

TABLE DES MATIÈRES

I	Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz	3
1	Introduction au gaz de bosons unidimensionnels	7
1.1	Description du modèle de Lieb-Liniger	7
1.2	Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques	9
1.3	Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat	9
1.3.1	Équation de Gross-Pitaevskii	9
1.3.2	Transformation de Bogoliubov pour système homogène	9
2	Bethe Ansatz et solution exacte du modèle de Lieb-Liniger	11
2.1	Problème à deux corps	11
2.2	Problème à N corps	11
2.3	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz	11
II	Relaxation des systèmes quantiques isolés et phénomènes d'équilibre	13
3	Équilibre thermique et ensemble de Gibbs : chaos quantique	15
3.1	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	15
3.2	Excitations élémentaires à température nulle	15
3.3	Physique statistique de l'ensemble de Gibbs	17
3.4	Chaos quantique et brisure de l'intégrabilité	19
3.5	Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation	19
4	Équilibre non thermique et ensemble de Gibbs généralisé : ergodicité	21
4.1	Intégrabilité et charges conservées	21
4.2	Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés	21
4.3	Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables	21
4.4	Entropie de Yang-Yang généralisée	23
III	Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée	25
5	Hydrodynamique et régimes asymptotiques	27
5.1	Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques	27
5.2	Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité	27
5.3	Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)	27

6	Fluctuations et corrections à l'hydrodynamique généralisée	29
6.1	Fluctuations de la distribution de rapidité	29
6.2	Ordre 2 des corrections et rôle de l'entropie de Yang-Yang	31
6.3	Confrontation entre hydrodynamique classique et hydrodynamique généralisée	31

Première partie

Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz

Les modèles mécaniques dans les dimensions espace-temps sont présentés dans cet article. Cette méthode a été suggérée pour la première fois par H. Bethe en 1931 [1] et est traditionnellement appelée l'Ansatz de Bethe. Par la suite, la méthode a été développée par Hulthen, Yang et Yang, Lieb, Sutherland, Baxter, Gaudin et d'autres (voir [2], [3], et [4]).

Nous commençons la présentation par l'Ansatz de Bethe en coordonnées, non seulement pour des raisons historiques, mais aussi en raison de sa simplicité et de sa clarté. **La matrice de diffusion à plusieurs particules apparaît comme étant égale au produit des matrices à deux particules pour les modèles intégrables. Cette propriété de réductibilité à deux particules est d'une importance primordiale lors de la construction de la fonction d'onde de Bethe. L'une des caractéristiques importantes des modèles intégrables est qu'il n'y a pas de production multiple de particules hors des coquilles de masse. Cette propriété est étroitement liée à l'existence d'un nombre infini de lois de conservation dans de tels modèles ; cela sera expliqué dans la Partie II.**

Quatre modèles principaux, à savoir le gaz de Bose unidimensionnel, le magnétisme de Heisenberg, le modèle de Thirring massif et le modèle de Hubbard, sont considérés dans la Partie I. Les fonctions propres des hamiltoniens de ces modèles sont construites. **L'application des conditions aux limites périodiques mène à un système d'équations pour les valeurs permises des moments. Celles-ci sont connues sous le nom d'équations de Bethe. Ce système peut également être dérivé d'un certain principe variationnel, l'action correspondante étant appelée l'action de Yang-Yang. Elle joue un rôle important dans l'étude des modèles. Les équations de Bethe sont également utiles dans la limite thermodynamique. L'énergie de l'état fondamental, la vitesse du son, etc., peuvent être calculées dans cette limite. Les excitations au-dessus de l'état fondamental, c'est-à-dire les particules physiques, sont également étudiées. Pour définir leurs caractéristiques physiques, la technique des équations de "dressing" est introduite et étudiée. La thermodynamique du modèle est expliquée en détail.**

Le matériel de cette Partie est organisé comme suit. La théorie du gaz de Bose unidimensionnel avec une interaction répulsive ponctuelle entre les particules est présentée dans le premier chapitre. La solution du magnétisme de Heisenberg $X X Z$ dans un champ magnétique externe est donnée dans le deuxième chapitre. Le modèle quantique du champ spinor avec une auto-interaction à quatre points dans deux dimensions espace-temps est résolu dans le troisième chapitre. Cela est généralement appelé le modèle de Thirring massif, et est équivalent au modèle de sine-Gordon (dans le secteur de charge nulle). Dans le dernier chapitre de la Partie I, le modèle de Hubbard des fermions interactifs sur un réseau est brièvement abordé.

Le gaz de Bose unidimensionnel est décrit par les champs quantiques de Bose canoniques $\Psi(x, t)$ avec les relations de commutation canoniques à temps égal :

Plus tard, l'argument t sera en règle générale omis, puisque toutes les considérations de ce chapitre s'appliquent à un instant fixé dans le temps. L'Hamiltonien du modèle est

où c est la constante de couplage. L'équation du mouvement correspondante est appelée l'équation de Schrödinger non linéaire (NS).

