Annexe C

Dérivation alternative des fluctuations de ρ

Dans cette annexe, nous proposons une seconde dérivation des fluctuations de la densité de rapidités ρ, différente de celle présentée au chapitre 4. Cette approche m'a été suggérée par Jérôme Dubail (Centre européen de sciences quantiques (CESQ)). Elle présente l'intérêt de passer directement par les fluctuations du facteur d'occupation ν, et constitue également une bonne occasion de manipuler les dérivées de l'opérateur *d'habillage*.

C.1 Réécriture de l'entropie de Yang–Yang

L'entropie de Yang–Yang s'écrit

$$\mathcal{S}_{YY} = \int d\theta \Big(\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho)\Big)(\theta). \tag{C.1}$$

En introduisant le facteur d'occupation

$$\nu = \frac{\rho}{\rho_s}, \tag{C.2}$$

l'intégrande peut se réécrire sous la forme

$$\mathcal{S}_{YY} = \int d\theta\, s(\nu(\theta))\, \rho_s(\theta), \tag{C.3}$$

où la fonction d'entropie locale est donnée par

$$s(\nu) = -\nu \ln \nu - (1-\nu) \ln(1-\nu). \tag{C.4}$$

C.2 Différentielle de l'action effective

On définit l'action effective comme

$$\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}, \tag{C.5}$$

où $\mathcal{W}$ est l'énergie généralisée,

$$\mathcal{W} = \int d\theta\, w(\theta)\, \rho(\theta). \tag{C.6}$$

Sa différentielle est donnée par

$$\delta(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \Big(\delta\nu\, s'(\nu)\, \rho_s + s(\nu)\, \delta\rho_s - w\, \delta\rho\Big)(\theta). \tag{C.7}$$

En remarquant que

$$\delta\nu\,\rho_s = \delta\rho - \nu\,\delta\rho_s, \tag{C.8}$$

on réécrit (C.7) sous la forme

$$\delta(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) \quad = \quad \int d\theta \left(\{s'(\nu) - w\}\delta\rho + \{s(\nu) - \nu\, s'(\nu)\}\delta\rho_s \right)(\theta). \tag{C.9}$$

On obtient alors la différentielle seconde :

$$\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) \quad = \quad \int d\theta \left(\delta\nu\, s''(\nu)\,\delta\rho - \nu\,\delta\nu\, s''(\nu)\,\delta\rho_s \right)(\theta). \tag{C.10}$$

En utilisant (C.8), on simplifie pour obtenir

$$\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) \quad = \quad \int d\theta \left((\delta\nu)^2\, s''(\nu)\,\rho_s \right)(\theta), \tag{C.11}$$

avec

$$s''(\nu) \quad = \quad -\frac{1}{\nu(1-\nu)}. \tag{C.12}$$

C.3 Fluctuations

C.3.1 Fluctuations des facteurs d'occupation

Les fluctuations du facteur d'occupation s'écrivent

$$\langle \delta\nu(\theta')\,\delta\nu(\theta) \rangle_w \quad = \quad -\left[L \frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W})}{\delta\nu\,\delta\nu} \right]^{-1}(\theta, \theta'). \tag{C.13}$$

En injectant (C.11), il vient

$$\langle \delta\nu(\theta')\,\delta\nu(\theta) \rangle_w \quad = \quad -\,s''(\nu(\theta))\,\rho_s(\theta)\,\delta(\theta - \theta'), \tag{C.14}$$

qui est purement diagonale.

