



Applications de l'ansatz de Bethe Algébrique et au-delà

Samuel Belliard

► To cite this version:

Samuel Belliard. Applications de l'ansatz de Bethe Algébrique et au-delà. Physique mathématique [math-ph]. Université de Savoie, 2009. Français. NNT : 2009CHAMS037 . tel-00612909

HAL Id: tel-00612909

<https://theses.hal.science/tel-00612909v1>

Submitted on 1 Aug 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LAPTh-Thèse-1363

Thèse

présentée pour obtenir le grade de

Docteur en physique de l'Université de Savoie

par

Samuel Belliard ¹

Sujet :

Applications de l'ansatz de Bethe Algébrique et au-delà

Sous la direction de :

Eric Ragoucy

Rapporteurs :

Jean AVAN
Vladimir RUBTSOV

Autres membres du jury :

Luc FRAPPAT Président du jury
Eric RAGOUCY Directeur de thèse
Francesco RAVANINI
Véronique TERRAS



¹LAPTh (Laboratoire de Physique Théorique d'Annecy-le-Vieux, UMR5108), Université de Savoie, CNRS ;
9 chemin de Bellevue, BP110, F-74941 Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Résumé :

Dans cette thèse, nous discuterons des systèmes intégrables quantiques et des chaînes de spins. Nous présenterons la notion d'intégrabilité quantique ainsi que des structures mathématiques, les groupes quantiques, reliées à cette dernière. Cela nous permettra d'introduire les chaînes de spins « universelles » étudiées par le groupe d'Annecy depuis plusieurs années. Ces chaînes « universelles » ont la particularité d'englober l'ensemble des chaînes de spins préalablement étudiées dans la littérature. La question posée pour cette thèse était d'utiliser l'ansatz de Bethe algébrique pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ces chaînes de spins « universelles ». Nous discuterons donc cette méthode pour les chaînes de spins périodiques et avec bords. Cette étude mettra en évidence les limites de l'ansatz de Bethe algébrique pour certaines chaînes avec bords et nous présenterons un nouveau cadre mathématique qui permettrait d'obtenir le spectre dans ces cas. Nous discuterons aussi le problème du produit scalaire des vecteurs propres obtenus grâce à l'ansatz de Bethe algébrique.

Mots clés : ansatz de Bethe, groupes quantiques, chaînes de spins, problème spectral.

English title :

Application of algebraic Bethe ansatz and beyond

Abstract :

In this thesis, we will discuss quantum integrable systems and spin chains. We will present the notion of quantum integrability and a related algebraic structure, the quantum group. This study allows us to introduce the « universal » spin chains used by the Annecy group few years ago. These « universal » chains encompass all the spins chains studied in the literature. The purpose of this thesis is to evaluate, with the algebraic Bethe ansatz (ABA), the eigenvalues and eigenvectors of these « universal » spins chains. We will discuss the case of closed and open spin chains. This study will highlight the limit of the ABA for open spins chains and we will present a new mathematical framework that may allow to find the spectral problem in this case. We will also discuss the computation of the scalar product between two eigenvectors obtained with the ABA.

Keywords : Bethe ansatz, quantum groups, spin chains , spectral problem.

Remerciements :

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu lors de ces trois années de thèse doctorat.

Dans un premier temps, je remercie Eric Ragoucy pour m'avoir permis de réaliser cette thèse en assurant le rôle de Directeur et en me proposant ce sujet. Je remercie mes collaborateurs Nicolas Crampé, Pascal Baseilhac et Stanislav Pakuliak pour les discussions que nous avons eues sur les systèmes intégrables ainsi que pour le travail que nous avons réalisé et que nous réalisons toujours ensemble. Je remercie Victor Fomin, mon collègue de bureau, ainsi que les autres membres du groupe d'Annecy : Giovanni Feverati, Paul Sorba et Luc Frappat pour les échanges que nous avons eus.

Je remercie Jean Avan et Vladimir Rubtsov d'avoir accepté d'être rapporteurs ainsi que Véronique Terras, Francesco Ravanini et Luc Frappat pour leur présence en tant que membres du jury lors de ma soutenance de thèse.

Je remercie le L.A.P.T.H. de m'avoir accueilli pendant ces trois années ainsi que tous les membres du laboratoire.

Enfin je remercie mes amis, ma famille et tout particulièrement Sabine pour leur présence et leur soutien.

Table des matières

1	Introduction	4
2	ABA pour les chaînes de spins périodiques.	13
2.1	Cadre algébrique des chaînes de spins périodiques.	14
2.1.1	Le modèle XXX	14
2.1.2	Algèbres de Hopf	16
2.1.3	Groupe quantique dans la formulation "RTT"	17
2.1.4	Déformation des algèbres de Lie et de Kac-Moody.	18
2.2	Théorie des représentations	24
2.2.1	Représentation de l'algèbre de Lie $gl(\mathfrak{n})$	24
2.2.2	Représentation de $\mathcal{U}_q(gl(\mathfrak{n}))$	25
2.2.3	Représentations de dimension finie de $\mathcal{A}(R)$	26
2.3	Problème spectral	27
2.4	Premier article	29
2.4.1	Introduction	30
2.4.2	Algebraic structures for closed spin chains	32
2.4.3	Finite dimensional representations of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m} \mathfrak{n}}$ and spin chains	37
2.4.4	Algebraic Bethe Ansatz for the case $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}=2$	41
2.4.5	Nested Bethe Ansatz	42
2.4.6	Preliminaries	43
2.4.7	First step of the construction	44
2.4.8	Final form of Bethe vectors, eigenvalues and equations	52
2.4.9	Bethe equation in the distinguished gradation	52
2.4.10	Cartan eigenvalues of Bethe vectors	53
2.4.11	Form of the Bethe vectors	54
2.4.12	Supertrace formula for Bethe vectors	55
2.4.13	Orthogonality relation for Bethe vectors	56
2.4.14	Application to AdS/CFT correspondence	58
2.4.15	$\mathcal{A}_{2 1}$ spin chains	58
2.4.16	Finite dimensional algebras	61
3	ABA pour les chaînes de spins avec bords	63
3.1	Algèbre de réflexion et matrice de transfert	64
3.2	Solutions scalaires de $K(u)$	65
3.3	Théorie des représentations	66

3.4	Limites de l'ansatz de Bethe algébrique	67
3.5	Second article	68
3.6	Introduction	69
3.7	Notations	71
3.7.1	Graded auxiliary spaces	71
3.7.2	Spectral parameters transformations	72
3.7.3	R -matrices	72
3.8	Algebraic structures	73
3.8.1	FRT formalism	73
3.8.2	Reflection algebra and $K(u)$ matrices	74
3.8.3	Embeddings of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m} \mathfrak{n}}$ algebras	76
3.9	Highest weight representations	80
3.9.1	Finite dimensional representations of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m} \mathfrak{n}}$	81
3.9.2	Representations of $T^{-1}(u)$ from $T(u)$	81
3.9.3	Finite dimensional representations of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m} \mathfrak{n}}$ from $\mathcal{A}_{\mathfrak{m} \mathfrak{n}}$ ones	86
3.10	Algebraic Bethe ansatz for $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m} \mathfrak{n}}$ with $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$	87
3.11	Nested Bethe ansatz	90
3.11.1	Preliminaries	90
3.11.2	First step of the construction	92
3.11.3	General step	95
3.11.4	End of induction	97
3.11.5	Final form of Bethe vectors, eigenvalues and equations	100
3.12	Bethe vectors	101
3.12.1	Recursion formula for Bethe vectors	101
3.12.2	Supertrace formula for Bethe vectors	101
3.12.3	Examples of Bethe vectors	103
3.13	Conclusion	103
3.14	R and M matrices	104
3.15	Functions appearing in NBA	105
4	Vers les fonctions de corrélation	107
4.1	Produit scalaire XXZ- $sl(2)$ dans le formalisme des courants de Drinfeld	109
4.1.1	Vecteurs de Bethe dans la réalisation de Drinfeld	109
4.1.2	Produit scalaire	113
5	Nouvelle approche pour les modèles avec bords	117
5.1	Modèle de Toda affine avec bord	119
5.2	Algèbre d'Onsager et relations de Dolan-Grady	123
5.3	Déformation de l'algèbre d'Onsager et des relations DG	126
5.3.1	Considérations algébriques et base PBW	126
5.3.2	Représentation de l'algèbre q -DG	130
5.4	Troisième article.	133
5.4.1	Introduction	134
5.4.2	Generalizations of the q -Onsager algebra	136
5.4.3	Boundary affine Toda field theories revisited	139

5.4.4	Discussion	142
6	Conclusion	145

Chapitre 1

Introduction

Il existe parmi les théories physiques une sous-classe de modèles appelés "modèles intégrables" ou "systèmes intégrables". Ces modèles ont la particularité de pouvoir être étudiés sans avoir recours à la théorie des perturbations. L'étude de ces modèles nous permet donc, en théorie, de calculer exactement l'ensemble des grandeurs physiques du modèle. Ce type de modèles apparaît dans certains domaines de la physique : mécanique classique, théorie des champs classique, physique statistique, mécanique quantique, théorie quantique des champs,...

