

## Annexe D

# Propriétés des facteurs d'homothétie

### D.1 Loi de puissance des facteurs homothétiques

**Théorème D.1.1** (Loi de puissance). *Si le facteur  $f(\lambda)$  est bien défini indépendamment de  $n > 0$  (ce qui est le cas pour les solutions homothétiques), alors  $f$  est une loi de puissance.*

*Démonstration.* Posons  $g(n) = \mu'(n) > 0$  ou  $< 0$  (i.e.  $\mu$  strictement monotone). La définition de  $f$  équivaut à l'existence d'une fonction  $\chi(\lambda) = 1/f(\lambda)$  telle que

$$g(\lambda n) = \chi(\lambda) g(n) \quad (\forall \lambda, n > 0).$$

En prenant  $n = 1$ , on a  $\chi(\lambda) = g(\lambda)/g(1)$ . Donc, pour tous  $a, b > 0$ ,

$$\chi(ab) = \frac{g(ab)}{g(1)} = \frac{\chi(a) g(b)}{g(1)} = g(a) g(b),$$

c'est-à-dire que  $\chi$  est *multiplicative*. Sous une hypothèse physique très faible (continuité, mesurabilité ou simple localement bornée), toute fonction multiplicative sur  $\mathbb{R}_+^*$  est de la forme

$$\chi(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}.$$

□

### D.2 Équivalence entre $f(\lambda)$ et $\mu(n)$

**Théorème D.2.1.** *Les expressions*

$$f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha} \quad \text{et} \quad \mu(n) \propto n^\alpha$$

*sont équivalentes.*

*Démonstration.* 1. Si  $\mu(n) = C n^\alpha$  avec  $C \neq 0$  :

Alors  $\mu'(n) = C \alpha n^{\alpha-1}$ . Par conséquent,

$$f(\lambda) = \frac{C \alpha n^{\alpha-1}}{C \alpha (\lambda n)^{\alpha-1}} = \lambda^{1-\alpha}.$$

2. Réciproque : si  $f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}$  pour tout  $\lambda > 0$  et  $n > 0$  : Posons  $g(n) = \mu'(n)$ . L'hypothèse s'écrit

$$\frac{g(n)}{g(\lambda n)} = \lambda^{1-\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad g(\lambda n) = \lambda^{\alpha-1} g(n),$$

pour tout  $n > 0$  et tout  $\lambda > 0$ .

Fixons  $n_0 > 0$  et définissons  $\varphi(\lambda) \equiv g(\lambda n_0)$ . La relation ci-dessus donne

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} \varphi(1),$$

donc  $\varphi(\lambda) = C_1 \lambda^{\alpha-1}$  avec  $C_1 = g(n_0)$ . En remplaçant  $\lambda = x/n_0$ , on obtient pour tout  $x > 0$

$$g(x) = C_1 x^{\alpha-1}.$$

Ainsi,  $g(n) = \mu'(n) = C n^{\alpha-1}$  avec  $C$  constant. En intégrant (si  $\alpha \neq 0$ ), on a

$$\mu(n) \propto n^\alpha.$$

Pour  $\alpha = 0$ ,  $\mu'(n) = C n^{-1}$  et  $\mu(n) = C \ln n + \text{const.}$

□

*Remarque D.2.2.* La démonstration utilise la propriété fonctionnelle multiplicative  $g(\lambda n) = \lambda^{\alpha-1} g(n)$ . Sous une hypothèse faible de continuité (ou dérivabilité) en  $n$ , cette équation force la forme de puissance  $g(n) \propto n^{\alpha-1}$ . Sans régularité, des solutions pathologiques peuvent exister mais ne sont pas physiquement pertinentes dans le contexte thermodynamique.