Pour $c > 0$, l'état fondamental à température nulle est une sphère de Fermi. Seul ce cas sera considéré par la suite.

Le vide de Fock $|0\rangle$, défini par

est important. Il sera appelé le pseudovacuum et doit être distingué du vide physique, qui est l'état fondamental de l'Hamiltonien (la mer de Dirac). Le pseudovacuum dual $\langle 0|$ est défini comme $\langle 0| = |0\rangle$ et satisfait les relations

où le symbole dag (\dagger) désigne la conjugaison hermitienne. L'opérateur nombre de particules Q et l'opérateur impulsion P sont

Pourquoi en 1D ?

Explication classique à l'aide d'un modèle chaotique : la thermalisation en 2D, illustrée par l'exemple de l'eau en ébullition, avec comme paramètres T , E , N . Modélisation par des sphères dures et introduction du modèle ergodique : en 1D, l'intégrabilité du modèle de sphères dures dans un espace réduit entraîne un simple échange de vitesses, sans modifier la distribution des vitesses.

Pourquoi en 1D quantique ?

Le gaz de Bose unidimensionnel avec interactions ponctuelles (la version quantique de l'équation de Schrödinger non linéaire) est l'un des modèles intégrables les plus fondamentaux, pouvant être résolu par la méthode de l'Ansatz de Bethe (ref). Ce modèle a fait l'objet d'études approfondies (ref).

Après avoir décrit le modèle de Lieb-Liniger et analysé ses asymptotiques ainsi que les théories linéarisées (Gross-Pitaevskii et Bogoliubov) dans le chapitre 1, nous poursuivons par la construction des fonctions propres de l'Hamiltonien dans un volume fini.

Cette construction, détaillée dans le chapitre 2, met en évidence la forme explicite des fonctions propres et leur réductibilité au cas à deux particules, une caractéristique commune des modèles résolubles par l'Ansatz de Bethe. Enfin, dans la dernière section, nous imposons des conditions aux limites périodiques à

CHAPITRE

1

INTRODUCTION AU GAZ DE BOSONS UNIDIMENSIONNELS

Contents

1.1	Description du modèle de Lieb-Liniger	7
1.2	Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques	9
1.3	Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat	9
1.3.1	Équation de Gross-Pitaevskii	9
1.3.2	Transformation de Bogoliubov pour système homogène	9

Introduction

1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger

Le gaz de Bose unidimensionnel est décrit par les champs quantiques de Bose canoniques $\Psi(x, t)$, satisfaisant les relations de commutation canoniques à temps égal :

$$[\Psi(x,t), \Psi^\dagger(y,t)] = \delta(x-y),$$

Dans ce chapitre, l'argument temporel t sera omis, puisque toutes les considérations s'appliquent à un instant fixé dans le temps.

L'Hamiltonien du modèle s'écrit :

$$H = \int dx \left(\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Psi^\dagger \partial_x \Psi + c \Psi^\dagger \Psi^\dagger \Psi \Psi \right)$$

où c est la constante de couplage. L'équation du mouvement correspondante est l'équation de Schrödinger non linéaire (NS).

Pour $c > 0$, l'état fondamental à température nulle est une sphère de Fermi, et seul ce cas sera considéré par la suite.

Le vide de Fock $|0\rangle$ est défini par :

$$\Psi(x)|0\rangle = 0, \quad \forall x$$

Il satisfait les relations suivantes :

$$\Psi^\dagger(x)|0\rangle \neq 0, \quad \langle 0|\Psi(x) = 0$$

où le symbole dag (\dagger) désigne la conjugaison hermitienne.

Enfin, les opérateurs nombre de particules Q et impulsion P s'écrivent :

$$Q = \int dx \Psi^\dagger \Psi, \quad P = \int dx \Psi^\dagger (-i\hbar \partial_x) \Psi$$

1.2 Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques

1.3 Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat

1.3.1 Équation de Gross-Pitaevskii

1.3.2 Transformation de Bogoliubov pour système homogène

CHAPITRE

2

BETHE ANSATZ ET SOLUTION EXACTE DU MODÈLE DE LIEB-LINIGER

Contents

2.1	Problème à deux corps	11
2.2	Problème à N corps	11
2.3	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz	11

2.1 Problème à deux corps

2.2 Problème à N corps

2.3 Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz

Deuxième partie

Relaxation des systèmes quantiques isolés et phénomènes d'équilibre

ÉQUILIBRE THERMIQUE ET ENSEMBLE DE GIBBS : CHAOS QUANTIQUE

Contents

3.1	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	15
3.2	Excitations élémentaires à température nulle	15
3.3	Physique statistique de l'ensemble de Gibbs	17
3.4	Chaos quantique et brisure de l'intégrabilité	19
3.5	Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation	19

3.1 Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle

3.2 Excitations élémentaires à température nulle

Nous allons d'abord considérer les excitations au-dessus du vide physique dans le secteur de charge physique nulle (c'est-à-dire les excitations où le nombre de particules N dans l'état excité est identique au nombre de particules dans l'état fondamental). Nous commencerons par des conditions aux limites périodiques (2.13).