Dans tous les cas, les "systèmes intégrables" sont des modèles à basse dimension d'espace temps, plus précisément, le nombre de dimensions est égal à 1 ou 2 (il existe des critères d'intégrabilité pour des modèles à 3 dimensions mais nous les passerons sous silence car ils dépassent le cadre de cette thèse). Il est alors naturel de se demander l'intérêt d'étudier ce type de modèles alors que notre réalité correspond à un espace de 4 dimensions ou plus, dans l'hypothèse que nos capacités actuelles de perception nous en cachent certaines (théories des cordes,...). Pour répondre à cette question, nous reprendrons les mots de deux chercheurs ayant largement contribué à ce domaine : R.J. Baxter pour les modèles de physique statistique sur réseau et L. Faddeev pour les théories de champs classique et quantique.

I suppose the justification for studying these lattice models is very simple : they are relevant and they can be solved, so why not do so and see what they tell us ?

R.J. Baxter, "Exactly solved models in statistical mechanics",[1].

One can ask, what is good in $1 + 1$ models, when our space-time is $3 + 1$ dimensional. There are several particular answers to this question.

1. The toy models in $1 + 1$ dimension can teach us about the realistic field theoretical models in a nonperturbative way. Indeed such phenomena as renormalization , asymptotic freedom, (...), hold in integrable models and can be described exactly.

2. There are numerous physical applications of the $1 + 1$ dimensional models in the condensed matter physics.

3. The formalism of integrable models showed several times to be useful in the modern string theory, in which the world sheet is 2-dimensional anyhow. In particular the conformal field theory models are special massless limits of integrable models.

4. The theory of integrable models teaches us about new phenomena, which were not appreciated in the previous developments of Quantum Field Theory, especially in connection with the mass spectrum.

5. *I cannot help mentioning that working with the integrable models is a delightful pastime. They proved also to be very successful tool for the educational purposes.*

L. Faddeev "How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model", [2].

La notion d'intégrabilité remonte au XIX ème siècle dans les travaux de Jacobi et Liouville [3, 4] sur les équations de la mécanique classique. Dans le cadre du formalisme Hamiltonien de la mécanique classique [5], un problème à n corps est décrit par $2dn$ (d est la dimension de l'espace euclidien) variables canoniques $(q_i(t), p_i(t))$, $i \in \{1, \dots, dn\}$, fonctions d'un paramètre t correspondant au temps et une fonction $H(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t)$ appelée Hamiltonien. Ces variables canoniques forment un espace des phases de dimension $2dn$. L'évolution en fonction du temps du modèle physique relié à H est décrite par un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad \dot{a} = \frac{d}{dt}a. \quad (1.0.1)$$

Ces équations peuvent être écrites avec le crochet de Poisson associé aux variables canoniques :

$$\{f, g\} = \sum_{i=1, \dots, dn} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad (1.0.2)$$

pour f, g deux fonctions de $(\{p\}, \{q\}, t)$. Le système d'équations différentielles du premier ordre s'écrit alors :

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\} \quad (1.0.3)$$

Un système est dit intégrable s'il existe une transformation canonique T des variables canoniques en un **système de variables "action-angle"** tel que les variables d'actions soient indépendantes du temps et que la variation temporelle des variables angles soit constante :

$$T : (q_i(t), p_i(t)) \rightarrow (a_i, b_i(t)) \quad \text{tel que} \quad \dot{a}_i = 0 \quad \text{et} \quad \dot{b}_i(t) = c_i \quad \text{avec } c_i \text{ constant} \quad . \quad (1.0.4)$$

La connaissance de cette transformation donne accès à la solution du problème par quadrature. Ces équations sur les variables action-angle sont identiques à celles d'un problème à un corps. Le problème à n corps se ramène alors à l'étude de n problèmes à un corps indépendants. en termes des crochets de Poisson, les équations (1.0.4) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\{H, a_i\} = 0 \quad \text{et} \quad \{H, b_i(t)\} = c_i. \quad (1.0.5)$$

Les a_i sont en **involution** avec l'Hamiltonien et sont donc des constantes du mouvement. De plus, la transformation étant canonique, les a_i sont aussi en involution pour différentes valeurs de i . L'existence de cette transformation est équivalente au théorème suivant :

Théorème 1.0.1. *Si un système avec n degrés de liberté, c'est-à-dire $2n$ variables conjuguées (q_i, p_i) , possède n constantes du mouvement fonctionnellement indépendantes et en involution, le système est dit intégrable (au sens de Liouville) et soluble par quadrature.*

Il est naturel de vouloir étendre ce résultat à un système continu ou plus généralement avec une infinité de degrés de liberté. Par analogie avec le cas fini, le modèle devrait être intégrable si il possède une infinité de quantités conservées. L'étude de ces systèmes intégrables continus est liée au développement de la **méthode de diffusion inverse** (MDI). Elle permet de résoudre certaines équations non linéaires du type :

$$\dot{u}(x, t) = F(u, u'(x, t), u''(x, t), \dots) \quad \text{avec} \quad u' = \frac{d}{dx}u. \quad (1.0.6)$$

où F est une fonction de u et de ses dérivées spatiales. Cette méthode permet la résolution de l'équation de Korteweg-De-Vries (KDV) [6], celle de sine-Gordon classique, et plus généralement, d'une grande classe d'équations non-linéaires [7]. Etant donnée une fonction $u(x, t)$ définie par une équation du type (1.0.6) avec $u(x, 0)$ donnée, le but est de trouver l'évolution temporelle de $u(x, 0)$. Le principe de la *méthode de diffusion inverse* est le suivant [8] :

- Dans un premier temps, un problème auxiliaire de diffusion, où $u(x, t)$ joue le rôle de potentiel, est considéré.
- Il faut choisir la dépendance temporelle des fonctions propres tel que les valeurs propres soient invariante au cours du temps. Cette étape dépend de l'existence d'une infinité de quantités conservées pour le système. Dans le cadre du formalisme de Lax (défini par la suite) cette dépendance temporelle est obtenue par action de M sur la solution du problème auxiliaire à $t = 0$.
- Le problème auxiliaire pour $u(x, 0)$ est résolu par la méthode de diffusion.
- Finalement, la diffusion inverse est appliquée pour obtenir la solution $u(x, t)$ à partir des données de diffusion fonctions du temps. Cette dernière est résolue par une équation intégrale du type de Gel'fand-Levitan-Marchenko [9, 10].

L'MDI a connu plusieurs développements qui permirent de relier cette méthode à la notion d'intégrabilité et aux structures algébriques reliées à cette notion. Le premier développement vient des travaux de Lax qui montrent que l'équation de KDV peut être représentée comme la relation de commutation de deux opérateurs linéaires L et M , appelés paire de Lax [11]. Dans un cadre général, ces opérateurs sont des fonctions sur l'espace des phases du système à valeurs dans une algèbre de Lie g (que nous considérerons finie) tel que les équations d'évolution peuvent s'écrire sous la forme :

$$[L, M] = \frac{d}{dt}L \quad (1.0.7)$$

Où $[A, B] = AB - BA$ est le crochet de Lie de g . L'avantage de cette représentation provient de la possibilité de générer des quantités en involution à partir de L . Il est possible de montrer que les quantités $H_n = \text{tr}(L^n)$, avec tr une trace invariante sur g , sont conservées. La question qui s'est alors posée est la détermination des structures mathématiques assurant l'existence de ces quantités conservées. Il peut être montré, [12, 13], que s'il existe un objet algébrique $r \in g \otimes g$, appelé **matrice r classique**, où g est une algèbre de Lie simple, tel que :

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \quad \text{avec} \quad L_1 = L \otimes \mathbb{I} \quad \text{et} \quad L_2 = \mathbb{I} \otimes L, \quad (1.0.8)$$

$$\{L_1, L_2\} = \sum_{ijkl} \{L_{ij}, L_{kl}\} E_{ij} \otimes E_{kl}, \quad (1.0.9)$$

où E_{ij} une matrice carrée avec 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j et zéro ailleurs. Et si une trace invariante pour g existe, la relation suivante peut alors être obtenue :

$$\{tr(L^m), tr(L^n)\} = 0.$$

L'involution des quantités conservées peuvent donc être assurés à partir de l'existence d'un objet algébrique, la matrice r classique, ainsi que d'une trace invariante. L'équation (1.0.8) est cohérente avec l'identité de Jacobi pour les crochets de Poisson si la matrice r classique est solution de l'**équation de Yang-Baxter classique** (plus précisément, il suffit que le terme de gauche soit un élément central de $g \otimes g \otimes g$) :

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0 \quad (1.0.10)$$

Nous considérerons dans cette thèse seulement les matrices r non dynamiques. L'existence de cette matrice r classique est reliée aux structures de groupe de Poisson-Lie et aux bigèbres de Lie. Une classification de certains systèmes intégrables devient possible par la classification de ces structures [14].

