C.3.3 Fluctuations des distributions de rapidité

On a vu que

$$2\pi\,\rho_s(\theta) \quad = \quad 1^{\mathrm{dr}}_{[\nu]}(\theta) = \int d\lambda\,\Big(\delta(\theta-\lambda) + \nu(\theta)\,C(\theta,\lambda)\Big), \tag{C.18}$$

d'où

$$2\pi\,\delta\rho_s(\theta) \quad = \quad \int d\lambda\,C(\theta,\lambda)\,\rho_s(\lambda)\,\delta\nu(\lambda). \tag{C.19}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\delta\rho(\theta) \quad &= \quad \rho_s(\theta)\delta\nu(\theta) + \nu(\theta)\delta\rho_s(\theta) &\text{(C.20)}\\
&= \quad \int d\lambda\,\delta(\theta-\lambda)\rho_s(\lambda)\,\delta\nu(\lambda) + \int d\lambda\,\nu(\theta)\,C(\theta,\lambda)\,\rho_s(\lambda)\,\delta\nu(\lambda), &\text{(C.21)}\\
&= \quad \int d\lambda\,\Big(\delta(\theta-\lambda) + \nu(\theta)\,C(\theta,\lambda)\Big)\rho_s(\lambda)\,\delta\nu(\lambda). &\text{(C.22)}
\end{aligned}$$

En réinjectant (C.11) et (C.22) dans la définition

$$\langle\delta\rho(\theta')\,\delta\rho(\theta)\rangle_w \quad = \quad -\left[L\frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY}-\mathcal{W})}{\delta\rho\,\delta\rho}\right]^{-1}(\theta,\theta'), \tag{C.23}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\langle\delta\rho(\theta')\,\delta\rho(\theta)\rangle_w \quad &= \quad -\frac{1}{L}\int d\lambda\,\frac{\Big(\delta(\theta-\lambda)+\nu(\theta)\,C(\theta,\lambda)\Big)\Big(\delta(\theta'-\lambda)+\nu(\theta')\,C(\theta',\lambda)\Big)}{s''(\nu(\lambda))}\,\rho_s(\lambda) &\text{(C.24)}\\
&= \quad \frac{1}{L}\,\mathcal{D}^{-1}(\theta,\theta') + \frac{1}{L}\,\mathcal{B}(\theta,\theta'), &\text{(C.25)}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-1}(\theta,\theta') \quad &= \quad \big(\rho_s(\theta)\,\nu(\theta)\,(1-\nu(\theta))\big)\,\delta(\theta-\theta'), &\text{(C.26)}\\
\mathcal{B}(\theta,\theta') \quad &= \quad \Big[\nu(\theta')\,\rho_s(\theta)\,\nu(\theta)(1-\nu(\theta)) + \nu(\theta)\,\rho_s(\theta')\,\nu(\theta')(1-\nu(\theta'))\Big]\,C(\theta,\theta') &\text{(C.27)}\\
&\quad\; +\nu(\theta)\,\nu(\theta')\int d\lambda\,\rho_s(\lambda)\,\nu(\lambda)\,(1-\nu(\lambda))\,C(\theta,\lambda)\,C(\theta',\lambda). &\text{(C.28)}
\end{aligned}$$

Cette expression coïncide numériquement avec le résultat obtenu en (4.59).

Annexe D

Propriétés des facteurs d'homothétie

D.1 Loi de puissance des facteurs homothétiques

Théorème D.1.1 (Loi de puissance)**.** *Si le facteur $f(\lambda)$ est bien défini indépendamment de $n > 0$ (ce qui est le cas pour les solutions homothétiques), alors f est une loi de puissance.*

Démonstration. Posons $g(n) = \mu'(n) > 0$ ou < 0 (*i.e.* μ strictement monotone). La définition de f équivaut à l'existence d'une fonction $\chi(\lambda) = 1/f(\lambda)$ telle que

$$g(\lambda n) = \chi(\lambda)\, g(n) \qquad (\forall\, \lambda, n > 0).$$

En prenant $n = 1$, on a $\chi(\lambda) = g(\lambda)/g(1)$. Donc, pour tous $a, b > 0$,

$$\chi(ab) = \frac{g(ab)}{g(1)} = \frac{\chi(a)\, g(b)}{g(1)} = g(a)\, g(b),$$

c'est-à-dire que χ est *multiplicative*. Sous une hypothèse physique très faible (continuité, mesurabilité ou simple localement bornée), toute fonction multiplicative sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme

$$\chi(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}.$$

□

D.2 Équivalence entre $f(\lambda)$ et $\mu(n)$

Théorème D.2.1. *Les expressions*

$$f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha} \quad \textit{et} \quad \mu(n) \propto n^{\alpha}$$

sont équivalentes.

Démonstration. 1. 1. Si $\mu(n) = C\, n^{\alpha}$ avec $C \neq 0$:
Alors $\mu'(n) = C\alpha\, n^{\alpha-1}$. Par conséquent,

$$f(\lambda) = \frac{C\alpha\, n^{\alpha-1}}{C\alpha\, (\lambda n)^{\alpha-1}} = \lambda^{1-\alpha}.$$

2. Réciproque : si $f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}$ pour tout $\lambda > 0$ et $n > 0$: Posons $g(n) = \mu'(n)$. L'hypothèse s'écrit

$$\frac{g(n)}{g(\lambda n)} = \lambda^{1-\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad g(\lambda n) = \lambda^{\alpha-1} g(n),$$

pour tout $n > 0$ et tout $\lambda > 0$.

Fixons $n_0 > 0$ et définissons $\varphi(\lambda) \equiv g(\lambda n_0)$. La relation ci-dessus donne

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}\,\varphi(1),$$

donc $\varphi(\lambda) = C_1 \lambda^{\alpha-1}$ avec $C_1 = g(n_0)$. En remplaçant $\lambda = x/n_0$, on obtient pour tout $x > 0$

$$g(x) = C_1\,x^{\alpha-1}.$$

Ainsi, $g(n) = \mu'(n) = C\,n^{\alpha-1}$ avec C constant. En intégrant (si $\alpha \neq 0$), on a

$$\mu(n) \propto n^{\alpha}.$$

Pour $\alpha = 0$, $\mu'(n) = C\,n^{-1}$ et $\mu(n) = C \ln n + \text{const}$.

$\square$

Remarque D.2.2. La démonstration utilise la propriété fonctionnelle multiplicative $g(\lambda n) = \lambda^{\alpha-1} g(n)$. Sous une hypothèse faible de continuité (ou dérivabilité) en n, cette équation force la forme de puissance $g(n) \propto n^{\alpha-1}$. Sans régularité, des solutions pathologiques peuvent exister mais ne sont pas physiquement pertinentes dans le contexte thermodynamique.