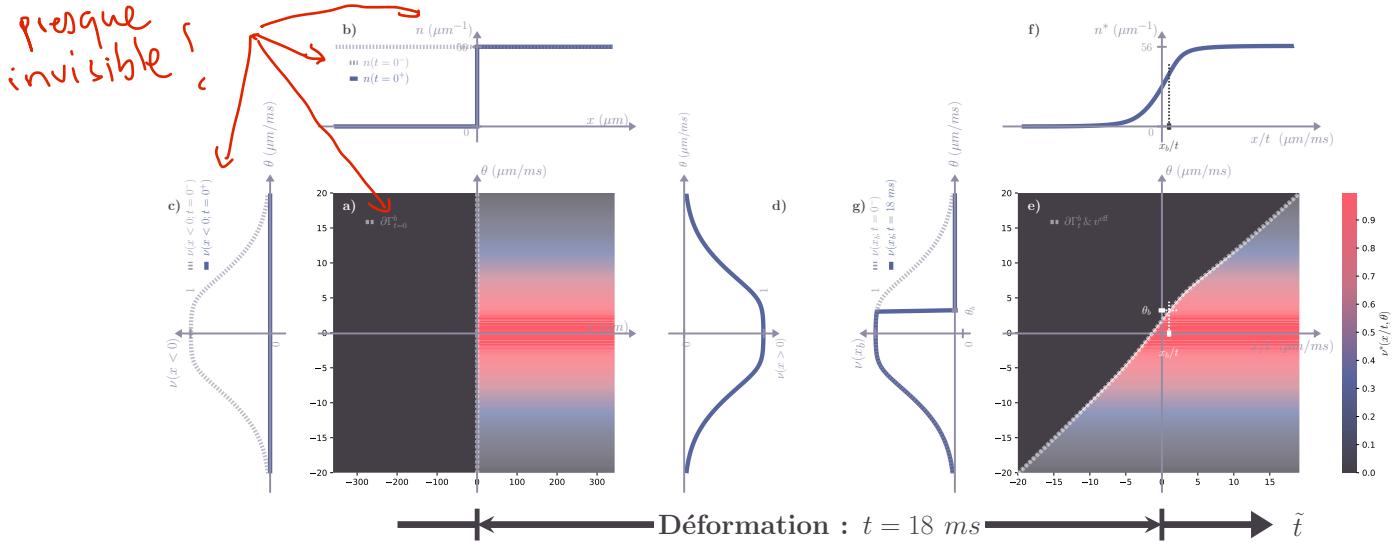


FIGURE 6.4 – (a) À l'instant  $t = 0^+$ , immédiatement après le « quench bipartite » en  $x = 0$ , le facteur d'occupation est donné par  $v(x, \theta; t = 0^+) = v_0(\theta)$  pour  $x > 0$  et est nul pour  $x < 0$ . Le bord initial représenté en tirets par l'ensemble des points  $(x_b(t = 0^+) = 0, \theta)$ . (b) Densité spatiale linéaire  $n(x)$  : en pointillés,  $n(x; t = 0^-) = \int \rho(x, \theta; t = 0^-) d\theta = n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$  juste avant le quench ; en ligne pleine,  $n(x; t = 0^+) = n_0$  pour  $x > 0$  et 0 pour  $x < 0$ . (c) À gauche de la coupure ( $x < 0$ ) : en pointillés,  $v(x, \theta; t = 0^-) = v_0(\theta)$  ; en ligne pleine,  $v(x, \theta; t = 0^+) = 0$ . (d) À droite de la coupure ( $x > 0$ ), le facteur d'occupation reste inchangé :  $v(x, \theta; t = 0^+) = v_0(\theta)$ . (e) À l'instant  $t = 18 \text{ ms}$ , après l'évolution balistique post-quench, le facteur d'occupation est donné par  $v^*(x_b(t)/t, \theta) = v_0(\theta)$  pour  $\theta < \theta_b$ , et nul pour  $\theta > \theta_b$ , résolvant l'équation (6.9), pour  $t > 0$ .  $v(x(t), \theta) (= v^*(x(t)/t, \theta))$  est invariant de la déformation de  $t > 0$ . Le bord représenté en tirets par l'ensemble des points  $(x_b(t)/t, \theta(t))$ . Étant donné que la coupure initiale est en  $x = 0$  et que l'évolution du bord est balistique, cette courbe résoud  $v_{[v^*(x(t)/t, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta) = x(t)/t = v$  (6.5). (f) Densité spatiale  $n^*(x/t)$  en régime hydrodynamique (scaling). (g) Pour les atomes à droite de la coupure : en pointillés,  $v^*(x(t)/t, \theta) = v_0(\theta)$  ; en ligne pleine,  $v^*(x_b(t)/t, \theta) = v_0(\theta)$  pour  $\theta < \theta_b$  et nul pour  $\theta > \theta_b$ . Le raisonnement est similaire pour les atomes à gauche de la coupure.

**Étapes calculées numériques.** Nous notons les deux rapidités caractéristiques  $\theta_+$  et  $\theta_-$ , définies comme celles associées aux positions  $x_0 + \ell/2$  et  $x_0 - \ell/2$ , respectivement, sur le contour  $\partial\Gamma_t^b$  (voir Fig. 6.4(d)). De plus, nous introduisons une rapidité suffisamment négative, notée  $\theta_1^*$ , telle que  $v_0(\theta < \theta_1^*) \approx 0$ .

Nous construisons alors une liste discrète de rapidités, notée  $\theta_{\text{disc}}$ , de la manière suivante :

- $N = 400$  points répartis linéairement entre  $\theta_1^*$  et  $\theta_-$ ,
- $N$  points répartis linéairement entre  $\theta_-$  et  $\theta_+$ .

À partir de cette discréttisation :

- nous définissons une liste  $x_{g,\text{disc}}$  contenant la valeur fixe  $x_0 - \ell/2$  pour chaque  $\theta \in [\theta_1^*, \theta_-]$ , et les points  $(x(\theta), \theta)$  du contour  $\partial\Gamma_t^b$  pour  $\theta \in [\theta_-, \theta_+]$  (voir Fig. 6.4(a)) ;
- nous définissons une liste  $x_{b,\text{disc}}$  contenant la valeur fixe  $x_0 + \ell/2$  pour  $\theta \in \theta_{\text{disc}}$ .

Ainsi, chaque élément  $(x_i, \theta_i)$  de  $x_{g,\text{disc}}$  (resp.  $x_{b,\text{disc}}$ ) appartient au bord  $\partial\Gamma_{\tau=0}^g$  (resp.  $\partial\Gamma_{\tau=0}^b$ ), comme illustré Fig. 6.5(a). Afin d'assurer la bijectivité décrite plus haut, nous ajoutons à  $x_{b,\text{disc}}$  et  $x_{g,\text{disc}}$  un petit décalage proportionnel à  $\theta_{\text{disc}} \cdot d\tau \cdot 10^{-10}$ . Ce décalage est suffisamment faible pour ne pas affecter la précision des simulations. Les éléments des listes sont ensuite triés par ordre croissant.

Pour un temps d'expansion  $\tau$ , nous introduisons deux interpolations continues :

$$\theta_{g,\text{fit}}(x) \quad \text{et} \quad \theta_{b,\text{fit}}(x),$$

définies de sorte que pour tout  $x \in x_{g,\text{disc}}$  (resp.  $x \in x_{b,\text{disc}}$ ), on ait  $\theta_{g,\text{fit}}(x) = \theta_g$  (resp.  $\theta_{b,\text{fit}}(x) = \theta_b$ ).

Pour chaque  $\theta_g \in \theta_{\text{disc}}$ , on détermine la position correspondante  $x$  telle que  $\theta_{g,\text{fit}}(x) = \theta_g$ . Deux cas se présentent alors :

- si le premier élément de  $x_{b,\text{disc}}$  est supérieur à  $x$ , nous échantillonnons 600 points de rapidité dans une nouvelle liste  $\theta_{\text{disc},2}$  uniformément répartis sur l'intervalle  $[\theta_1^*, \theta_g]$  (cf. Fig. 6.5(a));
- sinon, nous échantillonnons 600 points entre  $[\theta_{b,\text{fit}}(x), \theta_g]$  (cf. Fig. 6.5(d)).

Pour chaque  $\theta \in \theta_{\text{disc},2}$ , le facteur d'occupation est

$$\nu(x, \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta), & \text{si } \theta \in \theta_{\text{disc},2}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

conformément à l'équation (6.24).

Nous définissons ensuite une liste  $\nu_{\text{disc}}$  contenant les valeurs  $\nu_i = \nu_0(\theta_i)$  pour chaque  $\theta_i \in \theta_{\text{disc}}$ . Cette liste permet de calculer la vitesse effective  $\nu_{[\nu(x, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta)$  via l'équation (3.37). Les listes  $x_{g,\text{disc}}$  et  $x_{b,\text{disc}}$  sont ensuite mises à jour en ajoutant la contribution  $\nu_{[\nu(x, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta_{\text{disc}}) \cdot d\tau$  (cf. Eq. (6.26)).

La densité d'atomes  $n(x, \tau)$  est obtenue à partir des équations (6.21) et (1.90). On obtient ainsi un ensemble discret de points  $(x_i, n_i)$ ,  $i = 1, \dots, 2N$ . La densité linéaire est ensuite reconstruite pour tout  $x$  par interpolation linéaire à partir de ces points (voir Fig. 6.5(e)).

Ce processus est répété à chaque pas de temps,  $\tau \leftarrow \tau + d\tau$ , jusqu'à  $\tau = 30$  ms. En suivant l'évolution de chaque point du contour par la vitesse effective, on reconstruit ainsi le profil de densité  $n(x, \tau)$ , directement comparable aux données expérimentales (Fig. 6.5(f)).

Cette expansion unidimensionnelle est modélisée en supposant que le facteur d'occupation  $\nu(x, \theta)$  est conservé localement au sein de la tranche sélectionnée. La figure 6.5 illustre les différentes étapes de cette procédure. Dans un premier temps, la tranche est extraite du bord du système, tel qu'il a évolué jusqu'à l'instant  $t = 18$  ms dans le piège. L'évolution unidimensionnelle à partir de cette condition initiale repose sur le transport lagrangien du bord dans l'espace des phases  $(x, \theta)$ , en l'absence de piégeage.

### 6.3.5 Comparaison aux données expérimentales et discussion

Nous comparons dans cette section les profils de densité obtenus par simulation GHD à ceux mesurés expérimentalement après expansion d'une tranche extraite du bord du système.

La Fig. 6.6(a) montre le profil d'expansion simulé à partir d'un état initial à température  $T = 560$  nK, déterminée indépendamment par ajustement sur la déformation du bord (cf. Fig. 6.2). Le profil présente une forte asymétrie caractéristique, avec un bord droit abrupt et une densité qui s'annule au-delà d'une certaine position. Toutefois, cette chute est moins abrupte que celle de la distribution locale des rapidités  $\rho(x, \theta)$  au centre de la tranche (courbes  $\tau n_{\text{GHD}}$  et  $\ell\rho$  de la figure 6.6(a)). Deux effets principaux expliquent cet élargissement :

- (i) La distribution de rapidité n'est pas homogène dans la tranche, si bien que la distribution intégrée  $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta) dx$  diffère de  $\ell\rho(x, \theta)$ , comme visible sur la Fig. 6.6(a), ligne pleine versus pointillée;
- (ii) Le temps d'expansion  $\tau = 30$  ms est fini, de sorte que la densité spatiale observée  $\tilde{n}(x, \tau)$  diffère de la transformation directe  $\Pi((x - x_0)/\tau)/\tau$ , comme le montre la comparaison entre les courbes rouge et marron dans la même figure.

La Fig. 6.6(b) compare la densité simulée pour une température initiale  $T = 560$  nK avec les données expérimentales. Bien que la forme générale du profil soit qualitativement bien reproduite, des écarts significatifs apparaissent, en particulier autour de  $x \simeq \pm 350$   $\mu\text{m}$ , et jusqu'à 25% dans la région centrale.

Afin d'améliorer cet accord, nous avons traité la température  $T$  de l'état initial comme un paramètre libre. L'ajustement donne une température apparente de  $T = 1550$  nK, représentée par la ligne magenta dans la Fig. 6.6(b). Cette valeur permet de mieux reproduire le profil d'expansion, en particulier dans les régions périphériques.

Cependant, le profil au bord correspondant à cette température, présenté en Fig. 6.2(a), est incompatible avec les observations expérimentales. En particulier, la courbure du bord simulé à cette température est beaucoup plus prononcée que celle mesurée. Ceci suggère que l'ajustement par température libre masque d'autres effets physiques non pris en compte dans le modèle.

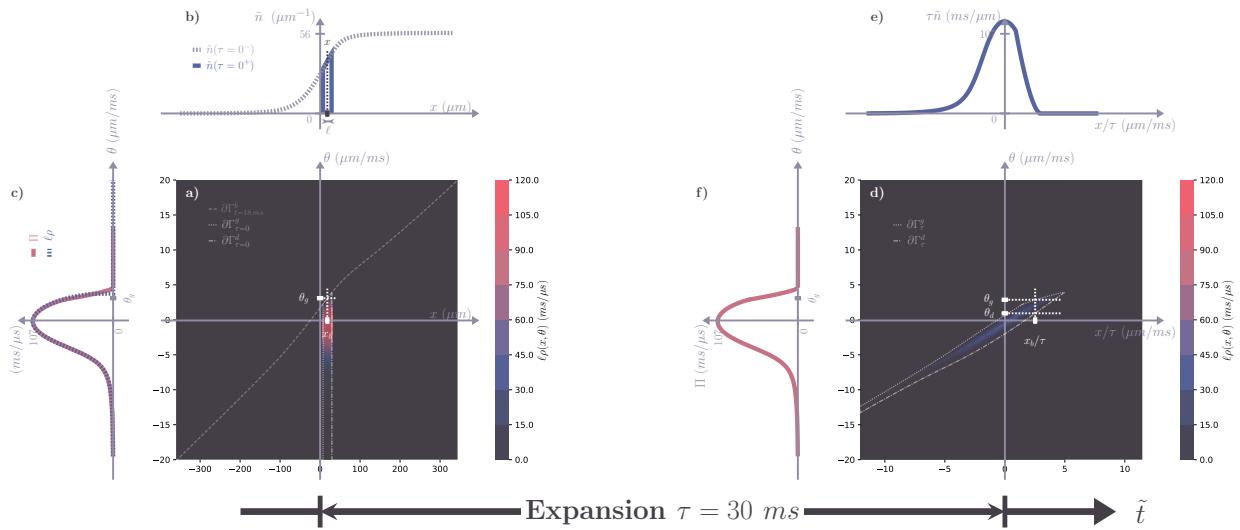


FIGURE 6.5 – (a) À l'instant  $\tau = 0^+$ , immédiatement après la sélection de la tranche centrée en  $x = x_0$  et de largeur  $\ell$ , la distribution de rapidité localement résolue est donnée par  $\rho(x, \theta; \tau = 0^+) = \nu(x, \theta; t = 18 \text{ ms}) \rho_s(x, \theta; t = 18 \text{ ms})$  pour  $|x - x_0| < \ell/2$ , et est nulle pour  $|x - x_0| > \ell/2$ . Le bord gauche immédiatement après la sélection est représenté en pointillés par l'ensemble des points  $(x_g(\tau = 0^+), \theta_g)$ , et le bord droit en tiret-point par l'ensemble des points  $(x_d(\tau = 0^+), \theta_d)$ . Le bord complet est donc la concaténation de ces deux ensembles. (b) Densité linéique spatiale  $\tilde{n}(x)$  : en pointillés,  $n(x; t = 18 \text{ ms})$  juste avant la sélection ; en ligne pleine,  $\tilde{n}(x; \tau = 0^+)$ , égal à  $n(x; t = 18 \text{ ms})$  pour  $|x - x_0| < \ell/2$  et nul ailleurs. (c) Distribution de rapidité après sélection,  $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta; \tau) dx$ , invariante sous l'évolution unidimensionnelle, représentée en rouge. La distribution localement résolue en  $x_b(s; \tau = 0^+)$ ,  $\rho(x_b(\tau = 0^+), \theta; \tau = 0^+)$ , est représentée en pointillés. Cette distribution est localement conservée, i.e.,  $\rho(x(\tau), \theta)$  reste inchangée au cours de l'évolution unidimensionnelle, indépendamment de  $\tau$ . (e) Distribution localement résolue  $\rho(x, \theta; \tau = 30 \text{ ms})$  après une évolution unidimensionnelle de 30 ms. Le bord gauche est représenté en pointillés par les points  $(x_g(\tau = 30 \text{ ms}), \theta(\tau = 30 \text{ ms}))$ , et le bord droit en tiret-point par  $(x_d(\tau = 30 \text{ ms}), \theta(\tau = 30 \text{ ms}))$ . (f) Densité spatiale  $\tilde{n}(x; \tau = 30 \text{ ms})$ . (g) Distribution de rapidité  $\Pi(\theta)$  après la sélection (identique à celle de (c)).

Une analyse plus fine du profil expérimental met en évidence, du côté des petites valeurs de  $x$  (courbe bleue, Fig. 6.6(b)), la présence de défauts absents des prédictions de la GHD à l'échelle d'Euler. Ces écarts pourraient résulter de mécanismes échappant au cadre du modèle, notamment :

- **Effets de sélection de tranche** : le faisceau pousseur utilisé pourrait chauffer localement les atomes en bordure, entraînant des distributions de rapidité plus étendues que prévu.
- **Effets diffusifs** : dans les régions de forts gradients, notamment au bord du gaz, des termes de diffusion (omnis présents dans la GHD à l'échelle d'Euler) pourraient devenir significatifs. De telles corrections ont été proposées récemment pour modéliser la GHD au-delà de l'approximation eulérienne.

En résumé, bien que la GHD reproduise globalement la forme du profil d'expansion, des écarts importants subsistent. Leur origine semble liée à des effets microscopiques non capturés par la description eulérienne (en particulier la dynamique hors équilibre aux bords) soulignant l'intérêt d'une extension du modèle pour mieux décrire ces régimes.

## Résumé

Cette section a détaillé la mise en œuvre des simulations numériques basées sur GHD, permettant de modéliser finement la dynamique du système dans les régimes explorés expérimentalement.

Nous avons ajusté la température pour reproduire au mieux le profil de densité du bord (Fig. 6.6(b)).

Les simulations reproduisent qualitativement les principaux traits observés expérimentalement, notamment l'asymétrie du profil d'expansion et la chute abrupte du bord. Cependant, des écarts significatifs

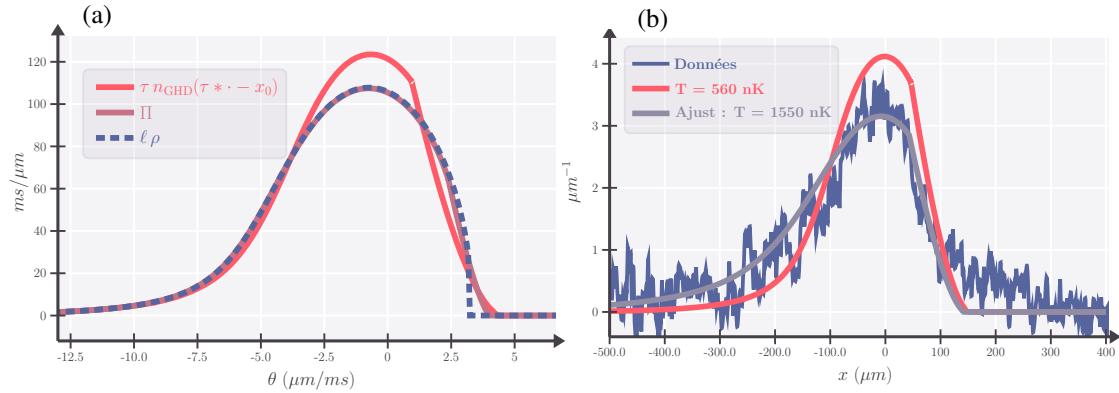


FIGURE 6.6 – (a) *Profil de densité après expansion de la tranche : effets de la largeur finie et du temps d’expansion fini.* Courbe rouge : profil obtenu par simulation GHD après expansion pendant  $\tau = 30$  ms, avec  $T = 560$  nK. Courbe marron : distribution asymptotique  $\Pi((x - x_0)/\tau)/\tau$ . Courbe pointillée bleue : approximation  $\ell\rho(x_0, (x - x_0)/\tau)/\tau$  dans le cas d’une tranche étroite. (b) *Comparaison aux données expérimentales.* En bleu : profil expérimental après expansion pendant  $\tau = 30$  ms. En rouge : simulation GHD avec  $T = 560$  nK. En gris : ajustement du profil expérimental donnant  $T = 1550$  nK.

subsistent, notamment dans les régions périphériques et dans la forme fine des profils. Ces différences soulignent les limites du modèle à l'échelle d'Euler, et suggèrent que des effets hors modèle — tels que le chauffage local, ou des corrections diffusives — peuvent jouer un rôle non négligeable.

Ces résultats confirment la pertinence de la GHD pour décrire la dynamique collective d'un gaz unidimensionnel hors équilibre, tout en ouvrant la voie à des extensions du modèle pour capturer des effets plus fins, au-delà de l'approximation hydrodynamique idéale.

## Conclusion du chapitre

Ce chapitre a présenté une exploration conjointe expérimentale et théorique de la dynamique hors équilibre d'un gaz unidimensionnel de bosons, initiée par une coupure bipartite. Ce protocole génère un état initial présentant une discontinuité macroscopique de densité, dont l'évolution constitue une réalisation physique du problème de Riemann quantique.

L'analyse repose sur la GHD, cadre théorique récent permettant de décrire, à l'échelle d'Euler, la dynamique de systèmes quantiques intégrables. Nous avons vus que la GHD permet non seulement de prédire les profils de densité issus de la dynamique balistique du gaz, mais également de modéliser la distribution locale des rapidités, accessibles via un protocole de sélection spatiale.

Les mesures expérimentales, confirment l'existence d'une structure auto-similaire de la dynamique, ainsi que l'asymétrie caractéristique des distributions de rapidité hors équilibre. Les écarts résiduels entre théorie et expérience soulignent la nécessité de développer des extensions de la GHD, intégrant des effets hors d'équilibre plus subtils, tels que la diffusion, le chauffage local ou les défauts de sélection.

Ainsi, ce travail établit une correspondance quantitative entre un cadre mathématique hydrodynamique issu de l'intégrabilité quantique et des observations expérimentales fines, consolidant la GHD comme un outil efficace pour décrire la relaxation déterministe de systèmes quantiques unidimensionnels, et ouvrant des perspectives pour explorer les limites de cette approche dans des régimes plus complexes.

Cette étude fait partie des résultats présentés dans [Dub+25], où une analyse complémentaire portant sur un état initial non thermique est également développée et que le lecteur intéressé pourra consulter.