Le deuxième affinement réalisé par Faddeev et Zakharov [15], établit le lien entre l'MDI et la transformation des variables canoniques en variables action-angle de la formulation Hamiltonienne présentée précédemment. Ce lien est d'une importance capitale car il ouvre la voie vers une quantification de l'MDI pour étudier des systèmes intégrables quantiques.

Pour résumer : Un système classique est dit Liouville intégrable s'il existe autant de quantités conservées que de degrés de liberté. Un tel système peut être résolu par quadrature ou par l'MDI. De plus, cette notion d'intégrabilité est intimement liée à l'existence d'une matrice r , solution de l'équation de Yang Baxter classique.

Dans l'histoire des systèmes intégrables, la découverte de l'MDI est précédée par la résolution de modèles sur réseau en physique statistique et en mécanique quantique. Ces travaux étaient motivés par la recherche d'un modèle décrivant certaines transitions de phases, par exemple l'aimantation spontanée dans les ferromagnétiques. La première solution dans ce domaine fut élaborée par H. Bethe [16] pour les chaînes de spins XXX. L'étude de ces dernières prend racine dans les travaux de Heisenberg [17] présentant une théorie Hamiltonienne pour un réseau de spins. Pour une chaîne périodique à une dimension, avec L spins- $\frac{1}{2}$ en interaction de plus proche voisin, l'Hamiltonien est de la forme :

$$H = \sum_{i=1}^L J_1 S_1^{(i)} \otimes S_1^{(i+1)} + J_2 S_2^{(i)} \otimes S_2^{(i+1)} + J_3 S_3^{(i)} \otimes S_3^{(i+1)}, \quad S_\alpha^{(L+1)} = S_\alpha^{(1)}, \quad (1.0.11)$$

où les $S_\alpha^{(i)} = \frac{\sigma_\alpha^{(i)}}{2}$ sont les matrices de Pauli agissant sur l'espace i du produit tensoriel définissant l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_L = (\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ et les J_i sont des constantes. Ce modèle constitue une première approximation pour la modélisation d'un métal. Le modèle isotrope ou XXX, avec tous les J égaux, fut résolu par Bethe [16] en 1931 par une méthode aujourd'hui appelée **Ansatz de Bethe** (AB). Cette méthode consiste à réduire le problème des valeurs propres de l'Hamiltonien (1.0.11) à celui de la résolution d'un système d'équations à plusieurs variables couplées, les **équations de Bethe**. L'AB occupant une place centrale dans cette thèse, nous donnons ici une description de la méthode pour la chaîne XXX :

L'Hamiltonien de XXX commute avec le spin total $S_z = \sum_{i=1}^L S_3^{(i)}$, il est donc possible de décomposer l'espace de Hilbert en la somme de sous-espaces caractérisés par la valeur propre de $L - 2S_z$ (nombre de spins orientés vers le bas) : $\mathcal{H}_L = \sum_{i=0}^L \mathcal{H}_L^{(i)}$. La dimension de chaque espace est alors :

$$\dim(\mathcal{H}_L^{(i)}) = \binom{L}{i}. \quad (1.0.12)$$

La diagonalisation de l'Hamiltonien peut alors être réalisée pour chaque sous-secteur.

- Considérons $L - 2S_z = 0$, dans ce cas tous les spins sont orientés vers le haut. Le vecteur propre est unique :

$$H\Omega = E_0\Omega = J\frac{L}{4}\Omega, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.0.13)$$

- Pour $L - 2S_z = 1$, il faut introduire une combinaison linéaire des états avec un spin orienté vers le bas :

$$\Phi(u) = \sum_{m=1}^L A(u, m) S_-^{(m)} \Omega = \sum_{m=1}^L A(u, m) \phi(m), \quad S_- = S_1 - iS_2,$$

où $A(u, i)$ est une fonction d'une variable u à déterminer, telle que le vecteur soit un état propre de H . Il est raisonnable de considérer cette fonction comme une onde plane $A(u, m) = e^{ium}$.

$$(H - E_0)\Phi(u) = (E_1 - E_0)\Phi(u) = J(\cos(u) - 1)\Phi(u) \quad (1.0.14)$$

Les valeurs de u sont déterminées par l'invariance du système par translation de L sites de l'état. Cette condition donne une contrainte sur la fonction : $A(u, m) = A(u, m + L)$. Il s'ensuit $u = 2\pi \frac{n}{L}$ avec $n = \{0, 1, \dots, L - 1\}$. La dimension de ce sous-espace étant égale à L , nous avons bien obtenu tous les états propres.

- L'ansatz de Bethe intervient pour le cas suivant. Bethe propose de considérer la fonction :

$$\begin{aligned} \Phi(u_1, u_2) &= \sum_{m_1 < m_2} A(u_1, u_2; m_1, m_2) \phi(m_1, m_2), \quad \phi(m_1, m_2) = S_-^{(m_1)} S_-^{(m_2)} \Omega, \\ A(u_1, u_2; m_1, m_2) &= a_{12} e^{i(u_1 m_1 + u_2 m_2)} + a_{21} e^{i(u_1 m_2 + u_2 m_1)}. \end{aligned} \quad (1.0.15)$$

Ce choix donne les valeurs propres,

$$(H - E_0)\Phi(u_1, u_2) = (E_2 - E_0)\Phi(u_1, u_2) = J \sum_{i=1}^2 (\cos(u_i) - 1)\Phi(u_1, u_2), \quad (1.0.16)$$

si la fonction satisfait :

$$A(u_1, u_2; m_1, m_1) + A(u_1, u_2; m_1 + 1, m_1 + 1) = 2A(u_1, u_2; m_1, m_1 + 1). \quad (1.0.17)$$

Cette contrainte détermine le choix des constantes a_{12} et a_{21} .

$$\frac{a_{12}}{a_{21}} = e^{i\theta} = -\frac{e^{i(u_1 + u_2)} + 1 - 2e^{iu_1}}{e^{i(u_1 + u_2)} + 1 - 2e^{iu_2}} \quad (1.0.18)$$

Il est judicieux pour la généralisation au sous-espace M de choisir $a_{12} = e^{\frac{i}{2}\theta_{12}}$ et $a_{21} = e^{\frac{i}{2}\theta_{21}}$ avec $\theta_{12} = -\theta_{21} = \theta$.

La condition $A(u_1, u_2; m_1, m_2) = A(u_1, u_2; m_1, m_1 + L)$ impose à u_1 et u_2 d'être des solutions des équations $e^{iu_1 L} = e^{i\theta}$ et $e^{iu_2 L} = e^{-i\theta}$. Ces équations sont les équations de Bethe. Il reste à vérifier que les équations de Bethe donnent bien l'ensemble des valeurs propres. En prenant le logarithme des équations de Bethe il vient :

$$u_1 L = 2\pi n_1 + \theta, \quad u_2 L = 2\pi n_2 - \theta, \quad n_i = \{0, 1, \dots, L-1\}. \quad (1.0.19)$$

En considérant les solutions réelles de ce système d'équations, le nombre de solutions est $\frac{(L-1)(L-2)}{2}$, (le cas $u_1 = u_2$ ne donne pas de solution). La dimension du sous-espace $\mathcal{H}_L^{(2)}$ étant égale à $\frac{L(L-1)}{2}$, cette solution ne décrit pas entièrement le sous-espace propre. Il manque $L-1$ solutions. A ce niveau, entre en jeu la deuxième hypothèse de Bethe appelée hypothèse des cordes. Bethe propose de compléter cet ensemble de solutions par des solutions complexes conjuguées : $u_1 = u_2^* = a + ib$. Il montre que ce type de solution, dans l'approximation où L est très grand, est valide à une correction $\frac{1}{\sqrt{L}}$ près. L'hypothèse des cordes n'est exacte que dans la limite $L \rightarrow \infty$. Dans cette limite, appelée limite thermodynamique, les équations de Bethe sont exactement solubles.