L'état fondamental est décrit par un ensemble particulier d'entiers n_j , voir (2.26) et (3.2). Tous les autres ensembles de n_j (avec la contrainte que $n_j \neq n_k$) correspondent à des états excités. Cela constitue une description complète de tous les états excités. Ces excitations sont obtenues en supprimant un certain nombre de particules ayant des moments $-q < \lambda < q$ de la distribution du vide (c'est-à-dire en créant des trous avec des moments λ_h) et en ajoutant un nombre égal de particules ayant des moments $\lambda_p > q$.

Nous allons d'abord construire l'état dans lequel une particule de moment $\lambda_p > q$ diffuse avec un trou de moment $-q < \lambda_h < q$. La présence simultanée de la particule et du trou modifie les valeurs permises des moments des particules du vide : $\lambda_j \rightarrow \lambda_j$, de sorte que les équations de Bethe pour les particules du vide sont réécrites comme suit.

En soustrayant cette contribution de la distribution du vide (3.2) et en tenant compte du fait que $\lambda_j - \lambda'_j = \mathcal{O}(1/L)$ et que $\theta(\lambda + \Delta) - \theta(\lambda) = \mathcal{O}(\Delta)$, on obtient :

En utilisant les équations (2.31), (3.5) et (3.7), on obtient :

On introduit maintenant la "fonction de décalage" F :

Dans la limite thermodynamique, on peut remplacer la somme dans (4.3) par une intégrale, ce qui donne : Ainsi, nous sommes en mesure de décrire la polarisation du vide causée par une particule et un trou. Cela permet le calcul des grandeurs observables (énergie, momenta, et matrice de diffusion) pour les excitations au-dessus de l'état fondamental. Ces grandeurs

observables sont obtenues en ajoutant les contributions de la polarisation du vide aux quantités "pures" correspondantes. Nous commençons par calculer l'énergie observable E , qui est égale à l'énergie de l'état excité moins l'énergie de l'état fondamental :

où $E_0(\lambda) = \lambda^2 - h$. De même, on a pour le moment observable (le moment "pur" est simplement égal à λ) :

Toutes les excitations dans le secteur à charge nulle peuvent être construites comme un état de diffusion constitué de nombres égaux de particules et de trous. L'énergie et le moment de ces excitations sont égaux à la somme des énergies et des moments des particules et des trous individuels. L'excitation à une particule et un trou construite ci-dessus est un état à deux corps. Dans l'ensemble canonique grand, nous pouvons changer le nombre de particules. Construisons une excitation à une particule avec énergie :

et le moment $k(p)$ égal à :

(voir (3.7)). Il s'agit d'une excitation topologique (nous devons changer les conditions aux frontières en antipériodiques). La valeur λ_p doit être en dehors de la sphère de Fermi, $|\lambda_p| > q$, $\text{Im } \lambda_p = 0$. On peut également construire une autre excitation topologique (trou élémentaire) avec une énergie égale à $-e(h)$ et un moment égal à :

où $-q < \lambda < q$. Cela montre que les états excités dans le secteur neutre construits ci-dessus sont constitués de deux excitations élémentaires (comparer les formules (4.19) et (4.20) avec (4.16)). Pour construire ces excitations topologiques, il faut changer les conditions aux frontières pour qu'elles soient antipériodiques lors de l'introduction d'une excitation.

Cette excitation topologique a une nature fermionique. Pour les bosons implacables, cela est explicitement montré dans l'Appendice 1. Ainsi, nous allons introduire une autre particule dans l'état fondamental et changer les conditions aux frontières. Dans l'état excité, il y a $N+1$ particules avec des moments $\tilde{\lambda}_j; j = 1, \dots, N+1$. Les équations de Bethe correspondantes sont :

L'état excité est caractérisé par l'ensemble de $N+1$ nombres $\{n_j, j = 1, \dots, N+1\}$; les N premiers nombres correspondent à l'état fondamental (2.26). Notons λ_{N+1} par λ_p . Il est commode d'introduire une fonction de décalage F similaire à celle de (4.4) :

Dans la limite thermodynamique, la fonction de décalage satisfait l'équation intégrale suivante :

où $|\lambda_p| > q$. La fonction $F(\mu|\lambda)$ est définie pour $|\mu| < q$; cependant, à l'aide de l'équation (4.25), F peut être prolongée analytiquement sur tout l'axe réel.

Avec l'aide de la fonction de décalage, nous pouvons calculer les quantités observables dans la limite thermodynamique (énergie, moment et matrice de diffusion). La fonction de décalage décrit le nuage de particules virtuelles qui entoure la particule p ou, en d'autres termes, la polarisation du vide due à la particule nue p . Des calculs similaires à ceux du début de cette section montrent que l'énergie d'une particule est $\varepsilon(\lambda_p)$ (voir (4.9)) et que le moment est donné par (4.19).