# Chapitre 7

## Mise en place d'un confinement longitudinal dipolaire

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Transformation de jauge et simplification du Hamiltonien</b>	<b>109</b>
<b>7.2</b>	<b>Potentiel Dipolaire d'un atome à deux niveaux - généralité</b>	<b>110</b>
7.2.1	Système à deux niveaux et interaction avec le champ	110
7.2.2	Interprétation du traitement du second ordre : transition virtuelle et origine du potentiel dipolaire (AC-Stark)	111
7.2.3	Expression explicite du potentiel dipolaire	112
<b>7.3</b>	<b>Piégeage dipolaire d'un atome à plusieurs niveaux</b>	<b>114</b>
7.3.1	Atomes multiniveaux et origine du potentiel dipolaire dans le formalisme quantique	114
<b>7.4</b>	<b>Cas du Rubidium 87 dans une polarisation rectiligne</b>	<b>117</b>
7.4.1	Structure électronique du Rubidium	117
7.4.2	Structure matricielle du potentiel dipolaire	118
7.4.3	Régime de désaccord très important	119
7.4.4	Structure fine et base des états $ L, S; J, m_J\rangle$	121
<b>7.5</b>	<b>Notre dispositif expérimental</b>	<b>123</b>
7.5.1	Choix du laser pour le piégeage dipolaire	123
7.5.2	Amplification par Tapered Amplifier (TA)	127

---

### Introduction

Dans cette section, nous présentons l'implémentation expérimentale et théorique d'un piégeage dipolaire dans le bleu, permettant de confiner des atomes de rubidium froids à l'aide de deux barrières de potentiel. Contrairement au cas plus standard du piégeage rouge, où les atomes sont attirés vers les maxima d'intensité, un piégeage dans le bleu ( $\Delta > 0$ ) repousse les atomes vers les minima d'intensité lumineuse, créant ainsi des barrières efficaces.

Le formalisme utilisé repose sur une description quantique du couplage dipolaire entre un champ laser classique quasi-monochromatique et un atome à deux niveaux. Nous déduisons l'Hamiltonien effectif en seconde quantification sans faire appel à des transformations de jauge. L'objectif est d'obtenir une expression exploitable pour le potentiel optique ressenti par les atomes dans le régime de grand désaccord.

### 7.1 Transformation de jauge et simplification du Hamiltonien

**Cadre sans potentiel vecteur.** Soit une particule de masse  $m$  couplée à un champ électromagnétique. Dans une jauge  $\mathcal{J} \equiv (\vec{A}, \Phi)$ , le quadrivecteur potentiel s'écrit  $A^\mu = \{A^0 \equiv \Phi/c, A^i \equiv \vec{A}\}$ . Si l'on définit la

quelle  
est la  
motivation  
de ce  
travail  
dans le  
cadre  
de la  
théorie ?

dérivée covariante comme  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar} A_\mu = \{\mathcal{D}_t \equiv \partial_t + \frac{iq}{\hbar} \Phi, \vec{\mathcal{D}} = \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} \vec{A}\}$ , l'équation de Schrödinger régissant l'évolution de la fonction d'onde  $|\psi\rangle$  prend la forme la forme :

$$i\hbar \mathcal{D}_t |\psi\rangle = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\mathcal{D}} \right)^2 |\psi\rangle, \quad i\hbar \partial_t |\psi\rangle = H_{\mathcal{J}} |\psi\rangle, \text{ avec } H_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2m} (\vec{P} - q\vec{A})^2 + q\Phi \quad (7.1)$$

**Hamiltonien simplifié.** Dans une autre jauge  $\mathcal{J}'$ , le potentiel s'écrit  $A'^\mu = \{\Phi'/c, \vec{A}'\}$  avec  $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$ , où  $\chi$  est une fonction scalaire dépendant de l'espace et du temps. Un argument rapide pour garantir que cette transformation conserve les équations de Maxwell est que le tenseur électromagnétique  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  est invariant par changement de jauge. Dans cette nouvelle jauge, la dérivée covariante s'écrit  $\mathcal{D}'_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar} A'_\mu = \{\mathcal{D}'_t \equiv \partial_t + \frac{iq}{\hbar} (\Phi - \partial_t \chi), \vec{\mathcal{D}}' \equiv \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi)\}$ , l'équation de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar \mathcal{D}'_t |\psi'\rangle = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\mathcal{D}}' \right)^2 |\psi'\rangle, \quad \text{soit} \quad i\hbar \partial_t |\psi'\rangle = H_{\mathcal{J}'} |\psi'\rangle, \text{ avec } H_{\mathcal{J}'} = -q\partial_t \chi + \tilde{H}_{\mathcal{J}}, \quad (7.2)$$

avec  $|\psi'\rangle = \hat{T}_\chi(t) |\psi\rangle$ ,  $\hat{T}_\chi(t) \equiv \exp\left(\frac{iq}{\hbar} \chi(\vec{R}, t)\right)$  et  $\tilde{H}_{\mathcal{J}} = \hat{T}_\chi H_{\mathcal{J}} \hat{T}_\chi^\dagger = \frac{1}{2m} (\vec{P} - q(\vec{A} + \vec{\nabla} \chi))^2 + q\Phi$ . Je choisis  $\chi = -\vec{R} \cdot \vec{A}$  (i.e.  $\mathcal{J}' \equiv (\vec{A})$ ).  $\hat{T}_\chi(t)$  devient un opérateur translation de  $iq\vec{A}$  dans l'espace des impulsion, et l'opérateur champs électrique transverse étant  $\vec{E}_\perp = -\partial_t \vec{A}$ . L'Hamiltonien  $H_{\mathcal{J}'}$  devient :

$$\hat{H}_{\mathcal{J}'} = \tilde{H}_{\mathcal{J}} + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (7.3)$$

avec  $\tilde{H}_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 + q\Phi$ . L'opérateur de couplage atome-rayonnement quantifié est donné par :

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\vec{D} \cdot \vec{E}_\perp, \quad (7.4)$$

où  $\vec{D}$  est l'opérateur de moment dipolaire électrique, défini par :  $\vec{D} = q\vec{R}$ .

**Conclusion – Simplification par transformation de jauge** La transformation de jauge que nous avons appliquée permet de travailler dans un cadre où le potentiel vecteur est nul. Dans cette jauge particulière, le Hamiltonien du système est considérablement simplifié, car le couplage au champ électromagnétique ne se fait plus par le terme de couplage minimal  $(\vec{P} - q\vec{A})^2$ , mais uniquement à travers un potentiel scalaire effectif.

Cette simplification rend l'analyse théorique plus accessible et facilite l'interprétation physique du rôle du champ électromagnétique, en le ramenant à une simple modulation de l'énergie potentielle.

## 7.2 Potentiel Dipolaire d'un atome à deux niveaux - généralité

### Introduction.

Avant d'effectuer le calcul du potentiel dipolaire, donnons une image classique.

Un atome neutre placé dans un champ électrique  $\vec{E}_\perp$  développe un moment dipolaire induit  $\vec{D}(t) = \alpha \vec{E}_\perp$ . L'énergie potentielle d'interaction, moyennée temporellement sur une période optique, est alors  $-\alpha \|\vec{E}_\perp\|^2 / 4$ . Si le champ varie lentement devant la dynamique interne de l'atome, le moment dipolaire reste aligné avec la composante transverse du champ,  $\vec{E}_\perp(t)$ , et l'énergie potentielle d'interaction s'écrit  $\hat{H}_{\text{int}}(t) = -\vec{D}(t) \cdot \vec{E}_\perp(t)$ .

Dans cette configuration, l'énergie potentielle est minimale là où l'intensité du champ est maximale. L'atome est alors attiré vers les régions de forte intensité du champ électrique : on parle de *piège dipolaire optique*, ou encore de *pince optique*.

### 7.2.1 Système à deux niveaux et interaction avec le champ

Pour donner une vision simplifiée du phénomène, on considère un atome modélisé par deux niveaux : l'état fondamental  $|g\rangle$  d'énergie  $\hbar\omega_g$  et l'état excité  $|e\rangle$  d'énergie  $\hbar\omega_e$ , couplés par un champ électrique

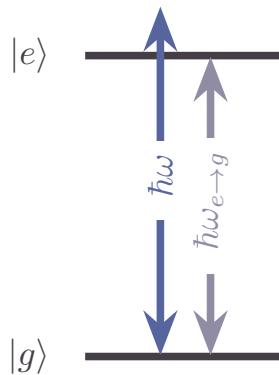


FIGURE 7.1 – Structure à deux niveaux :  $|g\rangle$  pour l'état fondamental ("ground") et  $|e\rangle$  pour l'état excité ("excited"). La différence d'énergie entre les deux niveaux, notée  $\hbar\omega_{e\rightarrow g}$ , est représentée, ainsi que la transition induite par le couplage laser de fréquence  $\omega$ . Dans cet exemple, la transition est dans le bleu.

$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \cos(\omega t)$ . On suppose que le champ laser est **désaccordé par rapport à la résonance** et que le désaccord  $\Delta \doteq \omega - \omega_{g\rightarrow e}$  (avec la fréquence de transition  $\omega_{g\rightarrow e} \doteq \omega_e - \omega_g$ ) est **grand devant la fréquence de Rabi**, qui caractérise le couplage dipôle-champ dont l'expression est [CDG88; GWO99; Sch01 ; Dar06] :

$$\Omega(\vec{r}) = -\langle e | \vec{D} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) | g \rangle / \hbar \quad (7.5)$$

$$= -\vec{d}_{g\leftrightarrow e} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) / \hbar, \quad (7.6)$$

où  $\vec{d}_{g\leftrightarrow e} = \langle e | \hat{\vec{D}} | g \rangle$  est l'élément de matrice dipolaire réel entre les niveaux  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ .

### 7.2.2 Interprétation du traitement du second ordre : transition virtuelle et origine du potentiel dipolaire (AC-Stark)

**Transitions virtuelles et suppression des transitions réelles.** Lorsque le champ laser est fortement désaccordé par rapport à la résonance atomique, c'est-à-dire lorsque le désaccord  $\Delta = \omega - \omega_{g\rightarrow e}$  vérifie  $\Gamma \ll |\Delta|$ , l'excitation réelle de l'atome devient négligeable. Le paramètre  $\Gamma$  désigne la *largeur naturelle* de la transition  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , c'est-à-dire le taux d'émission spontanée d'un photon par un atome excité. Il est relié à la durée de vie  $\tau$  de l'état  $|e\rangle$  par  $\Gamma = 1/\tau$ . Dans le cas d'une transition dipolaire électrique de type S-P, il peut être calculé à partir de l'électrodynamique quantique selon la formule [GWO99] :

$$\Gamma = \frac{\omega_{g\rightarrow e}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\vec{d}_{g\leftrightarrow e}|^2, \quad (7.7)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide et  $c$  la vitesse de la lumière.

Ainsi, lorsque  $\Gamma \ll |\Delta|$ , la probabilité d'exciter réellement l'atome vers l'état  $|e\rangle$  devient négligeable.

De plus, pour que l'occupation réelle de l'état excité reste négligeable, il faut également que la fréquence de Rabi  $\Omega$ , qui mesure la force du couplage lumière-atome, satisfasse la condition  $\Omega \ll |\Delta|$ . Dans ce régime de fort désaccord et de couplage faible, le champ ne peut alors induire qu'une *transition virtuelle*  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ , sans véritable occupation de l'état excité.

**Effet de second ordre : origine du potentiel dipolaire.** Toutefois, même si le champ laser ne permet pas de peupler réellement l'état excité, il peut induire des transitions *virtuelles* via l'interaction dipolaire  $\hat{H}_{\text{int}}$ . Le système passe temporairement par l'état  $|e\rangle$  sans s'y stabiliser :

$$|g\rangle \xrightarrow{\hat{H}_{\text{int}}} |e\rangle \xrightarrow{\hat{H}_{\text{int}}} |g\rangle, \quad (7.8)$$

Ce processus modifie l'énergie propre de l'état  $|g\rangle$ , générant un **décalage AC-Stark**, interprété comme un *potentiel dipolaire*.

*Analyse perturbative à différents ordres :*

- **Ordre 0** — énergie non perturbée : L'atome est dans l'état fondamental  $|g\rangle$ . Son énergie propre est simplement :

$$E_g^{(0)} = E_g. \quad (7.9)$$

- **Ordre 1** — pas de correction diagonale :

Dans l'approximation des grandes longueurs d'onde  $\lambda \gg \langle \vec{r} \rangle$ , c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde du champ laser est grande devant la taille de l'atome, l'interaction lumière-matière se décrit par le *Hamiltonien dipolaire électrique*. Dans ce cadre, la correction d'énergie au premier ordre est donnée par :

$$\delta E_g^{(1)} = \langle g | \hat{H}_{\text{int}} | g \rangle. \quad (7.10)$$

Or, pour un champ oscillant typiquement de la forme  $\vec{E}_\perp(t) = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}(t)e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$ , ce terme est rapide et oscille à la fréquence du laser. De plus, dans une base d'états propres de parité définie (comme c'est le cas pour les niveaux atomiques), l'opérateur  $\vec{D}$  étant de parité impaire, son **élément diagonal est nul** :

Contradiction avec ce qui est affirmé en intro de 7.2 !

$$\langle g | \vec{D} | g \rangle = 0 \Rightarrow \langle g | \hat{H}_{\text{int}} | g \rangle = 0. \quad (7.11)$$

Ainsi, non seulement  $\delta E_g^{(1)}(t) \sim \cos(\omega t)$  est une oscillation à haute fréquence, mais sa moyenne temporelle est aussi nulle :

$$\langle \delta E_g^{(1)} \rangle_t = 0. \quad (7.12)$$

Par conséquent, il n'y a **aucun décalage d'énergie net à l'ordre 1** : c'est uniquement à l'ordre 2 que l'interaction induit un potentiel stationnaire, correspondant au déplacement AC-Stark.

- **Ordre 2** — transitions virtuelles : nous verrons dans la section 7.3.1 que l'effet du potentiel à l'ordre 2 est

$$\delta E_g^{(2)} = \left( \frac{|\langle e | \hat{H}_{\text{int}} | g \rangle|^2}{\hbar(\omega - \omega_{g \rightarrow e})} + \frac{|\langle e | \hat{H}_{\text{int}} | g \rangle|^2}{\hbar(\omega + \omega_{g \rightarrow e})} \right). \quad (7.13)$$

Le premier terme, en  $1/(\omega - \omega_{g \rightarrow e}) = 1/\Delta$ , correspond au processus *quasi-résonant* qui domine lorsque le laser est proche d'une transition atomique. Le second terme, en  $1/(\omega + \omega_{g \rightarrow e})$ , est dit *anti-résonant*. Dans l'approximation de l'ordre tournant (ou approximation séculière, RWA), ce terme est négligé car il est fortement décalé en énergie ( $\omega + \omega_{g \rightarrow e} \gg \omega_{g \rightarrow e}$ ).

On obtient alors, dans cette approximation, la correction simplifiée

$$\delta E_g^{(2)} \simeq \frac{|\langle e | \hat{H}_{\text{int}} | g \rangle|^2}{\hbar\Delta}. \quad (7.14)$$

Cette correction est responsable de l'apparition d'un *potentiel effectif* ressenti par l'atome dans son état fondamental, appelé **potentiel dipolaire optique**.

### 7.2.3 Expression explicite du potentiel dipolaire

*Champ électrique appliqué.* On considère un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad \text{avec } \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \mathcal{E}(\vec{r})\vec{u} \quad (7.15)$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur de polarisation unitaire, et  $\mathcal{E}(\vec{r})$  est l'amplitude complexe spatiale du champ.

**Potentiel dipolaire.** En utilisant l'expression de la fréquence de Rabi (7.5), la correction d'énergie à l'ordre 2 (7.14), que l'on notera *potentiel dipolaire* (*i.e.*  $U_{\text{dip}}(\vec{r}) \equiv \delta E_g^{(2)}$ ), s'écrit alors :

$$U_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\hbar \Omega^2(\vec{r})}{4\Delta}, \quad (7.16)$$

En utilisant l'expression de l'intensité locale du champ laser  $I(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})|^2$ , de l'intensité de saturation  $I_{\text{sat}} = \frac{\hbar \omega_{g \rightarrow e}^3 \Gamma}{12\pi c^2}$ , de la largeur naturelle (7.7) et de la fréquence de Rabi (7.6), on obtient également :

$$\Omega^2(\vec{r}) = \frac{I(\vec{r}) \Gamma^2}{I_{\text{sat}} \frac{2}{2}}. \quad (7.17)$$

Le potentiel dipolaire (7.16) s'écrit alors sous la forme opérationnelle suivante :

$$U_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\hbar \Gamma^2}{8 I_{\text{sat}}} \frac{I(\vec{r})}{\Delta}, \quad (7.18)$$

ce qui montre que le potentiel dipolaire est proportionnel à l'intensité lumineuse locale.

Ce potentiel permet de décrire le confinement des atomes dans des régions où  $I(\vec{r})$  est élevé (ou faible, selon le signe de  $\Delta$ ), formant ainsi des barrières optiques contrôlables avec une résolution sub-micronique.

*Conditions de validité.* Les expressions (7.16) et (7.18) pour le potentiel dipolaire sont obtenues sous les hypothèses suivantes, qui assurent la validité du modèle à deux niveaux et du traitement perturbatif :

- **Approximation du sous-espace résonant** : le champ est quasi-résonant avec une seule transition atomique, ce qui implique que le désaccord  $\Delta$  reste petit par rapport à l'écart énergétique entre l'état excité considéré et les autres états excités de l'atome. Cette condition permet de réduire le système à un modèle à deux niveaux et de négliger les autres transitions dipolaires.
- **Régime de grand désaccord en fréquence (large détuning)** : lorsque  $|\Delta| \gg \Gamma$ , c'est-à-dire lorsque le désaccord est grand devant la largeur naturelle de la transition, les excitations réelles vers l'état excité sont fortement supprimées. L'interaction lumière-matière peut alors être traitée en perturbation du second ordre : l'atome reste majoritairement dans son état fondamental, et l'effet du champ lumineux se manifeste sous la forme d'un potentiel effectif induit par des couplages virtuels.
- **Régime de faible saturation** : on suppose que la fréquence de Rabi  $\Omega$  est beaucoup plus faible que le désaccord, *i.e.*  $\Omega \ll |\Delta|$ . Cette condition garantit que la population de l'état excité reste négligeable, ce qui justifie l'approximation adiabatique sur l'état fondamental.

*Interprétation physique.* Le potentiel  $U_{\text{dip}}(\vec{r})$  représente une énergie potentielle effective induite par l'interaction entre un atome neutre et le champ laser. Il dépend explicitement de la position  $\vec{r}$  via l'intensité locale du champ lumineux  $I(\vec{r})$ . Ce potentiel guide ainsi la dynamique de l'atome comme le ferait un potentiel externe classique.

La direction du mouvement dépend du signe du désaccord  $\Delta = \omega - \omega_{e \rightarrow g}$  :

- Si  $\Delta < 0$  (désaccord rouge), le potentiel est attractif : les atomes sont attirés vers les zones de forte intensité lumineuse.
- Si  $\Delta > 0$  (désaccord bleu), le potentiel est répulsif : les atomes sont repoussés vers les régions de faible intensité.

Ce phénomène est à la base des pièges dipolaires optiques, largement utilisés dans les expériences de refroidissement et de confinement d'atomes ultrafroids.

*Confinement optique.* Le potentiel dipolaire  $U_{\text{dip}}(\vec{r})$ , dépendant de la position via l'intensité du champ laser, permet de confiner des atomes neutres en créant des paysages de potentiel contrôlés. Selon la géométrie du champ lumineux, on peut générer des régions de potentiel attractif ou répulsif.

Dans le cas d'un désaccord bleu ( $\Delta > 0$ ), les atomes sont repoussés des zones de forte intensité. On peut alors façonner des *barrières de potentiel* en structurant l'intensité lumineuse, par exemple à l'aide de faisceaux interférents ou d'optiques diffractives. Cela permet de créer des cavités, des guides ou des réseaux où les atomes sont confinés entre les zones lumineuses, sans nécessairement focaliser le faisceau.

*Diffusion spontanée résiduelle.* Un autre aspect important de l'interaction lumière-matière est la diffusion spontanée induite par le champ lumineux. Même lorsque le champ est fortement désaccordé et que l'état excité n'est que virtuellement peuplé, une faible probabilité de transition réelle subsiste. Elle conduit à l'émission spontanée de photons, accompagnée d'un transfert aléatoire d'impulsion à l'atome, ce qui génère un chauffage du nuage atomique.

Le taux de diffusion spontanée dans le régime dispersif s'écrit :

$$\Gamma_{\text{sp}}(\vec{r}) = \frac{\Gamma^3}{8I_{\text{sat}}} \cdot \frac{I(\vec{r})}{\Delta^2}. \quad (7.19)$$

Il est donc crucial, pour limiter le réchauffement, de travailler à fort désaccord  $|\Delta| \gg \Gamma$ , tout en maintenant une intensité suffisante pour produire un potentiel dipolaire profond.

*Optimisation du régime dispersif pour un potentiel donné.* À partir des expressions (7.7) et (7.19), on peut analyser comment minimiser le taux de diffusion spontanée  $\Gamma_{\text{sp}}$ , sous la contrainte de produire un potentiel dipolaire  $U_{\text{dip}}$  fixé.

On observe en effet que :

$$U_{\text{dip}}(\vec{r}) \propto \frac{I(\vec{r})}{\Delta}, \quad \text{tandis que} \quad \Gamma_{\text{sp}}(\vec{r}) \propto \frac{I(\vec{r})}{\Delta^2}. \quad (7.20)$$

À potentiel  $U_{\text{dip}}$  fixé, cela implique que :

$$I(\vec{r}) \propto \Delta \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{\text{sp}}(\vec{r}) \propto \frac{1}{\Delta}. \quad (7.21)$$

Autrement dit, pour produire un potentiel donné, le taux de diffusion diminue linéairement avec  $|\Delta|$ . Il est donc avantageux de travailler à grand désaccord : plus  $\Delta$  est grand, plus l'intensité requise est élevée, mais moins le taux de diffusion est important.

Ce raisonnement montre que l'on n'a pas véritablement un « compromis » entre  $I$  et  $\Gamma_{\text{sp}}$ , mais plutôt une *stratégie optimale* : à potentiel fixé, augmenter le désaccord est toujours bénéfique vis-à-vis du chauffage.

Cependant, d'un point de vue pratique, l'augmentation de l'intensité  $I$  pose des contraintes expérimentales : puissance laser plus élevée, coûts financiers plus importants et difficultés techniques accrues.

## 7.3 Piégeage dipolaire d'un atome à plusieurs niveaux

### 7.3.1 Atomes multiniveaux et origine du potentiel dipolaire dans le formalisme quantique

Le modèle à deux niveaux est suffisant pour introduire le concept de piégeage dipolaire, mais il reste limité pour décrire les détails réels d'un atome comme le  $^{87}\text{Rb}$ , qui possède une structure hyperfine et fine complexe. Dans ce contexte, le potentiel dipolaire dépend du sous-niveau quantique occupé par l'atome, et le traitement doit être généralisé.

