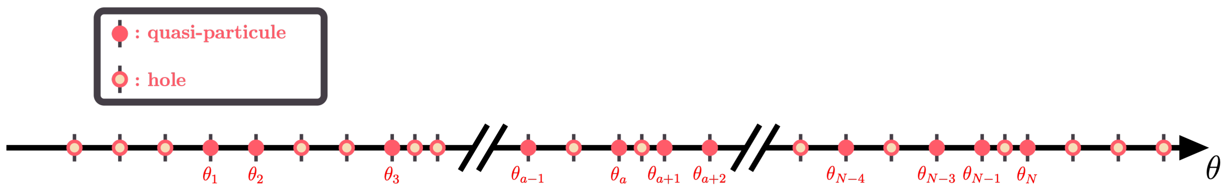
Table des matières

0.1 Fluctuation de la distribution : Entropy maximization , the Yang-Ynag equation

0.1.1 Rappel de Physique statistique



On écrit l'observable énergie et nombre :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^{N} 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|, \tag{1}$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^{N} \varepsilon(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|, \tag{2}$$

avec $\sum_{a=1}^{N} 1 \equiv \langle\hat{\mathcal{N}}\rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle\{\theta_a\}|\hat{\mathcal{N}}|\{\theta_a\}\rangle$ et $\sum_{a=1}^{N} \varepsilon(\theta_a) \equiv \langle\hat{\mathcal{E}}\rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle\{\theta_a\}|\hat{\mathcal{E}}|\{\theta_a\}\rangle$.
La probabilité que le système soit dans configuration $\{\theta_a\}$ est

$$P_{\{\theta_a\}} = \frac{e^{-\beta\left(\langle\hat{\mathcal{E}}\rangle_{\{\theta_a\}} - \mu\langle\hat{\mathcal{N}}\rangle_{\{\theta_a\}}\right)}}{Z_{thermal}} = \frac{e^{-\beta\sum_{a=1}^{N}(\varepsilon(\theta_a)-\mu)}}{Z_{thermal}} \tag{3}$$

avec la fonction de partition $Z_{thermal} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta\left(\langle\hat{\mathcal{E}}\rangle_{\{\theta_a\}} - \mu\langle\hat{\mathcal{N}}\rangle_{\{\theta_a\}}\right)} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta\sum_{a=1}^{N}(\varepsilon(\theta_a)-\mu)}$
On peut commence à généraliser avec l'opérateur :

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \sum_{\{\theta_a\}} \langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}} |\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}| \tag{4}$$

$\hat{\mathcal{O}}_i \in \{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{E}} - \mu\hat{\mathcal{N}}\}$ tel que $\sum_i \beta_i \langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}} = \beta\left(\langle\hat{\mathcal{E}}\rangle_{\{\theta_a\}} - \mu\langle\hat{\mathcal{N}}\rangle_{\{\theta_a\}}\right)$ et pour simplifier ici $Z \equiv Z_{thermal}$:

Point clé n° 1. Sa moyenne , variance et équartype de l'observable :

$$\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle = \sum_{\{\theta_a\}}\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}}\overbrace{\frac{e^{-\sum_i\beta_i\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}}^{P_{\{\theta_a\}}} = -\left.\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta_i}\right)_{\beta_{j\neq i}} = -\left.\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta_i}\right)_{\beta_{j\neq i}} \quad (5)$$

$$\langle\hat{\mathcal{O}}_i^2\rangle = \sum_{\{\theta_a\}}\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle^2_{\{\theta_a\}}\frac{e^{-\sum_i\beta_i\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} = \left.\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial{\beta_i}^2}\right)_{\beta_{j\neq i}}$$

$$\Delta^2_{\hat{\mathcal{O}}_i} = \left\langle\left(\hat{\mathcal{O}}_i-\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle\right)^2\right\rangle = \langle\hat{\mathcal{O}}_i^2\rangle-\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle^2 = \left.\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial{\beta_i}^2}\right)_{\beta_{j\neq i}} - \left(\left.\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta_i}\right)_{\beta_{j\neq i}}\right)^2 \quad (6)$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial\beta_i}\left(\left.\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta_i}\right)_{\beta_{j\neq i}}\right)\right)_{\beta_{j\neq i}} = \left.\frac{\partial^2\ln Z}{\partial{\beta_i}^2}\right)_{\beta_{j\neq i}} = -\left.\frac{\partial\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle}{\partial\beta_i}\right)_{\beta_{j\neq i}} \quad (7)$$

si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = -\beta\mu$ et si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{E}}-\mu\hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = \beta$.

$$\langle\hat{\mathcal{N}}\rangle = \left.\frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln Z}{\partial\mu}\right)_T, \qquad \Delta^2_{\hat{\mathcal{N}}} = \left.\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\ln Z}{\partial\mu^2}\right)_T = \left.\frac{1}{\beta}\frac{\partial\langle\hat{\mathcal{N}}\rangle}{\partial\mu}\right)_T \quad (8)$$

$$\langle\hat{\mathcal{E}}-\mu\hat{\mathcal{N}}\rangle = -\left.\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}\right)_\mu, \qquad \Delta^2_{\hat{\mathcal{E}}-\mu\hat{\mathcal{N}}} = \left.\frac{\partial^2\ln Z}{\partial\beta^2}\right)_\mu = -\left.\frac{\partial\langle\hat{\mathcal{E}}-\mu\hat{\mathcal{N}}\rangle}{\partial\beta}\right)_\mu \quad (9)$$

$$\langle\hat{\mathcal{E}}\rangle = \left[\left.\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_T - \left.\frac{\partial}{\partial\beta}\right)_\mu\right]\ln Z, \qquad \Delta^2_{\hat{\mathcal{E}}} = \left[\left.\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_T - \left.\frac{\partial}{\partial\beta}\right)_\mu\right]^2\ln Z = \left[\left.\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_T - \left.\frac{\partial}{\partial\beta}\right)_\mu\right]\langle\hat{\mathcal{E}}\rangle \quad (10)$$

$$\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle = \sum_{\{\theta_a\}}\langle\{\theta_a\}|\hat{\mathcal{O}}_i|\{\theta_a\}\rangle\frac{e^{-\sum_i\beta_i\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}, \quad (11)$$

$$= \sum_{\{\theta_b\}}\langle\{\theta_b\}|\hat{\mathcal{O}}_i\sum_{\{\theta_a\}}\frac{e^{-\sum_i\beta_i\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}|\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|\{\theta_b\}\rangle, \quad (12)$$

$$= Tr(\hat{\mathcal{O}}_i\hat{\rho}) \quad (13)$$

avec $\hat{\rho} = \sum_{\{\theta_a\}}\frac{e^{-\sum_i\beta_i\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}|\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|$ et $Z = \sum_{\{\theta_a\}}e^{-\sum_i\beta_i\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}}}$ tel que $Tr(\hat{\rho}) = 1$

La matrice densité thermique est :

$$\hat{\rho}_{thermal} = \frac{e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}}}{Z_{thermal}}, \quad (14)$$

$$e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}} = \sum_{\{\theta_a\}}e^{-\beta\sum_{a=1}^N(\varepsilon(\theta_a)-\mu)}|\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}| \quad (15)$$

La matrice densité GGE avec $Z\equiv Z_{GGE}$ est :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \sum_{\{\theta_a\}}\frac{e^{-\sum_{i=1}^\infty\beta_i\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}|\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|. \quad (16)$$

Dans le cas thermique, on peut remarquer que $\langle\hat{\mathcal{N}}\rangle_{\{\theta_a\}}\propto\sum_{a=1}^N\theta_a^0$ et $\langle\hat{\mathcal{E}}\rangle_{\{\theta_a\}}\propto\sum_{a=1}^N\theta_a^2$. On peut donc réécrire $\sum_{i=1}^\infty\beta_i\langle\hat{\mathcal{O}}_i\rangle_{\{\theta_a\}}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{a=1}^{N} \theta_a^i \tag{17}$$

et pour chaque $a \in [\![1, N]\!]$: $\sum_i \alpha_i \theta_a^i$ converge donc on peut échanger les deux sommes soit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^{N} f(\theta_a) \tag{18}$$

avec $f(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i$. Et on peut réecrire la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \frac{e^{-\hat{\mathbf{Q}}[f]}}{Z_{GGE}}, \tag{19}$$

$$e^{-\hat{\mathbf{Q}}[f]} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^{N} f(\theta_a)} |\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}| \tag{20}$$

pour une certaine fonction f relié à la charge $\hat{\mathbf{Q}}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^{N} f(\theta_a)\right) |\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|$. Et on peut réecrire la probabilité de la configuration $\{\theta_a\}$: $P_{\{\theta_a\}} = \langle\{\theta_a\}|\hat{\rho}_{GGE}[f]|\{\theta_a\}\rangle = e^{-\sum_{a=1}^{N} f(\theta_a)} / Z$ avec $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^{N} f(\theta_a)}$.

Nous aimerions calculer les valeurs d'attente par rapport à cette matrice de densité, par exemple La moyenne GGE d'un observable s'écrit ,

Point clé n° 2.

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} \doteq \frac{\mathrm{Tr}(\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{GGE}[f])}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_{GGE}[f])} = \frac{\mathrm{Tr}(\hat{\mathcal{O}}e^{-\hat{\mathbf{Q}}[f]})}{\mathrm{Tr}(e^{-\hat{\mathbf{Q}}[f]})} = \frac{\sum_{\{\theta_a\}} \langle\{\theta_a\}|\hat{\mathcal{O}}|\{\theta_a\}\rangle e^{-\sum_{a=1}^{N} f(\theta_a)}}{\sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^{N} f(\theta_a)}} \tag{21}$$

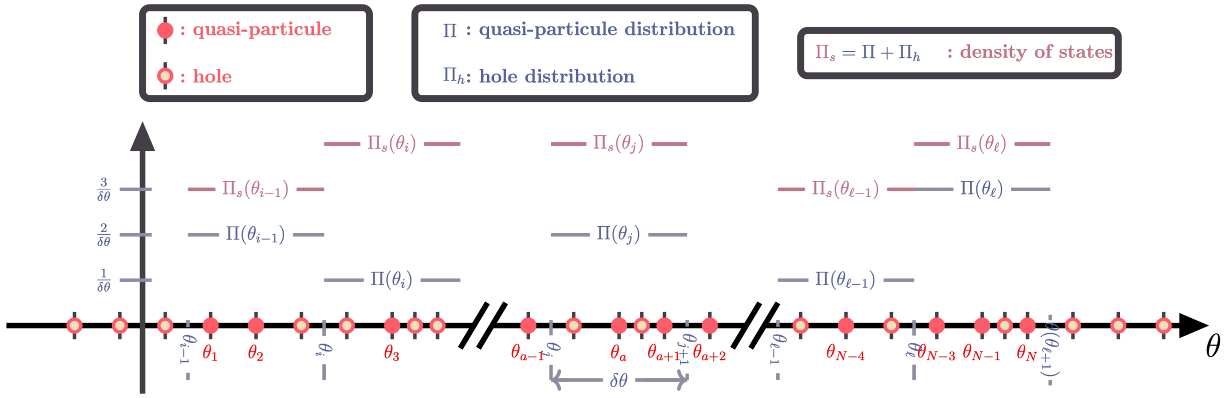
pour une certaine observable $\hat{\mathcal{O}}$.