Une excitation de "trou" peut être traitée de manière similaire. Le nombre de particules dans cette excitation est égal à $N-1$ et la charge observable est égale à -1 . La fonction d'onde X_N doit à nouveau être antipériodique. Cet état est caractérisé par l'ensemble de nombres entiers $\{n_j\}$ obtenu en éliminant un nombre de l'ensemble du vide. La fonction de décalage satisfait l'équation

où $|\lambda_h| < q$ est le moment de la particule nue du trou. Avec l'aide de cette fonction, l'énergie et le moment peuvent être obtenus :

Cette fonction peut être remplacée par $-k_h(\lambda_h)$ trouvé dans (4.19). Les excitations arbitraires sont construites à partir de plusieurs particules et trous. L'énergie et le moment de telles excitations sont simplement la somme des contributions des excitations élémentaires individuelles. Ainsi, l'énergie et le moment sont donnés par :

La matrice de diffusion à plusieurs corps est simplement le produit des matrices de diffusion à deux corps. D'abord, la matrice de diffusion pour deux particules sera évaluée. L'ajout de deux particules ($\lambda_2 > \lambda_1 > q$) au vide déplace les valeurs des moments des particules du vide : $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}_j$ (pour $j = 1, \dots, N$). La fonction de décalage

est égale à la somme des fonctions de décalage à une particule données par (4.25) :

Maintenant, considérons la matrice de diffusion de deux particules possédant des moments λ_1 et λ_2 avec $\lambda_2 > \lambda_1 > q$, comme ci-dessus. Dans ce cas, la matrice de diffusion est simplement un facteur numérique de module unitaire; ainsi, elle peut être écrite comme

Le phase δ est réelle et est donnée par

où φ_2 est la phase complète que la deuxième particule acquiert lorsqu'elle traverse l'ensemble de la boîte dans le cas où la première particule est absente :

La phase φ_{21} est la phase complète que la deuxième particule acquiert lorsqu'elle traverse l'ensemble de la boîte en présence de la première :

En utilisant les équations (4.34) et (4.35), la phase de diffusion est donnée par

En changeant la somme en une intégrale dans la limite thermodynamique et en utilisant (4.31), on obtient

et à partir de (4.25)

Ainsi, la phase de diffusion satisfait l'équation intégrale suivante :

Nous avons démontré que les excitations physiques au-dessus de la mer de Dirac sont obtenues à partir des excitations "nues" au-dessus du vide de Fock $|0\rangle$ (qui sont décrites par les fonctions d'onde de Bethe) à travers les équations de "dressing". Ces équations linéaires intégrales de dressing sont des équations universelles. Pour le voir, il suffit de comparer les équations de dressing pour l'énergie (4.9), la phase de diffusion (4.39) et la densité (3.7). Les équations de dressing sont également très utiles pour l'étude des fonctions de corrélation et des corrections de taille finie, comme nous le verrons dans les sections suivantes.

La diffusion de deux trous ayant des momenta nues λ_1 et λ_2 , avec $-q \leq \lambda_{1,2} \leq q$, est également égale à $\exp(i\varphi(\lambda_2, \lambda_1))$ où φ est défini par (4.39). La matrice de diffusion de la particule λ_p avec le trou λ_h est égale à

La matrice de diffusion de plusieurs particules est égale au produit des matrices de diffusion à deux particules.

Il convient également de mentionner que les structures d'excitation d'autres modèles (antiferromagnétique XXZ de Heisenberg et modèle de sine-Gordon) sont très similaires. L'énergie, le moment et la matrice de diffusion sont évalués de la même manière.

3.3 Physique statistique de l'ensemble de Gibbs

Considérons l'ensemble canonique et calculons la fonction de partition Z du modèle.

Ici, H est le hamiltonien donné par (1.2) et T est la température. L'énergie libre F est donnée par (5.1). Rappelons que nous étudions la limite thermodynamique ($L \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$) tout en conservant la densité du gaz fixe :

Dans la limite thermodynamique, les lacunes, les particules et les trous (ceux définis dans la section 2, voir (2.29), (2.30)) ont des densités de distribution finies $\rho_t(\lambda)$, $\rho_p(\lambda)$ et $\rho_h(\lambda)$ dans l'espace des moments, qui sont définies comme suit :

Le nombre de lacunes est simplement la somme du nombre de particules et de trous :

Par lacunes, nous entendons les positions potentielles, dans l'espace des moments, qui peuvent être occupées par des particules ou des trous. Dans la limite thermodynamique, la somme dans l'équation (2.31) se transforme en une intégrale impliquant la densité $\rho_p(\lambda)$ et on a :

Il convient de souligner que nous passons maintenant d'une description microscopique du modèle (à l'aide de l'ensemble $\{n_j\}$) à une description macroscopique en termes de densités ρ_p , ρ_h et ρ_t . La situation macroscopique donnée, décrite par des valeurs fixées de ρ_p , ρ_h et ρ_t , correspond à de nombreux ensembles d'états microscopiques (les ensembles de nombres $\{n_j\}$). En effet, il existe de nombreuses façons de placer $L\rho_p(\lambda)d\lambda$ particules dans $L\rho_t(\lambda)d\lambda$ lacunes. Le nombre de possibilités est donné par :