#### 7.3.1.1 Description quantique de l'atome et du champ laser

**Quantification de champ laser.** Considérons un atome immobile possédant un état fondamental  $|g\rangle$  et une série d'états excités  $|e_i\rangle$ , d'énergies respectives  $\hbar\omega_g$  et  $\hbar\omega_{e_i}$ . Le champ laser (7.15) est quantifié dans un volume  $V$ , polarisé selon  $\vec{u}$ , et d'expression [CDG88]

$$\vec{E}_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \vec{u} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (7.22)$$

où  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  sont les opérateurs d'annihilation et de création de photons à la fréquence  $\omega$ .

**Champ cohérent et états de Fock.** Le champ électromagnétique émis par le laser est un état **cohérent**, noté  $|\alpha\rangle$ , qui est une superposition d'états de Fock  $|N\rangle$  avec une distribution de Poisson centrée autour d'une valeur moyenne  $\langle N \rangle = |\alpha|^2 \gg 1$ . Cela signifie que les composantes principales du champ se trouvent dans une bande étroite  $\Delta N \ll \langle N \rangle$ . Dans cette situation, les amplitudes de transition impliquant des changements d'un seul photon, comme  $\langle N | \vec{E}_\perp | N + 1 \rangle$ , varient très peu avec  $N$ , et l'on peut faire l'approximation :

$$\langle N | \vec{E}_\perp | N + 1 \rangle \approx \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0V}} \sqrt{N+1} \vec{u} \simeq \sqrt{\frac{\hbar\omega\langle N \rangle}{2\varepsilon_0V}} \vec{u}. \quad (7.23)$$

Ainsi, l'élément de matrice global devient simplement proportionnel à l'amplitude classique du champ.

Ainsi, dans l'approximation cohérente et intense ( $\langle N \rangle \gg 1$ ), le champ quantique peut être remplacé par un **champ classique** :

$$\vec{E}_\perp \longrightarrow \hat{\mathcal{E}} \vec{u} \cos(\omega t), \quad (7.24)$$

ce qui justifie l'usage des amplitudes de champ classiques dans le calcul de la fréquence de Rabi et du potentiel dipolaire.

**Hamiltonien total.** L'~~hamiltonien~~ total du système « atome + champ » s'écrit alors [CDG88] :

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{at}} + \hat{H}_L + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (7.25)$$

avec dans le formalisme **atome + champ quantifié**, aussi appelé **formalisme de l'atome habillé**, ~~habillé~~ :

- $\hat{H}_{\text{at}} = \sum_{e_i} \hbar\omega_{g \rightarrow e_i} |e_i\rangle \langle e_i|$ , l'~~hamiltonien~~ de l'atome. Il décrit les états propres internes (typiquement les niveaux électroniques) sans interaction avec le champ. Ici, chaque état excité  $|e_i\rangle$  est associé à une énergie  $\hbar\omega_i$  ;
- $\hat{H}_L = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$ , l'~~hamiltonien~~ du **champ électromagnétique quantifié** dans un mode unique (celui du laser). Il est représenté comme un oscillateur harmonique quantique avec énergie  $\hbar\omega$  par photon, et opérateurs  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  de création/annihilation de photons. Le terme  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  est l'énergie du vide (qui peut être ignorée dans la plupart des cas) ;
- $\hat{H}_{\text{int}} = -\vec{D} \cdot \vec{E}_\perp$ , l'interaction **dipolaire quantifiée** entre l'atome et le champ électrique transverse  $\vec{E}_\perp$  (7.22) s'écrit :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0V}} (\vec{D} \cdot \vec{u}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (7.26)$$

Dans l'*approximation des grandes longueurs d'onde* ( $\lambda \gg \langle \vec{r} \rangle$ ), où  $\vec{r}$  désigne la coordonnée électronique relative au noyau), cet Hamiltonien prend la forme de l'**Hamiltonien dipolaire électrique** [CDG88; GWO99]. L'opérateur de moment dipolaire atomique  $\vec{D}$  se décompose comme  $\vec{D} = \sum_{e_i} \vec{d}_{g \leftrightarrow e_i} |g\rangle \langle e_i| + \text{h.c.}$ , où  $\vec{d}_{g \leftrightarrow e_i} = \langle g | \vec{D} | e_i \rangle$  est l'élément de matrice dipolaire entre les états  $|g\rangle$  et  $|e_i\rangle$ , et “h.c.” désigne le terme hermitien conjugué.

Cette écriture traduit le fait que seules les transitions dipolaires électriques permises par les règles de sélection (parité et conservation du moment angulaire) participent au couplage avec le champ quantifié.

**Équivalence entre champ quantique et champ classique** Considérons un champ électromagnétique monochromatique de fréquence  $\omega$ , quantifié dans un volume  $V$ , contenant en moyenne  $\langle N \rangle$  photons.

- Du point de vue quantique, l'énergie moyenne d'un champ dans un seul mode est donnée par :  $\langle \hat{H}_L \rangle = \hbar\omega \left( \langle N \rangle + \frac{1}{2} \right)$ . En négligeant l'énergie du point zéro  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ , qui ne contribue pas aux transitions physiques, on obtient :

$$E_{\text{quantique}} = \langle N \rangle \hbar\omega. \quad (7.27)$$

- Du point de vue classique, une onde électromagnétique de champ électrique  $\vec{E}_\perp(t) = \hat{\mathcal{E}} \cos(\omega t) \vec{u}$  transporte une densité d'énergie électrique :  $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2$ , ce qui donne une énergie totale dans le volume  $V$  :

$$E_{\text{classique}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 V. \quad (7.28)$$

En identifiant ces deux expressions dans un seul mode, on obtient la relation fondamentale :

$$\langle N \rangle \hbar \omega = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 V, \quad (7.29)$$

qui permet d'exprimer l'amplitude du champ électrique  $E_0$  en fonction du nombre moyen de photons  $\langle N \rangle$  dans le champ laser.

### 7.3.1.2 États habillés et structure des niveaux

Les états propres de l'Hamiltonien non-interactif  $\hat{H}_{\text{at}} + \hat{H}_{\text{L}}$  sont les produits tensoriels  $|g, N\rangle$  et  $|e_i, N\rangle$ , décrivant un atome dans l'état  $|g\rangle$  ou  $|e_i\rangle$  avec  $N$  photons dans le mode du champ laser. Leurs énergies respectives sont :

$$E_{g,N} = \hbar \omega_g + N \hbar \omega, \quad E_{e_i,N} = \hbar \omega_{e_i} + N \hbar \omega.$$

On parle d'« états habillés » pour désigner cette base atome + champ, qui servira à construire les états propres du système complet en présence d'interaction. L'interaction dipolaire  $\hat{H}_{\text{int}} = -\vec{D} \cdot \vec{E}_\perp$  couple les états  $|g, N+1\rangle$  et  $|e_i, N\rangle$  via l'absorption d'un photon, ainsi que  $|g, N\rangle$  et  $|e_i, N+1\rangle$  via une émission virtuelle. Les autres transitions, fortement hors résonance, sont négligées dans l'approximation séculaire.

#### Annulation de la correction d'énergie au premier ordre. [LSR13; GWO99]

- **Ordre 1 — pas de correction diagonale :**

Dans le cadre de la théorie des perturbations indépendantes du temps, la correction d'énergie au premier ordre pour un état  $|i\rangle$  est donnée par :

$$\delta E_i^{(1)} = \langle i | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle. \quad (7.30)$$

Or, dans le cas de l'interaction dipolaire, l'opérateur  $\hat{H}_{\text{int}} = -\vec{D} \cdot \vec{E}_\perp$  est de parité impaire, alors que les états électroniques  $|g\rangle, |e_i\rangle, \dots$  ont une parité bien définie.

Un opérateur de parité impaire possède des éléments diagonaux nuls dans une base d'états de parité définie. Ainsi :

$$\langle g | \hat{H}_{\text{int}} | g \rangle = 0, \quad \langle e_i | \hat{H}_{\text{int}} | e_i \rangle = 0. \quad (7.31)$$

De manière générale,  $\hat{H}_{\text{int}}$  ne couple que des états de parité opposée, et il est donc purement hors-diagonal dans la base des états propres de  $\hat{H}_{\text{at}}$ .

Il en résulte que la correction d'énergie au premier ordre est strictement nulle :

$$\delta E_i^{(1)} = 0. \quad (7.32)$$

La première contribution non nulle provient donc du second ordre, qui décrit des transitions virtuelles de type

$$\begin{array}{ccc} |g, N\rangle & \xrightarrow{\hat{H}_{\text{int}}} & |e, N-1\rangle \\ |g, N\rangle & \xleftarrow{\hat{H}_{\text{int}}} & |e, N+1\rangle, \end{array} \quad (7.33)$$

responsables du décalage AC-Stark (ou potentiel dipolaire optique).

• **Ordre 2 — décalage d'énergie :**

Le champ étant loin de la résonance avec les états  $|e_i\rangle$ , on applique la théorie des perturbations indépendantes du temps au second ordre. L'interaction induit un décalage de l'énergie de l'état  $|g\rangle$  donné par :

$$\delta E_g^{(2)} = \sum_{e_i} \left( \frac{|\langle e_i, N-1 | \hat{H}_{\text{int}} |g, N\rangle|^2}{E_{g,N} - E_{e_i,N-1}} + \frac{|\langle e_i, N+1 | \hat{H}_{\text{int}} |g, N\rangle|^2}{E_{g,N} - E_{e_i,N+1}} \right). \quad (7.34)$$

**Approximation pour un couplage quasi-résonant.** Dans le cadre du piégeage dipolaire, nous considérons que le champ laser est quasi-résonant avec une seule transition atomique. Autrement dit, le désaccord  $\Delta = \omega - \omega_{g \rightarrow e}$  reste petit devant la fréquence de la transition atomique :  $|\Delta| \ll \omega_{g \rightarrow e}$ .

Dans ce régime, le deuxième terme du membre de droite des équations (7.34) devient négligeable, et le potentiel dipolaire se simplifie alors en :

$$\delta E_g^{(2)} \simeq \sum_{e_i} \frac{|\langle e, N-1 | \hat{H}_{\text{int}} |g, N\rangle|^2}{\hbar\Delta}. \quad (7.35)$$

Cette approximation consiste à ne considérer que la transition  $|g, N\rangle \rightarrow |e, N-1\rangle$ , c'est-à-dire les processus dans lesquels un seul photon est échangé entre l'atome et le champ laser.

### Expression des éléments de matrice dans l'interaction atome-champ cohérent

Les éléments intervenant dans l'équation de second ordre, qui donne la correction d'énergie d'un état atomique sous l'effet du champ laser, sont des éléments de matrice du type :

$$-\langle e_i, N-1 | \vec{D} \cdot \vec{E}_\perp |g, N\rangle.$$

**Conclusion.** En conséquence, l'élément de matrice d'interaction s'écrit finalement :

$$\langle e_i, N-1 | \hat{H}_{\text{int}} |g, N\rangle = -\frac{\mathcal{E}}{2} \langle e_i | \vec{D} \cdot \vec{u} |g\rangle.$$

Ce terme relie l'état atomique  $|g\rangle$  au niveau excité  $|e_i\rangle$ , avec un couplage proportionnel à l'amplitude du champ classique et à l'élément de matrice dipolaire entre les deux états. C'est ce terme qui entre au numérateur dans l'expression de la correction d'énergie au second ordre, et qui donne naissance au **potentiel dipolaire optique**.

## 7.4 Cas du Rubidium 87 dans une polarisation rectiligne

### 7.4.1 Structure électronique du Rubidium

L'atome de Rubidium ( ${}^{87}\text{Rb}$ ) est un **élément alcalin**, c'est-à-dire qu'il possède une configuration électronique de la forme  $[\text{Kr}] 5s^1$ , avec un unique électron de valence situé dans la couche  $5s$ . Cela implique que la structure énergétique de l'atome est essentiellement déterminée par ce seul électron périphérique, interagissant avec un cœur atomique fermé (couche interne complète).

En première approximation, on peut donc modéliser le Rubidium comme un système à un électron, à la manière de l'atome d'hydrogène, mais avec un potentiel effectif tenant compte du blindage dû aux électrons du cœur. Ce modèle permet de comprendre la structure fine et les transitions optiques dominantes de l'atome.

La structure des niveaux d'énergie est ensuite raffinée par les effets suivants :

- **Structure fine** : Elle résulte du couplage spin-orbite entre le moment angulaire orbital  $\vec{L}$  et le spin  $\vec{S}$  de l'électron de valence. Ce couplage divise chaque niveau orbital (par exemple, le niveau  $5p$ ) en deux sous-niveaux caractérisés par le moment angulaire total  $J = L \pm \frac{1}{2}$ . Ainsi, la transition  $5S \leftrightarrow 5P$  donne naissance aux deux raies bien connues :

- **raie D2** :  $\lambda = 780 \text{ nm}$ , correspondant à la transition  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ ,

- raie **D1** :  $\lambda = 795 \text{ nm}$ , correspondant à la transition  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$ .
- × **Structure hyperfine (non traitée ici)** : Elle résulte du couplage entre le moment angulaire total de l'électron ( $\vec{J}$ ) et celui du noyau ( $\vec{I}$ ), introduisant une subdivision supplémentaire des niveaux d'énergie. Bien que cette structure hyperfine soit essentielle dans certains contextes (résonances hyperfines, refroidissement laser, etc.), elle ne sera pas considérée ici car nous nous limitons à l'étude des effets associés à la structure fine.

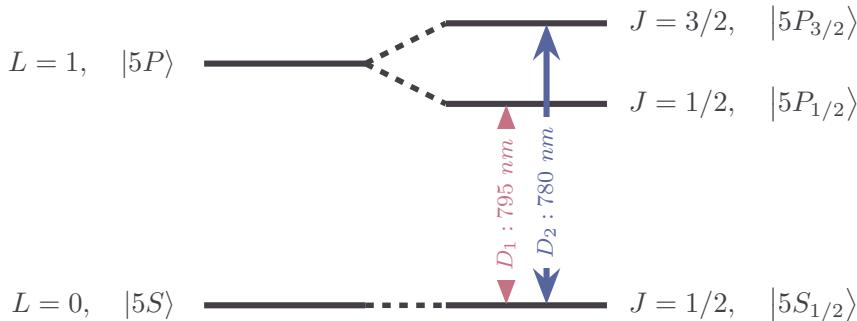


FIGURE 7.2 – Structure fine (transitions D1 et D2) de l'atome de Rubidium  $^{87}\text{Rb}$ .

En effet le faisceau à environ 770 nm est donc **hors résonance**, mais **pas trop éloigné** de ces transitions (désaccord de l'ordre de quelques dizaines de THz), ce qui garantit que la structure hyperfine peut être **négligée** dans un premier temps, et que l'interaction est bien décrite par la contribution dominante des raies D1 et D2. Dans ce régime de désaccord modéré, le potentiel dipolaire est obtenu comme une somme pondérée des contributions des transitions proches, et les autres transitions atomiques (plus énergétiques) peuvent être ignorées.

Ce modèle à un électron actif simplifie grandement l'analyse des interactions entre le Rubidium et un champ laser, en particulier dans le cadre du piégeage dipolaire et des transitions induites par effet Stark.

### 7.4.2 Structure matricielle du potentiel dipolaire

Lorsque la structure fine est prise en compte, le potentiel dipolaire ne se réduit plus à une simple fonction scalaire, mais se décompose en contributions scalaire, vectorielle et tensorielle, définies dans l'espace des états électroniques  $|J, m_J\rangle$ .

Dans un scénario expérimental où l'on restreint l'espace interne de l'atome à deux sous-niveaux hyperfins ou Zeeman (par exemple pour définir un pseudo-spin), le potentiel dipolaire peut être représenté par une matrice  $2 \times 2$  de la forme générale :

$$U_{\text{dip}} = U_{\text{scal}}^{(0)} \cdot \text{Id}_2 + U_{\text{vec}}^{(1)} (\vec{J} \cdot \vec{B}_{\text{fict}}) + U_{\text{tens}}^{(2)} (\vec{J}, \vec{u}). \quad (7.36)$$

où :

- **Terme scalaire** :  $U_{\text{scal}}^{(0)}$  génère un décalage isotrope du niveau atomique qui est indépendant du sous-niveau de  $J$  (ou  $F$ ). Ce décalage est la composante « classique » de l'effet Stark AC, proportionnelle à l'intensité lumineuse, et n'entraîne pas de structure fine dépendant de la polarisation de la lumière. Ce terme domine dans la plupart des configurations expérimentales, notamment avec un champ lumineux polarisé rectiligne, comme c'est le cas ici.
- **Terme vectoriel (Zeeman optique)** :  $U_{\text{vec}}^{(1)}$  agit comme un champ magnétique fictif (optical Zeeman effect) le long de  $\vec{B}_{\text{fict}} \propto i(\vec{E}^* \times \vec{E})$ . En effet, il est proportionnelle à l'opérateur  $i(\vec{u}^* \times \vec{u}) \cdot \vec{J}$  se comportant comme  $\vec{J} \cdot \vec{B}_{\text{fict}}$ . Ainsi, la polarisation circulaire du champ ( $i[\vec{u}^* \times \vec{u}] \neq 0$ ) donne un décalage dépendant de l'orientation de  $\vec{J}$  (analogue à un effet Zeeman), alors que pour une polarisation rectiligne ( $\vec{u}$  réel) ce produit vectoriel s'annule et ce terme vectoriel disparaît. On parle souvent de champ fictif parce que, en convention, le terme vectoriel du Hamiltonien d'interaction

s'écrit formellement  $\mu_B g_J (\vec{J} \cdot \vec{B}_{\text{fict}})$ . Dans notre cas (polarisation rectiligne), ce terme est donc négligeable.

- × **Terme tensoriel :**  $U_{\text{tens}}^{(2)}$  introduit une anisotropie du potentiel selon l'orientation du moment angulaire par rapport à la polarisation du champ. Ce terme est proportionnel à une combinaison quadrupolaire des composantes de  $\vec{J}$  :

$$\frac{3[(\vec{u}^* \cdot \vec{J})(\vec{u} \cdot \vec{J}) + (\vec{u} \cdot \vec{J})(\vec{u}^* \cdot \vec{J})] - 2\vec{J}^2}{2J(2J-1)}. \quad (7.37)$$

Le terme tensoriel ne contribue que pour les états atomiques ayant un moment cinétique total  $J \geq 1$ . Pour les atomes alcalins, comme le  $^{87}\text{Rb}$ , l'état fondamental est un état  $S$  avec  $J = 1/2$ , et ce terme est donc strictement nul. En effet, un spin  $1/2$  ne peut posséder de quadrupôle : seules les composantes scalaire et vectorielle du potentiel dipolaire subsistent (voir Annexe F pour une démonstration détaillée).

**Résumé.** La décomposition (7.36) montre que :

- (i) en toute généralité, le potentiel dipolaire comporte trois contributions (scalaire, vectorielle et tensorielle) ;
- (ii) pour les atomes alcalins au repos dans leur état fondamental ( $J = 1/2$ ), seul le terme vectoriel peut subsister (si la polarisation est elliptique), tandis que le terme tensoriel disparaît.

Cette structure matricielle du potentiel dipolaire joue un rôle central dans la manipulation cohérente des états internes de l'atome, la réalisation de barrières optiques dépendantes du spin, ou encore la mise en œuvre de qubits dans des réseaux d'atomes piégés. Elle permet également d'exploiter des phénomènes comme les transitions Raman induites optiquement ou la séparation de spin dans des pièges optiques.

### 7.4.3 Régime de désaccord très important

Dans ce chapitre, nous ne considérons le régime de désaccord très important que dans le but de calculer les éléments de matrice du moment dipolaire  $\vec{D}$ . En effet, pour un laser fortement détuné par rapport aux transitions électroniques ( $|\Delta| \gg \Delta_{\text{fs}}, \Delta_{\text{hfs}}$ ), le champ lumineux ne peut plus distinguer les différents niveaux excités liés aux sous-niveaux  $J$  ou  $F$  (par exemple les niveaux  $5P_{1/2}$  et  $5P_{3/2}$  pour le rubidium).

Dans ce régime, les niveaux excités peuvent être traités uniquement en termes de moment angulaire orbital  $L$  et de sa projection  $m_L$ , car le moment dipolaire  $\vec{D}$  ne dépend pas du spin de l'électron. Les éléments de matrice  $\langle e | \vec{D} | g \rangle$  se calculent donc simplement en utilisant les états orbitalaux, ce qui permet de négliger les détails de la structure fine ou hyperfine dans cette approximation.

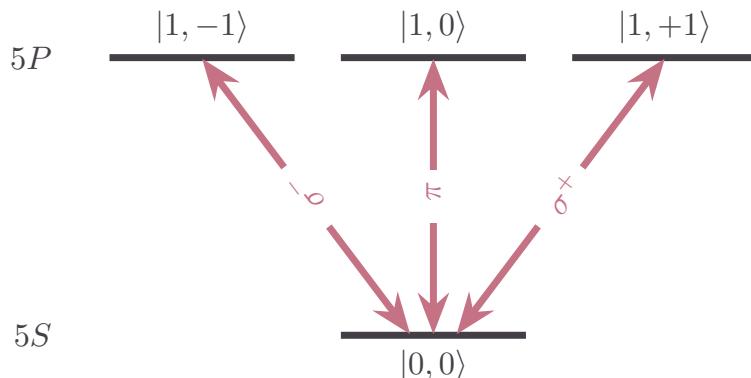


FIGURE 7.3 – Structure des niveaux électroniques  $|L, m_L\rangle$  de l'atome de rubidium.

?

[Insérer ici un schéma de transition entre niveaux  $m_L$  avec  $q = 0$ ]

**Décalage d'énergie au second ordre.** On considère des états électroniques notés  $|g\rangle = |nL\rangle$  et  $|e\rangle = |n'L'\rangle$ . Dans le régime de désaccord important, l'effet de la lumière sur ces états peut être traité par la théorie des perturbations indépendantes du temps au second ordre. Cette perturbation implique le carré de l'opérateur dipolaire et donne naissance au potentiel dipolaire. On note que l'interaction ne couple que les sous-niveaux orbitaux via des règles de sélection simples sur  $L$  et  $m_L$ .

Dans ce contexte, il est utile de travailler dans la base  $|L, m_L\rangle$ , propre au moment angulaire orbital. Les amplitudes de transition sont alors gouvernées par les coefficients de Clebsch–Gordan. Une transition de type  $S \rightarrow P$  (i.e.  $L = 0 \rightarrow L' = 1$ ) se comporte, pour une polarisation donnée, comme une transition entre deux niveaux effectifs.

**Structure orbitale et opérateur dipolaire.** L'opérateur dipolaire, en tant que vecteur, peut être exprimé dans la base sphérique :

$$\vec{D} = \sum_{q=-1}^{+1} \hat{D}_q \vec{u}_q,$$

où  $q = 0, \pm 1$  désigne respectivement les composantes de polarisation rectiligne ( $\pi$ ), circulaire droite ( $\sigma^+$ ) et circulaire gauche ( $\sigma^-$ ), et  $\vec{u}_q$  est le vecteur de polarisation associé.