0.1.2 La probabilité de configuration en limite thermodynamique

Dans la sous-sous-section précédente, nous avons expliqué comment les observables physiques, telles que les valeurs d'attente des charges et des courants, deviennent des fonctionnelles de la distribution de rapidité extensive $\Pi(\theta)$ dans la limite thermodynamique. Cependant, nous n'avons pas expliqué comment construire des distributions de rapidité physiquement significatives (sauf pour l'état fondamental de l'hamiltonien de Lieb-Liniger, pour lequel $\nu(\theta)$) est une fonction rectangulaire, voir la sous-section (? ?)). *Par exemple, quelle est la distribution de rapidité correspondant à un état d'équilibre thermique à une température non nulle ?*

La question a été répondue dans les travaux pionniers de Yang et Yang (1969), que nous allons maintenant examiner brièvement. Tout d'abord, nous observons qu'il existe de nombreuses choix différents de séquences d'états propres $(\{\theta_a\}_{a\in[\![1,N]\!]})_{N\in\mathbb{Z}}$ qui conduisent à la même distribution de rapidité thermodynamique (? ?). La description du système en termes de distribution de rapidité extensive $\Pi(\theta)$ est seulement une description grossière : on devrait considérer la distribution de rapidité $\Pi(\theta)$ comme caractérisant un macro-état du système, correspondant à un très grand nombre de micro-états possibles $|\{\theta_a\}\rangle$. *Pour faire de la thermodynamique, il faut estimer le nombre de ces micro-états.*

Pour estimer ce nombre, on se concentre sur une petite cellule de rapidité $[\theta, \theta + \delta\theta]$, qui contient $\Pi(\theta)\delta\theta$ rapidités.



Les équations de Bethe (? ?) relient ces rapidités aux moments de fermions pa dans une cellule de moment $[p, p+\delta p]$, où $\delta\Pi/\delta\theta$ est d'environ $2\pi\Pi_s(\theta)$, voir l'équation (? ?). Il est important de noter que les moments de fermions p_a sont soumis au principe d'exclusion de Pauli. Le nombre de micro-états est alors évalué en comptant le nombre de configurations de moments de fermions mutuellement distincts, équivalent à $\Pi(\theta)\delta\theta$, qui peuvent être placées dans la boîte $[p, p+\delta p]$. Comme l'espacement minimal entre deux moments est de $2\pi/L$, la réponse est :

$$\#\text{conf.}(\theta) \quad \approx \quad \frac{[\Pi_s(\theta)\delta\theta]!}{[\Pi(\theta)\delta\theta]![(\Pi_s(\theta)-\Pi(\theta))\delta\theta]!}, \tag{22}$$

or avec la formule de Sterling :

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}., \tag{23}$$

composé du fonction logarithmique, il vient cette équivalence :

$$\ln n! \underset{n\to\infty}{\to} n\ln n \underbrace{-n+\ln\sqrt{2\pi n}}_{o(n\ln n)}, \tag{24}$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} n\ln n \tag{25}$$

#conf. est jamais null donc on peut écrire que :

$$\ln\#\text{conf.}(\theta) \underset{\substack{\Pi\delta\theta\to\infty \\ \Pi(\theta)\leq\Pi_s(\theta)}}{\sim} [\Pi_s\ln\Pi_s - \Pi\ln\Pi - (\Pi_s-\Pi)\ln(\Pi_s-\Pi)](\theta)\delta\theta. \tag{26}$$

Le nombre total de micro-états est le produit de toutes ces configurations pour toutes les cellules de rapidité $[\theta, \theta+\delta\theta]$. En prenant le logarithme et en remplaçant la somme par une intégrale sur $d\theta$, nous obtenons l'entropie de Yang-Yang :

$$\ln\#\text{microstates.} \quad = \quad \sum_{a|tranche} \ln\#\text{conf.}(\theta_a), \tag{27}$$

$$\approx \quad \mathcal{S}_{YY}[\Pi], \tag{28}$$

$$\mathcal{S}_{YY}[\Pi] \quad \doteq \quad \sum_{a|tranche} [\Pi_s\ln\Pi_s - \Pi\ln\Pi - (\Pi_s-\Pi)\ln(\Pi_s-\Pi)](\theta_a)\delta\theta. \tag{29}$$

Les variation de f sont négligeables sur $\delta\theta$ alors $\sum_{a=1}^N f(\theta_a) = \sum_{a|tranche} f(\theta_a)\Pi(\theta_a)\delta\theta$.

$$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle_{GGE} \quad = \quad \frac{\sum_{|\{\theta_a\}\rangle|\Pi}\langle\{\theta_a\}|\hat{\mathcal{O}}|\{\theta_a\}\rangle\#\text{microstates.}e^{-\sum_{a|tranche} f(\theta_a)\Pi(\theta_a)\delta\theta}}{\sum_{|\{\theta_a\}\rangle|\Pi}\#\text{microstates.}e^{-\sum_{a|tranche} f(\theta_a)\Pi(\theta_a)\delta\theta}} \tag{30}$$

Lorsque l'observable $\hat{\mathcal{O}}$ est suffisamment local, on croit que la valeur d'attente $\langle\{\theta_a\}|\mathcal{O}|\{\theta_a\}\rangle$ ne dépend pas de l'état microscopique spécifique du système, de sorte qu'elle devient une fonctionnelle de Π dans la limite thermodynamique.

$$\lim_{\text{therm.}}\langle\{\theta_a\}|\hat{\mathcal{O}}|\{\theta_a\}\rangle \quad = \quad \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle_{[\Pi]}, \tag{31}$$

et

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} = \frac{\sum_\Pi \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\Pi]} \#\text{microstates}.e^{-\sum_{a|tranche} f(\theta_a)\Pi(\theta_a)\delta\theta}}{\sum_\Pi \#\text{microstates}.e^{-\sum_{a|tranche} f(\theta_a)\Pi(\theta_a)\delta\theta}}, \tag{32}$$

$$= \frac{\sum_\Pi \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\Pi]} e^{\mathcal{S}_{YY}[\Pi]-\sum_{a|tranche} f(\theta_a)\Pi(\theta_a)\delta\theta}}{\sum_\Pi e^{\mathcal{S}_{YY}[\Pi]-\sum_{a|tranche} f(\theta_a)\Pi(\theta_a)\delta\theta}} \tag{33}$$

$$= \sum_\Pi \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\Pi]} P_{\{\Pi\}} \tag{34}$$

avec la probabilité de la configuration $\{\Pi\}$:

$$P_{\{\Pi\}} = \frac{e^{\mathcal{S}_{YY}[\Pi]-\sum_{a|tranche} f(\theta_a)\Pi(\theta_a)\delta\theta}}{\sum_\Pi e^{\mathcal{S}_{YY}[\Pi]-\sum_{a|tranche} f(\theta_a)\Pi(\theta_a)\delta\theta}} \tag{35}$$

Il est tentant de définir une action et une fonction de partition.

0.1.3 L'action

Soit $\{\theta_a\}$ l'ensemble de rapidité où a est l'indice des tranches. La probalilité de cette configuration $\{\Pi^c(\theta_a)\}$ est :

$$P_{\{\Pi^d(\theta_a)\}} = \frac{e^{-\mathcal{A}[\Pi^c]}}{\mathcal{Z}[\Pi^c]} \tag{36}$$

avec l'action

Point clé n° 3.

$$\mathcal{A}[g] = -\mathcal{S}_{YY}[g] + \langle f, g \rangle, \tag{37}$$

qui est une fonctionnelle, et la fonction de partition $\mathcal{Z}[g] = \sum_g e^{-\mathcal{A}[g]}$. Maintenant pour simplifier on note le produit scalaire sur l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\langle f, g \rangle = \sum_{a|tranche} f(\theta_a) g(\theta_a)\delta\theta$.

On suppose que $\mathcal{A}$ est *différentiable* en tout point dans un ouvert U dans l'espace des fonction d'argument réelle et à valeur réelle. Alors

$$\mathcal{A}[g+h] \underset{h\to 0}{=} \mathcal{A}[g] + d\mathcal{A}_g(h) + o(\|h\|)$$

avec $g \mapsto d\mathcal{A}_g$ l'*application différentielle* de $\mathcal{A}$.

Si de plus $\mathcal{A}$: $U \subset \mathbb{R}^{\#tranche} \to \mathbb{R}$, alors pour $g \in U$, $\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g)$ exite pour tous a indice des tranches, et on a

$$d\mathcal{A}_g = \sum_{a|tranche} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g) dx_a,$$

où (dx_a) est la base duale dans $(\mathbb{R}^{\#tranche})^*$ de la base canonique de $\mathbb{R}^{\#tranche}$.

De plus si $\mathcal{A}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ alors on applique la *formule de Taylor-Youg* ,

$$\mathcal{A}[g+h] \underset{h\to 0}{=} \mathcal{A}[g] + \left[\sum_{a|tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g)\right] + \frac{1}{2!}\left[\sum_{a|tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g)\right]^{[2]} + \underbrace{\sum_{j=3}^{k} \frac{1}{j!}\left[\sum_{a|tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g)\right]^{[j]} + o(\|h\|^k)}_{o(\|h\|^2)},$$

avec pour $n \in [\![1,k]\!]$

$$\left[\sum_{a=1}^{\#tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g)\right]^{[n]} = \sum_{a_1+\cdots+a_{\#tranche}=n} \frac{n!}{a_1!\cdots a_{\#tranche}!} h_1^{a_1}\cdots h_{\#tranche}^{a_{\#tranche}} \frac{\partial^n \mathcal{A}}{\partial x_1^{a_1}\cdots \partial x_{\#tranche}^{a_{\#tranche}}}(g)$$

Point clé n° 4. On se restrint à $\mathcal{A}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on admet qu'il existe $g \in U$ tel que $d\mathcal{A}_g = 0$, de sorte que d'après la formule de Taylor-Young

$$\mathcal{A}[g+h] \underset{h\to 0}{=} \mathcal{A}[g] + \mathcal{Q}(h)/2 + o(\|h\|^2),$$

où $\mathcal{Q}$ est la forme quadratique

$$\mathcal{Q}(h) = \left[\sum_{a|tranche} h_a \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_a}(g)\right]^{[2]} = \sum_{a,b|tranche} h_a \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a \partial x_b}(g) h_b = \sum_{a|tranche} h_a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial {x_a}^2}(g) + 2 \sum_{\substack{a,b|tranche \\ a<b}} h_a h_b \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a \partial x_b}(g)$$

Alors

1. si $\mathcal{A}$ admet un minimum (resp. un maximum) relatif en g, $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique positive (resp. négative).
2. si $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), $\mathcal{A}$ admet une minimum (resp. un maximum) relatif en g.