Ce nombre est grand dans la limite thermodynamique. En utilisant la formule de Stirling pour l'asymptotique du factoriel, on obtient :

Plus tard, nous verrons que l'énergie et les autres observables du système ne dépendent que des variables macroscopiques ρ_p et ρ_h . La quantité

est l'entropie. Passons maintenant à la fonction de partition (5.1). Elle peut être représentée sous la forme

où $E_N = \sum \lambda^2$ et les moments λ_j sont les solutions des équations de Bethe (2.13). Nous allons considérer la thermodynamique du gaz qui est au repos dans son ensemble, ainsi l'impulsion totale P_N (1.29) est égale à zéro ; cela signifie que $\sum n_j = 0$. En introduisant de nouvelles variables $n_{j+1,j} = n_{j+1} - n_j$, nous pouvons réécrire (5.11) :

Dans la limite thermodynamique, l'énergie d'un état

Dans la limite thermodynamique, l'énergie d'un état ne dépend que de la variable macroscopique $\rho_p(\lambda)$; cela permet de passer de la sommation sur les variables microscopiques dans (5.12) à une intégration par rapport aux variables macroscopiques. Pour ce faire, effectuons la substitution

En fait, nous pouvons calculer le rapport entre le nombre de vacantes et le nombre de particules (dans $d\lambda$) en termes de variables microscopiques et macroscopiques, puis comparer les résultats. La variable $n_{j+1,j}$ peut être considérée comme le nombre de vacantes pour la j -ème particule (c'est-à-dire qu'une seule vacante parmi $n_{j+1,j}$ est occupée). Macroscopiquement, ce rapport est donné par le rapport des densités correspondantes (5.3), (5.5), c'est-à-dire $\frac{\rho_t(\lambda)}{\rho_p(\lambda)}$. Ainsi, la somme dans (5.12) peut être remplacée par une intégrale fonctionnelle. Cependant, il faut se rappeler qu'un grand nombre de configurations microscopiques ((5.8) et (5.9)) correspond à des variables macroscopiques données. On obtient ainsi la représentation intégrale fonctionnelle de la fonction de partition Z_N :

Le nombre fixe de particules N dans l'ensemble canonique entraîne l'apparition de la δ -fonction dans (5.14). En utilisant la représentation

Lorsque $L \rightarrow \infty$, la méthode de la descente la plus raide peut être utilisée pour calculer l'intégrale fonctionnelle (5.16). La variation de l'exposant dans (5.16), en utilisant (5.7), est

où nous avons utilisé la notation suivante, qui s'avère pratique :

Ainsi, la méthode de descente la plus raide conduit aux équations suivantes :

On peut démontrer que la valeur de h au point stationnaire est réelle ; la matrice des secondes dérivées de l'exposant dans (5.16) a le signe correct (Appendice 2). Ces affirmations justifient l'applicabilité de la méthode de descente la plus raide. Ainsi, nous calculons la fonction de partition et l'énergie libre (5.1) :

Par définition, la pression est la dérivée de l'énergie libre par rapport au volume à température fixe :

Le calcul direct montre que l'identité thermodynamique fondamentale est vérifiée :

Ainsi, S (équation (5.10)) est l'entropie. Listons maintenant les équations qui déterminent l'état d'équilibre thermodynamique :

La densité $D > 0$, la température $T > 0$ et la constante de couplage $c > 0$ sont ici des paramètres libres. Ces équations définissent la dépendance de la pression en fonction de la densité et de la température. L'état d'équilibre n'est en aucun cas un état purement quantique : il n'est pas décrit par une seule fonction propre de l'Hamiltonien (comme pour $T = 0$), mais par un mélange de fonctions propres.

Le nombre d'états propres présents dans l'état d'équilibre thermique est $\exp S$ (voir (5.9), (5.10)), où S est l'entropie. Ainsi, $\exp S$ ensembles $\{n_j\}$ dans (2.13) correspondent à une densité $P_p(\lambda)$ et $P_h(\lambda)$ données.

Considérons maintenant un des états propres présents dans l'état d'équilibre thermique et notons-le $|ST\rangle$. L'équation (5.25) pour $\epsilon(\lambda)$ joue un rôle fondamental. Elle a été obtenue dans [?] et sera appelée l'équation de Yang-Yang. Elle sera étudiée en détail dans la section suivante. La fonction $\epsilon(\lambda)$ possède une interprétation physique claire : elle représente l'énergie des excitations élémentaires au-dessus de l'état d'équilibre, ce qui sera démontré explicitement dans la section 8.

Cependant, on peut comprendre cela sans trop de calculs. Considérons le rapport $\eta(\lambda)$ du nombre de vacants occupés au nombre total de vacants, donné par (5.18) :

En comparant cela avec la bien connue distribution de Fermi, on en conclut que $\epsilon(\lambda)$ doit être précisément l'énergie mentionnée ci-dessus. La fonction $\nu(\lambda)$ sera appelée le poids de Fermi.