C.3.2 Opérateur d'habillage

On rappelle la définition de l'opérateur d'habillage :

$$f^{\mathrm{dr}}_{[\nu]} = f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu\, f^{\mathrm{dr}}_{[\nu]}). \tag{C.15}$$

En remarquant que

$$C(\theta, \lambda) = \left[\frac{\Delta(\lambda - \cdot)}{2\pi} \right]^{\mathrm{dr}}_{[\nu]}(\theta), \tag{C.16}$$

qui est symétrique, on peut réécrire [DS17]

$$f^{\mathrm{dr}}_{[\nu]}(\theta) \quad = \quad \int d\lambda\, f(\lambda) \left(\delta(\theta - \lambda) + \nu(\lambda)\, C(\theta, \lambda) \right). \tag{C.17}$$

C.3.3 Fluctuations des distributions de rapidité

On a vu que

$$2\pi\,\rho_s(\theta) \quad = \quad 1^{\mathrm{dr}}_{[\nu]}(\theta) = \int d\lambda\,\Big(\delta(\theta-\lambda) + \nu(\theta)\,C(\theta,\lambda)\Big), \tag{C.18}$$

d'où

$$2\pi\,\delta\rho_s(\theta) \quad = \quad \int d\lambda\,C(\theta,\lambda)\,\rho_s(\lambda)\,\delta\nu(\lambda). \tag{C.19}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\delta\rho(\theta) &= \rho_s(\theta)\delta\nu(\theta) + \nu(\theta)\delta\rho_s(\theta) && \text{(C.20)}\\
&= \int d\lambda\,\delta(\theta-\lambda)\rho_s(\lambda)\,\delta\nu(\lambda) + \int d\lambda\,\nu(\theta)\,C(\theta,\lambda)\,\rho_s(\lambda)\,\delta\nu(\lambda), && \text{(C.21)}\\
&= \int d\lambda\,\Big(\delta(\theta-\lambda) + \nu(\theta)\,C(\theta,\lambda)\Big)\rho_s(\lambda)\,\delta\nu(\lambda). && \text{(C.22)}
\end{aligned}$$

En réinjectant (C.11) et (C.22) dans la définition

$$\langle\delta\rho(\theta')\,\delta\rho(\theta)\rangle_w \quad = \quad -\left[L\frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY}-\mathcal{W})}{\delta\rho\,\delta\rho}\right]^{-1}(\theta,\theta'), \tag{C.23}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\langle\delta\rho(\theta')\,\delta\rho(\theta)\rangle_w &= -\frac{1}{L}\int d\lambda\,\frac{\Big(\delta(\theta-\lambda)+\nu(\theta)\,C(\theta,\lambda)\Big)\Big(\delta(\theta'-\lambda)+\nu(\theta')\,C(\theta',\lambda)\Big)}{s''(\nu(\lambda))}\,\rho_s(\lambda) && \text{(C.24)}\\
&= \frac{1}{L}\,\mathcal{D}^{-1}(\theta,\theta') + \frac{1}{L}\,\mathcal{B}(\theta,\theta'), && \text{(C.25)}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-1}(\theta,\theta') &= \Big(\rho_s(\theta)\,\nu(\theta)\,(1-\nu(\theta))\Big)\,\delta(\theta-\theta'), && \text{(C.26)}\\
\mathcal{B}(\theta,\theta') &= \Big[\nu(\theta')\,\rho_s(\theta)\,\nu(\theta)(1-\nu(\theta)) + \nu(\theta)\,\rho_s(\theta')\,\nu(\theta')(1-\nu(\theta'))\Big]\,C(\theta,\theta') && \text{(C.27)}\\
&\quad +\nu(\theta)\,\nu(\theta')\int d\lambda\,\rho_s(\lambda)\,\nu(\lambda)\,(1-\nu(\lambda))\,C(\theta,\lambda)\,C(\theta',\lambda). && \text{(C.28)}
\end{aligned}$$

Cette expression coïncide numériquement avec le résultat obtenu en (4.59).

Bibliographie de l'annexe

[DS17] Benjamin Doyon et Herbert Spohn. “Drude Weight for the Lieb-Liniger Bose Gas”. In : *SciPost Physics* 3.6 (déc. 2017). issn : 2542-4653. doi : 10.21468/scipostphys.3.6.039. url : http://dx.doi.org/10.21468/SciPostPhys.3.6.039.