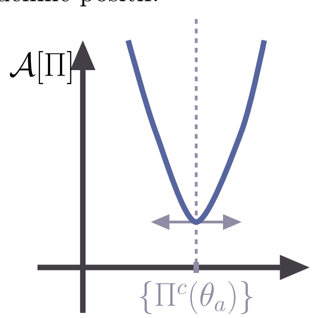
Remarque 0.1. — Si la forme quadratique $\mathcal{Q}$ est seulement supposée positive (et non pas définie positive), on n'est pas assuré d'avoir un minimum relatif en g. Par exemple, pour la fonction $\mathcal{A}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^3$ en $g = 0$, $\mathcal{Q} = 0$ est positive (elle est nulle) et pourtant, $\mathcal{A}$ n'admet pas d'extemum en 0.

— Dire que la forme quadratique $\mathcal{Q}$ est positive (resp. définie positive), c'est dire que la matrice symétrique $\hat{\mathbf{A}} = \left\{\mathcal{A}^{(2)}(g)\right\}_{a,b}$ avec $\left\{\mathcal{A}^{(2)}(g)\right\}_{a,b} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a \partial x_b}(g)\right)_{a,b}$ est positive (resp. définie positive), ou encore que les valeurs propres de $\hat{\mathbf{A}}$ sont ≥ 0 (resp. > 0). La matrice $\mathbf{A}$ est appelée *matrice hessienne* de $\hat{\mathbf{A}}$ au point critique g.

On fait l'hypothèse que la configuration $\{\Pi^c(\theta_a)\}$ du col domine tous les configurations. On note

$$\Pi = \Pi^c + \delta\Pi,$$

tel que $\mathcal{A}$ admet un minimum en Π^c et $\mathcal{Q}$ est définie positif.



On simplifie les notation avec

Pour simplifier les notations et généraliser, on note les fonction $g \equiv \Pi$. pour calculer la contribution dominante du col g^c, nous changeons de variable :

$$g = g^c + h$$

avec les fonction $g^c \equiv \Pi^c$ et $h \equiv \delta\Pi$. Et les vecteurs dans $\mathbb{R}^{\#tranche}$

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}^c + \overrightarrow{h}$$

avec les fonction $\overrightarrow{g} \equiv (\Pi(\theta_1), \cdots, \Pi(\theta_a), \cdots \Pi(\theta_{\#tranche}))$, $\overrightarrow{g}^c \equiv (\Pi^c(\theta_1), \cdots, \Pi^c(\theta_a), \cdots \Pi^c(\theta_{\#tranche}))$ et $\overrightarrow{h} \equiv (\delta\Pi(\theta_1), \cdots, \delta\Pi$

On definie la *matrice hessienne* de $\mathcal{A}$ au point critique

$$\hat{\mathbf{A}} = \left\{\mathcal{A}^{(2)}(g^c)\right\}_{a,b}$$

avec $\left\{\mathcal{A}^{(2)}(g)\right\}_{a,b} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_a \partial x_b}(g^c)\right)_{a,b}$.

$$P_{\{\Pi(\theta_a)\}} \sim B e^{-\frac{1}{2}\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h}}, \tag{38}$$

avec $B = e^{-\mathcal{A}[\Pi^c]}/Z$.
On avoue ici loi normale multidimensionelle [1]
avec la fonction de partition

$$Z \sim (2\pi)^{\#tranche/2} \det(\Sigma)^{1/2} e^{-\mathcal{A}[\Pi^c]} \tag{39}$$

Point clé n° 5. avec la matrice écartype

$$\Sigma = \hat{\mathbf{A}}^{-1} \tag{40}$$

Pourquoi une loi normal ? Notament pourquoi $Z \sim (2\pi)^{\#tranche/2} \det(\hat{\mathbf{A}})^{-1/2} e^{-\mathcal{A}[\Pi^c]}$ *?* On se pence plus sur la fonction de partition .

0.1.4 La fonction de partition

Nous rappelons que l'action $\mathcal{A}$ se réécrit

$$\mathcal{A}[g] = \mathcal{A}[g^c] + \frac{1}{2}(h, A(h)) + o(\|h\|^2), \tag{41}$$

et la fonction de partition se réécrit

1. **Loi normale multidimensionnelle**

— $x \in \mathbb{R}^N$: fonction caractéristique : $\phi_{\mu,\Sigma} = \exp\left(ix^T\mu - \frac{1}{2}x^T\Sigma x\right)$.

— cas non-dégénéré où *Sigma* est définie positive : $f_{\mu,\Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$

— théorème centrale limite fait apparaitre un variable U de Gauss centré réduite

$$\mathbb{E}(U) = 0, \qquad \mathbb{E}(U^2) = 1 \qquad p_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}$$
$$\text{si } X = \sigma U + \mu, \quad \mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathbb{E}((X-\mu)^2) = \sigma^2 \quad p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

— loi unitaire à plusieurs variable

$$\mathbb{E}(U) = 0, \quad \mathbb{E}(UU^T) = id \quad p_U(u) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\, e^{-\frac{1}{2}uu^T}$$

— loi générale à plusieurs variables

$$X = aU + \mu \quad \mathbb{E}(X) = a\mathbb{E}(U) + \mu = \mu, \quad \mathbb{E}((X-\mu)(X-\mu)^T) = \mathbb{E}(aUU^Ta^T) = aa^T = \Sigma \quad p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\Sigma|^2}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

$$\mathcal{Z}(g) \doteq \int \mathcal{D}g\, e^{-\mathcal{A}(g)} \tag{42}$$

$$= e^{-\mathcal{A}(g^c)} \int \mathcal{D}h\, e^{-\frac{1}{2}(h,A(h))}(1+o(1)). \tag{43}$$

Imaginons que $\hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{M}_{\#tranche,\#tranche}(\mathbb{R})$ et $\overrightarrow{g} \in \mathcal{M}_{\#tranche,1}(\mathbb{R})$. On introduit une autre fonction de partition

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}) = \int_{\mathbb{R}^{\#tranche}} \underbrace{dh_1 \cdots dh_{\#tranche}}_{\#tranche} e^{-\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h} + \overrightarrow{J}^t \overrightarrow{h}} \tag{44}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \overrightarrow{J}\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{\hat{\mathbf{A}}}{2\pi}\right)}}, \tag{45}$$

Nous souhaitons prouver que :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}) = \int_{\mathbb{R}^{\#tranche}} e^{-\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h} + \overrightarrow{J}^t \overrightarrow{h}}\, dh_1 \cdots dh_{\#tranche}$$

et montrer que cela donne :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \overrightarrow{J}\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{\hat{\mathbf{A}}}{2\pi}\right)}}.$$

Étape 1 : Reconnaître la forme de l'intégrale

L'intégrande est de la forme d'une distribution gaussienne multivariée. Pour le rendre plus explicite, réécrivons le terme quadratique dans l'exposant sous forme matricielle :

$$-\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h} + \overrightarrow{J}^t \overrightarrow{h} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h} + \frac{1}{2}\overrightarrow{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \overrightarrow{J} - \frac{1}{2}\overrightarrow{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \overrightarrow{J},$$

ce qui simplifie l'intégrale en :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h} + \overrightarrow{J}^t \overrightarrow{h}}\, d\overrightarrow{h}.$$

Étape 2 : Compléter le carré

Pour continuer avec l'intégration, nous devons compléter le carré dans l'exposant. Considérons la forme quadratique dans l'exposant :

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h} + \overrightarrow{J}^t \overrightarrow{h}.$$

Nous complétons le carré en ajoutant et en soustrayant le terme qui rend l'exposant un carré parfait :

$$-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h} - 2\overrightarrow{J}^t \overrightarrow{h}\right) = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{h} - \hat{\mathbf{A}}^{-1}\overrightarrow{J}\right)^t \hat{\mathbf{A}} \left(\overrightarrow{h} - \hat{\mathbf{A}}^{-1}\overrightarrow{J}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \overrightarrow{J}.$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{h} - \hat{\mathbf{A}}^{-1}\overrightarrow{J}\right)^t \hat{\mathbf{A}} \left(\overrightarrow{h} - \hat{\mathbf{A}}^{-1}\overrightarrow{J}\right)} e^{\frac{1}{2}\overrightarrow{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \overrightarrow{J}}\, d\overrightarrow{h}.$$

Étape 3 : Changement de variables

Maintenant, effectuons un changement de variables $\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{h} + \hat{\mathbf{A}}^{-1}\overrightarrow{J}$, de sorte que l'intégrande simplifie à :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}) = e^{\frac{1}{2}\overrightarrow{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \overrightarrow{J}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h}}\, d\overrightarrow{h}.$$

Étape 4 : Calcul de l'intégrale gaussienne
L'intégrale restante est une intégrale gaussienne standard. On sait que pour toute matrice $\hat{\mathbf{A}}$ définie positive :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h}} \, d\overrightarrow{h} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(\hat{\mathbf{A}})}}.$$

Ainsi, nous avons :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}) = e^{\frac{1}{2}\overrightarrow{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \overrightarrow{J}} \cdot \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(\hat{\mathbf{A}})}}.$$

Étape 5 : Expression finale
Nous exprimons maintenant le résultat final comme suit :

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{J}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \overrightarrow{J}\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{\hat{\mathbf{A}}}{2\pi}\right)}}.$$

Cela termine la démonstration.
en gardant en tête que

$$Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}) \quad \underset{\#tranche \to \infty}{\longrightarrow} \quad \int \mathcal{D}h \, e^{-\frac{1}{2}h^* \hat{\mathbf{A}} h + \overrightarrow{J}^t h}. \tag{46}$$

De plus en notant $\overrightarrow{J} = (j_1, \cdots, j_a, \cdots, j_{\#tranche})$ on remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^n} dh_1 \cdots dh_{\#tranche} \, h_a h_b \, e^{-\overrightarrow{h}^t \hat{\mathbf{A}} \overrightarrow{h} + \overrightarrow{J}^t \overrightarrow{h}} \quad = \quad \frac{d^2 Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J})}{dj_a dj_b} \tag{47}$$

$$= \quad (\hat{\mathbf{A}}^{-1})_{a,b} Z(\hat{\mathbf{A}}, \overrightarrow{J}). \tag{48}$$

Point clé n° 6. Avec avec $\overrightarrow{J} = 0$, on retrouve d'une part que si on discrétise les vecteur, fonction de partition s'écrit

$$\mathcal{Z}(g) \quad \sim \quad (2\pi)^{\#tranche/2} \det(\hat{\mathbf{A}})^{-1/2} e^{-\mathcal{A}(g^c)}, \tag{49}$$

et d'autre part que les fluctuations s'écrivent

$$\langle h_a, h_b \rangle \quad = \quad (\mathbf{A}^{-1})_{a,b} \tag{50}$$

On fait comme si c'était la même chose que

$$\lim_{\text{therm.}} \langle h_a h_b \rangle_{GGE} \quad = \quad \frac{\int \mathcal{D}g \, \langle h_a h_b \rangle_{[g]} e^{-\mathcal{A}(g)}}{\int \mathcal{D}g \, e^{-\mathcal{A}(g)}} \tag{51}$$