Dans cette base, seule la composante  $\hat{D}_q$  correspondant au changement  $m_L \rightarrow m'_L = m_L + q$  est active :

$$\langle m'_L | \vec{D} \cdot \vec{u}_q | m_L \rangle \propto \delta_{m'_L, m_L + q}.$$

**Application du théorème de Wigner-Eckart.** L'opérateur dipôle électrique  $\vec{D}$  est un opérateur vectoriel, que l'on peut exprimer en termes de composantes sphériques  $\hat{D}_q$  avec  $q = 0, \pm 1$ , correspondant aux polarisations  $\pi$  et  $\sigma^\pm$ .

Le théorème de Wigner-Eckart permet d'évaluer les éléments de matrice de l'opérateur dipolaire entre états de moment angulaire en factorisant la dépendance radiale et angulaire :

$$\langle L', m'_L | \vec{D} \cdot \vec{u}_q | L, m_L \rangle = \langle L' || \vec{D} || L \rangle \cdot \langle L, 1; m_L, q | L', m'_L \rangle, \quad (7.38)$$

où  $\langle L' || \vec{D} || L \rangle$  est l'élément de matrice réduit, qui encode la dépendance radiale (par exemple  $d_{5S \rightarrow 5P}$  pour le rubidium), et  $\langle L, 1; m_L, q | L', m'_L \rangle$  est le coefficient de Clebsch-Gordan associé à la conservation du moment cinétique orbital projeté.

Pour une polarisation linéaire parallèle à l'axe  $z$ , on a  $q = 0$  (polarisation  $\pi$ ).

**Application au cas  $5S \rightarrow 5P$  et avec une polarisation  $\pi$ .** Considérons la transition électronique entre les niveaux  $5S$  et  $5P$  du rubidium 87, en négligeant la structure fine (i.e., on travaille dans la base des moments angulaires orbitaux  $|L, m_L\rangle$ ). Dans cette approximation, l'état fondamental est noté  $|L = 0, m_L = 0\rangle$ , et l'état excité  $|L' = 1, m_{L'}\rangle$ , car la transition dipolaire électrique autorise  $\Delta L = \pm 1$ .

L'élément de matrice s'écrit alors, en utilisant le théorème de Wigner-Eckart :

$$\langle L' = 1, m'_L | \vec{D} \cdot \vec{u}_{q=0} | L = 0, m_L = 0 \rangle = d_{5S \leftrightarrow 5P} \cdot \langle L = 0, 1; m_L = 0, q = 0 | 1, m'_L \rangle. \quad (7.39)$$

où :

- $d_{5S \leftrightarrow 5P} = \langle L' = 1 || \vec{D}_0 || L = 0 \rangle$  est l'élément de matrice réduit, indépendant de  $m_L$  ou de la polarisation  $q$  ;
- $\langle L = 0, 1; m_L = 0, q = 0 | 1, m'_L \rangle$  est un **coefficent de Clebsch-Gordan**.

Ce dernier impose une condition stricte de conservation de la projection du moment angulaire :  $m_{L'} = m_L + q = 0 + 0 = 0$ . Par conséquent, seule la composante  $m_{L'} = 0$  de l'état excité est couplée à  $|L = 0, m_L = 0\rangle$  sous l'action du champ  $\pi$ -polarisé. Et comme  $\langle 0, 1; 0, 0 | 1, 0 \rangle = 1$ , on obtient finalement :

$$d_{5S \leftrightarrow 5P} = \langle L' = 1, m'_L = 0 | \vec{D} \cdot \vec{u}_{q=0} | L = 0, m_L = 0 \rangle. \quad (7.40)$$

Cette analyse met en évidence le rôle de la polarisation du champ lumineux dans la sélection des transitions permises, et montre que dans le régime de très grand désaccord, la structure fine peut être ignorée au profit d'une description plus simple en termes de nombres quantiques orbitaux.

*Valeur de l'élément de matrice réduit.* L'expression (7.38) reste valable pour les éléments de matrice réduits. Dans le cas du rubidium 87, on peut ainsi déterminer numériquement la valeur de l'élément  $\langle L' || \vec{D} || L \rangle$ , noté  $d_{5S \leftrightarrow 5P}$ , à partir des données spectroscopiques expérimentales (fréquence de transition, largeur naturelle, etc.) [Ste02].

$$d_{5S \leftrightarrow 5P} \approx 2,5 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}. \quad (7.41)$$

Cette valeur est essentielle pour quantifier les amplitudes de transition, les forces radiatives et les potentiels dipolaires induits par un champ laser, dans les expériences de manipulation optique d'atomes de rubidium.

#### 7.4.4 Structure fine et base des états $|L, S; J, m_J\rangle$ .

Le moment angulaire électronique total  $J$  résulte du couplage entre le moment angulaire orbital total  $L$  et le moment angulaire de spin  $S$  des électrons, selon la relation  $J = L + S$ . Dans le cas des atomes alcalins, on ne considère que l'électron de valence, pour lequel le spin est fixé à  $S = 1/2$ .

Lorsque le désaccord du faisceau laser devient comparable à la séparation entre les doublets de structure fine, il est nécessaire de prendre en compte le couplage spin-orbite. Celui-ci donne lieu à une levée de dégénérescence des niveaux d'énergie, conduisant à ce que l'on appelle la structure fine de l'atome. Dans ce régime, les états propres du système s'écrivent dans la base couplée  $|L, S; J, m_J\rangle$ , où  $m_J$  est la projection de  $J$  sur l'axe de quantification. Ces niveaux sont représentés sur la figure 1.2. 7.4

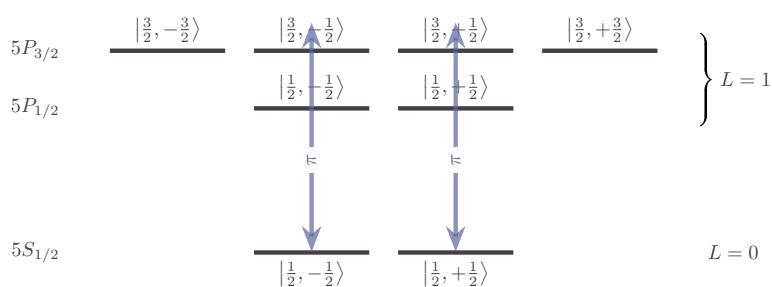


FIGURE 7.4 – Structure fine (niveaux  $|J, m_J\rangle$ ) de l'atome de rubidium.

[Insérer ici un schéma de transition]

*Décalage d'énergie au second ordre.* En notant  $\hbar\omega_{5S_{1/2} \rightarrow 5P_{J'}} = \hbar\omega_{5P_{J'}} - \hbar\omega_{5S_{1/2}}$  la différence d'énergie entre les états excités  $|e\rangle \equiv |5P_{J'}\rangle$  et l'état fondamental  $|g\rangle \equiv |5S_{1/2}\rangle$ , le décalage d'énergie induit par un champ lumineux de polarisation **rectiligne** s'écrit, au second ordre en perturbation (voir équation (E.2)) :

$$\delta E_{5S_{1/2}}^{(2)} = \frac{|\mathcal{E}|^2}{4\hbar} \sum_{J' \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}} \frac{|\langle 5P_{J'} | \vec{u} \cdot \vec{D} | 5S_{1/2} \rangle|^2}{\omega - \omega_{5S_{1/2} \rightarrow 5P_{J'}}}. \quad (7.42)$$

Ce décalage est purement scalaire dans le cas d'un champ à polarisation linéaire, car les contributions vectorielles (champ fictif) disparaissent lorsque  $\vec{u}$  est réel. De plus, le terme tensoriel est nul dans l'état fondamental  $5S_{1/2}$  du rubidium 87, qui a  $J = \frac{1}{2}$ .

*Projection dans la base découpée.* Pour calculer les déplacements lumineux induits par un champ électromagnétique sur chacun des niveaux de structure fine, il est utile d'exprimer les états de la base couplée  $|L, S; J, m_J\rangle$  dans la base découpée  $|L, S; m_L, m_S\rangle$ . Cette décomposition permet de faire apparaître explicitement les composantes orbitales et de spin, ce qui facilite l'évaluation des éléments de matrice du moment dipolaire.

Pour effectuer ces calculs, on utilise les coefficients de Clebsch-Gordan, qui permettent de relier la base  $|L, S; J, m_J\rangle$  à la base produit  $|L, m_L; S, m_S\rangle$  selon la relation :

$$|L, S; J, m_J\rangle = \sum_{\substack{-L \leq m_L \leq L, \\ -S \leq m_S \leq S}}^{m_L + m_S = m_J} \langle L, m_L; S, m_S | J, m_J \rangle |L, m_L; S, m_S\rangle. \quad (7.43)$$

Cette décomposition permet ensuite de calculer les éléments de matrice du moment dipolaire selon

$$\langle L', S'; J', m'_J | \vec{D} \cdot \vec{u}_q | L, S; J, m_J \rangle. \quad (7.44)$$

*Application au cas  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2, 3/2}$  avec  $q = 0$ .* Le moment angulaire électronique total  $J$  résulte du couplage entre le moment angulaire orbital  $L$  et le spin électronique  $S$ , selon la relation  $J = L + S$ . Dans le cas des atomes alcalins, on ne considère que l'électron de valence, pour lequel  $S = \frac{1}{2}$ .

Considérons l'état fondamental  $|5^2S_{1/2}, m_J = \pm \frac{1}{2}\rangle$ , que l'on peut écrire de manière équivalente comme :

$$|5^2S_{1/2}, m_J = \pm \frac{1}{2}\rangle \equiv |5S, J = \frac{1}{2}, m_J = \pm \frac{1}{2}\rangle \equiv |n = 5; L = 0, S = \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, m_J = \pm \frac{1}{2}\rangle.$$

Dans le but de faciliter les calculs, nous projetons cet état dans la base découplée  $|L, m_L; S, m_S\rangle$ . Étant donné que  $L = 0$  pour l'état  $S$ , on a  $m_L = 0$  nécessairement. L'état se réécrit donc simplement :

$$|5^2S_{1/2}, m_J = \pm \frac{1}{2}\rangle = |m_L = 0, m_S = \pm \frac{1}{2}\rangle$$

Plusieurs notations sont utilisées afin de s'adapter aux préférences des lecteurs et de lever toute ambiguïté. On remarque ici que, dans le cas  $L = 0$ , l'état couplé coïncide avec l'état découpé, car le moment orbital ne contribue pas à la somme vectorielle du moment angulaire total.

Continuons avec les états excités  $|5^2P_{1/2}, m'_J\rangle$ , que l'on peut écrire de manière équivalente comme :

$$|5^2P_{1/2}, m'_J\rangle \equiv |5P, J', m'_J\rangle \equiv |n = 5; L' = 1, S' = \frac{1}{2}; J', m'_J\rangle.$$

Pour rappel, les opérateurs de montée/descente agissant sur les états propres du moment angulaire vérifient la relation générale :

$$\hat{A}_{\pm}|n, A, m_A\rangle = \hbar\sqrt{A(A \pm 1) - m_A(m_A \pm 1)}|n, A, m_A \pm 1\rangle \quad (7.45)$$

où l'opérateur  $\hat{A} \in \{\hat{S}, \hat{L}, \hat{J}, \dots\}$ .

Donc

$$\begin{aligned} |5^2P_{1/2}, m'_J = \pm \frac{1}{2}\rangle &= \mp\sqrt{\frac{1}{3}}|m'_L = 0, m'_S = \pm \frac{1}{2}\rangle \pm \sqrt{\frac{2}{3}}|m'_L = \pm 1, m'_S = \mp \frac{1}{2}\rangle, \\ |5^2P_{3/2}, m'_J = \pm \frac{1}{2}\rangle &= +\sqrt{\frac{2}{3}}|m'_L = 0, m'_S = \pm \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|m'_L = \pm 1, m'_S = \mp \frac{1}{2}\rangle, \\ |5^2P_{3/2}, m'_J = \pm \frac{3}{2}\rangle &= +|m'_L = \pm 1, m'_S = \pm \frac{3}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Cette notation sera utile par la suite pour analyser les transitions permises et les amplitudes associées lors de l'interaction dipolaire avec une lumière polarisée ( $q = 0$  correspondant à une polarisation  $\pi$ ). En se rappelant que dans ce cas

$$d_{5S \rightarrow 5P} \doteq \langle L' = 1 | |\vec{D}| | L = 1 \rangle = \langle L' = 1, m'_L = 0 | \vec{D} \cdot \vec{u} | L = 0, m_L = 0 \rangle$$

il vient que

$$\begin{aligned} \langle 5^2P_{1/2}, m'_J = \pm \frac{1}{2} | \vec{D} \cdot \vec{u} | 5^2S_{1/2}, m_J = \pm \frac{1}{2} \rangle &= \mp\sqrt{\frac{1}{3}}d_{5S \rightarrow 5P}, \\ \langle 5^2P_{3/2}, m'_J = \pm \frac{1}{2} | \vec{D} \cdot \vec{u} | 5^2S_{1/2}, m_J = \pm \frac{1}{2} \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}d_{5S \rightarrow 5P}, \\ \langle 5^2P_{3/2}, m'_J = \pm \frac{3}{2} | \vec{D} \cdot \vec{u} | 5^2S_{1/2}, m_J = \pm \frac{1}{2} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

*Potentiel dipolaire* Potentiel dipolaire s'écrit :

$$\begin{aligned} U_{\text{dip}}(\vec{r}) &= \frac{|\mathcal{E}|^2}{4\hbar} \left( \frac{|\langle 5^2P_{1/2} | \vec{D} \cdot \vec{u} | 5^2S_{1/2} \rangle|^2}{\Delta_1} + \frac{|\langle 5^2P_{3/2} | \vec{D} \cdot \vec{u} | 5^2S_{1/2} \rangle|^2}{\Delta_2} \right) \\ &= \frac{d_{5S \rightarrow 5P}^2 |\mathcal{E}|^2}{4\hbar} \left( \frac{1}{3\Delta_1} + \frac{2}{3\Delta_2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi finalement

$$U_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_{\text{sat}}} \left( \frac{1}{3\Delta_1} + \frac{2}{3\Delta_2} \right) I(\vec{r}), \quad (7.46)$$

avec  $\Delta_1 = \omega - \omega_{5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}}$  et  $\Delta_2 = \omega - \omega_{5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}}$ .

*Taux d'émission spontanée* Le même hamiltonien d'interaction qui génère le potentiel dipolaire est aussi responsable des processus de diffusion de photons (absorption suivie de réémission spontanée), qui conduisent à des effets dissipatifs.

Dans le cas d'un champ à polarisation linéaire et avec un grand désaccord par rapport aux transitions D1 et D2, le **taux d'émission spontanée** est donné par :

$$\Gamma_{\text{sc}}(\vec{r}) = \frac{\Gamma^3}{8I_{\text{sat}}} \left( \frac{1}{3\Delta_1^2} + \frac{2}{3\Delta_2^2} \right) I(\vec{r}). \quad (7.47)$$

Ce résultat repose sur les hypothèses suivantes :

- **Désaccords**  $\Delta_{1,2}$  grands devant la largeur naturelle  $\Gamma$ ,
- **État fondamental unique**  $|5S_{1/2}\rangle$ ,
- **Décomposition des contributions** de D1 et D2 avec poids 1/3, 2/3 respectivement, comme dans le potentiel dipolaire,
- **Polarisation linéaire du champ**, ce qui annule les composantes vectorielles du potentiel.

## 7.5 Notre dispositif expérimental

### 7.5.1 Choix du laser pour le piégeage dipolaire

Notre objectif est de réaliser un piégeage dipolaire optique pour des atomes de rubidium-87 confinés dans une géométrie unidimensionnelle. Pour cela, nous utilisons un potentiel dipolaire induit par un faisceau laser décalé vers le bleu des transitions atomiques D1 ( $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$ , à  $\lambda_{D1} = 794.98$  nm) et D2 ( $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ , à  $\lambda_{D2} = 780.24$  nm). Le décalage spectral  $\Delta > 0$  garantit que les atomes sont repoussés des zones d'intensité maximale, ce qui permet de construire une "boîte" optique où les atomes sont piégés entre plusieurs faisceaux.

Dans cette configuration, les faisceaux lasers génèrent un potentiel optique conservatif  $U_{\text{dip}}(\vec{r})$  et induisent un taux de diffusion spontané  $\Gamma_{\text{sc}}(\vec{r})$ , tous deux proportionnels à l'intensité locale  $I(\vec{r})$ . Ces deux effets ont des conséquences opposées sur les atomes : le premier permet de les confiner, le second les chauffe et peut entraîner leur perte. Il est donc crucial d'optimiser ce compromis.

#### Critères de sélection

Deux critères fondamentaux guident notre choix de laser :

- Le **potentiel dipolaire** au niveau des atomes,  $U_{\text{dip}}(0)$ , doit être supérieur à une valeur minimale  $U_{\text{dip}}^{(\min)}$ , fixée à :

$$U_{\text{dip}}(0) \geq U_{\text{dip}}^{(\min)} = k_B \times 1\mu K. \quad (7.48)$$

Cette valeur garantit une barrière suffisante pour confiner les atomes contre leur agitation thermique résiduelle ou leur expansion quantique.

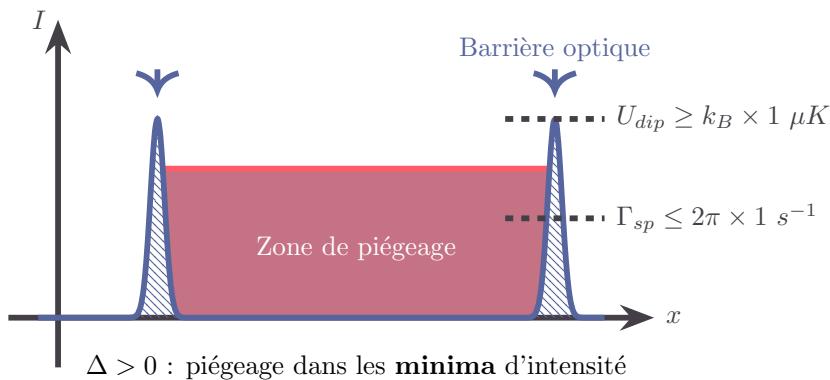


FIGURE 7.5

- Le taux de diffusion spontané au point  $x^*$  défini par  $U_{dip}(x^*) = U_{dip}(0)/2$  doit rester inférieur à une valeur seuil pour limiter l'échauffement et les pertes :

$$\Gamma_{sp}(x^*) \leq \Gamma_{sp}^{(max)} = 2\pi \times 1 \text{ s}^{-1}. \quad (7.49)$$

Ce critère conduit, en utilisant le fait que le potentiel  $U_{dip}^{(min)}(\vec{r})$  et le taux de diffusion spontanée  $\Gamma_{sp}(\vec{r})$  soit proportionnelle à l'intensité  $I(\vec{r})$ , à la borne stricte suivante :

$$\Gamma_{sp}(0) \leq 2\pi \times 2 \text{ s}^{-1}. \quad (7.50)$$

### Figure de mérite : ratio potentiel / diffusion

Les conditions des Eqs. (7.48) et (7.49) impliquent que, pour un point particulier  $\vec{r}^*$ , le rapport entre la profondeur du piège et la diffusion photonique satisfait

$$\frac{U_{dip}(\vec{r}^*)}{\hbar\Gamma_{sc}(\vec{r}^*)} > \frac{2U_{dip}^{(min)}}{\hbar\Gamma_{sc}^{(max)}}.$$

En utilisant les Eqs. (7.46) et (7.47), cette condition se réécrit explicitement sous la forme

$$\frac{U_{dip}(\vec{r}^*)}{\hbar\Gamma_{sc}(\vec{r}^*)} = \frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3\Delta_1} + \frac{2}{3\Delta_2}\right)}{\left(\frac{1}{3\Delta_1^2} + \frac{2}{3\Delta_2^2}\right)} \geq \frac{2U_{dip}^{(min)}}{\hbar\Gamma_{sc}^{(max)}} \quad (7.51)$$

Un calcul numérique montre que, sous ces contraintes, il est nécessaire de sélectionner des lasers dont la longueur d'onde est inférieure à une valeur maximale

$$\lambda_{abs}^{(max)} \simeq 778,4 \text{ nm.}$$

### Contraintes sur la puissance laser

Le faisceau utilisé est gaussien. On rappelle que le *waist*  $w_0$  désigne le rayon du faisceau, défini comme la distance radiale  $r$  pour laquelle l'intensité transverse chute à  $1/e^2$  de sa valeur au centre du faisceau, et ce à la position où le faisceau est le plus focalisé. Typiquement, nous utilisons ici des faisceaux avec un waist de l'ordre de  $w_0 \sim 1 \mu\text{m}$ .

Dans le cadre d'un piégeage avec un laser désaccordé vers le bleu, les atomes sont confinés dans une région **centrale de faible intensité**, située entre deux faisceaux focalisés. Le piégeage repose alors sur la formation de **parois optiques abruptes**, engendrées par les gradients d'intensité des faisceaux. Pour obtenir un gradient suffisamment marqué, il est nécessaire que chaque faisceau possède un **waist étroit**.

L'intensité maximale atteinte au centre du faisceau est donnée par :

$$I(0) = \frac{2P}{\pi w_0^2}, \quad (7.52)$$

avec  $P$  la puissance incidente. Cette expression relie directement la puissance requise aux contraintes de piégeage, et sera utilisée pour définir les bornes admissibles sur  $P(\lambda)$  pour une longueur d'onde donnée.

Les conditions des Eqs. (7.48) et (7.49) impliquent alors, en utilisant les expressions (??) et (??) pour le potentiel dipolaire et le taux de diffusion de photons, que la puissance laser doit satisfaire (7.46) (7.47)

$$P_{\min}(\lambda) \leq P(\lambda) \leq P_{\max}(\lambda), \quad (7.53)$$

avec

$$P_{\min}(\lambda) = U_{\text{dip}}^{(\min)} \cdot \frac{\pi w_0^2}{2} \frac{8I_{\text{sat}}}{\Gamma^2} \left( \frac{1}{3\Delta_1} + \frac{2}{3\Delta_2} \right)^{-1},$$

$$P_{\max}(\lambda) = \Gamma_{\text{sc}}^{(\max)} \cdot \pi w_0^2 \frac{8I_{\text{sat}}}{\Gamma^3} \left( \frac{1}{3\Delta_1^2} + \frac{2}{3\Delta_2^2} \right)^{-1}.$$

dans La région vérifiant le critère ci-dessous est représentée sur la figure (7.6), dans un diagramme  $(\lambda, P)$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde du laser.

Le seuil inférieur  $P_{\min}(\lambda)$  est extrêmement faible et n'a pratiquement aucune influence sur le choix expérimental de la puissance laser, contrairement à  $P_{\max}(\lambda)$  qui fixe la limite supérieure imposée par la diffusion photonique.