Ainsi, nous avons construit l'état d'équilibre thermique pour le gaz de Bose à température et densité finies. Mais à quoi ressemble-t-il ? Dans cet état d'équilibre thermique, les particules se déplacent de manière brownienne. Une question intéressante est la suivante : *"Quelle est la probabilité que, dans un certain intervalle d'espace, il n'y ait aucune particule ?"*

Le lecteur peut trouver la réponse dans la section 2 du Chapitre XVI ((XVI.2.28) pour le cas impénétrable). Ce résultat montre la relation entre l'état réel d'équilibre thermique et le vide nu (absence totale de particules). À grande distance, cette probabilité peut être exprimée en fonction de la pression (voir la section XVII.5).

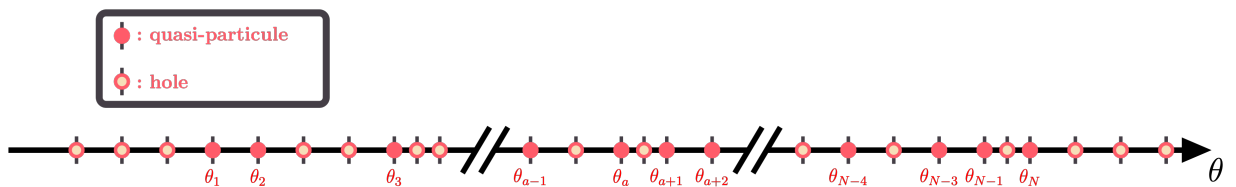
En conclusion, nous donnons quelques estimations utiles, similaires à (3.10) et (3.11). En utilisant (2.23), nous obtenons, dans la limite thermodynamique :

Il est également pratique d'introduire l'opérateur intégral K_I agissant sur une fonction arbitraire $v(\lambda)$ de la manière suivante : On a pour les valeurs propres K_r de cet opérateur :

La démonstration est similaire à celle de (3.11). Les équations (5.24)-(5.27) seront étudiées dans la section suivante et dans l'Annexe 2. Mentionnons ici que h est une fonction bijective de D , avec $\frac{dD}{dh} > 0$.

Il convient de noter que la thermodynamique de l'ensemble grand canonique est décrite par les mêmes équations (5.24)-(5.27). Dans ce cas, le potentiel chimique est un paramètre arbitraire tandis que la densité D est définie par les équations correspondantes. La démonstration est similaire à celle de (3.11). Les équations (5.24)-(5.27) seront étudiées dans la section suivante et dans l'Annexe 2. Mentionnons ici que h est une fonction bijective de D , avec $\frac{dD}{dh} > 0$.

Il convient de noter que la thermodynamique de l'ensemble grand canonique est décrite par les mêmes équations (5.24)-(5.27). Dans ce cas, le potentiel chimique est un paramètre arbitraire tandis que la densité D est définie par les équations correspondantes.



On écrit l'observable énergie et nombre :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (3.1)$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N \epsilon(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (3.2)$$

avec $\sum_{a=1}^N 1 \equiv \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{N}} | \{\theta_a\} \rangle$ et $\sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \equiv \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{E}} | \{\theta_a\} \rangle$.
La probabilité que le système soit dans configuration $\{\theta_a\}$ est

$$P_{\{\theta_a\}} = \frac{e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})}}{Z_{thermal}} = \frac{e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}}{Z_{thermal}} \quad (3.3)$$

avec la fonction de partition $Z_{thermal} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}$

$$\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \Bigg|_T, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \mu^2} \Bigg|_T = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \Bigg|_T \quad (3.4)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu}, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \Bigg|_{\mu} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu} \quad (3.5)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu} \right] \ln Z, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}}}^2 = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu} \right]^2 \ln Z = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu} \right] \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle \quad (3.6)$$

La matrice densité thermique est :

$$\hat{\rho}_{thermal} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z_{thermal}}, \quad (3.7)$$

$$e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (3.8)$$

3.4 Chaos quantique et brisure de l'intégrabilité

3.5 Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation

ÉQUILIBRE NON THERMIQUE ET ENSEMBLE DE GIBBS GÉNÉRALISÉ : ERGODICITÉ

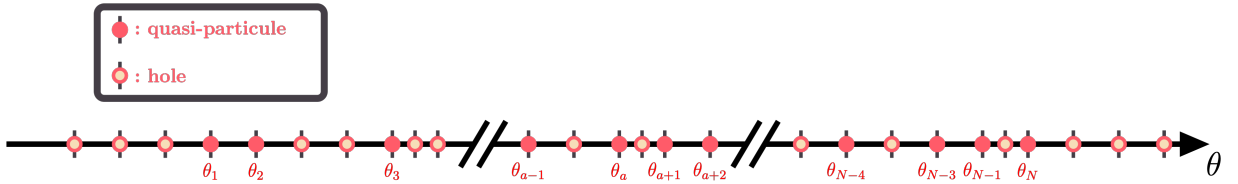
Contents

4.1	Intégrabilité et charges conservées	21
4.2	Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés	21
4.3	Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables	21
4.4	Entropie de Yang-Yang généralisée	23