– Ce résultat se généralise pour le sous-espace M . L'ansatz de Bethe prend la forme :

$$\begin{aligned} \Phi(u_1, \dots, u_M) &= \sum_{m_1 < \dots < m_M} A(\{u\}, \{m\}) \phi(m_1, \dots, m_M), \\ A(\{u\}, \{m\}) &= \sum_{\sigma \in S_M} \exp \left(i \sum_{i=1}^M u_{\sigma(i)} m_i + \frac{i}{2} \sum_{i < j} \theta_{\sigma(i)\sigma(j)} \right). \end{aligned} \quad (1.0.20)$$

La solution du problème spectral est alors :

$$\begin{aligned} (H - E_0) \Phi(u_1, \dots, u_M) &= (E_M - E_0) \Phi(u_1, \dots, u_M) \\ &= \sum_{i=1}^M (\cos(u_i) - 1) \Phi(u_1, \dots, u_M), \end{aligned} \quad (1.0.21)$$

avec les équations de Bethe, sous la forme logarithmique :

$$Lu_i = 2\pi n_i + \sum_{i \neq j} \theta_{ij}, \quad i = \{1, \dots, M\} \quad (1.0.22)$$

Nous ne discuterons pas ici la résolution de ces équations dans l'hypothèse des cordes et renvoyons le lecteur intéressé aux articles [16, 18, 19] pour une analyse détaillée.

La méthode de Bethe permet donc de transformer le problème spectral en celui de la résolution d'un système d'équations. La force de cette méthode apparaît lors de l'étude de la **limite thermodynamique** où les solutions des équations de Bethe, par l'hypothèse des cordes, sont exactes. Les équations de Bethe deviennent une équation intégrable soluble par une transformée de Fourier [20]. Par cette méthode, le vide du modèle physique ou état fondamental ainsi que les petites excitations peuvent être étudiés [21]. Cette méthode a été, par la suite, appliquée aux modèles XXZ, XYZ [22, 23, 19, 24, 25, 18], au modèle d'Hubbard [26],

à des modèles de physique statistique [1] (modèles à 6 et 8 vertex, modèles SOS et RSOS,...), ainsi qu'à des modèles de théorie des champs quantiques tels que le modèle du gaz de Bose à une dimension [27],...

La possibilité d'utiliser cette méthode pour certains modèles statistiques à deux dimensions provient de l'équivalence entre ces derniers et les modèles quantiques sur réseau à une dimension [28]. Cette équivalence est liée au formalisme de la **matrice de transfert** pour la fonction de partition d'un modèle statistique. Dans ce formalisme, la fonction de partition peut être réécrite comme la trace de cette matrice :

$$Z = \sum_{\mathcal{E}} e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} = \text{tr}(t^L), \quad (1.0.23)$$

où \mathcal{E} sont les différentes énergies du système, T la température, k la constante de Boltzman et L le nombre de lignes du réseau. Le problème de sommation des états revient alors à la diagonalisation de la matrice t .

Pour des modèles avec des interactions de plus proche voisin sur un réseau à deux dimensions, il est possible d'associer à chaque site du réseau un poids de Boltzmann W décrivant les différentes configurations possibles du site. La fonction de partition s'écrit alors comme la somme de toutes les configurations possibles de chacun des sites. Les interactions étant de proche voisin il est possible de réécrire la somme ligne par ligne et d'associer un espace vectoriel décrivant les relations entre chaque ligne.

$$Z = \sum_{\text{états des colonnes}} \prod_{\text{chaque lignes}} \left(\sum_{\text{états de la ligne}} \prod_{\text{chaque sites de la ligne}} W_{\text{site}} \right). \quad (1.0.24)$$

Pour un réseau rectangulaire, chaque site a quatre proches voisins, le poids de Boltzmann dépend de quatre indices. La relation de cohérence pour ces poids est transcrite par la **relation "étoile-triangle"** qui assure l'intégrabilité du modèle [1, 30, 31] (donnée ici dans le formalisme *face* [29]) :

$$\sum_g W(a, b, g, f|u, v) W(f, g, d, e|u, w) W(g, b, c, d|v, w) = \sum_d W(f, a, g, e|v, w) W(a, b, g, e|u, w) W(g, c, d, e|u, v). \quad (1.0.25)$$

Historiquement, le premier modèle statistique sur un réseau étudié à deux dimensions fut le modèle d'Ising avec un champ magnétique nul [32]. Il a été résolu par Onsager [30] par l'introduction d'une algèbre de Lie de dimension infinie appelée algèbre d'Onsager et en étudiant la théorie des représentations de cette dernière. Il n'a pas utilisé la relation "étoile-triangle" mais y fait référence dans son introduction. Cette solution fut simplifiée par son étudiant, Kaufman, en utilisant l'algèbre de Clifford à la place de celle d'Onsager [33]. C'est dans l'étude des modèles de glace (ou modèles à six vertex) qu'un premier lien entre les modèles statistiques et les modèles de chaînes de spins fut clairement établi. En effet, les modèles de glace furent résolus par Lieb [34] en utilisant l'ansatz de Bethe. Il remarque que les fonctions propres et les équations de Bethe sont les mêmes que pour le modèle XXZ [1]. Une nouvelle avancée dans ce sens fut la résolution par Baxter du modèle à huit vertex et la mise en évidence de son lien

avec le modèle XYZ. Une étude détaillée de ces modèles et de nombreuses références peuvent être trouvées dans le livre de Baxter [1].

Un tournant a eu lieu dans l'application de l'AB et l'étude des systèmes intégrables quantiques lors de la création, par le groupe de Leningrad, de la version algébrique de l'AB : l'**ansatz de Bethe algébrique** (ABA) ou **méthode de diffusion inverse quantique** (QISM) [35, 36, 2, 37]. Elle fut introduite pour résoudre les versions quantiques des théories des champs intégrables classiques. Les modèles de théorie quantique des champs ont la particularité d'avoir des problèmes de divergence et nécessitent d'être régularisés. Une des méthodes de régularisation consiste à considérer le modèle sur un réseau, les modèles alors obtenus sont reliés à des chaînes de spins. Par exemple, le modèle de Sine-Gordon est relié à la chaîne de spins XXZ, le modèle de Schrödinger non-linéaire à la chaîne de spins XXX [38],... Les chaînes de spins peuvent être résolues par l'AB et les versions classiques de ces modèles par l'MDI. Cette observation sous-entend une relation profonde entre les deux méthodes. D'un point de vue historique, cette relation fut établie après la création de l'ABA. Cependant, le fait que le modèle du gaz de Bose ait été résolu par l'AB [27], alors que sa version classique l'a été par l'MDI [8], sous-entendait déjà cette relation.

La résolution de systèmes intégrables quantiques fut donc étudiée par la quantification du formalisme de Lax de l'MDI. Cette méthode considère la diagonalisation d'un objet plus général que l'Hamiltonien du modèle, la matrice de transfert. Cette matrice est la fonction génératrice des quantités conservées du modèle. L'Hamiltonien peut donc être reconstruit à partir de cette dernière. Ce type d'approche remonte à la formulation de Heisenberg de la mécanique quantique. L'idée est la suivante : il faut considérer une algèbre plus grande, non commutative, contenant la sous-algèbre abélienne des quantités conservées. L'espace des états quantiques est alors décomposé sur certaines représentations irréductibles de cette algèbre. Les exemples les plus simples sont l'oscillateur harmonique et l'atome d'hydrogène construits, respectivement, à partir de l'algèbre de Heisenberg et le groupe de Lie $SO(4)$. Ces deux exemples sont à la base de l'enseignement de la mécanique quantique à l'université.