*Je ne comprends pas cette figure. La zone "tolérée" ne devrait-elle pas se situer entre les courbes pointillée et bleue? comme indiqué par (7.53)? À clarifier.*

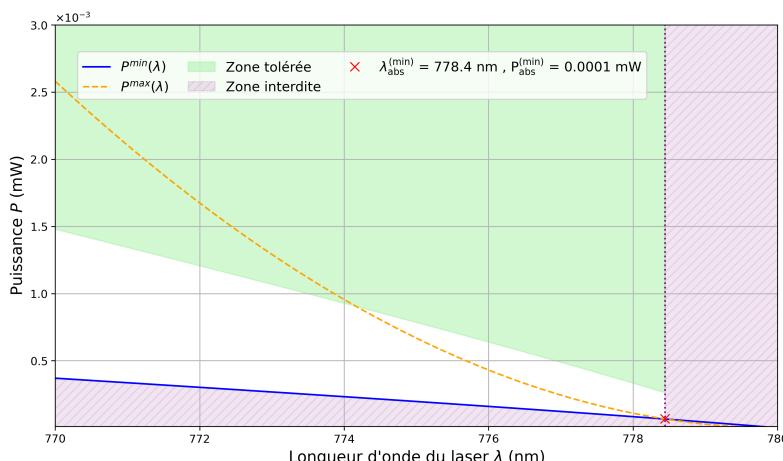


FIGURE 7.6 – Puissance requise en fonction de la longueur d'onde pour  $w_0 = 1 \mu\text{m}$

L'intersection de ces courbes définit une **zone de faisabilité expérimentale** dans l'espace  $(\lambda, P)$ . Le croisement des courbes fournit la longueur d'onde maximale admissible :

$$\lambda_{\text{abs}}^{(\max)} \simeq 778.4 \text{ nm}, \quad P_{\text{abs}}^{(\min)} \simeq 0.0001 \text{ mW}$$

Un premier filtrage des sources laser admissibles impose que la longueur d'onde soit inférieure à  $\lambda_{\text{abs}}^{(\max)}$  et que la puissance disponible dépasse  $P_{\text{abs}}^{(\min)}$ .

### Prise en compte des pertes optiques

L'ensemble des éléments optiques traversés par le faisceau — incluant la sortie de fibre, les lentilles de collimation et de focalisation, les miroirs de redirection, les trou de filtrages, ainsi que le diviseur de faisceau — induit des pertes cumulées non négligeables. Une estimation réaliste, fondée sur les caractéristiques

typiques des composants et l'expérience de montage, indique que les pertes globales s'élèvent à environ 60 à 75%.

Ces pertes doivent être prises en compte dès le dimensionnement initial du système laser, afin de garantir que la puissance effectivement disponible au niveau des atomes soit suffisante pour atteindre les profondeurs de piège souhaitées. En pratique, on modélise cette efficacité par un facteur global  $\eta$ , défini comme :

$$P_{\text{utile}} = \eta \cdot P_{\text{laser}}, \quad \text{avec} \quad \eta \approx 0.25.$$

Ce coefficient sera utilisé dans la suite pour évaluer les puissances minimales requises des sources laser candidates. Une marge de sécurité est également conservée pour pallier les éventuels désalignements ou dégradations optiques en conditions expérimentales réelles.

### Sources laser utilisées et pureté spatiale

Trois sources laser ont été identifiées pour la réalisation de la boîte optique blue-detuned destinée au piégeage dipolaire du Rubidium-87, dont deux répondent aux conditions de puissance admissibles  $P^{(\min)}(\lambda)$  et  $P^{(\max)}(\lambda)$ .

- **DFB** à  $\lambda = 772.5$  nm, puissance  $P = 75$  mW.
- **DBR** à  $\lambda = 778.0$  nm, puissance  $P = 60$  mW.
- **DBR** à  $\lambda = 770.5$  nm, puissance  $P = 32$  mW.

Le laser DFB (Distributed Feedback) intègre un réseau de Bragg directement dans la région active, ce qui permet un couplage efficace entre la rétroaction optique et le gain, assurant une émission monomode stable tant sur le plan spectral que spatial. Cette architecture confère au DFB une excellente stabilité et une robustesse appréciées en physique atomique.

Le laser Distributed Bragg Reflector (DBR) (Distributed Bragg Reflector), quant à lui, dispose d'un réseau de Bragg séparé de la région active. Cette configuration offre une plus grande flexibilité dans le réglage de la longueur d'onde, mais entraîne généralement une stabilité spectrale un peu moindre par rapport aux lasers DFB.

Ces diodes sont pigtaiillées sur des fibres monomodes à maintien de polarisation (type PM780-HP), assurant un profil spatial très pur. En effet, bien que des modes transverses supérieurs puissent être émis par la puce laser, la fibre ne guide que le mode fondamental LP<sub>01</sub>, équivalent au mode gaussien TEM<sub>00</sub>, dans la gamme spectrale 770–780 nm. Cette configuration agit comme un filtre spatial puissant, garantissant une sortie de faisceau gaussien avec une pureté supérieure à 99.5% en puissance.

Cette haute pureté spatiale est cruciale pour obtenir une focalisation optimale et des gradients de champ suffisamment intenses dans la zone de piégeage, tout en minimisant les pertes optiques et les effets parasites liés à la présence de modes non fondamentaux.

Enfin, les trois lasers se situent dans la zone de tolérance définie par les conditions sur la puissance minimale et maximale en fonction de la longueur d'onde, validant leur adéquation pour la construction de notre boîte optique blue-detuned.

Avec un waist de  $w_0 = 1 \mu\text{m}$ , les puissances minimales requises pour satisfaire les conditions  $U_{\text{dip}}^{(\min)}$  et  $\Gamma_{sp}^{(\max)}$  sont extrêmement faibles : environ 1.1  $\mu\text{W}$  pour la DFB à 772.5 nm, 0.3  $\mu\text{W}$  pour la DBR à 778.0 nm, et 1.4  $\mu\text{W}$  pour la DBR à 770.5 nm. Ces valeurs sont très largement inférieures aux puissances disponibles pour chacun de ces lasers, même en tenant compte des pertes optiques, ce qui confirme la faisabilité expérimentale du dispositif.

**Choix du waist pour les projets futurs.** On souhaite choisir une source laser adaptée à différents projets. Notamment, on peut n'utiliser qu'un seul faisceau focalisé sur les atomes, et avec un acousto-optique dessiner un potentiel sur le plan focal des atomes. L'avantage par rapport à la double barrière expliquée plus haut est qu'ici un seul faisceau suffit. Il faut cependant que le modulateur acousto-optique **AOM** puisse modifier l'intensité et la position du faisceau plus rapidement que le temps de réaction du mouvement du centre de masse des atomes. Ce projet est mené par Florence Nogrette.

Un autre projet, plus simple et utilisant également un seul faisceau, consiste à employer un faisceau gaussien avec un waist suffisamment grand pour recouvrir tous les atomes et à utiliser le DMD pour

façonner un potentiel sur le plan des atomes. Afin de garder une marge pour ces projets, nous avons choisi un waist de  $300\ \mu\text{m}$ .

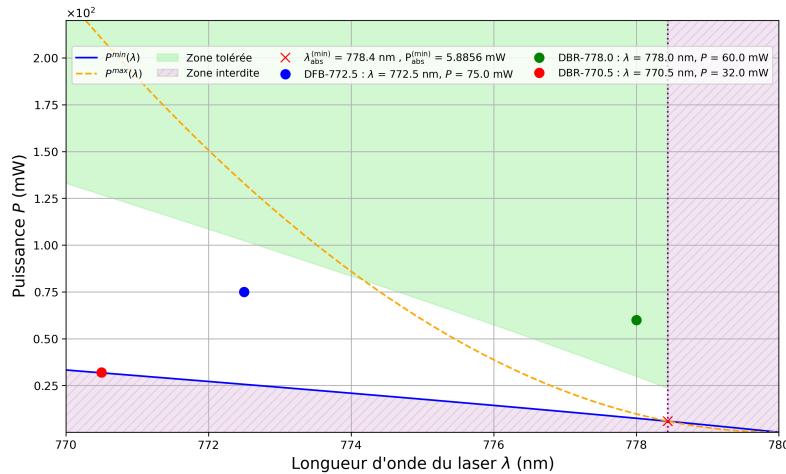


FIGURE 7.7 – Puissance requise en fonction de la longueur d'onde pour  $w_0 = 300\ \mu\text{m}$

Avec un waist de  $w_0 = 300\ \mu\text{m}$ , les puissances minimales requises augmentent considérablement en raison de la baisse d'intensité au centre du faisceau. On obtient ainsi des puissances nécessaires de l'ordre de 102 mW pour la DFB à 772.5 nm, 30 mW pour la DBR à 778.0 nm, et 127 mW pour la DBR à 770.5 nm (Fig. 7.7).

Afin d'assurer un potentiel dipolaire plus propre, avec le moins de diffusion et de chauffage possible, nous avons choisi la source laser présentant le plus grand désaccord : la DBR à 770.5 nm. Néanmoins, pour obtenir un puits suffisamment profond, la puissance disponible reste insuffisante.

Ce constat a motivé l'ajout d'un amplificateur optique (**TA** — *Tapered Amplifier*) en sortie du laser à 770.5 nm, afin de compenser la puissance limitée et de garantir des conditions de piégeage satisfaisantes malgré les pertes optiques du système.

### 7.5.2 Amplification par Tapered Amplifier (TA)

#### Principe et motivation

Afin de compenser le déficit de puissance du laser **DBR** à 770.5 nm — notamment dans le scénario initialement envisagé avec un waist focalisé important — un amplificateur optique de type **TA** a été ajouté en aval de la source laser.

Un **TA** est un semi-conducteur optique amplificateur non résonant, composé d'une région d'entrée étroite (guidée) et d'une région de sortie évasée (tapered), permettant d'amplifier efficacement un faisceau monomode tout en conservant un profil spatial de bonne qualité. Contrairement aux lasers, le **TA** n'oscille pas par lui-même : il agit uniquement sur une source laser fournie en entrée. Il peut amplifier des puissances faibles, de l'ordre de 20 mW, jusqu'à plusieurs centaines de mW, voire au-delà, en sortie.

Ce dispositif est particulièrement adapté aux expériences de piégeage optique, où une puissance laser relativement élevée est nécessaire tout en maintenant une bonne qualité spatiale.

#### Contraintes et précautions

L'utilisation d'un **TA** s'accompagne de plusieurs contraintes expérimentales importantes :

- **Sensibilité aux rétro-réflexions** : la puce du **TA** ne supporte pas les retours optiques parasites, qui peuvent entraîner des instabilités, des dégradations de performance, voire endommager le composant. Un **isolateur optique** est donc placé en sortie pour bloquer tout retour de lumière vers le **TA**.

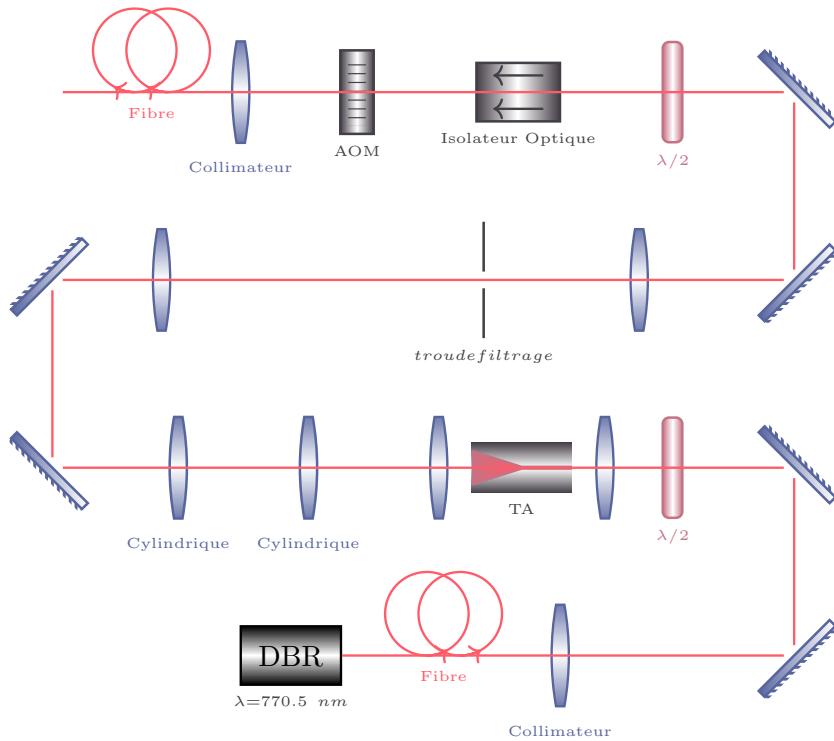


FIGURE 7.8 – Schéma global de l'amplification

- **Mode spatial en sortie :** la sortie du TA reste monomode, mais le profil spatial est fortement déformé et s'éloigne d'un mode TEM<sub>00</sub> parfait. Un trou de filtrage ou une **trou de filtrage** de  $50 \mu\text{m}$  (à ajuster selon le profil observé) peut être utilisé pour filtrer et améliorer la qualité spatiale du faisceau.

### Mise en œuvre expérimentale

Le schéma global de l'amplification est présenté sur la figure 7.8 .

- ▷ **Laser utilisé pour injecter le TA :** le laser DBR à  $770.5 \text{ nm}$  est stabilisé en température et en courant à l'aide du contrôleur Thorlabs ITC-510, et injecté dans le TA à l'aide d'une optique de couplage sur table optique.
- ▷ **Boîtier de protection et régulation thermique :** le TA est installé dans un boîtier métallique maison, conçu pour assurer à la fois une protection mécanique et une stabilité thermique. Ce boîtier intègre un module Peltier et une thermistance pour la régulation active de la température, pilotés par un contrôleur thermique (Arrow OEM). L'ensemble est alimenté par une alimentation dédiée (Delta Electronics), garantissant un fonctionnement stable du système de refroidissement. Cette stabilisation thermique est cruciale pour limiter les dérives du TA et préserver la qualité spatiale du faisceau amplifié.
- ▷ **Filtrage spatial :** un trou de filtrage (trou de filtrage) placé dans le plan de Fourier d'un système en configuration télescopique, positionné en sortie de l'amplificateur TA, permet de sélectionner efficacement le mode spatial fondamental.
- ▷ **Isolateur optique :** un isolateur optique est placé immédiatement après le TA pour éviter tout retour de lumière vers la puce.
- ▷ **Modulation de puissance :** un modulateur acousto-optique AOM est inséré juste avant la fibre optique, permettant de couper la lumière à la demande (switch rapide) ou de moduler dynamiquement l'intensité laser. Cela permet un contrôle fin de l'illumination au niveau des atomes.
- ▷ **Mesure de puissance :** une photodiode ou un puissance-mètre placé après l'AOM permet de mesurer précisément la puissance en fonction du courant injecté dans le TA, et de corriger les effets d'instabilité

si nécessaire.

### Caractérisation et performance

La diode laser et le **TA** sont asservis à une température stable afin d'éviter toute fluctuation susceptible d'affecter leur fonctionnement. Une courbe de puissance de sortie du **TA** en fonction du courant injecté a été mesurée (voir figure 7.9), avec la diode laser fournissant une puissance maximale d'environ 31.2 mW et le TA testé jusqu'à un courant d'injection de 2.5 A.

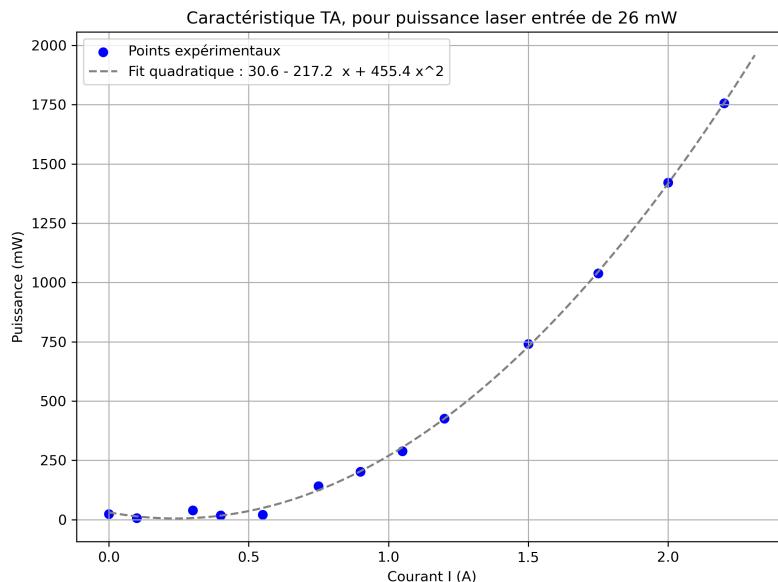


FIGURE 7.9 – Puissance de sortie du **TA** en fonction du courant d'injection, pour une puissance d'entrée provenant de la diode laser fixée à 25 mW.

Afin d'éviter une dégradation prématuée des composants, il a été choisi de ne pas les faire fonctionner à leurs limites maximales. La diode laser est ainsi réglée pour fournir une puissance d'environ 25 mW (courant  $I_{\text{diode}} = 150.6 \text{ mA}$ ) et le **TA** est exploité avec un courant d'environ 1.5 A. Cette configuration assure un bon compromis entre puissance de sortie et longévité des dispositifs, tout en garantissant une amplification stable et un profil spatial préservé.

Pour un courant d'injection de 1.5, A dans le **TA**, la puissance mesurée en sortie, après passage dans l'**AOM**, est d'environ 62, mW. Or, d'après la figure 7.8, à 1.5, A, la puissance en sortie directe du **TA** atteint environ 750, mW. Cela signifie qu'après l'**AOM**, il ne reste qu'environ 8% de la puissance initiale, ce qui n'est pas raisonnable.

Cette perte importante s'explique par le fait que l'on ne souhaite sélectionner que l'ordre fondamental gaussien du faisceau, alors que le **TA** émet une superposition de modes. Une fraction trop importante de la puissance est ainsi distribuée dans les modes d'ordre supérieur, qui sont rejetés.

De plus, le **TA** installé présente un rendement maximal (proche de 100% de la puissance spécifiée) lorsque le laser d'entrée est à 780, nm, alors qu'à 770.5, nm le rendement chute à environ 45%. Dans notre cas, nous avons utilisé un **TA** déjà disponible au laboratoire, choisi comme le plus adapté parmi ceux dont nous disposions, afin d'éviter l'achat d'un modèle plus spécifique.

Il semble donc nécessaire d'envisager, à terme, le remplacement par un **TA** mieux adapté à la longueur d'onde utilisée.

L'**AOM** génère plusieurs ordres de diffraction : le mode zéro (non diffracté), les modes  $\pm 1$ , etc. Afin d'optimiser le transfert d'énergie dans un mode diffracté souhaité (par exemple le premier ordre  $\pm 1$ ), le cristal **AOM** a été ajusté finement en rotation. Ce réglage permet de maximiser la puissance dans ce mode non nul.

Le faisceau correspondant à ce mode diffracté, qui concentre la majorité de la puissance utile, est ensuite injecté dans une fibre monomode à maintien de polarisation.

Ainsi, l'AOM est configuré de manière à transférer efficacement la puissance vers le mode diffracté utile, avec une puissance d'environ 62 mW disponible à l'entrée de la fibre, garantissant une qualité spatiale et une polarisation stables pour l'expérience.

Le système ainsi mis en place permet d'obtenir, de manière stable, une puissance suffisante en sortie pour alimenter la fibre de piégeage, même en tenant compte des pertes optiques du système.

## Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté les dispositifs expérimentaux permettant de réaliser et de contrôler des gaz atomiques confinés en une dimension. Le potentiel dipolaire offert par la puce atomique permet déjà de créer des profils de densité variés, jusqu'à un potentiel quartique en ordre 4. L'introduction du **DMD** offre une flexibilité supplémentaire : il permet de sélectionner des régions du nuage atomique et de générer des découpages locales, ouvrant ainsi la voie à des préparations plus complexes.

En combinant le potentiel de la puce et le DMD, il est possible de préparer des nuages atomiques homogènes sur des zones plus étendues que celles limitées par le potentiel quartique de la puce seule. Cependant, pour générer des potentiels encore plus exotiques et modulables, l'utilisation d'un **TA** est nécessaire. Après optimisation, nous avons injecté environ 62 mW dans la fibre conduisant vers le DMD. Cette configuration est satisfaisante pour le projet en cours, mais elle révèle certaines limitations du **TA** utilisé : le profil spatial du faisceau s'écarte significativement d'un mode TEM<sub>00</sub>, ce qui explique la faible puissance réellement injectée. Pour atteindre des performances supérieures et exploiter pleinement la flexibilité du DMD, il serait nécessaire de remplacer le **TA** actuel par un modèle offrant un profil spatial plus adapté.

# Conclusion

## Introduction de la conclusion

Dans cette thèse, j'ai exploré les gaz de bosons 1D intégrables, où l'état relaxé ne suit pas la statistique Gibbs classique, mais est caractérisé par la distribution de rapidités. L'objectif central était de sonder cette distribution spatialement résolue et de confronter les données expérimentales aux prédictions de la théorie d'Hydrodynamique Généralisée (GHD).

## Résumé des travaux réalisés

Cette thèse a permis de combiner théorie, simulation et expérimentation pour mieux comprendre et manipuler les gaz de bosons 1D intégrables. Mes contributions se situent dans trois axes :

### Approche théorique

J'ai approfondi mes compréhensions dans les fondements du modèle de Lieb–Liniger et de l'Ansatz de Bethe (BA), ainsi que leur encadrement par le cadre théorique des systèmes intégrables : GGE, TBA et GHD. Ces mécanismes, au carrefour de la théorie quantique et de l'hydrodynamique quantique, ont renforcé ma compréhension conceptuelle, tout en illustrant mes cours dans un contexte applicatif.

### Simulations numériques et modélisation

Dans cette thèse, j'ai développé des simulations GHD pour étudier la dynamique des gaz de bosons 1D, notamment dans le cadre de protocoles impliquant des déformations locales des profils de densité. En parallèle, j'ai calculé les fluctuations de la distribution de rapidité en utilisant le formalisme TBA, et validé ces résultats par des vérifications numériques fondées sur le principe de fluctuation–réponse.

Afin d'explorer la faisabilité de l'échantillonnage du GGE, j'ai amorcé des simulations Monte Carlo adaptées. Ces outils fournissent un cadre théorique robuste pour anticiper de futures mesures expérimentales locales, bien que celles-ci n'aient pas été réalisées au cours de cette thèse.

### Mise en place expérimentale

Sur le plan expérimental, j'ai initié la mise en place d'un piégeage dipolaire en complément de la puce atomique, visant à préparer des configurations initiales de gaz atomiques peu conventionnelles. Cette étape permet de générer des potentiels longitudinaux complexes et modulables, ouvrant la voie à l'étude future de distributions de rapidité spatialement résolues et de dynamiques hors équilibre dans des états initialement « exotiques ».

## Perspectives, faisabilité et réflexion critique

**Développement du piégeage dipolaire.** La poursuite de la réalisation d'un piège dipolaire plus abouti offrirait une plus grande liberté dans la préparation des systèmes, tout en garantissant une meilleure reproductibilité des conditions expérimentales. Une telle maîtrise constitue un prérequis essentiel, par exemple

pour envisager la mesure de fluctuations, mais elle demeure exigeante en termes d'optique, d'alignement et de stabilité.