En revenant à $\hat{\mathbf{A}} \equiv \left\{\mathcal{A}^{(2)}\left[\Pi^c\right]\right\}$, on se motive a calculer la dériver seconde de l'action $\mathcal{A}$

0.1.5 Dérivé seconde de l'action

On garde pour l'action la notion avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\mathcal{A}[g] \quad = \quad -\mathcal{S}_{YY}[g] + \langle f, g \rangle$$

pour justement de de suite la définir. De sorte à simplifier les notations et généralister au cas discré avec des $\sum$ et continue avec des $\int$ en faisant tendre $\delta\theta$ vers 0 à savoir dans le cas continue

$$\mathcal{S}_{YY}[\Pi] \quad = \quad \int d\theta_s \, \{\Pi_s \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi) \ln(\Pi_s - \Pi)\} \, (\theta_s).$$

Définir la dérivée fonctionnelle de $\mathcal{A}$ par rapport de sa variable g, $\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta g}$, est possible s'il y a la différentiabilité au sens de Fréchet de $\mathcal{A}$ en g. Pour tous fonction h

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta g}[h] \quad \doteq \quad D_h \mathcal{A}(g) \quad (= d\mathcal{A}_g(h))$$

où $D_h \mathcal{A}$ est la dérivée directionnelle de $\mathcal{A}$ dans la direction h.

$$D_h \mathcal{A}(g) \quad = \quad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{\mathcal{A}(g + \varepsilon h) - \mathcal{A}(g)}{\varepsilon}$$

cette dérivée étant bien définie au point a car $\mathcal{A}$ est supposé différentiable en g.
La dérivée directionnelle de $\mathcal{A}$ dans la direction h s'écrie aussi

$$D_h \mathcal{A}(g) \quad = \quad \sum_{a|tranche} h(\theta_a) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial g(\theta_a)}(g)$$

La dérivé premier de l'action s'écrit :

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta g(\theta)}[g] \quad = \quad -\frac{\delta \mathcal{S}_{YY}}{\delta g(\theta)}[g] + \left\langle f, \frac{\delta g}{\delta g(\theta)} \right\rangle,$$

de plus le dérivé de l'entropie s'écrit

$$\frac{\delta S_{YY}}{\delta \Pi(\theta)}[\Pi] \quad = \quad \left\langle \ln\left(\frac{\Pi_s}{\Pi} - 1\right), \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle - \left\langle \ln\left(1 - \frac{\Pi}{\Pi_s}\right), \frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle \tag{52}$$

De plus

$$2\pi \Pi_s \quad = \quad L + \Delta \star \Pi,$$

Donc

$$\frac{\delta \Pi_s}{\delta \Pi(\theta)} \quad = \quad \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \tag{53}$$

et en remarquant que si s est pair alors

$$\langle f, s \star g \rangle \quad = \quad \langle s \star f, g \rangle$$

il viens que

$$\frac{\delta S_{YY}}{\delta \Pi(\theta)}[\Pi] \quad = \quad \left\langle \ln\left(\frac{\Pi_s}{\Pi} - 1\right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln\left(1 - \frac{\Pi}{\Pi_s}\right), \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle, \tag{54}$$

soit

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \Pi(\theta)}[\Pi] \quad = \quad \left\langle f - \ln\left(\frac{\Pi_s}{\Pi} - 1\right) + \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln\left(1 - \frac{\Pi}{\Pi_s}\right), \frac{\delta \Pi}{\delta \Pi(\theta)} \right\rangle, \tag{55}$$

or au point col Π^c, pour tout $\delta\Pi$,

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\Pi^c}(\delta\Pi) \quad = \quad 0,$$

soit

$$\forall\theta \in \ tranche \quad : \quad \frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\Pi(\theta)}[\Pi^c] = 0$$

soit

Point clé n° 7.

$$f = \ln\left(\frac{\Pi_s^c}{\Pi^c} - 1\right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln\left(1 - \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}\right)$$

Continuons vers la dérivé seconde de l'action avec

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \ln\left(\frac{\Pi_s}{\Pi} - 1\right)}{\delta\Pi(\theta')} &= \frac{\left(\Pi\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta')} - \Pi_s\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\right)}{\Pi(\Pi_s - \Pi)} \\
\frac{\delta \ln\left(1 - \frac{\Pi}{\Pi_s}\right)}{\delta\Pi(\theta')} &= \frac{\left(\Pi\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta')} - \Pi_s\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\right)}{\Pi_s(\Pi_s - \Pi)}
\end{aligned}$$

on peut remarquer que

$$\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi(\theta')\delta\Pi(\theta)}[\Pi] \quad = \quad -\frac{\delta^2\mathcal{S}_{YY}}{\delta\Pi(\theta')\delta\Pi(\theta)}[\Pi]$$

On peut continuer avec (52) , (54) ou (55), par symetrie je part de (52)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi(\theta')\delta\Pi(\theta)}[\Pi] &= \left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi} , \left((\Pi/\Pi_s)^{-1} \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} - \frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} - \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta)} + (\Pi/\Pi_s)\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta)} \right) \right\rangle, \\
&= +\left\langle \frac{(\Pi/\Pi_s)^{-1}}{\Pi_s - \Pi} , \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} \right\rangle \\
&\quad -\left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi} , \frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} + \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta)} \right\rangle \\
&\quad +\left\langle \frac{\Pi/\Pi_s}{\Pi_s - \Pi} , \frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta)} \right\rangle
\end{aligned}$$

[2]

en se rappelant de (53)

2.
et en partant de (54) ou (55) et en remarquant que que si s est une fonction pair

$$\langle s \star (f \cdot h), g\rangle \quad = \quad \langle f, h \cdot (s \star g)\rangle,$$

on reviens au meme resultat

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi(\theta')\delta\Pi(\theta)}[\Pi] &= \left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi} \left((\Pi/\Pi_s)^{-1} \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')} - \frac{\Delta}{2\pi} \star \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')} \right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left(\frac{1}{\Pi_s - \Pi} \cdot \left(1 - (\Pi/\Pi_s)\frac{\Delta}{2\pi}\star\right) \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')} \right), \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} \right\rangle, \\
&= \left\langle \frac{1}{\Pi_s - \Pi} , \left((\Pi/\Pi_s)^{-1} \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} - \frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} - \frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta)} + (\Pi/\Pi_s)\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi_s}{\delta\Pi(\theta)} \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

Point clé n° 8.

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi(\theta')\delta\Pi(\theta)}[\Pi] \quad = \quad & +\left\langle \frac{(\Pi/\Pi_s)^{-1}}{\Pi_s-\Pi}\,,\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)}\right\rangle \\ & -\left\langle \frac{1}{\Pi_s-\Pi}\,,\left(\frac{\Delta}{2\pi}\star\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\right)\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)}+\left(\frac{\Delta}{2\pi}\star\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)}\right)\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\right\rangle \\ & +\left\langle \frac{\Pi/\Pi_s}{\Pi_s-\Pi}\,,\left(\frac{\Delta}{2\pi}\star\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\right)\left(\frac{\Delta}{2\pi}\star\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)}\right)\right\rangle\end{aligned}$$

Jusque là on avais pas besoin de le définir. *Mais c'est quoi* $\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)}$ *?*

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} \quad = \quad \delta_\theta \;\equiv\; \delta(\;\cdot\;-\theta)$$

où ici δ est une fonction de Dirac et non distribution de Dirac c'est à dire

$$\delta(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} \quad &= \quad \delta_{\theta'}\delta_\theta \quad = \quad \delta_\theta\delta(\theta'-\theta), \\ \frac{\Delta}{2\pi}\star\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)} \quad &= \quad \frac{\Delta_\theta}{2\pi}\delta\theta \quad = \quad \frac{\Delta}{2\pi}(\;\cdot\;-\theta)\delta\theta\end{aligned}$$

Donc

Point clé n° 9.

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{(\Pi/\Pi_s)^{-1}}{\Pi_s-\Pi}\,,\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)}\right\rangle \quad &= \quad \left(\frac{(\Pi/\Pi_s)^{-1}}{\Pi_s-\Pi}\right)(\theta)\delta(\theta'-\theta)\delta\theta \\ \left\langle \frac{1}{\Pi_s-\Pi}\,,\left(\frac{\Delta}{2\pi}\star\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\right)\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)}+\left(\frac{\Delta}{2\pi}\star\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)}\right)\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\right\rangle \quad &= \quad \left[\left(\frac{1}{\Pi_s-\Pi}\right)(\theta)+\left(\frac{1}{\Pi_s-\Pi}\right)(\theta')\right]\frac{\Delta(\theta'-\theta)}{2\pi}\delta\theta'\delta\theta \\ \left\langle \frac{\Pi/\Pi_s}{\Pi_s-\Pi}\,,\left(\frac{\Delta}{2\pi}\star\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta')}\right)\left(\frac{\Delta}{2\pi}\star\frac{\delta\Pi}{\delta\Pi(\theta)}\right)\right\rangle \quad &= \quad \left\langle \frac{\Pi/\Pi_s}{\Pi_s-\Pi}\,,\frac{\Delta_{\theta'}}{2\pi}\frac{\Delta_\theta}{2\pi}\right\rangle\delta\theta'\delta\theta\end{aligned}$$

avec le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{\#tranche}$:

$$\langle f,g\rangle \quad = \quad \sum_{a|tranche} f(\theta_a)g(\theta_a)\delta\theta_a$$

et sur $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\langle f,g\rangle \quad = \quad \int_{\theta\in\ tranche} f(\theta)g(\theta)\delta\theta_a$$

ce qui me rassure dans mes calcules .

N.B. 0.2. et de plus

$$\frac{\delta g}{\delta g(\theta)} \quad = \quad \delta_\theta \;\equiv\; \delta(\cdot-\theta),$$

où δ est la fonction / distribution de Dirac. Mais plus l'instant pour rester général on garde $\delta g/\delta g(\theta)$.

0.1.6 Dérivé fonctionnelle

Pour insister que l'on a concsience de ce qu'est et de ce que n'est pas une dérivé fonctionnelle, On comment par donner une définition brêf admis par la comunoté physicien, mais suffisante pour la suite.