Pour l'ABA, la matrice de transfert est définie comme la trace de la matrice de monodromie construite par le produit de l'équivalent quantique de la matrice de Lax. Les éléments de cette matrice forment une algèbre non commutative quadratique dont les relations de commutation sont décrites par l'équation :

$$R(u, v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R(u, v),$$

où la **matrice** R est l'équivalent quantique de la matrice r classique. Cette matrice peut être vue comme les constantes de structure de cette algèbre. Cette algèbre est cohérente si la matrice R est une solution de l'**équation de Yang-Baxter** [1, 27] :

$$R_{12}(u, v)R_{13}(u, w)R_{23}(v, w) = R_{23}(v, w)R_{13}(u, w)R_{12}(u, v). \quad (1.0.26)$$

Nous considérerons dans cette thèse seulement les matrices R non dynamiques. Dans la limite semi-classique, $\hbar \rightarrow 0$, la matrice R devient au premier ordre : $R(u, v; \hbar) \sim 1 + \hbar r(u, v) + O(\hbar^2)$, où $r(u, v)$ est une solution de l'équation de YB classique. Les structures mathématiques de certains systèmes intégrables quantiques sont donc une déformation des structures mathématiques de certains systèmes intégrables classiques. Il est à noter qu'une autre approche a été élaborée pour étudier les théories des champs, la méthode de la matrice S factorisée proposée par A.

Zamolodchikov et Al. Zamolodchikov [39]. Cette méthode est à l'origine des techniques de "bootstrap" et du calcul des facteurs de formes des théories des champs intégrables [40]. Cette méthode est aussi liée à l'équation de YB car les matrices S factorisées sont égales aux matrices R à un facteur multiplicatif près.

Pour revenir aux chaînes de spins, nous pouvons donner les grandes étapes de l'étude de ces dernières ou, plus précisément, des matrices de transfert associées :

- Trouver une matrice R , solution de l'équation de Yang Baxter.
- Définir une algèbre avec cette matrice R .
- Choisir une représentation de l'algèbre associée à cette matrice R .
- Calculer le spectre.
- Calculer les fonctions de corrélation

Les trois premiers points ont abouti à la découverte des groupes quantiques [41, 42, 43, 44] et au développement d'une structure similaire pour les modèles avec bords [45, 46], l'algèbre de réflexion, pouvant être réalisée comme une sous-algèbre d'un groupe quantique. L'étude de ces structures sera détaillée tout au long de cette thèse.

Le quatrième point a connu des développements et donné lieu à la découverte de nouvelles versions de l'AB : la version analytique [47] ou encore la version fonctionnelle [48]. Nous nous concentrerons sur l'ABA dans les deux premiers chapitres de cette thèse et nous verrons les limites de ce dernier. Les travaux sur ce point ont donné lieu à la publication de deux articles en collaboration avec E. Ragoucy sur l'ABA pour les chaînes de spins. Ces publications considèrent le cas de chaînes de spins "universelles" (avec des représentations arbitraires pour chaque site) et englobent l'ensemble des cas connus avec pour symétrie cachée certains groupes quantiques, déformations des algèbres enveloppantes $\mathcal{U}(gl(\mathbf{n}))$ ou $\mathcal{U}(gl(\mathbf{n}|\mathbf{m}))$, définis dans le chapitre suivant (c.f sections 2.4, 3.5).

Le cinquième point sera en partie abordé dans le troisième chapitre par le calcul du produit scalaire des vecteurs de Bethe de la chaîne XXZ périodique, dans la réalisation de Drinfel'd, indispensable au calcul des fonctions de corrélation par l'ABA. Cette approche pour le calcul du produit scalaire est un projet de recherche en cours, en collaboration avec E. Ragoucy, S. Pakuliak et S. Khoroshkin.

Enfin, nous discuterons le cas des modèles avec bords où l'ABA n'est pas toujours applicable. Nous aborderons une nouvelle formulation pour l'algèbre de réflexion qui s'avère être reliée à l'algèbre d'Onsager utilisée lors de la première résolution du modèle d'Ising. Nous avons identifié, en collaboration avec P. Baseilhac, cette nouvelle formulation et nous avons pu l'utiliser pour classifier les conditions au bord assurant l'intégrabilité des modèles de Toda affine avec bord (c.f. section 5.4).

Chapitre 2

ABA pour les chaînes de spins périodiques.

Les chaînes de spins périodiques sont étudiées depuis la formulation de la mécanique quantique. Ces recherches ont fait émerger de nouveaux concepts et méthodes dans le domaine des systèmes intégrables quantiques. Les deux grandes révolutions dans ces domaines sont la formulation de l'**ansatz de Bethe** [16] et la découverte des **groupes quantiques** comme symétries cachées de ces modèles [49, 41, 44]. Ces deux points s'avèrent être essentiels pour la majorité des systèmes intégrables quantiques. Les groupes quantiques permettent de trouver les quantités conservées des modèles et d'assurer leur intégrabilité. L'ansatz de Bethe, quant à lui, permet de résoudre le problème spectral de certains de ces modèles. L'ansatz de Bethe existe sous différentes formes.

La version originale, appelée **ansatz de Bethe en coordonné** (ABC) [16], ne fait pas intervenir les groupes quantiques et permet de diagonaliser directement l'Hamiltonien du modèle.

La seconde version, appelée **ansatz de Bethe algébrique** (ABA) [35, 36, 2, 37], résout le même problème mais fait intervenir un objet plus général que l'Hamiltonien, la matrice de transfert. Cette matrice de transfert est la fonction génératrice des quantités conservées du modèle. Elle contient un ensemble d'opérateurs diagonalisables dans la même base. Cette matrice de transfert est construite à partir des éléments d'un groupe quantique, correspondant à la symétrie cachée du modèle. Le problème spectral est alors résolu pour cette matrice en utilisant la théorie des représentations du groupe quantique associé. Il reste ensuite à extraire l'Hamiltonien de la matrice de transfert.

Il existe aussi d'autres versions de l'ansatz de Bethe, aussi fondées sur les groupes quantiques, telles que l'**ansatz de Bethe analytique** [47] (ABan) ou encore l'**ansatz de Bethe Fonctionnel** [48] (ABF). L'ABan permet de conjecturer les valeurs propres de la matrice de transfert à partir de considérations analytiques et certaines propriétés du groupe quantique. L'ABF, met en relation les groupes quantiques et la méthode de séparation de variables.

Ces différentes versions ont des avantages et des inconvénients suivant le modèle considéré. L'ABC ne permet pas de construire les quantités conservées du modèle. Cependant, la diagonalisation étant effectuée sur l'Hamiltonien, celui-là donne directement la solution du problème physique. Pour les versions basées sur les groupes quantiques (ABA, ABan, ABF), un avantage commun existe : la construction directe des quantités conservées du modèle. Cependant, la reconstruction d'un Hamiltonien local n'est pas directe pour toutes les matrices de transfert (par

exemple les modèles avec des spins différents). L'ABan est relativement simple à calculer mais ne donne que les valeurs propres et non les vecteurs propres. L'ABA, de son côté, permet d'obtenir à la fois les vecteurs et les valeurs propres mais ne fonctionne seulement que s'il existe une représentation de plus haut poids. Enfin, l'ABF permet de considérer des modèles où aucun plus haut poids n'est connu (par exemple le modèle XXX avec des conditions périodiques twistées non diagonales [48]), mais il ne donne pas d'équation de Bethe et la limite thermodynamique ne peut pas être réalisée.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux chaînes de spins "universelles" périodiques pouvant être résolues par l'ABA. Par chaîne de spins "universelle" périodique, nous entendons une chaîne de L sites dont l'Hamiltonien est composé d'opérateurs agissant sur le produit tensoriel de L espaces vectoriels de dimension finie. L'adjectif "universel" correspond au fait que ces espaces vectoriels ne sont pas spécifiés mais font partie des représentations de dimensions finies irréductibles de plus haut poids du groupe quantique associé. L'étude de ces chaînes de spins s'inscrit dans la continuité des travaux du groupe d'Annecy depuis 2004 [50, 51, 52, 53]. Elle correspond à une approche purement algébrique des modèles intégrables quantiques possédant comme symétrie un groupe quantique (Yangien ou algèbre quantique), pouvant se décrire dans le formalisme dit "RTT". Cette formulation permet d'englober l'ensemble des chaînes de spins périodiques, étudiées jusqu'à présent, d'une façon compacte. Elle est basée sur les connaissances de la théorie des représentations des groupes quantiques et des théorèmes de classifications associés.