4.1 Intégrabilité et charges conservées

4.2 Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés

4.3 Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables



On peut commence à généraliser avec l'opérateur :

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (4.1)$$

$\hat{\mathcal{O}}_i \in \{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}\}$ tel que $\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \beta \left(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \right)$ et pour simplifier ici $Z \equiv Z_{thermal}$:

Point clé n° 1. Sa moyenne , variance et écartype de l'observable :

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{\overbrace{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}^{P_{\{\theta_a\}}}}{Z} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \quad (4.2)$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 &= \left\langle \left(\hat{\mathcal{O}}_i - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_{j \neq i}} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \right) \Big|_{\beta_{j \neq i}} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_{j \neq i}} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = -\beta\mu$ et si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{E}} - \mu\hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = \beta$.

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}}_i | \{\theta_a\} \rangle \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}, \quad (4.5)$$

$$= \sum_{\{\theta_b\}} \langle \{\theta_b\} | \hat{\mathcal{O}}_i \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} | \{\theta_b\} \rangle, \quad (4.6)$$

$$= \text{Tr}(\hat{\mathcal{O}}_i \hat{\rho}) \quad (4.7)$$

avec $\hat{\rho} = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} |$ et $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}$ tel que $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$

La matrice densité GGE avec $Z \equiv Z_{GGE}$ est :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} |. \quad (4.8)$$

Dans le cas thermique, on peut remarquer que $\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^0$ et $\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^2$. On peut donc réécrire $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{a=1}^N \theta_a^i \quad (4.9)$$

et pour chaque $a \in \llbracket 1, N \rrbracket$: $\sum_i \alpha_i \theta_a^i$ converge donc on peut échanger les deux sommes soit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^N f(\theta_a) \quad (4.10)$$

avec $f(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i$. Et on peut réécrire la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \frac{e^{-\hat{Q}[f]}}{Z_{GGE}}, \quad (4.11)$$

$$e^{-\hat{Q}[f]} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} | \quad (4.12)$$

pour une certaine fonction f relié à la charge $\hat{Q}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N f(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$. Et on peut réécrire la probabilité de la configuration $\{\theta_a\}$: $P_{\{\theta_a\}} = \langle \{\theta_a\} | \hat{\rho}_{GGE}[f] | \{\theta_a\} \rangle = e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} / Z$ avec $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}$.

Nous aimerions calculer les valeurs d'attente par rapport à cette matrice de densité, par exemple La moyenne GGE d'un observable s'écrit ,

Point clé n° 2.

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} \doteq \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} \hat{\rho}_{GGE}[f])}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{GGE}[f])} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} e^{-\hat{Q}[f]})}{\text{Tr}(e^{-\hat{Q}[f]})} = \frac{\sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}}{\sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}} \quad (4.13)$$

pour une certaine observable $\hat{\mathcal{O}}$.

4.4 Entropie de Yang-Yang généralisée

Troisième partie

Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée

CHAPITRE

5

HYDRODYNAMIQUE ET RÉGIMES ASYMPTOTIQUES

Contents

5.1	Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques	27
5.2	Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité	27
5.3	Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)	27

5.1 Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques

5.2 Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité

5.3 Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)

FLUCTUATIONS ET CORRECTIONS À L'HYDRODYNAMIQUE GÉNÉRALISÉE

Contents

6.1	Fluctuations de la distribution de rapidité	29
6.2	Ordre 2 des corrections et rôle de l'entropie de Yang-Yang	31
6.3	Confrontation entre hydrodynamique classique et hydrodynamique généralisée	31

6.1 Fluctuations de la distribution de rapidité

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux fluctuations de la distribution de rapidité $\delta\Pi$ autour d'une distribution de référence Π^c , qui maximise la contribution à la fonction de partition des états, exprimée comme une fonctionnelle de la distribution Π :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\Pi} \exp(-\mathcal{A}(\Pi)).$$

Dans la section **Entropie de Yang-Yang** (??), l'action $\mathcal{A}(\Pi)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}(\Pi) \doteq -S_{YY}(\Pi) + \int f(\theta)\Pi(\theta) d\theta,$$