Soientt $\mathcal{F}$ une fonctionnelle et un fonctions f. Définir la dérivée fonctionnelle de $\mathcal{F}$ par rapport de sa variable f, $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta f}$, est possible s'il y a la différentiabilité au sens de Fréchet de $\mathcal{F}$ en f. Pour tous fonction h

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta f}[h] \quad \doteq \quad D_h \mathcal{F}(f)$$

où $D_h \mathcal{F}$ est la dérivée directionnelle de $\mathcal{F}$ dans la direction h.

$$D_h \mathcal{F}(f) \quad = \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{F}(f + \varepsilon h) - \mathcal{F}(f)}{\varepsilon}$$

cette dérivée étant bien définie au point f car $\mathcal{F}$ est supposé différentiable en f.

0.1.7 Tentative d'inversion de la dérivé seconde de l'action

On utilise la théorie de perturbation sur

$$\hat{\mathbf{A}} \quad = \quad \hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta \hat{\mathbf{V}}$$

avec $A^{(0)}_{\theta,\theta'} = \left(\frac{(\Pi^c/\Pi^c_s)^{-1}}{\Pi^c_s - \Pi^c} \right)(\theta)\delta\theta\delta_{\theta,\theta'}$ et $V_{\theta,\theta'} = \left\{ - \left[\left(\frac{1}{\Pi^c_s - \Pi^c} \right)(\theta) + \left(\frac{1}{\Pi^c_s - \Pi^c} \right)(\theta') \right] \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} + \left\langle \frac{\Pi^c/\Pi^c_s}{\Pi^c_s - \Pi^c}, \frac{\Delta_\theta}{2\pi} \frac{\Delta_{\theta'}}{2\pi} \right\rangle \right\} \ \delta\theta.$

On peut aussi utiliser la formule de Neuman si $|\delta\theta| \|(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}}\| < 1$,

$$(\hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta\hat{\mathbf{V}})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\delta\theta)^k ((\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}})^k (\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}$$

[3]

3.
Hypothèse de départ :
Soit A une matrice inversible et H une perturbation telle que $\|A^{-1}H\| < 1$. Cette condition garantit la convergence de la série géométrique matricielle. Nous cherchons à exprimer l'inverse de $A + H$ en termes de A^{-1} et H.
Étapes de la démonstration
Étape 1 : Formulation du problème
On commence avec l'identité matricielle fondamentale :

$$(A + H)(A + H)^{-1} \quad = \quad I$$

,
où I est la matrice identité. Multiplions par A^{-1} à gauche :

$$A^{-1}(A + H)(A + H)^{-1} \quad = \quad A^{-1}.$$

En développant le produit matriciel :

$$(I + A^{-1}H)(A + H)^{-1} \quad = \quad A^{-1}.$$

Posons $B = (A + H)^{-1}$. Cela donne :

$$(I + A^{-1}H)B \quad = \quad A^{-1}.$$

—
Étape 2 : Résolution de l'équation
Réorganisons pour isoler B :

$$B \quad = \quad (I + A^{-1}H)^{-1}A^{-1}.$$

or

$$\left((\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}}(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\right)_{\theta,\theta'} = (E_\theta^{(0)})^{-1}\delta_{\theta,\ell}V^{\ell\kappa}(E_\kappa^{(0)})^{-1}\delta_{\kappa,\theta'}$$
$$= (E_\theta^{(0)})^{-1}\delta_{\theta,\ell}V^{\ell}{}_{\theta'}(E_{\theta'}^{(0)})^{-1}$$
$$= (E_\theta^{(0)})^{-1}V_{\theta,\theta'}(E_{\theta'}^{(0)})^{-1}$$

Point clé n° 10. Donc une a l'ordre un en $\delta\theta(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}}$

$$(\hat{\mathbf{A}}^{-1})_{\theta,\theta'} = ((\Pi_s^c - \Pi^c)\Pi^c/\Pi_s^c)(\theta)\delta_{\theta,\theta'}/\delta\theta + \mathscr{F}(\theta,\theta'),$$

avec

$$\mathscr{F}(\theta,\theta') = [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta) + (\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')]\,\frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta)\frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta')\frac{\Delta(\theta'-\theta)}{2\pi}$$
$$-[(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta)(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')]\,\frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta)\frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta')\left\langle\frac{\Pi^c/\Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c},\frac{\Delta_\theta}{2\pi}\frac{\Delta_{\theta'}}{2\pi}\right\rangle$$

Ou utiliser la théorie de pertubation,

$\hat{\mathbf{A}}$ est symétrique donc diagonalisable. Elle est diagonalisable dans une base de vecteur propre orthonormé $|\varphi_\theta\rangle$ associé à la valeur propre E_θ soit

$$(\hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta\hat{\mathbf{V}}|\varphi_\theta\rangle = E_\theta|\varphi_\theta\rangle$$

avec

$$|\varphi_\theta\rangle = |\varphi_\theta^{(0)}\rangle + \delta\theta|\varphi_\theta^{(1)}\rangle + (\delta\theta)^2|\varphi_\theta^{(2)}\rangle + \cdots$$
$$E_\theta = E_\theta^{(0)} + \delta\theta E_\theta^{(1)} + (\delta\theta)^2 E_\theta^{(2)} + \cdots$$

tel que

$$\hat{\mathbf{A}}^{(0)}|\varphi_\theta^{(0)}\rangle = E_\theta^{(0)}|\varphi_\theta^{(0)}\rangle$$

Développons $(I + A^{-1}H)^{-1}$. Si $\|A^{-1}H\| < 1$, nous pouvons appliquer la formule de la série géométrique matricielle :

$$(I + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^k.$$

Substituons cette expression dans B :

$$B = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^k\right)A^{-1}.$$

En réorganisant :

$$(AH)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}H)^kA^{-1}.$$

Conditions de validité
La série converge si $\|A^{-1}H\| < 1$, c'est-à-dire que H est suffisamment "petite" par rapport à A. Cette condition garantit que $(I + A^{-1}H)^{-1}$ est bien définie et que la série géométrique converge.

Soit un Dl en $\delta\theta$

$$\begin{aligned}
|\varphi_\theta\rangle &= |\varphi_\theta^{(0)}\rangle + \delta\theta \sum_{\theta'\neq\theta} |\varphi_{\theta'}^{(0)}\rangle \frac{V_{\theta',\theta}}{E_\theta^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)}} \\
E_\theta &= E_\theta^{(0)} + \delta\theta V_{\theta,\theta} + (\delta\theta)^2 \sum_{\theta'\neq\theta} \frac{V_{\theta',\theta}^2}{E_\theta^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)}}
\end{aligned}$$

On note $\hat{\mathbf{P}}$ la matrace de passage de la base $|\varphi_\theta^{(0)}\rangle$ à $|\varphi_\theta\rangle$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{A}} &= {}^t\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}} \\
|\varphi_\theta\rangle &= \hat{\mathbf{P}}|\varphi_\theta^{(0)}\rangle
\end{aligned}$$

avec $\hat{\mathbf{D}}$ diagonale avec E_θ dans la diagonale et

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{1}} + \delta\theta\hat{\mathbf{P}}^{(1)}$$

avec

$$(\hat{\mathbf{P}}^{(1)})^\theta{}_{\theta'} = \begin{cases} \frac{V_{\theta,\theta'}}{E_\theta^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)}} & \text{si} \quad \theta \neq \theta' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

et dans la base $|\varphi_\theta^{(0)}\rangle$

$$\hat{\mathbf{A}}^{-1} = {}^t\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{D}}^{-1}\hat{\mathbf{P}}$$

avec

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{A}}^{-1})^\theta{}_{\theta'} &= \left(\hat{\delta}^\theta{}_\ell + \delta\theta(\hat{\mathbf{P}}^{(1)})_\ell{}^\theta\right)\left((E^{-1})^\ell\hat{\delta}^\ell{}_\kappa\left(\hat{\delta}^\kappa{}_{\theta'} + \delta\theta(\hat{\mathbf{P}}^{(1)})^\kappa{}_{\theta'}\right)\right) \\
&= \left(\hat{\delta}^\theta{}_\ell + \delta\theta(\hat{\mathbf{P}}^{(1)})_\ell{}^\theta\right)\left((E^{-1})^\ell\left(\hat{\delta}^\ell{}_{\theta'} + \delta\theta(\hat{\mathbf{P}}^{(1)})^\ell{}_{\theta'}\right)\right) \\
&= (E^{-1})^\theta\hat{\delta}^\theta{}_{\theta'} - \delta\theta(\hat{\mathbf{P}}^{(1)})^\theta{}_{\theta'}(E_{\theta'}^{-1} - E_\theta^{-1}) - (\delta\theta)^2(\hat{\mathbf{P}}^{(1)})^\theta{}_\ell(\hat{\mathbf{P}}^{(1)})^\ell{}_{\theta'}E_\ell^{-1}
\end{aligned}$$

car $\hat{\mathbf{P}}^{(1)}$ est antisymétrique ie $P_{\theta,\theta'}^{(1)} = -P_{\theta',\theta}^{(1)}$. Et avec

$$\begin{aligned}
E_\theta^{-1} &= \frac{1}{E_\theta^{(0)}} \frac{1}{1 + \delta\theta\frac{V_{\theta,\theta}}{E_\theta^{(0)}} + (\delta\theta)^2\sum_{\theta'\neq\theta}\frac{V_{\theta',\theta}^2}{E_\theta^{(0)}(E_\theta^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)})}} \\
&\underset{\delta\theta\to 0}{=} \frac{1}{E_\theta^{(0)}} - \delta\theta\frac{V_{\theta,\theta}}{(E_\theta^{(0)})^2} + (\delta\theta)^2\left(\frac{V_{\theta,\theta}^2}{(E_\theta^{(0)})^3} - \sum_{\theta'\neq\theta}\frac{V_{\theta',\theta}^2}{(E_\theta^{(0)})^2(E_\theta^{(0)} - E_{\theta'}^{(0)})}\right) + o(\|\delta\theta\|^3)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E_\theta^{-1} - E_{\theta'}^{-1} \underset{\delta\theta\to 0}{=} & \underbrace{\frac{1}{E_\theta^{(0)}} - \frac{1}{E_{\theta'}^{(0)}}}_{\frac{E_{\theta'}^{(0)} - E_\theta^{(0)}}{E_\theta^{(0)}E_{\theta'}^{(0)}}} + \delta\theta\left(\frac{V_{\theta',\theta'}}{(E_{\theta'}^{(0)})^2} - \frac{V_{\theta,\theta}}{(E_\theta^{(0)})^2}\right) \\
& + \underbrace{(\delta\theta)^2\left(\frac{V_{\theta,\theta}^2}{(E_\theta^{(0)})^3} - \frac{V_{\theta',\theta'}^2}{(E_{\theta'}^{(0)})^3} + \sum_{\ell\neq\theta'}\frac{V_{\ell,\theta'}^2}{(E_{\theta'}^{(0)})^2(E_{\theta'}^{(0)} - E_\ell^{(0)})} - \sum_{\ell\neq\theta}\frac{V_{\ell,\theta}^2}{(E_\theta^{(0)})^2(E_\theta^{(0)} - E_\ell^{(0)})}\right) + o(\|\delta\theta\|^3)}_{o(\|\delta\theta\|^2)}
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{\ell} P^{(1)}_{\theta,\ell} P^{(1)}_{\ell,\theta'} E_\ell^{-1} \underset{\delta\theta\to 0}{=} \sum_{\ell\notin\{\ \theta,\theta'\}} \frac{V^2_{\theta,\ell}}{E^{(0)}_\ell - E^{(0)}_\theta} \frac{V^2_{\ell,\theta'}}{E^{(0)}_{\theta'} - E^{(0)}_\ell} \frac{1}{E^{(0)}_\ell} + o(\|\delta\theta\|)$$