**Optimisation des simulations et étude des pertes.** Une piste prometteuse consiste à améliorer les méthodes de simulation Monte Carlo afin de générer plus efficacement des états GGE et d'accéder à des corrélations de fluctuations d'ordre supérieur. Dans ce cadre, l'inclusion des effets de pertes atomiques et la modélisation récente de l'évolution de la distribution de rapidités sous pertes [BDD20] constituent un enjeu central : ouvrir la voie à l'étude de déviations non thermiques, intégrables dans le cadre de la GHD. La prise en compte des pertes multibody, notamment dans une géométrie confinée, permettrait en outre d'évaluer la robustesse des distributions de rapidité face à ces processus dissipatifs. La confrontation de ces résultats, théoriques et numériques, à des données expérimentales demeure une perspective majeure.

Bien que techniquement complexes et exigeant une résolution spatiale et statistique élevée, des mesures directes des fluctuations de densité, après expansion ou *in situ*, deviennent aujourd'hui envisageables grâce aux techniques modernes d'imagerie à haute résolution, et offriraient une comparaison directe avec les prédictions issues des approches Monte Carlo.

## Annexe A

# Action de $\hat{P}$ et $\hat{H}$ sur $|\{\theta_a\}\rangle$

L'état  $|\{\theta_a\}\rangle$  s'écrit :

$$|\{\theta_a\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx_1 \cdots dx_N \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |\emptyset\rangle. \quad (\text{A.1})$$

### A.1 Action de $\hat{P}$ sur $|\{\theta_a\}\rangle$

#### A.1.1 Utilisation de la définition de $\hat{P}$ intégrée par parties

Cela peut être expliqué en utilisant l'opérateur du moment  $\hat{P}$  (1.30) comme exemple. Tout d'abord, nous intégrons (1.30) par parties pour représenter  $\hat{P}$  sous la forme (avec  $\hbar = m = 1$ ) :

$$\hat{P} = i \int [\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x)] \hat{\Psi}(x) dx \quad (\text{A.2})$$

#### A.1.2 Application à l'état à N particules

On fait agir  $\hat{P}$  de (A.2) sur l'état  $|\{\theta_a\}\rangle$  de (A.1) :

$$\hat{P} |\{\theta_a\}\rangle = \frac{i}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) [\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x)] \quad (\text{A.3})$$

$$\times \sum_{k=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_k)] \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad (\text{A.4})$$

En utilisant les règles de commutation (1.17) il vient que

$$\hat{P} |\{\theta_a\}\rangle = \frac{i}{\sqrt{N!}} \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \quad (\text{A.5})$$

$$\times \sum_{k=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots [\hat{\partial}_{z_k} \hat{\Psi}^\dagger(z_k)] \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle. \quad (\text{A.6})$$

Nous intégrons maintenant par parties par rapport à  $z_k$  pour obtenir

$$\hat{P} |\{\theta_a\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \left\{ -i \sum_{k=1}^N \hat{\partial}_{z_k} \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \right\} \times \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle. \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Action de $\hat{\mathbf{H}}$ sur $|\{\theta_a\}\rangle$

### A.2.1 Réécriture de l'hamiltonien

L'hamiltonien (A.39) se réécrit avec  $\hbar = 2m = 1$  et  $c = g/2$  :

$$\hat{\mathbf{H}} = \int dx \left[ -\left[ \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) + c \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \right]. \quad (\text{A.8})$$

### A.2.2 Application à l'état à N particules

On fait agir  $\hat{\mathbf{H}}$  définie en (A.8) sur l'état  $|\{\theta_a\}\rangle$  de (A.1) :

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \left[ \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} |\{\theta_a\}\rangle &= \\ &+ \frac{c}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Les règles de commutations (1.17) impliquent que

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] &= \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\delta}(x - z_i) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \\ \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(z) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

En utilisant ces dernières règles de commutations et la définition d'état de Fock (1.16), la première partie de l'application de l'hamiltonien sur l'état  $|\{\theta_a\}\rangle$ , (A.10) se simplifie en

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N | \theta_1, \dots, \theta_N) \sum_{i=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \left[ \hat{\partial}_{z_i}^2 \hat{\Psi}^\dagger(z_i) \right] \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.12})$$

Et en faisant deux intégrations par parties selon la variable  $z_i$ , cette première partie devient

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i}^2 \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.13})$$

Pour la seconde partie, en remarquant que les règles de commutations (1.17) impliquent que

$$[\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z)] = 2 \hat{\Psi}(x) \hat{\delta}(x - z) \quad (\text{A.14})$$

et en remplaçant  $\hat{\Psi}(x)$  par  $\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x)$  dans (A.11) il vient que

$$[\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] = 2 \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}(x) \hat{\delta}(x - z_i) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \quad (\text{A.15})$$

et en injectant (A.11), (A.15) devient

$$[\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] = \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\delta}(x - z_i) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \hat{\Psi}(x) \\ + 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\delta}(x - z_i) \hat{\Psi}^\dagger(z_{i+1}) \cdots \hat{\delta}(x - z_j) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

En utilisant la règle de commutation (A.16) et la définition de l'état de Fock (1.16), la seconde partie de (A.10) devient

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \, 2c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad (\text{A.17})$$

en utilisant (A.13) et (A.17), (A.13) devient

$$\hat{\mathbf{H}}|\psi(\theta_1, \dots, \theta_N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \left[ \hat{\mathcal{H}}_N \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \right] \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad (\text{A.18})$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}}_N = - \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i}^2 + 2c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \quad (\text{A.19})$$



## Annexe B

# Réduction GHD → transport d'Euler lorsque le *dressing* est l'identité

**Point de départ : équation GHD.** L'équation GHD s'écrit, pour la distribution de rapidité  $\rho(x, \theta, t)$ ,

$$\partial_t \rho + \partial_x(v^{\text{eff}} \rho) + \partial_\theta(a^{\text{eff}} \rho) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Les vitesses/accélérations *effectives* sont obtenues par habillage.

**Hypothèse “sans interactions” :**  ${}^{\text{dr}} = \text{Id}$ . Si l'opérateur d'habillage est l'identité (*no dressing*),

$$v = 2\pi\rho, \quad v^{\text{eff}}(\theta) \rightarrow \partial_\theta h(x, \theta), \quad a^{\text{eff}}(\theta) \rightarrow -\partial_x h(x, \theta),$$

où  $h(x, \theta)$  est l'hamiltonien *nu* (par exemple  $h = \varepsilon(\theta) + V(x)$ ). L'équation (B.1) devient alors une équation de transport collisionless (type Vlasov) :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\partial_\theta h \rho) - \partial_\theta(\partial_x h \rho) = 0. \quad (\text{B.2})$$

**Hiérarchie des moments (charges nues).** Pour toute fonction test  $f(\theta)$ , définissons

$$q_{[f]}(x, t) = \int d\theta f(\theta) \rho(x, \theta, t), \quad j_{[f]}(x, t) = \int d\theta f(\theta) \partial_\theta h \rho(x, \theta, t).$$

En multipliant (B.2) par  $f(\theta)$  et en intégrant en  $\theta$ , on obtient

$$\partial_t q_{[f]} + \partial_x j_{[f]} = - \int d\theta f'(\theta) \partial_x h \rho = - \partial_x V(x) \int d\theta f'(\theta) \rho, \quad (\text{B.3})$$

où la dernière égalité vaut si  $h(\theta, x) = \varepsilon(\theta) + V(x)$ .

**Trois premiers moments (“masse”, “momentum”, “énergie”).** En choisissant  $f(\theta) = 1, \theta, \theta^2/2$ , on obtient respectivement :

$$(\text{Continuité}) \quad \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \quad n := q_{[1]}, \quad nu := j_{[1]}, \quad (\text{B.4})$$

$$(\text{Quantité de mouvement}) \quad \partial_t(nu) + \partial_x(q_{[\theta^2]}) = -n \partial_x V, \quad q_{[\theta^2]} := \int d\theta \theta^2 \rho, \quad (\text{B.5})$$

$$(\text{Énergie cinétique}) \quad \partial_t q_{[\theta^2/2]} + \partial_x(j_{[\theta^2/2]}) = -(\partial_x V) q_{[\theta]}, \quad j_{[\theta^2/2]} := \int d\theta \frac{\theta^2}{2} \partial_\theta h \rho. \quad (\text{B.6})$$

*Remarque* : pour  $h = \frac{\theta^2}{2} + V(x)$ , on a  $\partial_\theta h = \theta$ , d'où  $j_{[\theta^2/2]} = \int d\theta \frac{\theta^2}{2} \theta \rho$ .

**Lien (et limite) avec les équations d'Euler classiques.** Les équations (B.4)–(B.6) ont la structure des lois de conservation d'Euler (masse, quantité de mouvement, énergie). Cependant, **le système n'est pas fermé en l'état** : par exemple,  $\partial_t(nu)$  fait intervenir  $q_{[\theta^2]}$ , qui requiert une relation de fermeture (*équation d'état*) pour être exprimé en fonction de  $n$  et  $u$  (p. ex. hypothèse de *local Maxwell–Boltzmann* menant à une pression  $\mathcal{P}$ ).

**Conclusion.** Lorsque  ${}^{dr} = \text{Id}$ , la GHD se réduit à une cinétique collisionless dont les moments reproduisent *formellement* les équations d'Euler. La véritable différence entre hydrodynamique classique et GHD complète réside donc dans le *dressing* : dès que  ${}^{dr} \neq \text{Id}$ , les vitesses et charges deviennent *effectives* et la dynamique s'écarte des lois d'Euler classiques.

**Encadré : fermeture et équations d'Euler fermées.** Pour obtenir un système d'équations d'Euler *fermées* à partir de la hiérarchie (B.4)–(B.6), il faut fournir une *relation de fermeture* (ou *équation d'état*) reliant les moments d'ordre supérieur aux variables hydrodynamiques de base ( $n, u$ ).

Un choix simple et classique, valable pour une cinétique collisionless de type Vlasov (système *classique*), est d'hypothétiser une *distribution locale thermique* (Maxwellienne) :

$$\rho(x, \theta, t) = n(x, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi T_{\text{loc}}(x, t)}} \exp\left(-\frac{(\theta - u(x, t))^2}{2T_{\text{loc}}(x, t)}\right),$$

où  $T_{\text{loc}}(x, t)$  est la température locale (unités choisies telles que  $k_B = 1$ ). Sous cette hypothèse on obtient les moments

$$q_{[\theta]} = nu, \quad q_{[\theta^2]} = n(u^2 + T_{\text{loc}}).$$

On définit alors la pression cinétique comme la partie convective soustraite au second moment :

$$\mathcal{P} = q_{[\theta^2]} - \frac{q_{[\theta]}^2}{n} = nT_{\text{loc}}.$$

Dans le cas d'un gaz classique 1D idéal la contribution interne par particule vaut  $e_{\text{int}} = \frac{1}{2}T_{\text{loc}}$  (pour  $k_B = 1$ ).

En remplaçant ces expressions dans (B.4)–(B.6) on obtient des équations d'Euler *fermées* avec les sources dues au potentiel externe :

$$\begin{aligned} \partial_t n + \partial_x(nu) &= 0, \\ \partial_t(nu) + \partial_x(nu^2 + \mathcal{P}) &= -n \partial_x V, \\ \partial_t E + \partial_x(u(E + \mathcal{P})) &= -nu \partial_x V, \end{aligned}$$

où l'énergie volumique totale s'écrit

$$E(x, t) = \frac{1}{2}nu^2 + nV + ne_{\text{int}},$$

et le terme  $-nu \partial_x V$  à droite de l'équation d'énergie représente le travail du champ externe (force  $\times$  vitesse).

**Forme vectorielle compacte.** En posant l'état vectoriel  $U = (n, nu, E)^\top$  et le flux  $F(U) = (nu, nu^2 + \mathcal{P}, u(E + \mathcal{P}))^\top$ , les équations s'écrivent

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = S(U),$$

où la source  $S(U)$  regroupe les termes dus au potentiel externe, par exemple

$$S(U) = (0, -n\partial_x V, -nu \partial_x V)^\top.$$

**Remarque importante.** L'hypothèse d'une Maxwellienne locale est une approximation *classique* de fermeture : elle est justifiée pour des gaz classiques proches d'un équilibre local. Pour des gaz quantiques (par

exemple le modèle de Lieb–Liniger), la distribution locale d'équilibre n'est pas une Maxwell–Boltzmann mais plutôt un état thermique quantique (Gibbs) ou, dans le cas d'un système intégrable, un état *GGE* local ; de plus les effets d'interaction et le *dressing* modifient les relations entre moments. Par conséquent, dans le contexte de la GHD complète, la fermeture ne résulte pas automatiquement d'une hypothèse simple de type Maxwell–Boltzmann : il faut soit adopter une hypothèse adaptée (p.ex. fermeture empirique, développement en moments), soit utiliser le formalisme du *dressing*/du TBA pour exprimer exactement les relations entre moments et vitesses effectives.



## Annexe C

# Dérivation alternative des fluctuations de $\rho$

Dans cette annexe, nous proposons une seconde dérivation des fluctuations de la densité de rapidités  $\rho$ , différente de celle présentée au chapitre 4. Cette approche m'a été suggérée par Jérôme Dubail ([Centre européen de sciences quantiques \(CESQ\)](#)). Elle présente l'intérêt de passer directement par les fluctuations du facteur d'occupation  $\nu$ , et constitue également une bonne occasion de manipuler les dérivées de l'opérateur *d'habillage*.

### C.1 Réécriture de l'entropie de Yang–Yang

L'entropie de Yang–Yang s'écrit

$$S_{YY} = \int d\theta \left( \rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho) \right)(\theta). \quad (\text{C.1})$$

En introduisant le facteur d'occupation

$$\nu = \frac{\rho}{\rho_s}, \quad (\text{C.2})$$

l'intégrande peut se réécrire sous la forme

$$S_{YY} = \int d\theta s(\nu(\theta)) \rho_s(\theta), \quad (\text{C.3})$$

où la fonction d'entropie locale est donnée par

$$s(\nu) = -\nu \ln \nu - (1 - \nu) \ln(1 - \nu). \quad (\text{C.4})$$

### C.2 Différentielle de l'action effective

On définit l'action effective comme

$$S_{YY} - \mathcal{W}, \quad (\text{C.5})$$

où  $\mathcal{W}$  est l'énergie généralisée,

$$\mathcal{W} = \int d\theta w(\theta) \rho(\theta). \quad (\text{C.6})$$

Sa différentielle est donnée par

$$\delta(S_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left( \delta\nu s'(\nu) \rho_s + s(\nu) \delta\rho_s - w \delta\rho \right)(\theta). \quad (\text{C.7})$$

En remarquant que

$$\delta\nu\rho_s = \delta\rho - \nu\delta\rho_s, \quad (\text{C.8})$$

on réécrit (C.7) sous la forme

$$\delta(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left( \{s'(\nu) - w\}\delta\rho + \{s(\nu) - \nu s'(\nu)\}\delta\rho_s \right)(\theta). \quad (\text{C.9})$$

On obtient alors la différentielle seconde :

$$\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left( \delta\nu s''(\nu) \delta\rho - \nu \delta\nu s''(\nu) \delta\rho_s \right)(\theta). \quad (\text{C.10})$$

En utilisant (C.8), on simplifie pour obtenir

$$\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta ((\delta\nu)^2 s''(\nu) \rho_s)(\theta), \quad (\text{C.11})$$

avec

$$s''(\nu) = -\frac{1}{\nu(1-\nu)}. \quad (\text{C.12})$$

## C.3 Fluctuations

### C.3.1 Fluctuations des facteurs d'occupation

Les fluctuations du facteur d'occupation s'écrivent

$$\langle \delta\nu(\theta') \delta\nu(\theta) \rangle_w = - \left[ L \frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W})}{\delta\nu \delta\nu} \right]^{-1}(\theta, \theta'). \quad (\text{C.13})$$

En injectant (C.11), il vient

$$\langle \delta\nu(\theta') \delta\nu(\theta) \rangle_w = -s''(\nu(\theta)) \rho_s(\theta) \delta(\theta - \theta'), \quad (\text{C.14})$$

qui est purement diagonale.

### C.3.2 Opérateur d'habillage

On rappelle la définition de l'opérateur d'habillage :

$$f_{[\nu]}^{\text{dr}} = f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu f_{[\nu]}^{\text{dr}}). \quad (\text{C.15})$$

En remarquant que

$$C(\theta, \lambda) = \left[ \frac{\Delta(\lambda - \cdot)}{2\pi} \right]_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta), \quad (\text{C.16})$$

qui est symétrique, on peut réécrire [DS17]

$$f_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta) = \int d\lambda f(\lambda) \left( \delta(\theta - \lambda) + \nu(\lambda) C(\theta, \lambda) \right). \quad (\text{C.17})$$

### C.3.3 Fluctuations des distributions de rapidité

On a vu que

$$2\pi \rho_s(\theta) = 1_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta) = \int d\lambda \left( \delta(\theta - \lambda) + \nu(\theta) C(\theta, \lambda) \right), \quad (\text{C.18})$$

d'où

$$2\pi \delta\rho_s(\theta) = \int d\lambda C(\theta, \lambda) \rho_s(\lambda) \delta\nu(\lambda). \quad (\text{C.19})$$

Ainsi,

$$\delta\rho(\theta) = \rho_s(\theta)\delta\nu(\theta) + \nu(\theta)\delta\rho_s(\theta) \quad (\text{C.20})$$

$$= \int d\lambda \delta(\theta - \lambda) \rho_s(\lambda) \delta\nu(\lambda) + \int d\lambda \nu(\theta) C(\theta, \lambda) \rho_s(\lambda) \delta\nu(\lambda), \quad (\text{C.21})$$

$$= \int d\lambda \left( \delta(\theta - \lambda) + \nu(\theta) C(\theta, \lambda) \right) \rho_s(\lambda) \delta\nu(\lambda). \quad (\text{C.22})$$

En réinjectant (C.11) et (C.22) dans la définition

$$\langle \delta\rho(\theta') \delta\rho(\theta) \rangle_w = - \left[ L \frac{\delta^2(S_{YY} - \mathcal{W})}{\delta\rho \delta\rho} \right]^{-1}(\theta, \theta'), \quad (\text{C.23})$$

on obtient finalement

$$\langle \delta\rho(\theta') \delta\rho(\theta) \rangle_w = - \frac{1}{L} \int d\lambda \frac{\left( \delta(\theta - \lambda) + \nu(\theta) C(\theta, \lambda) \right) \left( \delta(\theta' - \lambda) + \nu(\theta') C(\theta', \lambda) \right)}{s''(\nu(\lambda))} \rho_s(\lambda) \quad (\text{C.24})$$

$$= \frac{1}{L} \mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta') + \frac{1}{L} \mathcal{B}(\theta, \theta'), \quad (\text{C.25})$$

où

$$\mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta') = (\rho_s(\theta) \nu(\theta) (1 - \nu(\theta))) \delta(\theta - \theta'), \quad (\text{C.26})$$

$$\mathcal{B}(\theta, \theta') = \left[ \nu(\theta') \rho_s(\theta) \nu(\theta) (1 - \nu(\theta)) + \nu(\theta) \rho_s(\theta') \nu(\theta') (1 - \nu(\theta')) \right] C(\theta, \theta') \quad (\text{C.27})$$

$$+ \nu(\theta) \nu(\theta') \int d\lambda \rho_s(\lambda) \nu(\lambda) (1 - \nu(\lambda)) C(\theta, \lambda) C(\theta', \lambda). \quad (\text{C.28})$$

Cette expression coïncide numériquement avec le résultat obtenu en (4.59).



## Annexe D

# Propriétés des facteurs d'homothétie

### D.1 Loi de puissance des facteurs homothétiques

**Théorème D.1.1** (Loi de puissance). *Si le facteur  $f(\lambda)$  est bien défini indépendamment de  $n > 0$  (ce qui est le cas pour les solutions homothétiques), alors  $f$  est une loi de puissance.*

*Démonstration.* Posons  $g(n) = \mu'(n) > 0$  ou  $< 0$  (i.e.  $\mu$  strictement monotone). La définition de  $f$  équivaut à l'existence d'une fonction  $\chi(\lambda) = 1/f(\lambda)$  telle que

$$g(\lambda n) = \chi(\lambda) g(n) \quad (\forall \lambda, n > 0).$$

En prenant  $n = 1$ , on a  $\chi(\lambda) = g(\lambda)/g(1)$ . Donc, pour tous  $a, b > 0$ ,

$$\chi(ab) = \frac{g(ab)}{g(1)} = \frac{\chi(a)g(b)}{g(1)} = g(a)g(b),$$

c'est-à-dire que  $\chi$  est *multiplicative*. Sous une hypothèse physique très faible (continuité, mesurabilité ou simple localement bornée), toute fonction multiplicative sur  $\mathbb{R}_+^*$  est de la forme

$$\chi(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} \Rightarrow f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}.$$

□

### D.2 Équivalence entre $f(\lambda)$ et $\mu(n)$

**Théorème D.2.1.** *Les expressions*

$$f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha} \quad \text{et} \quad \mu(n) \propto n^\alpha$$

*sont équivalentes.*

*Démonstration.* 1. 1. Si  $\mu(n) = C n^\alpha$  avec  $C \neq 0$  :

Alors  $\mu'(n) = C\alpha n^{\alpha-1}$ . Par conséquent,

$$f(\lambda) = \frac{C\alpha n^{\alpha-1}}{C\alpha (\lambda n)^{\alpha-1}} = \lambda^{1-\alpha}.$$

2. Réciproque : si  $f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}$  pour tout  $\lambda > 0$  et  $n > 0$  : Posons  $g(n) = \mu'(n)$ . L'hypothèse s'écrit

$$\frac{g(n)}{g(\lambda n)} = \lambda^{1-\alpha} \iff g(\lambda n) = \lambda^{\alpha-1} g(n),$$

pour tout  $n > 0$  et tout  $\lambda > 0$ .

Fixons  $n_0 > 0$  et définissons  $\varphi(\lambda) \equiv g(\lambda n_0)$ . La relation ci-dessus donne

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} \varphi(1),$$

donc  $\varphi(\lambda) = C_1 \lambda^{\alpha-1}$  avec  $C_1 = g(n_0)$ . En remplaçant  $\lambda = x/n_0$ , on obtient pour tout  $x > 0$

$$g(x) = C_1 x^{\alpha-1}.$$

Ainsi,  $g(n) = \mu'(n) = C n^{\alpha-1}$  avec  $C$  constant. En intégrant (si  $\alpha \neq 0$ ), on a

$$\mu(n) \propto n^\alpha.$$

Pour  $\alpha = 0$ ,  $\mu'(n) = C n^{-1}$  et  $\mu(n) = C \ln n + \text{const.}$

□

*Remarque D.2.2.* La démonstration utilise la propriété fonctionnelle multiplicative  $g(\lambda n) = \lambda^{\alpha-1} g(n)$ . Sous une hypothèse faible de continuité (ou dérivabilité) en  $n$ , cette équation force la forme de puissance  $g(n) \propto n^{\alpha-1}$ . Sans régularité, des solutions pathologiques peuvent exister mais ne sont pas physiquement pertinentes dans le contexte thermodynamique.