Après avoir présenté le cas d'école du modèle XXX- $sl(2)$, nous verrons dans un cadre général les connaissances sur les groupes quantiques nécessaires à la formulation des matrices de transfert "universelles". Puis, nous présenterons les méthodes d'analyse spectrale liées à l'ansatz de Bethe : la version analytique (problème résolu préalablement par le groupe d'Annecy) et la version algébrique (utilisée pendant cette thèse). Cette section se termine par un article réalisé au cours de cette thèse, en collaboration avec E. Ragoucy, présentant de façon unifiée l'ABA pour les chaînes périodiques "universelles" reliées aux deux groupes quantiques des algèbres $gl(\mathbf{n})$ et $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$.

2.1 Cadre algébrique des chaînes de spins périodiques.

2.1.1 Le modèle XXX

Les systèmes intégrables quantiques sont définis par analogie avec le théorème d'intégrabilité de Liouville pour la mécanique classique. Un système quantique défini par un Hamiltonien H est dit intégrable, s'il existe autant d'opérateurs H_i que de degrés de liberté pour le système, tel que l'algèbre formée par $\{H, H_1, \dots, H_n\}$ soit une algèbre abélienne et que tous ses opérateurs soient algébriquement indépendants. Comme pour le cas classique, la méthode pour trouver les quantités conservées H_i revient à caractériser les structures algébriques produisant ces dernières en quantité suffisante. En quantifiant le formalisme de Lax, le groupe de Leningrad (Faddeev, Takhtajan, Sklyanin, Reshetikhin, Kulish,...) a introduit les algèbres "RTT" [35, 36, 2, 37, 49] que nous noterons $\mathcal{A}(R)$:

$$R_{12}(u, v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u, v), \quad (2.1.1)$$

où la matrice $R \in \text{End}(V \otimes V)$ est une solution de l'équation de Yang-Baxter (1.0.26) et la matrice $T(u) \in \text{End}(V) \otimes \mathcal{A}(R)$, appelée matrice de monodromie, contient les générateurs de cette algèbre. Cette équation fait intervenir la notation en espace auxiliaire : pour une matrice dont les entrées sont des éléments d'une algèbre \mathcal{A} : $A := \sum_{ij} E_{ij} \otimes A_{ij} \in \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{A}$. Les matrices E_{ij} sont des matrices $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$ avec 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j et 0 ailleurs, avec \mathfrak{n} dimension de \mathcal{V} . Pour $k \leq m$, nous avons :

$$A_k := \sum_{ij} \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes E_{ij} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(m-k)} \otimes A_{ij} \in \text{End}(V^{\otimes m}) \otimes \mathcal{A}, \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.1.2)$$

Cette notation s'étend si A intervient dans deux espaces :

$$A_{kl} := \sum_{ijab} \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes E_{ij} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(l-k-1)} \otimes E_{ab} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(m-l)} \otimes A_{ijab}, \in \text{End}(V^{\otimes m}) \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}. \quad (2.1.3)$$

La matrice $T(u)$ peut être réalisée en termes de la matrice R :

$$T_1(u, \{u\}, L) = R_{1b_1}(u, u_1) \dots R_{1b_L}(u, u_L), \quad (2.1.4)$$

où $\{u\} = \{u_1, \dots, u_L\}$ et les b_i dénotent les espaces où agissent les générateurs de \mathcal{A} . La matrice $T(u)$ est un élément de $\text{End}(V_1 \otimes (\bigotimes_{i=1}^L V_{b_i}))$ où les V_i sont des espaces vectoriels. Le premier espace est appelé espace auxiliaire et les L autres, espaces quantiques. Les entrées $t_{ij}(u, \{u\}, L)$ de la matrice de monodromie sont des éléments de $\text{End}(\bigotimes_{i=1}^L V_{b_i})$. En utilisant l'équation de Yang-Baxter (1.0.26), il est possible de montrer que cette matrice de monodromie satisfait l'algèbre "RTT". Cette réalisation est valide quelque soit la valeur de L entier. C'est-à-dire que si nous définissons une opération faissant passer de L à $L+1$, la structure algébrique est préservée par cette opération. Cette propriété sera discutée dans le cadre des algèbres de Hopf par la suite. Si la matrice R admet une inverse, la matrice de transfert, définie comme la trace de la matrice de monodromie, est une fonction génératrice d'opérateurs commutant entre eux :

$$\text{tr}(T(u)) = t(u) = \sum_{i=0}^L u^i H_i, \quad [H_i, H_j] = 0 \quad (2.1.5)$$

Par la suite, il faut relier cette matrice de transfert avec un Hamiltonien physique. Cette étape est loin d'être triviale dans le cas général, cependant de nombreux exemples sont connus (Z-F-model [54], spin-s [36, 55], représentations fondamentales des algèbres de rang supérieur [71], ...). Considérons, à titre d'exemple, la solution rationnelle de YB, et calculons l'Hamiltonien du modèle de chaînes de spins XXX- $sl(2)$ dans la représentation fondamentale :

$$R(u, v) = (u - v)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \hbar P_{12}, \quad P_{12} = \sum_{i,j=1}^2 E_{ij} \otimes E_{ji}, \quad \mathbb{I} = \sum_{i=1}^2 E_{ii}. \quad (2.1.6)$$

La matrice P peut être écrite en fonction des matrices de Pauli $\sigma_3 = E_{11} - E_{22}$, $\sigma_1 = E_{21} + E_{12}$ et $\sigma_- = i(E_{21} - E_{12})$ (avec $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$), et satisfait les relations suivantes (qui permettent de vérifier que cette matrice est bien solution de l'équation de YB) :

$$P = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sum_{1,2,3} \sigma_i \otimes \sigma_i), \quad P_{12}P_{13} = P_{23}P_{12} \quad P^2 = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (2.1.7)$$

L'Hamiltonien du modèle XXX est obtenu à partir de la dérivée logarithmique de la matrice de transfert.

$$H_{XXX} = \frac{\hbar}{2} \frac{d}{du} \ln(t(u))|_{u=0} - L\hbar \quad (2.1.8)$$

Le calcul utilise des propriétés de l'opérateur de permutation P ,

$$H_{XXX} = \sum_{i=1}^L (\sigma_1^{(i)} \otimes \sigma_1^{(i+1)} + \sigma_2^{(i)} \otimes \sigma_2^{(i+1)} + \sigma_3^{(i)} \otimes \sigma_3^{(i+1)}), \quad \sigma_i^{(1)} = \sigma_i^{(L+1)} \quad (2.1.9)$$

Dans cet exemple, nous avons obtenu l'Hamiltonien de la chaîne XXX à partir de la matrice de transfert (fonction génératrice de quantités conservées) pour une certaine réalisation de la matrice de monodromie (nous verrons plus loin que ce cas correspond à la représentation d'évaluation, utilisant la représentation fondamentale de $sl(2)$, du Yangien $\mathcal{Y}(sl(2))$). La même construction peut être réalisée (mis à part le calcul de l'hamiltonien) dans le cadre des algèbres de Hopf quasi-triangulaires.

2.1.2 Algèbres de Hopf

Cette section introduit la notion de structure de Hopf [56]. Cette structure est propre à tous les groupes quantiques et nous permettra de définir les matrices de transfert universelles. L'intérêt de ces structures pour les systèmes intégrables quantiques provient du coproduit. Pour les chaînes de spins, cette opération assure que la structure algébrique pour une chaîne de L ou de $L + 1$ sites est la même.

Pour définir ces algèbres de Hopf, nous rappelons la définition d'une algèbre et d'une coalgèbre. Une algèbre associative \mathcal{A} sur le corps des complexes \mathbb{C} est un espace vectoriel muni de deux opérations linéaires, la multiplication $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et l'unité $i : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ telles que :

$$m \circ (id \otimes i) = id, \quad m \circ (i \otimes id) = id, \quad m \circ (id \otimes m) = m \circ (m \otimes id).$$

Cette algèbre est dite commutative ou abélienne si $m = m \circ \sigma$ avec $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$ pour $a, b \in \mathcal{A}$. Une coalgèbre associative \mathcal{A} sur le corps des complexes \mathbb{C} est un espace vectoriel muni de deux opérations linéaires, la comultiplication $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ et la counité $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$(id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id, \quad (\epsilon \otimes id) \circ \Delta = id, \quad (id \circ \Delta) \circ \Delta = (\Delta \circ id) \circ \Delta.$$

Cette coalgèbre est cocommutative si $\Delta = \sigma \circ \Delta$. Une algèbre de Hopf est définie à partir des notions d'algèbre et de coalgèbre de la façon suivante :

Définition 2.1.1. *Une algèbre de Hopf sur le corps des complexes \mathbb{C} est un espace vectoriel \mathcal{A} tel que :*

- \mathcal{A} est une algèbre et une coalgèbre.
- la comultiplication et la counité sont des homomorphismes d'algèbre.
- la multiplication et l'unité sont des homomorphismes de coalgèbre.