Donc

$$\begin{aligned}(A^{-1})_{\theta,\theta'} &= \frac{1}{E^{(0)}_\theta}\delta_{\theta,\theta'} - \delta\theta \left(\frac{\overbrace{V_{\theta,\theta'}}^{0\ si\ \theta=\theta'}}{E^{(0)}_\theta E^{(0)}_{\theta'}} \delta_{\theta\neq\theta'} + \frac{V_{\theta,\theta}}{(E^{(0)}_\theta)^2}\delta_{\theta,\theta'} \right) \\ & \underbrace{(\delta\theta)^2 \left(\frac{V^2_{\theta,\theta}}{(E^{(0)}_\theta)^3}\delta_{\theta,\theta'} - \sum_{\ell\neq\theta} \frac{V^2_{\ell,\theta}}{(E^{(0)}_\theta)^2(E^{(0)}_\theta - E^{(0)}_\ell)} + \frac{V_{\theta,\theta'}}{E^{(0)}_{\theta'} - E^{(0)}_\theta} \left(\frac{V_{\theta',\theta'}}{(E^{(0)}_{\theta'})^2} - \frac{V_{\theta,\theta}}{(E^{(0)}_\theta)^2} \right) \delta_{\theta\neq\theta'} - \sum_{\ell\notin\{\ \theta,\theta'\}} \frac{V^2_{\theta,\ell}}{E^{(0)}_\ell - E^{(0)}_\theta} \frac{}{E^{(0}_{\theta'}}}_{o(\|\delta\theta\|^2}\end{aligned}$$

Ou revenire à la définition des fluctation

La lettre E désigne un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un s.e.v de E tel que

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Soient $x \in E$ et $x_{|F}$ et la restriction de x à F.
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et les restrictions $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ de u à F , $u_{|F^\perp} \in \mathcal{L}(F^\perp)$ de u à $F^\perp$, $u_{|F,F^\perp} \in \mathcal{L}(F, F^\perp)$ et $u_{|F^\perp,F} \in \mathcal{L}(F^\perp, F)$.
Soit f une application de E à valeur dans $\mathbb{K}$ et $f_{|F}$ sa restriction à F.

On veux calculer la moyenne de $f_{|F}$

$$\langle f_{|F} \rangle = \frac{\int dx\, f_{|F}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right)}{\int dx\, \exp\left(-\frac{1}{2}(x, u(x))\right)}$$

Je veux calculer les produit scalaire $(x, u(x))$ selon les différentes restriction.

Pour visualiser les calcules plus facilement on note $\hat{\mathbf{U}}$ la représentation matritielle de u dans une basse orthogonale. Et bien que l'écriture soit faux mais pratique, on écrit

$$(x, u(x)) = \begin{pmatrix} x_{|F} & x_{|F^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}_{|F} & \hat{\mathbf{U}}_{|F,F^\perp} \\ \hat{\mathbf{U}}_{|F^\perp,F} & \hat{\mathbf{U}}_{|F^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{|F} \\ x_{|F^\perp} \end{pmatrix},$$

Soit

$$(x, u(x)) = \left(x_{|F}, u_{|F}\left(x_{|F}\right)\right) + \left(x_{|F}, u_{|F,F^\perp}\left(x_{|F^\perp}\right)\right) + \left(x_{|F^\perp}, u_{|F^\perp,F}\left(x_{|F}\right)\right) + \left(x_{|F^\perp}, u_{|F^\perp}\left(x_{|F^\perp}\right)\right)$$

De plus u est auto-adjoint donc

$$\begin{aligned}\left(x_{|F^\perp}, u_{|F^\perp,F}\left(x_{|F}\right)\right) &= \left(x_{|F}, u_{|F,F^\perp}\left(x_{|F^\perp}\right)\right) \\ &= \left(u_{|F^\perp,F}\left(x_{|F}\right), x_{|F^\perp}\right)\end{aligned}$$

Soit

$$(x, u(x)) = \left(x_{|F}, u_{|F}\left(x_{|F}\right)\right) + 2\left(u_{|F^\perp,F}\left(x_{|F}\right), x_{|F^\perp}\right) + \left(x_{|F^\perp}, u_{|F^\perp}\left(x_{|F^\perp}\right)\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}\int dx\, f_{|F}(x)\exp\left(-\frac{1}{2}(x,u(x))\right) &= \int dx_{|F}\, f(x_{|F})\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F},u_{|F}\left(x_{|F}\right)\right)\right)\\ &\quad\times\int dx_{|F^\perp}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F^\perp},u_{|F^\perp}\left(x_{|F^\perp}\right)\right)-\left(u_{|F^\perp,F}\left(x_{|F}\right),x_{|F^\perp}\right)\right)\end{aligned}$$

or pour u par forcement auto-adjoint

$$\int dx\ \exp\left(-\frac{1}{2}(x,u(x))+(b,x)\right) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(b,u^{-1}(b))\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{u}{2\pi}\right)}}$$

donc

$$\begin{aligned}\int dx_{|F^\perp}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F^\perp},u_{|F^\perp}\left(x_{|F^\perp}\right)\right)-\left(u_{|F^\perp,F}\left(x_{|F}\right),x_{|F^\perp}\right)\right) &= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\left(u_{|F^\perp,F}\left(x_{|F}\right),\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\left(u_{|F^\perp,F}\left(x_{|F}\right)\right)\right)\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{u_{|F^\perp}}{2\pi}\right)}}\\ &= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\left(x_{|F},\left(u_{|F,F^\perp}\circ\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}\right)\left(x_{|F}\right)\right)\right)}{\sqrt{\det\left(\frac{u_{|F^\perp}}{2\pi}\right)}}\end{aligned}$$

donc

$$\int dx\, f_{|F}(x)\exp\left(-\frac{1}{2}(x,u(x))\right) = \int dx_{|F}\, f(x_{|F})\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F},\left(u_{|F}-u_{|F,F^\perp}\circ\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}\right)\left(x_{|F}\right)\right)\right)/\sqrt{\det\left(\frac{u_{|F^\perp}}{2\pi}\right)}$$

Ce qui nous rassure car

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{u}{2\pi}\right)}} &= \int dx\ \exp\left(-\frac{1}{2}(x,u(x))\right)\\ &= \int dx_{|F}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F},u_{|F}\left(x_{|F}\right)\right)\right)\\ &\quad\times\int dx_{|F^\perp}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F^\perp},u_{|F^\perp}\left(x_{|F^\perp}\right)\right)-\left(u_{|F^\perp,F}\left(x_{|F}\right),x_{|F^\perp}\right)\right)\\ &= \int dx_{|F}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F},\left(u_{|F}-u_{|F,F^\perp}\circ\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}\right)\left(x_{|F}\right)\right)\right)/\sqrt{\det\left(\frac{u_{|F^\perp}}{2\pi}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{u_{|F}-u_{|F,F^\perp}\circ\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}}{2\pi}\right)\det\left(\frac{u_{|F^\perp}}{2\pi}\right)}}\end{aligned}$$

et d'aprés les complement et déterminent de Schur on a

$$\det(u) = \det\left(u_{|F^\perp}\right)\det\left(u_{|F}-u_{|F,F^\perp}\circ\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}\right)$$

Donc ça me rassure.

Donc

$$
\begin{aligned}
\langle f_{|F}\rangle &= \frac{\int dx_{|F}\, f(x_{|F})\, \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F}, \left(u_{|F} - u_{|F,F^\perp}\circ\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}\right)(x_{|F})\right)\right)}{\int dx_{|F}\, \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F}, \left(u_{|F} - u_{|F,F^\perp}\circ\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}\right)(x_{|F})\right)\right)},\\
&= \sqrt{\det\left(\frac{u_{|F} - u_{|F,F^\perp}\circ\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}}{2\pi}\right)}\int dx_{|F}\, f(x_{|F})\, \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F}, \left(u_{|F} - u_{|F,F^\perp}\circ\left(u_{|F^\perp}\right)^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}\right)(x_{|F})\right)\right)
\end{aligned}
$$

Point clé n° 11. On peut noter que

$$
\left(\left(u^{-1}\right)_{|F}\right)^{-1} = u_{|F} - u_{|F,F^\perp}\circ(u_{|F^\perp})^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(u)\det\left(\left(u^{-1}\right)_{|F^\perp}\right) &= \det\left(u_{|F}\right)\\
\det(u)\det\left(\left(u^{-1}\right)_{|F}\right) &= \det\left(u_{|F^\perp}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle f_{|F}\rangle &= \frac{\int dx\, f_{|F}(x)\exp\left(-\frac{1}{2}(x,u(x))\right)}{\int dx\, \exp\left(-\frac{1}{2}(x,u(x))\right)}\\
&= \int dx_{|F}\, f(x_{|F})\, \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_{|F}, \left(\left(\left(u^{-1}\right)_{|F}\right)^{-1}\right)(x_{|F})\right)\right)\Big/\sqrt{\det\left(2\pi\left(u^{-1}\right)_{|F}\right)}
\end{aligned}
$$

or pour $(x_i,x_j)\in F^2$ et u inversible

$$
\int dx\, x_i x_j \exp\left(-\frac{1}{2}(x,u(x))\right) = \frac{(e_i, u^{-1}(e_j))}{\sqrt{\det\left(\frac{u}{2\pi}\right)}}
$$

Donc

$$
\langle x_i x_j\rangle = \left(e_i, \overbrace{\left(u_{|F} - u_{|F,F^\perp}\circ(u_{|F^\perp})^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}\right)^{-1}}^{\left(u^{-1}\right)_{|F}}(e_j)\right)
$$

Point clé n° 12. Or $u_{|F}$ est inversible donc on peut écrire que

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\left(u_{|F} - u_{|F,F^\perp}\circ(u_{|F^\perp})^{-1}\circ u_{|F^\perp,F}\right)^{-1}}^{\left(u^{-1}\right)_{|F}} &= \left(u_{|F}\right)^{-1} +\\
&+ \left(u_{|F}\right)^{-1}\circ u_{|F,F^\perp}\circ \overbrace{\left(u_{|F^\perp} - u_{|F^\perp,F}\circ\left(u_{|F}\right)^{-1}\circ u_{|F,F^\perp}\right)^{-1}}^{\left(u^{-1}\right)_{|F^\perp}} \circ u_{|F^\perp,F}\circ\left(u_{|F}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Donc pour $(x_i,x_j)\in F^2$ et u inversible

$$
\begin{aligned}
\langle x_i x_j \rangle &= \left(e_i, \left(u^{-1}\right)_{|F}(e_j)\right), \\
&= \left(e_i, \left(\left(u_{|F}\right)^{-1} + \left(u_{|F}\right)^{-1} \circ u_{|F,F^\perp} \circ \left(u^{-1}\right)_{|F^\perp} \circ u_{|F^\perp,F} \circ \left(u_{|F}\right)^{-1}\right)(e_j)\right).
\end{aligned}
$$