## Annexe E

# Polarisabilité dynamique et potentiel dipolaire optique

Cette annexe constitue une réécriture et une adaptation pédagogique de l'article [LSR13] que j'ai étudié pour la mise en place du piégeage dipolaire.

Dans l'approximation dipolaire et pour un champ électrique classique quasi-monochromatique

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E} \vec{u} e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (\text{E.1})$$

où  $\mathcal{E}$  est l'amplitude complexe et  $\vec{u}$  le vecteur de polarisation unitaire. En explicitant l'oscillation temporelle, on a :

$$V^E = -\vec{D} \cdot \vec{E}_\perp = -\frac{1}{2} \mathcal{E} \vec{u} \cdot \vec{D} e^{-i\omega t} - \frac{1}{2} \mathcal{E}^* \vec{u}^* \cdot \vec{D} e^{+i\omega t}.$$

Ce terme d'interaction induit, par la théorie des perturbations du second ordre (pour un champ loin de toute résonance atomique), un déplacement de niveau énergétique de l'état non perturbé  $|g\rangle$ . En notant  $\hbar\omega_{g \rightarrow e} = \hbar\omega_e - \hbar\omega_g$  la différence d'énergie angulaire entre états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ , on obtient :

$$\delta E_g = -\frac{|\mathcal{E}|^2}{4\hbar} \sum_e \Re \left[ \frac{|\langle e | \vec{u} \cdot \vec{D} | g \rangle|^2}{\omega_{g \rightarrow e} - \omega - i\gamma_{ge}/2} + \frac{|\langle g | \vec{u} \cdot \vec{D} | e \rangle|^2}{\omega_{g \rightarrow e} + \omega + i\gamma_{ge}/2} \right], \quad (\text{E.2})$$

où  $\gamma_{ge} = \gamma_g + \gamma_e$  est la largeur naturelle de transition. Ce décalage peut être vu comme l'espérance d'un opérateur effectif  $V^{EE}$  agissant sur  $|g\rangle$ . On montre que cet opérateur s'écrit :

$$V^{EE} = \frac{|\mathcal{E}|^2}{4\hbar} \left[ (\vec{u}^* \cdot \vec{D}) \mathcal{R}_+ (\vec{u} \cdot \vec{D}) + (\vec{u} \cdot \vec{D}) \mathcal{R}_- (\vec{u}^* \cdot \vec{D}) \right],$$

avec

$$\mathcal{R}_\pm = \sum_e \Re \left[ \frac{1}{\omega_{g \rightarrow e} \mp \omega \mp i\gamma_{ge}/2} \right] |e\rangle\langle e|.$$

Pour un champ très loin résonant, les parties imaginaires sont négligées, et cela conduit usuellement à écrire le potentiel dipolaire moyen sous la forme scalaire :

$$U_{\text{dip}} = -\frac{1}{4} \alpha(\omega) |\mathcal{E}|^2,$$

où  $\alpha(\omega)$  est la polarisabilité dynamique de l'état atomique concerné.

### E.0.0.1 Polarisabilité scalaire, vectorielle et tensorielle dans les états fins

Pour un atome de moment cinétique total  $J$ , le décalage de niveau  $V^{EE}$  se décompose en composantes irréductibles suivant les règles du formalisme des tenseurs sphériques. On définit les *polarisabilités dynamiques réduites*  $\alpha_{nJ}^{(K)}$  pour  $K = 0, 1, 2$  correspondant respectivement aux composantes scalaire, vectorielle et tensorielle.

$$\alpha_{nJ}^{(K)}(\omega) = (-1)^{K+J+1} \sqrt{2K+1} \sum_{n'J'} (-1)^{J'} \begin{Bmatrix} 1 & K & 1 \\ J & J' & J \end{Bmatrix} |\langle n'J' | |\vec{D}| |nJ \rangle|^2 \mathcal{R}_{nJn'J'}^{(K)}(\omega)$$

avec et  $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix}$  sont les symboles de Wigner 6-j. et  $C_{nJn'J'K}(\omega)$  un fonction paramétré par les niveaux  $|nJ\rangle$  et  $|n'J'\rangle$  et de  $K$

$$\mathcal{R}_{nJn'J'}^{(K)}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \Re \left[ \frac{1}{\omega_{n'J'nJ} - \omega - i\gamma_{n'J'nJ}/2} + \frac{(-1)^K}{\omega_{n'J'nJ} + \omega + i\gamma_{n'J'nJ}/2} \right],$$

où  $\omega_{n'J'nJ} = \omega_{n'J'} - \omega_{nJ}$  est la différence de fréquences angulaires entre les niveaux  $|n'J'\rangle$  et  $|nJ\rangle$ ,  $\gamma_{n'J'nJ} = \gamma_{n'J'} + \gamma_{nJ}$  est la largeur spectrale totale de la transition.

L'opérateur  $V^{EE}$  prend alors la forme :

$$V_{nJ}^{EE} = -\frac{1}{4} |\mathcal{E}|^2 \left[ \alpha_{nJ}^s - i \alpha_{nJ}^v \frac{(\vec{u}^* \times \vec{u}) \cdot \vec{J}}{2J} + \alpha_{nJ}^T \frac{3[(\vec{u}^* \cdot \vec{J})(\vec{u} \cdot \vec{J}) + (\vec{u} \cdot \vec{J})(\vec{u}^* \cdot \vec{J})] - 2\vec{J}^2}{2J(2J-1)} \right].$$

Les coefficients  $\alpha_{nJ}^s, \alpha_{nJ}^v, \alpha_{nJ}^T$  sont reliés aux polarisabilités réduites par :

$$\alpha_{nJ}^s = \frac{1}{\sqrt{3(2J+1)}} \alpha_{nJ}^{(0)}, \quad \alpha_{nJ}^v = -\sqrt{\frac{2J}{(J+1)(2J+1)}} \alpha_{nJ}^{(1)}, \quad \alpha_{nJ}^T = -\sqrt{\frac{2J(2J-1)}{3(J+1)(2J+1)(2J+3)}} \alpha_{nJ}^{(2)}.$$

Dans cette décomposition, la contribution scalaire ( $K = 0$ ) est indépendante de l'orientation interne de l'atome, la contribution vectorielle ( $K = 1$ ) intervient sous la forme du pseudo-produit  $(\vec{u}^* \times \vec{u}) \cdot \vec{J}$ , et la contribution tensorielle ( $K = 2$ ) dépend de la quadratique  $(\vec{u} \cdot \vec{J})^2$ . Ces différentes composantes se révèlent naturellement lorsque l'on utilise le formalisme des opérateurs tensoriels irréductibles pour décrire le couplage entre le champ et le moment angulaire électronique.

### E.0.0.2 Interprétation physique

- Terme scalaire** :  $\alpha^s$  génère un décalage isotrope du niveau atomique qui est indépendant du sous-niveau de  $J$  ou  $F$ . Ce décalage est la composante « classique » de l'effet Stark AC, proportionnelle à l'intensité lumineuse, et n'entraîne pas de structure fine dépendant de la polarisation de la lumière.
- Terme vectoriel (Zeeman optique)** :  $\alpha^v$  agit comme un champ magnétique fictif (optical Zeeman effect) le long de  $\vec{B}_{\text{fict}} \propto i(\vec{E}^* \times \vec{E})$ . En effet, l'opérateur  $i(\vec{u}^* \times \vec{u}) \cdot \vec{J}$  se comporte comme  $\vec{J} \cdot \vec{B}_{\text{fict}}$ . Ainsi la polarisation circulaire du champ ( $i[\vec{u}^* \times \vec{u}] \neq 0$ ) donne un décalage dépendant de l'orientation de  $\vec{J}$  (analogue à un effet Zeeman), alors que pour une lumière linéaire ( $\vec{u}$  réel) ce produit vectoriel s'annule et ce terme vectoriel disparaît. On parle souvent de champ fictif parce que, en convention, le terme vectoriel du Hamiltonien d'interaction s'écrit formellement  $\mu_{BgJ} (\vec{J} \cdot \vec{B}_{\text{fict}})$ .
- Terme tensoriel** :  $\alpha^T$  introduit une anisotropie du potentiel selon l'orientation du moment angulaire par rapport à la polarisation du champ. Mathématiquement, le facteur  $\frac{3[(\vec{u}^* \cdot \vec{J})(\vec{u} \cdot \vec{J}) + (\vec{u} \cdot \vec{J})(\vec{u}^* \cdot \vec{J})] - 2\vec{J}^2}{2J(2J-1)}$  sur la direction de polarisation. Il ne contribue que pour les états de spin total  $J \geq 1$ , car la symétrie quantique annule le 6-j associé dès que  $J = 1/2$ . Ce terme entraîne par exemple une tension ou une compression différentielle des sous-niveaux magnétiques selon leur moment d'alignement avec le champ (effet d'alignement de type quadrupolaire).

### E.0.0.3 Cas des atomes alcalins (ex. Rubidium)

Les atomes alcalins (comme le Rb) ont un état fondamental  $nS_{1/2}$  de moment total  $J = 1/2$ . D'après les formules ci-dessus, pour  $J = 1/2$  la composante tensorielle s'annule exactement (le symbole de Wigner 6-j associé est nul). Par conséquent, dans l'état fondamental du rubidium seul le terme scalaire et, en cas de polarisation non linéaire du champ, le terme vectoriel subsistent. Pour un champ linéaire, seul  $\alpha^s$  demeure. (à enlever) Quand on intègre l'hyperfine (moment nucléaire  $I$  de  $^{87}\text{Rb}$  est  $3/2$ ), on passe aux états  $|F, M_F\rangle$  ( $F = 1, 2$ ); l'opérateur de Stark effectif garde alors la forme analogue en remplaçant  $\vec{J}$  par  $\vec{F}$ , et des contributions fines peuvent apparaître (un terme de type tensoriel « relatif » entre sous-niveaux  $F > 1/2$ ). Néanmoins, dans la plupart des traitements d'optique quantique on évoque simplement que pour l'état fondamental  $J = 1/2$  du rubidium la polarisabilité tensorielle est nulle et que le terme vectoriel ne survient que pour une lumière circulaire. Les équations ci-dessus peuvent être utilisées pour calculer les décalages de Zeeman optiques expérimentaux ou les potentiels de piégeage par champ lumineux (pièges dipolaires). Par exemple, on trouve souvent l'approximation  $U_{\text{dip}}(r) = -\frac{1}{4}\alpha(\omega)|\mathcal{E}(r)|^2$  pour les atomes oscillant lentement, où  $\alpha$  est la polarisabilité scalaire effectif (somme des contributions dipolaires). L'analyse plus détaillée avec les termes vectoriels et tensoriels explique des observations telles que les dépendances en polarisation et en niveau hyperfin (par exemple la structure Zeeman optique entre sous-niveaux  $F$ ) dans les expériences sur le rubidium.



## Annexe F

# Pourquoi le terme tensoriel disparaît pour $J = \frac{1}{2}$

Le terme tensoriel du potentiel dipolaire s'exprime formellement comme la composante d'ordre 2 d'une combinaison de produits d'opérateurs angulaires  $\{J_i J_j\}$ . On peut le voir comme un tenseur sphérique de rang  $k = 2$ , noté  $T^{(2)}$ . Deux arguments simples montrent que cette contribution est nulle pour un état à  $J = \frac{1}{2}$ .

**Argument par règles de sélection (Wigner–Eckart).** Le théorème de Wigner–Eckart et les règles de couplage angulaire imposent des contraintes sur les éléments de matrice réduits d'un tenseur sphérique  $T^{(k)}$ . En particulier, pour des états  $|J, m\rangle$ , l'élément de matrice réduit  $\langle J|T^{(k)}|J\rangle$  peut être non nul seulement si la condition triangulaire est satisfaite :

$$|J - J| \leq k \leq J + J \implies 0 \leq k \leq 2J.$$

Autrement dit, le rang  $k$  du tenseur ne peut dépasser  $2J$ . Pour  $J = \frac{1}{2}$  on a  $2J = 1$  : les tenseurs de rang  $k \geq 2$  (dont  $k = 2$ ) sont donc interdits — leur élément de matrice réduit s'annule. Par conséquent tous les composantes du tenseur d'ordre 2 ont des éléments de matrice nuls entre états de  $J = \frac{1}{2}$ , et le terme tensoriel ne contribue pas.

**Intuition physique.** Le terme tensoriel représente une interaction quadrupolaire : il mesure l'anisotropie de la distribution de charge (ou de la densité électronique) de rang 2 (quadrupôle) et la façon dont cette anisotropie couple à la polarisation de la lumière. Un système ayant un moment cinétique minimal  $J = \frac{1}{2}$  ne peut porter qu'un dipôle (rang 1) mais pas de quadrupôle indépendant ; il est donc incapable de présenter une réponse tensorielle.

**Justification par calcul élémentaire (esquisse).** Pour rendre cela plus concret, on peut écrire les produits symétrisés d'opérateurs de spin pour  $J = \frac{1}{2}$  en termes des matrices de Pauli  $\sigma_i$  :

$$J_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \quad J_i J_j = \frac{\hbar^2}{4} \sigma_i \sigma_j.$$

Or les matrices de Pauli satisfont  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ , si bien que toute combinaison symétrique et sans trace construite à partir de  $\sigma_i \sigma_j$  se réduit à une combinaison de l'identité et d'opérateurs de rang 1 (proportionnels à  $\sigma_k$ ). Il n'existe donc pas de composante indépendante de rang 2 dans l'algèbre des opérateurs sur l'espace à deux dimensions. En particulier, la combinaison traceless/quadrupolaire

$$3[(\vec{u}^* \cdot \vec{J})(\vec{u} \cdot \vec{J}) + (\vec{u} \cdot \vec{J})(\vec{u}^* \cdot \vec{J})] - 2\vec{J}^2$$

s'annule (ou se réduit à une combinaison triviale proportionnelle à l'identité) lorsqu'elle est restreinte à l'espace  $J = \frac{1}{2}$ . Ceci confirme algébriquement l'argument angulaire précédent.

**Remarque sur la forme normale de la fraction.** La formule souvent écrite

$$\frac{3[(\vec{u}^* \cdot \vec{J})(\vec{u} \cdot \vec{J}) + (\vec{u} \cdot \vec{J})(\vec{u}^* \cdot \vec{J})] - 2\vec{J}^2}{2J(2J-1)}$$

est valable pour  $J \geq 1$ . Pour  $J = \frac{1}{2}$  le dénominateur  $2J(2J - 1)$  s'annule formellement; ceci indique simplement que l'écriture fractionnaire n'est pas définie là où le terme tensoriel n'a pas de sens physique. Le bon énoncé est : « pour  $J < 1$  (en particulier  $J = \frac{1}{2}$ ), la composante tensorielle est identiquement nulle ».

**Conclusion.** Pour les atomes alcalins dans leur état fondamental (configuration  $nS_{1/2}$ , donc  $J = \frac{1}{2}$ ), la contribution tensorielle du potentiel dipolaire est strictement nulle. On conserve alors uniquement les termes scalaire et, éventuellement, vectoriel (ce dernier ne dépendant que de la polarisation elliptique/circulaire).

# Bibliographie

- [Rie60] Bernhard RIEMANN. “über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite”. In : *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen* 8 (1860), p. 43-66. URL : <http://eudml.org/doc/135717>.
- [Eis48] L. EISENBUD. “The formal properties of nuclear collisions”. Thèse de doct. Princeton U., 1948.
- [Wig55] Eugene P. WIGNER. “Lower Limit for the Energy Derivative of the Scattering Phase Shift”. In : *Phys. Rev.* 98 (1 avr. 1955), p. 145-147. doi : [10.1103/PhysRev.98.145](https://doi.org/10.1103/PhysRev.98.145). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.98.145>.
- [Gir60] M. GIRARDEAU. “Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension”. In : *Journal of Mathematical Physics* 1.6 (nov. 1960), p. 516-523. ISSN : 0022-2488. doi : [10.1063/1.1703687](https://doi.org/10.1063/1.1703687). eprint : [https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/1/6/516/19055341/516\\_1\\_online.pdf](https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/1/6/516/19055341/516_1_online.pdf). URL : <https://doi.org/10.1063/1.1703687>.
- [Lie63] Elliott H. LIEB. “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum”. In : *Phys. Rev.* 130 (4 mai 1963), p. 1616-1624. doi : [10.1103/PhysRev.130.1616](https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.1616). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.1616>.
- [LL63] Elliott H. LIEB et Werner LINIGER. “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State”. In : *Phys. Rev.* 130 (4 mai 1963), p. 1605-1616. doi : [10.1103/PhysRev.130.1605](https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.1605). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.1605>.
- [YY69] C. N. YANG et C. P. YANG. “Thermodynamics of a One-Dimensional System of Bosons with Repulsive Delta-Function Interaction”. In : *Journal of Mathematical Physics* 10.7 (juill. 1969), p. 1115-1122. ISSN : 0022-2488. doi : [10.1063/1.1664947](https://doi.org/10.1063/1.1664947). eprint : [https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/10/7/1115/19101094/1115\\_1\\_online.pdf](https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/10/7/1115/19101094/1115_1_online.pdf). URL : <https://doi.org/10.1063/1.1664947>.
- [Per76] J. PERCUS. “Equilibrium state of a classical fluid of hard rods in an external field”. In : *Journal of Statistical Physics* 15 (1976), p. 505-511.
- [ZZ79] Alexander B ZAMOLODCHIKOV et Alexey B ZAMOLODCHIKOV. “Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models”. In : *Annals of Physics* 120.2 (1979), p. 253-291. ISSN : 0003-4916. doi : [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(79\)90391-9](https://doi.org/10.1016/0003-4916(79)90391-9). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491679903919>.
- [IT80] Masakatsu ISHIKAWA et Hajime TAKAYAMA. “Solitons in a One-Dimensional Bose System with the Repulsive Delta-Function Interaction”. In : *Journal of the Physical Society of Japan* 49 (1980), p. 1242-1246. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122386591>.
- [Fey82] Richard P. FEYNMAN. “Simulating physics with computers”. In : *International Journal of Theoretical Physics* 21.6-7 (juin 1982), p. 467-488. doi : [10.1007/BF02650179](https://doi.org/10.1007/BF02650179).
- [BDS83] C. BOLDRIGHINI, R. L. DOBRUSHIN et Y. M. SUKHOV. “One-dimensional hard rod caricature of hydrodynamics”. In : *Journal of Statistical Physics* 31 (1983), p. 577-616.
- [CDG88] Claude COHEN-TANNOUDJI, Jacques DUPONT-ROC et Gilbert GRYNBERG. *Processus d’interaction entre photons et atomes*. Savoirs actuels. InterEditions / Éditions du CNRS, 1988.
- [KIB93] V. KOREPIN, A. IZERGIN et N. BOGOLIUBOV. “Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions”. In : *Journal of Soviet Mathematics* 31 (fév. 1993). doi : [10.1007/BF02107233](https://doi.org/10.1007/BF02107233).

- [KSS96] Yu. KAGAN, E. L. SURKOV et G. V. SHLYAPNIKOV. “Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential”. In : *Phys. Rev. A* 54 (3 sept. 1996), R1753-R1756. doi : [10.1103/PhysRevA.54.R1753](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.R1753). url : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.54.R1753>.
- [For+98] J. FORTAGH et al. “Miniaturized Wire Trap for Neutral Atoms”. In : *Phys. Rev. Lett.* 81 (24 déc. 1998), p. 5310-5313. doi : [10.1103/PhysRevLett.81.5310](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5310). url : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.5310>.
- [Str98] S. STRINGARI. “Dynamics of Bose-Einstein condensed gases in highly deformed traps”. In : *Phys. Rev. A* 58 (3 sept. 1998), p. 2385-2388. doi : [10.1103/PhysRevA.58.2385](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.2385). url : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.2385>.
- [DCS99] Johannes DENSCHLAG, Donatella CASSETTARI et Jörg SCHMIEDMAYER. “Guiding Neutral Atoms with a Wire”. In : *Phys. Rev. Lett.* 82 (10 mars 1999), p. 2014-2017. doi : [10.1103/PhysRevLett.82.2014](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.2014). url : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.2014>.
- [GWO99] Rudolf GRIMM, Matthias WEIDEMÜLLER et Yurii B. OVCHINNIKOV. *Optical dipole traps for neutral atoms*. 1999. arXiv : [physics/9902072 \[physics.atom-ph\]](https://arxiv.org/abs/physics/9902072). url : <https://arxiv.org/abs/physics/9902072>.
- [RHH99] J. REICHEL, W. HÄNSEL et T. W. HÄNSCH. “Atomic Micromanipulation with Magnetic Surface Traps”. In : *Phys. Rev. Lett.* 83 (17 oct. 1999), p. 3398-3401. doi : [10.1103/PhysRevLett.83.3398](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3398). url : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.3398>.
- [Fol+00] Ron FOLMAN et al. “Controlling Cold Atoms using Nanofabricated Surfaces : Atom Chips”. In : *Phys. Rev. Lett.* 84 (20 mai 2000), p. 4749-4752. doi : [10.1103/PhysRevLett.84.4749](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4749). url : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.4749>.
- [Hän+01] Wolfgang HÄNSEL et al. “Bose-Einstein Condensation on a Microelectronic Chip”. In : *Nature* 413 (nov. 2001), p. 498-501. doi : [10.1038/35097032](https://doi.org/10.1038/35097032).
- [Ott+01] H. OTT et al. “Bose-Einstein Condensation in a Surface Microtrap”. In : *Phys. Rev. Lett.* 87 (23 nov. 2001), p. 230401. doi : [10.1103/PhysRevLett.87.230401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.230401). url : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.230401>.
- [Sch01] Nicolas SCHLOSSER. “Étude et réalisation de micro-pièges dipolaires optiques pour atomes neutres”. Thèse de doctorat. Université Paris XI, 2001. url : [http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/11/95/index\\_fr.html](http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/11/95/index_fr.html).
- [Kra+02] S KRAFT et al. “Anomalous longitudinal magnetic field near the surface of copper conductors”. In : *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* 35.21 (oct. 2002), p. L469. doi : [10.1088/0953-4075/35/21/102](https://doi.org/10.1088/0953-4075/35/21/102). url : <https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/35/21/102>.
- [Ste02] D. A. STECK. *Rubidium 87 D Line Data*. <http://george.ph.utexas.edu/~dsteck/alkalidata/rubidium87numbers.pdf>. Revision 1.6. 2002.
- [Aus03] Christine AUSSIBAL. “Réalisation d’un condensat de Bose-Einstein sur une microstructure”. Thèse de doct. Université Paris Sud - Paris XI, nov. 2003. url : <https://pastel.hal.science/tel-00004429>.
- [BBT03] Olivier BABELON, Denis BERNARD et Michel TALON. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Online publication date : August 2009. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2003. ISBN : 9780511535024. doi : <https://doi.org/10.1017/CBO9780511535024>.
- [FLC03] J. N. FUCHS, X. LEYRONAS et R. COMBESCOT. “Hydrodynamic modes of a one-dimensional trapped Bose gas”. In : *Phys. Rev. A* 68 (4 oct. 2003), p. 043610. doi : [10.1103/PhysRevA.68.043610](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.043610). url : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.043610>.
- [Mor+03] Henning MORITZ et al. “Exciting Collective Oscillations in a Trapped 1D Gas”. In : *Phys. Rev. Lett.* 91 (25 déc. 2003), p. 250402. doi : [10.1103/PhysRevLett.91.250402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.250402). url : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.250402>.

