

Annexe C

Dérivation alternative des fluctuations de ρ

Dans cette annexe, nous proposons une seconde dérivation des fluctuations de la densité de rapidités ρ , différente de celle présentée au chapitre 4. Cette approche m'a été suggérée par Jérôme Dubail ([Centre européen de sciences quantiques \(CESQ\)](#)). Elle présente l'intérêt de passer directement par les fluctuations du facteur d'occupation ν , et constitue également une bonne occasion de manipuler les dérivées de l'opérateur *d'habillage*.

C.1 Réécriture de l'entropie de Yang–Yang

L'entropie de Yang–Yang s'écrit

$$S_{YY} = \int d\theta \left(\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho) \right) (\theta). \quad (\text{C.1})$$

En introduisant le facteur d'occupation

$$\nu = \frac{\rho}{\rho_s}, \quad (\text{C.2})$$

l'intégrande peut se réécrire sous la forme

$$S_{YY} = \int d\theta s(\nu(\theta)) \rho_s(\theta), \quad (\text{C.3})$$

où la fonction d'entropie locale est donnée par

$$s(\nu) = -\nu \ln \nu - (1 - \nu) \ln(1 - \nu). \quad (\text{C.4})$$

C.2 Différentielle de l'action effective

On définit l'action effective comme

$$S_{YY} - \mathcal{W}, \quad (\text{C.5})$$

où \mathcal{W} est l'énergie généralisée,

$$\mathcal{W} = \int d\theta w(\theta) \rho(\theta). \quad (\text{C.6})$$

Sa différentielle est donnée par

$$\delta(S_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left(\delta\nu s'(\nu) \rho_s + s(\nu) \delta\rho_s - w \delta\rho \right) (\theta). \quad (\text{C.7})$$

En remarquant que

$$\delta v \rho_s = \delta \rho - v \delta \rho_s, \quad (\text{C.8})$$

on réécrit (C.7) sous la forme

$$\delta(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left(\{s'(v) - w\} \delta \rho + \{s(v) - v s'(v)\} \delta \rho_s \right)(\theta). \quad (\text{C.9})$$

On obtient alors la différentielle seconde :

$$\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left(\delta v s''(v) \delta \rho - v \delta v s''(v) \delta \rho_s \right)(\theta). \quad (\text{C.10})$$

En utilisant (C.8), on simplifie pour obtenir

$$\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left((\delta v)^2 s''(v) \rho_s \right)(\theta), \quad (\text{C.11})$$

avec

$$s''(v) = -\frac{1}{v(1-v)}. \quad (\text{C.12})$$

C.3 Fluctuations

C.3.1 Fluctuations des facteurs d'occupation

Les fluctuations du facteur d'occupation s'écrivent

$$\langle \delta v(\theta') \delta v(\theta) \rangle_w = - \left[L \frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W})}{\delta v \delta v} \right]^{-1}(\theta, \theta'). \quad (\text{C.13})$$

En injectant (C.11), il vient

$$\langle \delta v(\theta') \delta v(\theta) \rangle_w = -s''(v(\theta)) \rho_s(\theta) \delta(\theta - \theta'), \quad (\text{C.14})$$

qui est purement diagonale.

C.3.2 Opérateur d'habillage

On rappelle la définition de l'opérateur d'habillage :

$$f_{[v]}^{\text{dr}} = f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (v f_{[v]}^{\text{dr}}). \quad (\text{C.15})$$

En remarquant que

$$C(\theta, \lambda) = \left[\frac{\Delta(\lambda - \cdot)}{2\pi} \right]_{[v]}^{\text{dr}}(\theta), \quad (\text{C.16})$$

qui est symétrique, on peut réécrire [DS17]

$$f_{[v]}^{\text{dr}}(\theta) = \int d\lambda f(\lambda) \left(\delta(\theta - \lambda) + v(\lambda) C(\theta, \lambda) \right). \quad (\text{C.17})$$