

## Annexe F

# Pourquoi le terme tensoriel disparaît pour $J = \frac{1}{2}$

Le terme tensoriel du potentiel dipolaire s'exprime formellement comme la composante d'ordre 2 d'une combinaison de produits d'opérateurs angulaires  $\{J_i J_j\}$ . On peut le voir comme un tenseur sphérique de rang  $k = 2$ , noté  $T^{(2)}$ . Deux arguments simples montrent que cette contribution est nulle pour un état à  $J = \frac{1}{2}$ .

**Argument par règles de sélection (Wigner-Eckart).** Le théorème de Wigner-Eckart et les règles de couplage angulaire imposent des contraintes sur les éléments de matrice réduits d'un tenseur sphérique  $T^{(k)}$ . En particulier, pour des états  $|J, m\rangle$ , l'élément de matrice réduit  $\langle J || T^{(k)} || J \rangle$  peut être non nul seulement si la condition triangulaire est satisfaite :

$$|J - J| \leq k \leq J + J \implies 0 \leq k \leq 2J.$$

Autrement dit, le rang  $k$  du tenseur ne peut dépasser  $2J$ . Pour  $J = \frac{1}{2}$  on a  $2J = 1$  : les tenseurs de rang  $k \geq 2$  (dont  $k = 2$ ) sont donc interdits — leur élément de matrice réduit s'annule. Par conséquent tous les composants du tenseur d'ordre 2 ont des éléments de matrice nuls entre états de  $J = \frac{1}{2}$ , et le terme tensoriel ne contribue pas.

**Intuition physique.** Le terme tensoriel représente une interaction quadrupolaire : il mesure l'anisotropie de la distribution de charge (ou de la densité électronique) de rang 2 (quadrupôle) et la façon dont cette anisotropie couple à la polarisation de la lumière. Un système ayant un moment cinétique minimal  $J = \frac{1}{2}$  ne peut porter qu'un dipôle (rang 1) mais pas de quadrupôle indépendant ; il est donc incapable de présenter une réponse tensorielle.

**Justification par calcul élémentaire (esquisse).** Pour rendre cela plus concret, on peut écrire les produits symétrisés d'opérateurs de spin pour  $J = \frac{1}{2}$  en termes des matrices de Pauli  $\sigma_i$  :

$$J_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \quad J_i J_j = \frac{\hbar^2}{4} \sigma_i \sigma_j.$$

Or les matrices de Pauli satisfont  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ , si bien que toute combinaison symétrique et sans trace construite à partir de  $\sigma_i \sigma_j$  se réduit à une combinaison de l'identité et d'opérateurs de rang 1 (proportionnels à  $\sigma_k$ ). Il n'existe donc pas de composante indépendante de rang 2 dans l'algèbre des opérateurs sur l'espace à deux dimensions. En particulier, la combinaison traceless/ quadrupolaire

$$3[(\vec{u}^* \cdot \vec{J})(\vec{u} \cdot \vec{J}) + (\vec{u} \cdot \vec{J})(\vec{u}^* \cdot \vec{J})] - 2\vec{J}^2$$

s'annule (ou se réduit à une combinaison triviale proportionnelle à l'identité) lorsqu'elle est restreinte à l'espace  $J = \frac{1}{2}$ . Ceci confirme algébriquement l'argument angulaire précédent.

**Remarque sur la forme normale de la fraction.** La formule souvent écrite

$$\frac{3[(\vec{u}^* \cdot \vec{J})(\vec{u} \cdot \vec{J}) + (\vec{u} \cdot \vec{J})(\vec{u}^* \cdot \vec{J})] - 2\vec{J}^2}{2J(2J - 1)}$$

est valable pour  $J \geq 1$ . Pour  $J = \frac{1}{2}$  le dénominateur  $2J(2J - 1)$  s'annule formellement; ceci indique simplement que l'écriture fractionnaire n'est pas définie là où le terme tensoriel n'a pas de sens physique. Le bon énoncé est : « pour  $J < 1$  (en particulier  $J = \frac{1}{2}$ ), la composante tensorielle est identiquement nulle ».

**Conclusion.** Pour les atomes alcalins dans leur état fondamental (configuration  $nS_{1/2}$ , donc  $J = \frac{1}{2}$ ), la contribution tensorielle du potentiel dipolaire est strictement nulle. On conserve alors uniquement les termes scalaire et, éventuellement, vectoriel (ce dernier ne dépendant que de la polarisation elliptique/circulaire).