- [Est+04] J. ESTÈVE et al. “Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms”. In : *Phys. Rev. A* 70 (4 oct. 2004), p. 043629. doi : [10.1103/PhysRevA.70.043629](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.043629). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.043629>.
- [KWW04] Toshiya KINOSHITA, Trevor WENGER et David S. WEISS. “Observation of a one-dimensional Tonks-Girardeau gas”. In : *Science* 305.5687 (2004), p. 1125-1128. doi : [10.1126/science.1100700](https://doi.org/10.1126/science.1100700). URL : <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1100700>.
- [Par+04] Belén PAREDES et al. “Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice”. In : *Nature* 429.6989 (2004), p. 277-281. doi : [10.1038/nature02530](https://doi.org/10.1038/nature02530). URL : <https://hal.science/hal-00002239>.
- [Tol+04] B. Laburthe TOLRA et al. “Observation of Reduced Three-Body Recombination in a Correlated 1D Degenerate Bose Gas”. In : *Phys. Rev. Lett.* 92 (19 mai 2004), p. 190401. doi : [10.1103/PhysRevLett.92.190401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.190401). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.190401>.
- [BI05] Immanuel BLOCH et IMMANUEL. “Ultracold quantum gases in optical lattices”. In : *Nature Physics* 1 (oct. 2005), p. 23-30. doi : [10.1038/nphys138](https://doi.org/10.1038/nphys138).
- [Mor+05] Henning MORITZ et al. “Confinement induced molecules in a 1D Fermi gas”. In : *Phys. Rev. Lett.* 94 (juin 2005), p. 210401. doi : [10.1103/PhysRevLett.94.210401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.210401). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.210401>.
- [Sch+05] T. SCHUMM et al. “Matter-wave interferometry in a double well on an atom chip”. In : *Nature Phys.* 1.1 (2005), p. 57-62. doi : [10.1038/nphys125](https://doi.org/10.1038/nphys125).
- [BS06] D. M. BRINK et C. V. SUKUMAR. “Majorana spin-flip transitions in a magnetic trap”. In : *Phys. Rev. A* 74 (3 sept. 2006), p. 035401. doi : [10.1103/PhysRevA.74.035401](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.035401). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.74.035401>.
- [Dar06] Benoît DARQUIÉ. “Manipulation d’atomes dans des pièges dipolaires microscopiques et émission contrôlée de photons par un atome unique”. Submitted on 14 Feb 2006. Thèse de doctorat. Physique Atomique [physics.atom-ph], 2006. URL : <https://pastel.hal.science/tel-00011604v1>.
- [GLM06] Vittorio GIOVANNETTI, Seth LLOYD et Lorenzo MACCONE. “Quantum Metrology”. In : *Phys. Rev. Lett.* 96 (1 jan. 2006), p. 010401. doi : [10.1103/PhysRevLett.96.010401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.010401). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.010401>.
- [KWW06] Toshiya KINOSHITA, Trevor WENGER et David Weiss. “A quantum Newton’s cradle”. In : *Nature* 440 (mai 2006), p. 900-3. doi : [10.1038/nature04693](https://doi.org/10.1038/nature04693).
- [Tre+06] J.-B. TREBBIA et al. “Experimental Evidence for the Breakdown of a Hartree-Fock Approach in a Weakly Interacting Bose Gas”. In : *Phys. Rev. Lett.* 97 (25 déc. 2006), p. 250403. doi : [10.1103/PhysRevLett.97.250403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.250403). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.250403>.
- [Rig+07] Marcos RIGOL et al. “Relaxation in a completely integrable many-body quantum system : an ab initio study of the dynamics of the highly excited states of 1D lattice hard-core bosons”. In : *Physical review letters* 98.5 (2007), p. 050405.
- [Tre+07] J.-B. TREBBIA et al. “Roughness Suppression via Rapid Current Modulation on an Atom Chip”. In : *Phys. Rev. Lett.* 98 (26 juin 2007), p. 263201. doi : [10.1103/PhysRevLett.98.263201](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.263201). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.263201>.
- [Ame+08] A. H. van AMERONGEN et al. “Yang-Yang thermodynamics on an atom chip”. In : *Phys. Rev. Lett.* 100 (mars 2008), p. 090402. doi : [10.1103/PhysRevLett.100.090402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.090402). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.090402>.
- [BDZ08] Immanuel BLOCH, Jean DALIBARD et Wilhelm ZWERGER. “Many-body physics with ultracold gases”. In : *Rev. Mod. Phys.* 80 (3 juill. 2008), p. 885-964. doi : [10.1103/RevModPhys.80.885](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.885). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.885>.
- [Hal+09] Elmar HALLER et al. “Realization of an excited, strongly correlated quantum gas phase”. In : *Science* 325.5945 (sept. 2009), p. 1224-1227. ISSN : 1095-9203. doi : [10.1126/science.1175850](https://doi.org/10.1126/science.1175850). URL : <http://dx.doi.org/10.1126/science.1175850>.

- [Lia+10] Yean-an LIAO et al. “Spin-imbalance in a one-dimensional Fermi gas”. In : *Nature* 467.7315 (sept. 2010), p. 567-569. ISSN : 1476-4687. DOI : [10.1038/nature09393](https://doi.org/10.1038/nature09393). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nature09393>.
- [NC10] Michael A. NIELSEN et Isaac L. CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information : 10th Anniversary Edition*. Cambridge : Cambridge University Press, 2010. ISBN : 9781107002173.
- [BDW11] Isabelle BOUCHOULE, N. J. van DRUTEN et C. I. WESTBROOK. “Atom Chips and One-Dimensional Bose Gases”. In : *Atom Chips*. John Wiley et Sons, Ltd, 2011. Chap. 11, p. 331-363. ISBN : 9783527633357. DOI : [10.1002/9783527633357.ch11](https://doi.org/10.1002/9783527633357.ch11). URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9783527633357.ch11>.
- [CCR11] Amy C. CASSIDY, Charles W. CLARK et Marcos RIGOL. “Generalized Thermalization in an Integrable Lattice System”. In : *Phys. Rev. Lett.* 106 (14 avr. 2011), p. 140405. DOI : [10.1103/PhysRevLett.106.140405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.140405). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.140405>.
- [CM11] Jean-Sébastien CAUX et Jorn MOSSEL. “Remarks on the notion of quantum integrability”. In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2011.02 (fév. 2011), P02023. DOI : [10.1088/1742-5468/2011/02/P02023](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2011/02/P02023). URL : <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2011/02/P02023>.
- [Jac+11] Thibaut JACQMIN et al. “Sub-Poissonian fluctuations in a 1D Bose gas : From the quantum quasi-condensate to the strongly interacting regime”. In : *Phys. Rev. Lett.* 106 (juin 2011), p. 230405. DOI : [10.1103/PhysRevLett.106.230405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.230405). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.230405>.
- [CK12] Jean-Sébastien CAUX et Robert M. KONIK. “Constructing the Generalized Gibbs Ensemble after a Quantum Quench”. In : *Phys. Rev. Lett.* 109 (17 oct. 2012), p. 175301. DOI : [10.1103/PhysRevLett.109.175301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.175301). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.175301>.
- [GC12] Michel GAUDIN et J.S. CAUX. “The Bethe Wavefunction”. In : *The Bethe Wavefunction* (jan. 2012), p. 1-322. DOI : [10.1017/CBO9781107053885](https://doi.org/10.1017/CBO9781107053885).
- [Jac12] Thibaut JACQMIN. “Mesures de corrélations dans un gaz de bosons unidimensionnel sur puce”. 2012PA112261. Thèse de doct. 2012. URL : <http://www.theses.fr/2012PA112261/document>.
- [Bre13] Alberto BRESSAN. “Hyperbolic Conservation Laws An Illustrated Tutorial”. In : *Lecture Notes in Mathematics* 2062 (jan. 2013). DOI : [10.1007/978-3-642-32160-3-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-32160-3-2).
- [GBL13] Xi-Wen GUAN, Murray T. BATCHELOR et Chaohong LEE. “Fermi gases in one dimension : From Bethe ansatz to experiments”. In : *Rev. Mod. Phys.* 85 (nov. 2013), p. 1633-1691. DOI : [10.1103/RevModPhys.85.1633](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.1633). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.85.1633>.
- [LSR13] Fam LE KIEN, Philipp SCHNEEWEISS et Arno RAUSCHENBEUTEL. “Dynamical polarizability of atoms in arbitrary light fields : general theory and application to cesium”. In : *The European Physical Journal D* 67.5 (mai 2013). ISSN : 1434-6079. DOI : [10.1140/epjd/e2013-30729-x](https://doi.org/10.1140/epjd/e2013-30729-x). URL : <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2013-30729-x>.
- [BEL14] L. BONNES, F. H. L. ESSLER et A. M. LÄUCHLI. “Light-cone dynamics after quantum quenches in spin chains”. In : *Physical Review B* 90.1 (2014), p. 014309. DOI : [10.1103/PhysRevB.90.014309](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.014309). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.90.014309>.
- [Fan14] Yiyuan Bess FANG. “Equilibrium and Nonequilibrium Behaviours of 1D Bose Gases”. 2014IOTA0005. Thèse de doct. 2014. URL : <http://www.theses.fr/2014IOTA0005/document>.
- [GA14] Garry GOLDSTEIN et Natan ANDREI. *Equilibration and Generalized GGE in the Lieb Liniger gas*. 2014. arXiv : [1309.3471 \[cond-mat.quant-gas\]](https://arxiv.org/abs/1309.3471). URL : <https://arxiv.org/abs/1309.3471>.
- [Pag+14] Guido PAGANO et al. “A one-dimensional liquid of fermions with tunable spin”. In : *Nature Physics* 10.3 (fév. 2014), p. 198-201. ISSN : 1745-2481. DOI : [10.1038/nphys2878](https://doi.org/10.1038/nphys2878). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2878>.

- [Kar+15] Tomasz KARPIUK et al. “Correspondence between dark solitons and the type II excitations of the Lieb-Liniger model”. In : *Phys. Rev. A* 91 (1 jan. 2015), p. 013621. doi : [10.1103/PhysRevA.91.013621](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.013621). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.013621>.
- [Wou15] B. M. WOUTERS. “The quench action approach to out-of-equilibrium quantum integrable models”. PhD thesis. Institute for Theoretical Physics Amsterdam (ITFA), oct. 2015. URL : <https://hdl.handle.net/11245/1.486244>.
- [Ber+16] B. BERTINI et al. “Transport in out-of-equilibrium XXZ chains : Exact profiles of charges and currents”. In : *Physical Review Letters* 117.20 (2016), p. 207201. doi : [10.1103/PhysRevLett.117.207201](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.207201).
- [CDY16] O. A. CASTRO-ALVAREDO, B. DOYON et T. YOSHIMURA. “Emergent hydrodynamics in integrable quantum systems out of equilibrium”. In : *Physical Review X* 6.4 (2016), p. 041065. doi : [10.1103/PhysRevX.6.041065](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.041065).
- [Fra16] Fabio FRANCHINI. *An Introduction to Integrable Techniques for One-Dimensional Quantum Systems*. T. 940. Sept. 2016. ISBN : 9783319484860. doi : [10.1007/978-3-319-48487-7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-48487-7).
- [Joh16] Aisling JOHNSON. “One-dimensional Bose Gases on an Atom Chip : Correlations in Momentum Space and Theoretical Investigation of Loss-induced Cooling.” 2016SACL0013. Thèse de doct. 2016. URL : <http://www.theses.fr/2016SACL0013/document>.
- [NP16] Jacopo De NARDIS et Miłosz PANFIL. “Exact correlations in the Lieb-Liniger model and detailed balance out-of-equilibrium”. In : *SciPost Phys.* 1 (2016), p. 015. doi : [10.21468/SciPostPhys.1.2.015](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.1.2.015). URL : <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.1.2.015>.
- [DS17] Benjamin DOYON et Herbert SPOHN. “Drude Weight for the Lieb-Liniger Bose Gas”. In : *SciPost Physics* 3.6 (déc. 2017). ISSN : 2542-4653. doi : [10.21468/scipostphys.3.6.039](https://doi.org/10.21468/scipostphys.3.6.039). URL : <http://dx.doi.org/10.21468/SciPostPhys.3.6.039>.
- [DY17] Benjamin DOYON et Takato YOSHIMURA. “A note on generalized hydrodynamics : inhomogeneous fields and other concepts”. In : *SciPost Phys.* 2 (2017), p. 014. doi : [10.21468/SciPostPhys.2.2.014](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.2.2.014). URL : <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.2.2.014>.
- [Doy+17] Benjamin DOYON et al. “Large-Scale Description of Interacting One-Dimensional Bose Gases : Generalized Hydrodynamics Supersedes Conventional Hydrodynamics”. In : *Phys. Rev. Lett.* 119 (19 nov. 2017), p. 195301. doi : [10.1103/PhysRevLett.119.195301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.195301). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.195301>.
- [Nar+17a] Jacopo De NARDIS et al. “Probing non-thermal density fluctuations in the one-dimensional Bose gas”. In : *SciPost Phys.* 3 (2017), p. 023. doi : [10.21468/SciPostPhys.3.3.023](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.3.3.023). URL : <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.3.3.023>.
- [Nar+17b] Jacopo De NARDIS et al. “Probing non-thermal density fluctuations in the one-dimensional Bose gas”. In : *SciPost Phys.* 3 (2017), p. 023. doi : [10.21468/SciPostPhys.3.3.023](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.3.3.023). URL : <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.3.3.023>.
- [DBD18] Jacopo De NARDIS, Denis BERNARD et Benjamin DOYON. “Hydrodynamic Diffusion in Integrable Systems”. In : *Phys. Rev. Lett.* 121 (16 oct. 2018), p. 160603. doi : [10.1103/PhysRevLett.121.160603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.160603). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.160603>.
- [PK18] T. PALMAI et R. M. KONIK. “Quasilocal charges and the generalized Gibbs ensemble in the Lieb-Liniger model”. In : *Phys. Rev. E* 98 (5 nov. 2018), p. 052126. doi : [10.1103/PhysRevE.98.052126](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.052126). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.98.052126>.
- [Cau+19] Jean-Sébastien CAUX et al. “Hydrodynamics of the interacting Bose gas in the Quantum Newton Cradle setup”. In : *SciPost Phys.* 6 (2019), p. 070. doi : [10.21468/SciPostPhys.6.6.070](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.6.6.070). URL : <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.6.6.070>.
- [NBD19] Jacopo De NARDIS, Denis BERNARD et Benjamin DOYON. “Diffusion in generalized hydrodynamics and quasiparticle scattering”. In : *SciPost Phys.* 6 (2019), p. 049. doi : [10.21468/SciPostPhys.6.4.049](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.6.4.049). URL : <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.6.4.049>.

Même  
ref.

- [Sch+19] M. SCHEMMER et al. “Generalized Hydrodynamics on an Atom Chip”. In : *Phys. Rev. Lett.* 122 (9 mars 2019), p. 090601. doi : [10.1103/PhysRevLett.122.090601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.090601). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.090601>.
- [Sch19] Maximilian SCHEMMER. “Out-of-equilibrium dynamics in 1D Bose gases”. 2019SACLO002. Thèse de doct. 2019. URL : <http://www.theses.fr/2019SACLO002/document>.
- [BDD20] Isabelle BOUCHOULE, Benjamin DOYON et Jerome DUBAIL. “The effect of atom losses on the distribution of rapidities in the one-dimensional Bose gas”. In : *SciPost Phys.* 9 (2020), p. 044. doi : [10.21468/SciPostPhys.9.4.044](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.9.4.044). URL : <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.9.4.044>.
- [Doy20a] Benjamin DOYON. “Lecture notes on Generalised Hydrodynamics”. In : *SciPost Phys. Lect. Notes* (2020), p. 18. doi : [10.21468/SciPostPhysLectNotes.18](https://doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.18). URL : <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.18>.
- [Doy20b] Benjamin DOYON. “Lecture notes on Generalised Hydrodynamics”. In : *SciPost Physics Lecture Notes* 18 (2020), p. 1-138. doi : [10.21468/SciPostPhysLectNotes.18](https://doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.18). URL : <https://scipost.org/SciPostPhysLectNotes.18>.
- [BCD22] Thibault BONNEMAIN, Vincent CAUDREPLIER et Benjamin DOYON. “Hamiltonian formulation and aspects of integrability of generalised hydrodynamics”. In : *Communications in Mathematical Physics* 391.3 (2022), p. 1485-1540. doi : [10.1007/s00220-021-04228-z](https://doi.org/10.1007/s00220-021-04228-z). URL : <https://arxiv.org/pdf/2406.04924.pdf>.
- [BD22] Isabelle BOUCHOULE et Jérôme DUBAIL. “Generalized hydrodynamics in the one-dimensional Bose gas : theory and experiments”. In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2022.1 (jan. 2022), p. 014003. doi : [10.1088/1742-5468/ac3659](https://doi.org/10.1088/1742-5468/ac3659). URL : <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/ac3659>.
- [BDB23] Yasser BEZZAZ, Léa DUBOIS et Isabelle BOUCHOULE. *Rapidity distribution within the defocusing non-linear Schrödinger equation model*. 2023. arXiv : [2301.11098 \[cond-mat.quant-gas\]](https://arxiv.org/abs/2301.11098). URL : <https://arxiv.org/abs/2301.11098>.
- [Ess23] Fabian H.L. ESSLER. “A short introduction to Generalized Hydrodynamics”. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 631 (2023). Lecture Notes of the 15th International Summer School of Fundamental Problems in Statistical Physics, p. 127572. issn : 0378-4371. doi : <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.127572>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437122003971>.
- [KK23] Matthew L KERR et Karen V KHERUNTSYAN. “The theory of generalised hydrodynamics for the one-dimensional Bose gas”. In : *AAPPS Bulletin* 33.1 (2023), p. 25.
- [Dub+24] L. DUBOIS et al. “Probing the Local Rapidity Distribution of a One-Dimensional Bose Gas”. In : *Phys. Rev. Lett.* 133 (11 sept. 2024), p. 113402. doi : [10.1103/PhysRevLett.133.113402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.133.113402). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.133.113402>.
- [Dub24] Léa DUBOIS. “Dynamique hors d'équilibre d'un gaz de Bosons unidimensionnel étudiée via la mesure spatialement résolue de la distribution des quasiparticules”. 2024UPASP066. Thèse de doct. 2024. URL : <http://www.theses.fr/2024UPASP066/document>.
- [Hüb+24] Friedrich HÜBNER et al. *Diffusive hydrodynamics from long-range correlations*. 2024. arXiv : [2408.04502 \[cond-mat.stat-mech\]](https://arxiv.org/abs/2408.04502). URL : <https://arxiv.org/abs/2408.04502>.
- [Dub+25] L. DUBOIS et al. “Experimental Investigation of a Bipartite Quench in a 1D Bose gas”. Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Saclay; CESQ and ISIS (UMR 7006), University of Strasbourg and CNRS. Mai 2025. URL : <https://arxiv.org/pdf/2505.05839.pdf>.

**Titre :** Étude de la dynamique hors équilibre des gaz de Bosons unidimensionnels

**Mots clés :** Quantique - Intégrabilité - Unidimensionnel - Boson - Dynamique

**Résumé :** Cette thèse porte sur l'étude expérimentale et théorique des gaz quantiques unidimensionnels hors équilibre, réalisée avec des atomes ultra-froids de rubidium 87 piégés sur une puce atomique. Ce dispositif permet un confinement transverse fort et un contrôle longitudinal précis, ouvrant la voie à l'exploration de situations exotiques comme l'analogie quantique du pendule de Newton.

Dans ce régime, les interactions sont décrites par le modèle intégrable de Lieb-Liniger, résolu par la méthode de Bethe Ansatz. Les systèmes ainsi obtenus ne se thermalisent pas selon Gibbs, mais via l'ensemble généralisé de Gibbs (GGE). J'ai initié un travail théorique sur le calcul des fluctuations d'observables, nécessaire pour tester cette description, sans toutefois mener de mesures expérimentales correspondantes.

L'hydrodynamique généralisée (GHD) com-

plète le GGE en décrivant la dynamique à grande échelle. Dans ce cadre, nous avons étudié des dynamiques de type « problème de Riemann », et développé expérimentalement un dispositif de micro-miroirs (DMD) pour façonner les potentiels et sonder localement la distribution de rapidité, ouvrant la voie à des situations hors équilibre contrôlées.

Enfin, nous avons exploré des alternatives au confinement magnétique sur puce, en particulier la mise en place d'un piège dipolaire optique offrant une flexibilité accrue dans l'ingénierie de potentiels longitudinaux.

En résumé, cette thèse combine avancées expérimentales et théoriques sur la préparation et la manipulation de gaz bosoniques intégrables, la mise en œuvre d'outils de mesure locaux, et l'articulation avec les cadres modernes de relaxation et de dynamique (GGE et GHD).

**Title :** Study of the out-of-equilibrium dynamics of one-dimensional Bose gases

**Keywords :** Quantum – Integrability – One-dimensional systems – Bosons – Dynamics

**Abstract :** This thesis focuses on the experimental and theoretical study of one-dimensional quantum gases out of equilibrium, using ultra-cold rubidium-87 atoms trapped on an atom chip. This setup provides strong transverse confinement and precise longitudinal control, enabling the exploration of exotic situations such as the quantum analogue of Newton's cradle.

In this regime, interactions are described by the integrable Lieb-Liniger model, solvable by the Bethe Ansatz method. Such systems do not thermalize according to the standard Gibbs ensemble, but rather via the Generalized Gibbs Ensemble (GGE). I initiated theoretical work on the calculation of observable fluctuations, which are necessary to test this description, although no corresponding experimental measurements were carried out during this thesis.

Generalized Hydrodynamics (GHD) complements the GGE by describing the large-scale

dynamics of integrable gases. In this framework, we investigated dynamics of the “quantum Riemann problem” type, and developed an experimental device based on a Digital Micro-mirror Device (DMD) to shape potentials and locally probe the rapidity distribution, paving the way for controlled out-of-equilibrium configurations.

Finally, we explored alternatives to chip-based magnetic confinement, in particular the implementation of an optical dipole trap providing increased flexibility in engineering longitudinal potentials.

In summary, this thesis combines experimental and theoretical advances in the preparation and manipulation of integrable bosonic gases, the development of novel local probing tools, and the connection to modern theoretical frameworks for relaxation and dynamics (GGE and GHD).

