Fluctations de la distribution de rapidité

March 25, 2025

1 Point de départ

Comme Yang et YAng, on fait une approche discrétisée. On discrétise θ en cellules de largeur $\delta\theta$. On utilise pour l'indice i pour la cellule $[i\delta\theta, (i+1)\delta\theta]$.

On note ρ_i la distribution de rapidité par unité de longueur, ρ_{si} la densité d'états et $\nu_i = \rho_i/\rho_{si}$ le facteur d'occupation. On repasse aux variables continues quand cela a un sens.

Le point de départ est la dérivée seconde de l'entropie par unité de longueur

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_{YY}}{\partial\rho_i\partial\rho_j} = \; & -\delta\theta \tfrac{1}{\rho_{si}\nu_i(1-\nu_i)} \\ & + (\delta\theta)^2 \tfrac{\Delta((i-j)\delta\theta)}{2\pi} \left(\tfrac{1}{\rho_{si}(1-\nu_i)} + \tfrac{1}{\rho_{sj}(1-\nu_j)}\right) \\ & - (\delta\theta)^2 \int d\theta'' \tfrac{\Delta(i\delta\theta-\theta'')\Delta(j\delta\theta-\theta'')}{(2\pi)^2} \tfrac{\nu(\theta'')}{\rho_s(\theta'')(1-\nu(\theta''))}\end{aligned} \tag{1}$$

2 Résultat

Le détail des calculs est ci-dessous. On trouve, en reppassant à la limite continue

$$\langle\delta\rho(\theta)\delta\rho(\theta')\rangle = \frac{1}{L}\left[\rho_s(\theta)\nu(\theta)(1-\nu(\theta))\delta(\theta-\theta') + \mathcal{F}(\theta,\theta')\right] \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\theta,\theta') = \rho_s(\theta)\nu(\theta)(1-\nu(\theta))\rho_s(\theta')\nu(\theta')(1-\nu(\theta')) \; & \left\{ \tfrac{\Delta(\theta-\theta')}{2\pi} \left(\tfrac{1}{\rho_s(\theta)(1-\nu(\theta))} + \tfrac{1}{\rho_s(\theta)(1-\nu(\theta))}\right)\right. \\ & \left. - \int d\theta'' \tfrac{\Delta(\theta-\theta'')\Delta(\theta'-\theta'')}{(2\pi)^2} \tfrac{\nu(\theta'')}{\rho_s(\theta'')(1-\nu(\theta''))} \right\}\end{aligned} \tag{3}$$

3 Vérification numérique avec $\langle\delta N^2\rangle$ pour le cas thermique

On se restreint aux GGE thermiques. L'équation d'état est $n(\mu, T)$. On sait que

$$\langle\delta n^2\rangle = \frac{1}{L}\frac{\partial n}{\partial(\mu/T)} \tag{4}$$

D'autre part, on peut calculer δn^2 en intégrant $\langle\delta\rho(\theta)\delta\rho(\theta')\rangle$. On obtient

$$\langle\delta n^2\rangle = \frac{1}{L}\left[\int d\theta\rho_s(\theta)\nu(\theta)(1-\nu(\theta)) + \int\int d\theta d\theta' \mathcal{F}(\theta,\theta')\right] \tag{5}$$

On fait le calcul numérique. Cela ne va pas !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

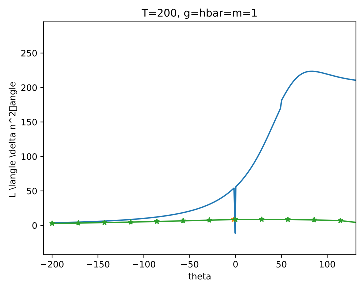

Figure 1: vert: caluc l avec les fluctus du GGE

4 Dérivation: quelques calculs d'inversion de matrice

On a

$$\langle \delta\rho_i \delta\rho_j \rangle = \mathcal{N} \int \prod_k d\delta\rho_k \exp\left[-\frac{L\delta\theta}{2} (\delta\rho_1 \delta\rho_2 \dots) C \begin{pmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \dots \end{pmatrix} \right] \delta\rho_i \delta\rho_j \tag{6}$$

avec

$$\begin{cases} C_{ii} = \frac{1}{\rho_{si}\nu_i(1-\nu_i)} \\ C_{ij} = -\delta\theta \frac{\Delta((i-j)\delta\theta)}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho_{si}(1-\nu_i)} + \frac{1}{\rho_{sj}(1-\nu_j)} \right) + \delta\theta \int d\theta'' \frac{\Delta(i\delta\theta-\theta'')\Delta(j\delta\theta-\theta'')}{(2\pi)^2} \frac{\nu(\theta'')}{\rho_s(\theta'')(1-\nu(\theta''))} \text{ if } i \neq j \end{cases} \tag{7}$$

La matrice C est diagonalisée sous la forme

$$C = U^t D U, \tag{8}$$

où U est une matrice orthogonale ($U^{-1} = U^t$) et D une matrice diagonale.

On fait alors le changement de variable

$$\begin{pmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \dots \end{pmatrix} = U^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{pmatrix} \tag{9}$$

de sorte que l'intégrale ci-dessus s'écrit

$$\langle \delta\rho_i \delta\rho_j \rangle = \mathcal{N} \int \prod_k dx_k \exp\left[-\frac{L\delta\theta}{2} \sum_k x_k^2 D_k \right] \left(\sum_k U^t_{i,k} x_k \right) \left(\sum_k U^t_{j,k} x_k \right), \tag{10}$$

ce qui donne immédiatement

$$\langle \delta\rho_i \delta\rho_j \rangle = \frac{1}{L\delta\theta} \sum_k \frac{1}{D_k} U_{k,i} U_{k,j} \tag{11}$$

Il est donc nécessaire de diagonaliser C. Comme $\delta\theta$ est très petit, on peut utiliser une approche perturbative. A l'ordre le plus bas en $\delta\theta$ on trouve

$$\begin{cases} U_{i,i} = 1 \\ U_{i,j} = -\frac{C_{ij}}{C_{jj}-C_{ii}} \text{ pour } i \neq j \end{cases} \tag{12}$$

et les valeurs propres sont

$$D_i = C_{ii} = \frac{1}{\rho_{si}\nu_i(1-\nu_i)} \tag{13}$$

A l'ordre le plus bas pertinent, on trouve alors

$$\langle \delta\rho_i \delta\rho_j \rangle = \begin{cases} \frac{1}{L\delta\theta}\left(\frac{1}{D_i}U_{i,j} + \frac{1}{D_j}U_{j,i}\right) = \frac{1}{L\delta\theta}\left(\frac{1}{D_i} - \frac{1}{D_j}\right)U_{ij} \text{ pour } i \neq j \\ \frac{1}{L\delta\theta}\rho_{si}\nu_i(1-\nu_i) \text{ pour } i = j \end{cases} \tag{14}$$

Pour $i \neq j$, cela se simplifie en

$$\langle \delta\rho_i \delta\rho_j \rangle = -\frac{1}{L\delta\theta}\frac{C_{ij}}{C_{ii}C_{jj}} \tag{15}$$