Point clé n° 13.

$$
\begin{aligned}
\left(u^{-1}\right)_{|F} &= \left(u_{|F}\right)^{-1} + \left(u_{|F}\right)^{-1} \circ u_{|F,F^\perp} \circ \left(u_{|F^\perp}\right)^{-1} \circ u_{|F^\perp,F} \circ \left(u_{|F}\right)^{-1} + \\
&+ \left(u_{|F}\right)^{-1} \circ u_{|F,F^\perp} \circ \left(u_{|F^\perp}\right)^{-1} \circ u_{|F^\perp,F} \circ \left(u^{-1}\right)_{|F} \circ u_{|F,F^\perp} \circ \left(u_{|F^\perp}\right)^{-1} \circ u_{|F^\perp,F} \circ \left(u_{|F}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \left(u_{|F}\right)^{-1} \circ u_{|F,F^\perp}, \\
p_2 &= \left(u_{|F^\perp}\right)^{-1} \circ u_{|F^\perp,F}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(u^{-1}\right)_{|F} &= \sum_{i=0}^{\infty} (p_1 \circ p_2)^i \circ \left(\left(u_{|F}\right)^{-1} + p_1 \circ \left(u_{|F^\perp}\right)^{-1} \circ p_i^*\right) \circ ((p_1 \circ p_2)^*)^i + \\
&+ \lim_{i \to \infty} (p_1 \circ p_2)^i \left(u^{-1}\right)_{|F} ((p_1 \circ p_2)^*)^i
\end{aligned}
$$

Pour $i = j$ on prend $F_i = \mathbf{Vect}(e_i)$ soit

$$
\langle x_i^2 \rangle = \left(e_i, \left(u_{|F_i} - u_{|F_i,F_i^\perp} \circ u^{-1}_{|F_i^\perp} \circ u_{|F_i^\perp,F_i}\right)^{-1}(e_i)\right)
$$

Pour $i \neq j$ on prend $F_{ij} = \mathbf{Vect}(e_i, e_j)$ soit

$$
\langle x_i x_j \rangle = \left(e_i, \left(u_{|F_{ij}} - u_{|F_{ij},F_{ij}^\perp} \circ u^{-1}_{|F_{ij}^\perp} \circ u_{|F_{ij}^\perp,F_{ij}}\right)^{-1}(e_j)\right)
$$

0.1.8 Fluctuation de ν

$$
\mathcal{S}_{YY}[\Pi] = \langle \Pi_s \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi)\ln(\Pi_s - \Pi), 1 \rangle
$$

Or

$$
\Pi_s \ln \Pi_s = (\Pi_s - \Pi) \ln \Pi_s + \Pi \ln \Pi_s
$$

Soit

$$
\begin{aligned}
\Pi_s \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi)\ln(\Pi_s - \Pi) &= (\Pi_s - \Pi) \ln \Pi_s + \Pi \ln \Pi_s - \Pi \ln \Pi - (\Pi_s - \Pi)\ln(\Pi_s - \Pi) \\
&= (\Pi_s - \Pi) \ln\left(\frac{\Pi_s}{\Pi_s - \Pi}\right) + \Pi \ln\left(\frac{\Pi_s}{\Pi}\right) \\
&= -\Pi_s \left\{ \left(1 - \frac{\Pi}{\Pi_s}\right) \ln\left(1 - \frac{\Pi}{\Pi_s}\right) + \frac{\Pi}{\Pi_s} \ln\left(\frac{\Pi}{\Pi_s}\right) \right\} \\
&\underset{\substack{\Pi_s = L\rho_s \\ \Pi = L\rho \\ \nu = \frac{\Pi}{\Pi_s}}}{=} -L\rho_s \left\{ (1-\nu)\ln(1-\nu) + \nu \ln(\nu) \right\}
\end{aligned}
$$

Donc

$$\mathcal{S}_{YY}[\Pi] \quad = \quad -L\left\langle (1-\nu)\ln(1-\nu) + \nu\ln(\nu)\,, \rho_s \right\rangle$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\delta[(1-\nu)\ln(1-\nu)]}{\delta\nu(\theta)} &= -\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)}\,\{1+\ln(1-\nu)\} \\
\frac{\delta[\,\nu\ln\nu]}{\delta\nu(\theta)} &= \frac{\partial\nu}{\partial\nu(\theta)}(1+\ln\nu)
\end{aligned}$$

Donc

$$-\frac{\delta[(1-\nu)\ln(1-\nu)+\nu\ln\nu]}{\delta\nu(\theta)} \quad = \quad \frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)}\ln\left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)$$

Donc

$$\frac{\delta\mathcal{S}_{YY}}{\delta\nu(\theta)}[\nu\rho_s] \quad = \quad \left\langle \ln\left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)\rho_s, \frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)}\right\rangle - \left\langle (1-\nu)\ln(1-\nu)+\nu\ln\nu, \frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)}\right\rangle$$

On rappelle que

$$\mathcal{A}[\nu\rho_s] \quad = \quad -\mathcal{S}_{YY}[\nu\rho_s] + \langle f, \nu\rho_s\rangle$$

Donc

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\nu(\theta)}[\nu\rho_s] \quad = \quad \left\langle \left(f - \ln\left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)\right)\rho_s, \frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)}\right\rangle + \left\langle (1-\nu)\ln(1-\nu)+\nu\left(\ln\nu+f\right), \frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)}\right\rangle$$

et on a vu que

$$f \quad = \quad \ln\left(\frac{1-\nu^c}{\nu^c}\right) - \frac{\Delta}{2\pi}\star\ln(1-\nu^c)$$

De plus

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\ln\left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)}{\delta\nu(\theta')} &= -\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)}\left\{\frac{1}{1-\nu}+\frac{1}{\nu}\right\} \\
&= -\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)}\left\{\frac{1}{(1-\nu)\nu}\right\}
\end{aligned}$$

Donc

Point clé n° 14.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\nu(\theta')\delta\nu(\theta)}[\nu\rho_s] \quad = \quad & \left\langle \frac{\rho_s}{(1-\nu)\nu}, \frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta')}\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)}\right\rangle \\
& + \left\langle \left(f-\ln\left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)\right), \left(\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta')}\frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)} + \frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)}\frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta')}\right)\right\rangle \\
& + \left\langle (1-\nu)\ln(1-\nu)+\nu\left(\ln\nu+f\right), \frac{\delta^2\rho_s}{\delta\nu(\theta')\delta\nu(\theta)}\right\rangle
\end{aligned}$$

On rappelle aussi que

$$2\pi\rho_s \quad = \quad 1 + \Delta \star (\nu \cdot \rho_s) \;=\; 1^{dr}$$

Soit

$$\mathcal{L}[\rho_s] \quad = \quad \frac{1}{2\pi}$$

avec

$$\mathcal{L} \quad : \quad f \mapsto f - \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu \cdot f)$$

De plus

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)} - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left(\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)} \cdot \rho_s\right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left(\nu \cdot \frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)}\right) \quad &= \quad 0 \\
\frac{\delta^\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta')\delta\nu(\theta)} - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left(\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta')} \cdot \frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)} + \frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)} \cdot \frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta')}\right) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \left(\nu \cdot \frac{\delta^2\rho_s}{\delta\nu(\theta')\delta\nu(\theta)}\right) \quad &= \quad 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)}\right) \quad &= \quad \frac{\Delta}{2\pi} \star \left(\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)} \cdot \rho_s\right) \\
\mathcal{L}\left(\frac{\delta^\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta')\delta\nu(\theta)}\right) \quad &= \quad \frac{\Delta}{2\pi} \star \left(\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta')} \cdot \frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)} + \frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)} \cdot \frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta')}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)} \quad &= \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Delta}{2\pi} \star \left(\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)} \cdot \rho_s\right)\right) \\
\frac{\delta^\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta')\delta\nu(\theta)} \quad &= \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Delta}{2\pi} \star \left(\frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta')} \cdot \frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta)} + \frac{\delta\nu}{\delta\nu(\theta)} \cdot \frac{\delta\rho_s}{\delta\nu(\theta')}\right)\right)
\end{aligned}$$

Cherchons $\mathcal{L}^{-1}$

Notons

$$\mathcal{L}(f) \quad = \quad g$$

On rappelle que les transformée de Fourier . Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{K})$:

$$\hat{f} \doteq \mathcal{F}[x \mapsto f(x)] \colon \kappa \mapsto \alpha \int e^{\mp i\gamma\kappa x} f(x)dx, \quad f \equiv \mathcal{F}^{-1}[\kappa \mapsto \hat{f}(\kappa)] \colon x \mapsto \beta \int e^{\pm i\gamma\kappa x} \hat{f}(\kappa)d\kappa, \quad \gamma = 2\pi\alpha\beta$$

Avec cette définition

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f \cdot g] \quad &= \quad \beta\mathcal{F}[f] \star \mathcal{F}[g] \\
\mathcal{F}^{-1}[f \cdot g] \quad &= \quad \alpha\mathcal{F}^{-1}[f] \star \mathcal{F}^{-1}[g] \\
\mathcal{F}[f \star g] \quad &= \quad \alpha^{-1}\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \\
\mathcal{F}^{-1}[f \star g] \quad &= \quad \beta^{-1}\mathcal{F}^{-1}[f] \cdot \mathcal{F}^{-1}[g]
\end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{F}[\mathcal{L}(f)] \quad \doteq \quad \hat{f} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\hat{\Delta}}{2\pi} \cdot (\hat{\nu} \star \hat{f}) \;=\; \hat{g}$$

On note le noyau

$$K(\kappa, \varrho) \quad \equiv \quad \hat{\Delta}(\kappa)\hat{\nu}(\kappa - \varrho)$$

$$\mathcal{F}[\mathcal{L}(f)](\kappa) \quad \doteq \quad \int d\varrho \left[\delta(\kappa - \varrho) - \frac{\beta}{\alpha}\frac{K(\kappa, \varrho)}{2\pi}\right] \hat{f}(\varrho) \;=\; \hat{g}(\kappa)$$

on note

$$\hat{L}(\kappa, \varrho) \quad = \quad \delta(\kappa - \varrho) - \frac{\beta}{\alpha}\frac{K(\kappa, \varrho)}{2\pi}$$

soit

$$\hat{\mathbf{L}} \quad = \quad \hat{\mathbf{1}} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\hat{\mathbf{K}}}{2\pi}$$