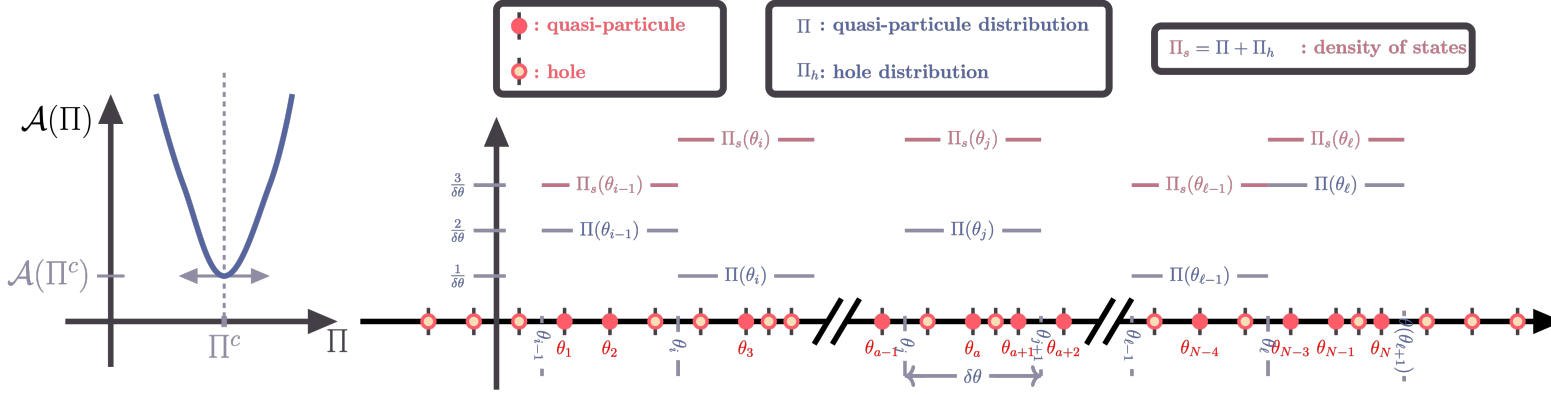
où S_{YY} est la fonctionnelle d'entropie de Yang-Yang, définie dans (??), et f est la fonction paramétrant les charges, introduite dans (??).

Dans cette même section **Entropie de Yang-Yang** (??), nous avons établi un lien entre f et Π^c .

Nous poursuivons à présent avec cette définition de l'action de classe \mathcal{C}^2 et admetant une distribution critique Π^c tel que sa différentielle en ce point critique soit nulle $d\mathcal{A}_{\Pi^c} = 0$ (??) de sorte que d'après la formule de Taylor-Young

$$\mathcal{A}(\Pi^c + \delta\Pi) \underset{\delta\Pi \rightarrow 0}{=} \mathcal{A}(\Pi^c) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi^2} \Big|_{\Pi^c} (\delta\Pi)^2 + \mathcal{O}((\delta\Pi)^3),$$

une expression quadratique pour l'action à l'ordre dominant en $\delta\Pi$ avec $\left.\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi^2}\right|_{\Pi^c}$ la forme quadratique définie positive (Fig (??)).



On discrétise l'axe des rapidités en petite cellule de rapidité $[\theta, \theta + \delta\theta]$, qui contient $\Pi(\theta)\delta\theta$ rapidités. Avec ces petites tranches, la forme quadratique s'écrit :

$$\left.\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi^2}\right|_{\Pi^c}(\delta\Pi) = \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a) \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta_a)\partial\delta\Pi(\theta_b)}(\Pi^c) \delta\Pi(\theta_b).$$

Les fluctuations s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \langle \delta\Pi(\theta) \delta\Pi(\theta') \rangle &= \frac{\int d\delta\Pi \delta\Pi(\theta) \delta\Pi(\theta') \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a) \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta_a)\partial\delta\Pi(\theta_b)}(\Pi^c) \delta\Pi(\theta_b)\right)}{\int d\delta\Pi \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a) \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta_a)\partial\delta\Pi(\theta_b)}(\Pi^c) \delta\Pi(\theta_b)\right)} \\ &= (\mathbf{A}^{-1})_{\theta,\theta'} \end{aligned}$$

La matrice hessienne $\mathbf{A}_{\theta,\theta'} \equiv \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta)\partial\delta\Pi(\theta')}(\Pi^c)$, au point critique Π^c , s'écrit

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta \hat{\mathbf{V}}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{\theta,\theta'}^{(0)} &= \left(\frac{(\Pi^c/\Pi_s^c)^{-1}}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta) \delta\theta \delta_{\theta,\theta'}, \\ V_{\theta,\theta'} &= \left\{ - \left[\left(\frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta) + \left(\frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta') \right] \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} + \int d\theta'' \left(\frac{\Pi^c/\Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta'') \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi} \right\} \delta\theta \end{aligned}$$

Point clé n° 3. Donc une a l'ordre un en $\delta\theta(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}}$

$$\langle \delta\Pi(\theta) \delta\Pi(\theta') \rangle = ((\Pi_s^c - \Pi^c)\Pi^c/\Pi_s^c)(\theta) \delta_{\theta,\theta'} / \delta\theta + \mathcal{F}(\theta, \theta'),$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\theta, \theta') &= [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta) + (\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} \\ &\quad - [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta)(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \int d\theta'' \left(\frac{\Pi^c/\Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta'') \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi}\end{aligned}$$

6.2 Ordre 2 des corrections et rôle de l'entropie de Yang-Yang

6.3 Confrontation entre hydrodynamique classique et hydrodynamique généralisée