– \mathcal{A} est équipé d'une carte bijective $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, appelée antipode tel que :

$$m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta = i \otimes \epsilon.$$

Un coidéal à droite de Hopf d'une algèbre de Hopf \mathcal{A} sur \mathbb{C} est un idéal \mathcal{I} à droite tel que l'action du coproduit, de la counité et de l'antipode sur \mathcal{I} soient de la forme :

$$\Delta(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I} \otimes \mathcal{A}, \quad \epsilon(\mathcal{I}) = 0, \quad S(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}. \quad (2.1.10)$$

L'exemple le plus simple d'algèbre de Hopf est l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(g)$ de l'algèbre de Lie g . Elle possède la structure de Hopf suivante ($x \in g$) :

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad S(x) = -x, \quad \epsilon(x) = 0.$$

$\mathcal{U}(g)$ est une algèbre de Hopf non commutative et cocommutative. Par exemple, elle intervient, pour $g = su(2)$, dans la construction de la composition de deux spins en mécanique quantique.

Le cas particulier nous intéressant pour les systèmes intégrables, correspond aux algèbres de Hopf presque cocommutatives quasitriangulaires. L'adjectif "presque cocommutative" correspond à l'existence d'un élément inversible $\mathcal{R} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ tel que ($x \in \mathcal{A}$) :

$$\sigma \otimes \Delta(x) = \mathcal{R} \Delta(x) \mathcal{R}^{-1}.$$

Une algèbre de Hopf presque cocommutative $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ est dite :

– quasitriangulaire si :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) &= \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23}, \\ (id \otimes \Delta)(\mathcal{R}) &= \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}. \end{aligned}$$

– triangulaire si elle est quasitriangulaire et de plus, $\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}^{-1}$,

où la notation $\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{12} \otimes \mathbb{I} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $\mathcal{R}_{23} = \mathbb{I} \otimes \mathcal{R}_{23} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, ... La matrice \mathcal{R} est appelée matrice R universelle. Cette définition permet d'aboutir à la notion d'équation de Yang-Baxter universelle qui est au coeur des systèmes intégrables quantiques :

Proposition 2.1.2. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ une algèbre de Hopf quasitriangulaire, alors :*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23} &= \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}, \\ (\epsilon \otimes id) \mathcal{R} &= (id \otimes \epsilon) \mathcal{R} = 1, \\ (S \otimes id) \mathcal{R} &= (id \otimes S) \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}, \\ (S \otimes S) \mathcal{R} &= \mathcal{R}. \end{aligned}$$

2.1.3 Groupe quantique dans la formulation "RTT"

Nous allons maintenant relier cette structure de Hopf quasitriangulaire aux groupes quantiques. Pour V , un espace vectoriel de dimension finie, soit $\rho(u) : \mathcal{A} \rightarrow End(V) \otimes \mathbb{C}[[u, u^{-1}]]$ une représentation de dimension finie de \mathcal{A} (où u est un paramètre continu). Une telle représentation est appelée représentation d'évaluation et existe pour tous les groupes quantiques que nous

considérons. De cette représentation est obtenue une représentation matricielle de \mathcal{R} , la matrice R .

$$(\rho(u_1) \otimes \rho(u_2)) \mathcal{R} = R(u_1, u_2). \quad (2.1.11)$$

\mathcal{R} étant inversible, il en est de même pour la matrice R . L'application de $\rho(u_1) \otimes \rho(u_2) \otimes \rho(u_3)$ sur l'équation de Yang-Baxter universelle donne l'équation de Yang-Baxter :

$$R_{12}(u_1, u_2) R_{13}(u_1, u_3) R_{23}(u_2, u_3) = R_{23}(u_2, u_3) R_{13}(u_1, u_3) R_{12}(u_1, u_2). \quad (2.1.12)$$

Nous pouvons introduire un nouvel objet appelé matrice de monodromie $T(u) \in \text{End}(V) \otimes \mathcal{A}(R) \otimes \mathbb{C}[[u, u^{-1}]]$ tel que :

$$(\rho(u) \otimes id) \mathcal{R} = T(u). \quad (2.1.13)$$

L'application de $\rho(u) \otimes \rho(v) \otimes id$ sur l'équation de YB universelle permet d'obtenir une algèbre de Hopf dans la formulation dite "RTT" :

$$R_{12}(u, v) T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T_1(u) R_{12}(u, v) \quad (2.1.14)$$

La structure de Hopf d'une telle algèbre est la suivante :

$$\begin{aligned} \Delta(T(u)) &= T(u) \otimes T(u), \\ \epsilon(T(u)) &= \mathbb{I}_V \otimes 1, \\ S(T(u)) &= T^{-1}(u). \end{aligned}$$

L'intérêt de cette formulation est la simplicité de construction d'une sous-algèbre abélienne. En introduisant la matrice de transfert $t(u) = \text{tr}(T(u))$, l'existence d'une inverse pour la matrice R et la cyclicité de la trace permettent de montrer que la matrice de transfert commute avec elle-même pour deux valeurs distinctes de u :

$$t(u)t(v) = \text{tr}_{12}(R_{12}^{-1}(u, v) T_2(v) T_1(u) R_{12}(u, v)) = t(v)t(u). \quad (2.1.15)$$

La présentation précédente est purement algébrique et à chaque solution de l'équation de YB il est possible d'associer une algèbre "RTT". La recherche de ces solutions a donné lieu à une littérature abondante et nous renvoyons le lecteur à la compilation d'articles sur le sujet proposé par Jimbo [57] pour de plus amples informations sur ce problème.

2.1.4 Déformation des algèbres de Lie et de Kac-Moody.

Les algèbres de Lie (semi)simples g ont été classifiées dans le cadre de la base de Cartan [58]. Il existe quatre séries $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ et cinq algèbres de Lie dites exceptionnelles $\{G_2, F_4, E_6, E_7, E_8\}$. Ces algèbres sont de dimension finie et peuvent être caractérisées par la donnée d'une seule matrice, la matrice de Cartan. A chacune de ces algèbres est associée une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(g)$ qui est le quotient de g par la relation $[a, b] - ab + ba$ (cette définition n'est pas exacte au sens mathématique qui fait intervenir l'algèbre tensorielle mais montre bien que l'on considère le produit d'opérateurs de g). Ces algèbres possèdent une structure de Hopf cocommutative (c.f. section précédente).

Il existe aussi une famille plus générale d'algèbres appelées algèbres de Kac-Moody [59]. Ces dernières sont également caractérisées par la donnée d'une seule matrice que nous considérerons ici indécomposable et à coefficient réel, la matrice de Cartan généralisée. Si cette matrice est définie positive (i.e $x^t Ax > 0$ quelque soit le vecteur réel $x > 0$) on retrouve les algèbres de Lie g . Dans le cas où cette matrice est définie positive (i.e $x^t Ax \leq 0$ quelque soit le vecteur réel $x > 0$) on parle d'algèbres de Lie affine \hat{g} . Il est à noter qu'il existe un autre type d'algèbre de Kac-Moody que nous ne discuterons pas ici. De la même façon, à chacune de ces algèbres affines est associée une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\hat{g})$ possédant une structure de Hopf cocommutative.

Il est possible de donner, d'une façon unifiée, les algèbres de Lie (affine) simples grâce à la base de Serre Chevalley [56] :

Définition 2.1.3. Soit g (\hat{g}) l'algèbre de Lie (affine) sur \mathbb{C} définie par la donnée d'une matrice de Cartan $\{a_{ij}\}$ (de dimension $n \times n$ ($(n+1) \times (n+1)$)) ayant comme générateurs $\{H_i, X_i^\pm\}$, $i \in (0), 1, \dots, n$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \quad [H_i, X_j^\pm] = a_{ij} X_j^\pm, \quad [X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} H_i, \\ (ad_{X_i^\pm})^{1-a_{ij}}(X_j^\pm) &= 0, \quad i \neq j \quad (ad_x(y) = [x, y]). \end{aligned}$$

Pour le cas affine, il faut ajouter les générateurs D_i , $i \in 0, 1, \dots, n$ satisfaisant :

$$[D_i, D_j] = 0, \quad [D_i, H_j] = 0 \quad \text{et} \quad [D_i, X_j^\pm] = \pm \delta_{ij} X_j^\pm \quad (2.1.16)$$

Il existe une unique forme bilinéaire symétrique invariante et non-dégénérée $(\ , \) : g \times g \rightarrow \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{aligned} (D_i, D_j) &= (D_i, X_j^\pm) = (H_i, X_j^\pm) = (X_i^\pm, X_j^\pm) = 0, \\ (H_i, H_j) &= d_j^{-1} a_{ij}, \quad (H_i, D_j) = (X_i^+, X_j^-) = d_i^{-1} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

où les d_i sont tels que $d_i a_{ij}$ soit une matrice symétrique.