Supposons que la norme de $\frac{\beta}{\alpha}\frac{\hat{\mathbf{K}}}{2\pi} \ll 1$ alors

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}^{-1} \quad &= \quad \left(\hat{\mathbf{1}} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\hat{\mathbf{K}}}{2\pi}\right)^{-1} \\
&= \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\hat{\mathbf{K}}}{2\pi}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\hat{f}(\varrho) \quad = \quad \int d\kappa \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{K(\kappa, \varrho)}{2\pi}\right)^{n} \hat{g}(\kappa)$$

Soit

$$\begin{aligned}
f(y) \quad &= \quad \int d\kappa \hat{g}(\kappa) \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{2\pi}\right)^{n} \mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto (K(\kappa, \varrho))^{n}](y) \\
&= \quad \int d\kappa \hat{g}(\kappa) \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{2\pi}\right)^{n} \alpha^{n-1} \underbrace{\mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto (K(\kappa, \varrho))] \star \cdots \star \mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto (K(\kappa, \varrho))]}_{n\times}(y)
\end{aligned}$$

Or

$$\mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto \hat{\nu}(\kappa - \varrho)] = e^{\pm i\gamma\kappa y}\nu(-y)$$

et

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}(\kappa) \quad &= \quad \alpha \int \frac{2c}{c^2 + \theta^2} e^{\mp i\gamma\kappa\theta} d\theta \\
&= \quad 2\alpha \int \frac{1}{1 + u^2} e^{\mp i\gamma c\kappa u}
\end{aligned}$$

or

$$\int \frac{e^{-iku}}{u^2+a^2}du \quad = \quad \frac{\pi}{a}e^{-a|k|}$$

Donc

$$\hat{\Delta}(\kappa) \quad = \quad 2\alpha\pi e^{-|\gamma c\kappa|}$$

Donc

$$\mathcal{F}^{-1}[\varrho \mapsto K(\kappa,\varrho)] = 2\pi\alpha e^{-|\gamma c\kappa|}\ e^{\pm i\gamma\kappa y}\nu(-y)$$

Donc

$$f(y) \quad = \quad \int d\kappa \hat{g}(\kappa)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\alpha^{n-1}e^{-n|\gamma c\kappa|}\underbrace{[x\mapsto e^{\pm i\gamma\kappa x}\nu(-x)]\star\cdots\star[x\mapsto e^{\pm i\gamma\kappa x}\nu(-x)]}_{n\times}(y)$$

0.1.9 Brouillons

$$\langle\delta\rho(\theta)\delta\rho(\theta')\rangle \quad = \quad \left(\hat{\mathbf{A}}^{-1}\right)_{\theta,\theta'}$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}_{\theta,\theta'} \quad = \quad & \frac{1}{\nu(\theta)(\rho_s(\theta)-\rho(\theta))}\delta(\theta'-\theta)\delta\theta \\ & -\frac{\Delta(\theta-\theta')}{2\pi}\left(\frac{1}{\rho_s(\theta)-\rho(\theta)}+\frac{1}{\rho_s(\theta')-\rho(\theta')}\right)\delta\theta\delta\theta' \\ & +\int d\theta''\frac{\Delta(\theta-\theta'')}{2\pi}\frac{\Delta(\theta'-\theta'')}{2\pi}\frac{\nu(\theta'')}{\rho_s(\theta'')-\rho(\theta'')}\delta\theta\delta\theta'\end{aligned}$$

0.1.10 Résumé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux fluctuations de la distribution de rapidité $\delta\Pi$ autour d'une distribution de référence Π^c, qui maximise la contribution à la fonction de partition des états, exprimée comme une fonctionnelle de la distribution Π :

$$\mathcal{Z} \quad = \quad \sum_{\Pi}\exp\left(-\mathcal{A}(\Pi)\right).$$

Dans la section **Entropie de Yang-Yang** (**??**), l'action $\mathcal{A}(\Pi)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}(\Pi) \quad \doteq \quad -\mathcal{S}_{YY}(\Pi)+\int f(\theta)\Pi(\theta)\,d\theta,$$

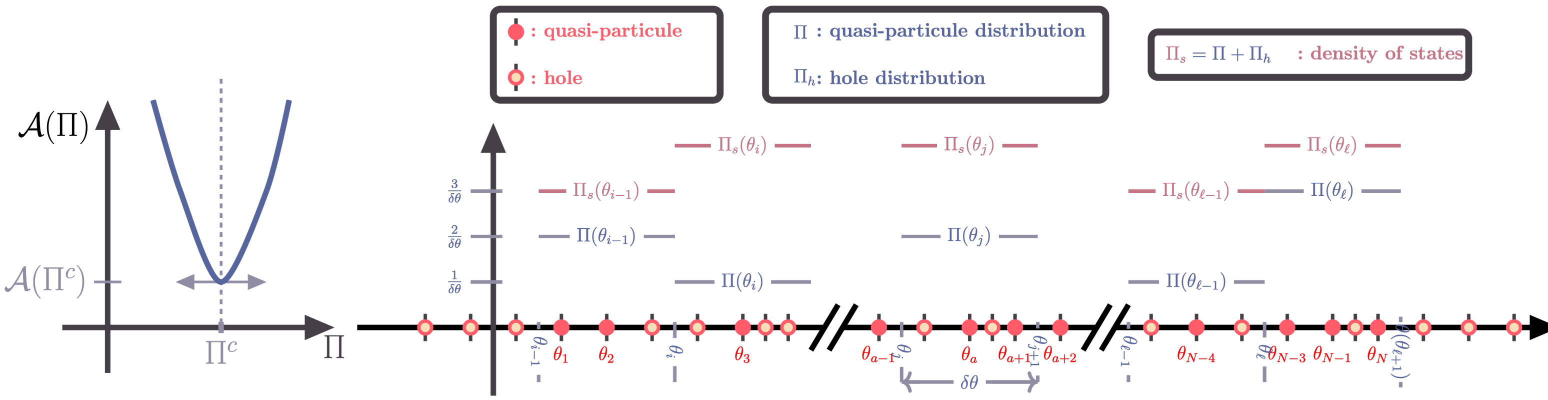
où $\mathcal{S}_{YY}$ est la fonctionnelle d'entropie de Yang-Yang, définie dans (**??**), et f est la fonction paramétrant les charges, introduite dans (**??**).

Dans cette même section **Entropie de Yang-Yang** (**??**), nous avons établi un lien entre f et Π^c.

Nous poursuivons à présent avec cette définition de l'action de classe $\mathcal{C}^2$ et admetant une distribution critique Π^c tel que sa différentielle en ce point critique soit nulle $d\mathcal{A}_{\Pi^c}=0$ (**??**) de sorte que d'aprés la formule de Taylor-Youg

$$\mathcal{A}(\Pi^c + \delta\Pi) \underset{\delta\Pi\to 0}{=} \mathcal{A}(\Pi^c) + \frac{1}{2}\left.\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi^2}\right|_{\Pi^c}(\delta\Pi)^2 + \mathcal{O}((\delta\Pi)^3),$$

une expression quadratique pour l'action à l'ordre dominant en $\delta\Pi$ avec $\left.\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi^2}\right|_{\Pi^c}$ la forme quadratique définie positive (Fig (**??**)).



On discrétise l'axe des rapidités en petite cellule de rapidité $[\theta, \theta + \delta\theta]$, qui contient $\Pi(\theta)\delta\theta$ rapidités.
Avec ces petites tranches, la forme quadratique s'écrit :

$$\left.\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi^2}\right|_{\Pi^c}(\delta\Pi) = \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a)\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta_a)\partial\delta\Pi(\theta_b)}(\Pi^c)\delta\Pi(\theta_b).$$

Les fluctuations s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\langle\delta\Pi(\theta)\delta\Pi(\theta')\rangle &= \frac{\int d\delta\Pi\,\delta\Pi(\theta)\delta\Pi(\theta')\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{a,b|\text{tranche}}\delta\Pi(\theta_a)\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta_a)\partial\delta\Pi(\theta_b)}(\Pi^c)\delta\Pi(\theta_b)\right)}{\int d\delta\Pi\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{a,b|\text{tranche}}\delta\Pi(\theta_a)\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta_a)\partial\delta\Pi(\theta_b)}(\Pi^c)\delta\Pi(\theta_b)\right)} \\ &= \left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{\theta,\theta'}\end{aligned}$$

La *matrice hessienne* $\mathbf{A}_{\theta,\theta'} \equiv \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta)\partial\delta\Pi(\theta')}(\Pi^c)$, au point critique Π^c, s'écrit

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta\hat{\mathbf{V}}$$

avec

$$\begin{aligned}A^{(0)}_{\theta,\theta'} &= \left(\frac{(\Pi^c/\Pi^c_s)^{-1}}{\Pi^c_s - \Pi^c}\right)(\theta)\delta\theta\delta_{\theta,\theta'}, \\ V_{\theta,\theta'} &= \left\{-\left[\left(\frac{1}{\Pi^c_s - \Pi^c}\right)(\theta) + \left(\frac{1}{\Pi^c_s - \Pi^c}\right)(\theta')\right]\frac{\Delta(\theta'-\theta)}{2\pi} + \int d\theta''\left(\frac{\Pi^c/\Pi^c_s}{\Pi^c_s - \Pi^c}\right)(\theta'')\frac{\Delta(\theta''-\theta)}{2\pi}\frac{\Delta(\theta''-\theta')}{2\pi}\right\}\delta\theta\end{aligned}$$

Point clé n° 15. Donc une a l'ordre un en $\delta\theta(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}}$

$$\langle\delta\Pi(\theta)\delta\Pi(\theta')\rangle = ((\Pi^c_s - \Pi^c)\Pi^c/\Pi^c_s)(\theta)\delta_{\theta,\theta'}/\delta\theta + \mathscr{F}(\theta,\theta'),$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}(\theta,\theta') &= \left[(\Pi^c_s-\Pi^c)(\theta)+(\Pi^c_s-\Pi^c)(\theta')\right]\frac{\Pi^c}{\Pi^c_s}(\theta)\frac{\Pi^c}{\Pi^c_s}(\theta')\frac{\Delta(\theta'-\theta)}{2\pi} \\
&\quad -\left[(\Pi^c_s-\Pi^c)(\theta)(\Pi^c_s-\Pi^c)(\theta')\right]\frac{\Pi^c}{\Pi^c_s}(\theta)\frac{\Pi^c}{\Pi^c_s}(\theta')\int d\theta''\left(\frac{\Pi^c/\Pi^c_s}{\Pi^c_s-\Pi^c}\right)(\theta'')\frac{\Delta(\theta''-\theta)}{2\pi}\frac{\Delta(\theta''-\theta')}{2\pi}
\end{aligned}
$$

0.1.11