Dans le cadre des algèbres de Hopf quasitriangulaires, ces algèbres étant cocommutatives, la matrice R universelle est alors triviale. Cependant, l'introduction d'une déformation de ces algèbres permet d'obtenir des algèbres de Hopf quasitriangulaires non triviales. Ces algèbres sont les exemples les plus importants de groupes quantiques.

La première déformation, par un paramètre $\{q\}$, est appelée **algèbre enveloppante quantique**, déformation de l'algèbre enveloppante associée à une algèbre de Lie ou de Kac Moody, notée respectivement $\mathcal{U}_q(g)$ ou $\mathcal{U}_q(\hat{g})$ [41, 44].

Définition 2.1.4. Soit $\{a_{ij}\}$ la matrice de Cartan généralisée de l'algèbre de Lie affine \hat{g} . Soit l'ensemble d'entiers d_i tel que $d_i a_{ij}$ soit symétrique. $U_q(\hat{g})$ est une algèbre associative sur \mathbb{C} avec comme unité 1 engendrée par les lettres $\{X_i^\pm, H_i\}$, $i \in 0 \dots n$ et q un paramètre différent de

$\{1, -1, 0\}$ respectant les relations :

$$\begin{aligned}
q_i^{\pm \frac{H_i}{2}} q_i^{\mp \frac{H_i}{2}} &= 1, & q_i^{\frac{H_i}{2}} q_j^{\frac{H_j}{2}} &= q_j^{\frac{H_j}{2}} q_i^{\frac{H_i}{2}}, \\
q_i^{\frac{H_i}{2}} X_j^{\pm} q_i^{-\frac{H_i}{2}} &= q_i^{\pm \frac{a_{ij}}{2}} X_j^{\pm}, & [X_i^+, X_j^-] &= \delta_{ij} \frac{q_i^{H_i} - q_i^{-H_i}}{q_i - q_i^{-1}}, \\
\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} (X_i^{\pm})^{1-a_{ij}-r} X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^r &= 0, \\
\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}_q &= \frac{[k]_q!}{[l]_q! [k-l]_q!}, & [k]! &= [k][k-1] \dots [1], & [k] &= \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}, & [0]! &= 1,
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

La structure de Hopf est assurée par la comultiplication $\Delta : U_q(\widehat{g}) \mapsto U_q(\widehat{g}) \otimes U_q(\widehat{g})$, l'antipode $\mathcal{S} : U_q(\widehat{g}) \mapsto U_q(\widehat{g})$ et la counité $\mathcal{E} : U_q(\widehat{g}) \mapsto \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{aligned}
\Delta(X_i^{\pm}) &= X_i^{\pm} \otimes q_i^{-H_i/2} + q_i^{H_i/2} \otimes X_i^{\pm}, \\
\Delta(H_i) &= H_i \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_i,
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

$$\mathcal{S}(X_i^+) = -X_i^+ q_i^{-H_i}, \quad \mathcal{S}(X_i^-) = -q_i^{H_i} X_i^-, \quad \mathcal{S}(H_i) = -H_i, \quad \mathcal{S}(\mathbb{I}) = 1$$

et

$$\mathcal{E}(X_i^{\pm}) = \mathcal{E}(H_i) = 0, \quad \mathcal{E}(\mathbb{I}) = 1.$$

Ces algèbres ne sont pas cocommutatives et il existe une matrice R universelle pour chacune d'elles [60, 61, 62].

Les algèbres enveloppantes quantiques associées aux algèbres de Lie simples g non exceptionnelles peuvent aussi s'écrire dans le formalisme "RTT" [49], elles sont alors engendrées par $L^{\pm} = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes l_{ij}^{\pm} \in \text{End}(V) \otimes \mathcal{U}_q(g)$ satisfaisant :

$$\begin{aligned}
R_{12} L_1^{\pm} L_2^{\pm} &= L_2^{\pm} L_1^{\pm} R_{12}, & R_{12} L_1^+ L_2^- &= L_2^- L_1^+ R_{12} \\
l_{ii}^- l_{ii}^+ &= l_{ii}^+ l_{ii}^- = 1, & l_{ij}^+ &= l_{ji}^- = 0 \quad j < i \\
\Delta(L^{\pm}) &= L^{\pm} \dot{\otimes} L^{\pm}, & S(L^{\pm}) &= (L^{\pm})^{-1}, \quad \epsilon(L^{\pm}) = 1
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Pour $g = sl(n)$, la matrice R est donnée par :

$$R_{12} = q \sum_{i=1}^n E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j}^n E_{ii} \otimes E_{jj} + (q - q^{-1}) \sum_{i < j}^n E_{ij} \otimes E_{ji} \tag{2.1.21}$$

L'isomorphisme entre les deux réalisations est donné dans [49].

Pour le cas des algèbres quantiques associées aux algèbres de Kac-Moody \widehat{g} , la formulation "RTT" fait intervenir des variables formelles u, v permettant d'écrire, à partir de la matrice : $L^{\pm}(u) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes \sum l_{ij}^{\pm} [\pm n] u^{\pm n}$, l'infinité de générateurs de l'algèbre [63]. Les relations entre ces générateurs s'écrivent :

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{u}{v}\right) L_1^{\pm}(u) L_2^{\pm}(v) &= L_2^{\pm}(v) L_1^{\pm}(u) R\left(\frac{u}{v}\right), & R\left(\frac{u}{v} q^c\right) L_1^+(u) L_2^-(v) &= L_2^-(v) L_1^+(u) R\left(\frac{u}{v} q^{-c}\right) \\
\Delta(L^{\pm}(u)) &= L_1^{\pm}(u q^{\pm 1 \otimes \frac{c}{2}}) \dot{\otimes} L_1^{\pm}(u q^{\mp \frac{c}{2} \otimes 1}), & S(L^{\pm}(u)) &= (L^{\pm}(u))^{-1}, \quad \epsilon(L^{\pm}(u)) = 1
\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Avec pour le cas $\widehat{g} = \widehat{sl(n)}$:

$$R_{12}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u}{v}R_{12} - \frac{v}{u}(R_{21})^{-1} \quad (2.1.23)$$

Cette matrice R est appelée solution trigonométrique de l'équation de YB. Il est à noter que cette matrice n'est pas la seule solution trigonométrique de l'équation de YB et qu'il est possible d'en construire d'autres par la méthode de fusion [74]. Il existe encore une autre réalisation des algèbres quantiques de Kac-Moody proposée par Drinfel'd [42]. Cette réalisation sera donnée pour $\widehat{g} = \widehat{sl(2)}$ dans le chapitre 4. Les relations entre ces différentes réalisations sont schématisées dans la figure 2.1.

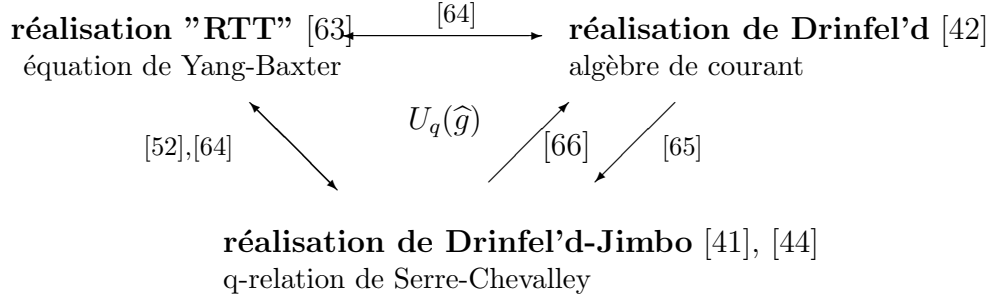


FIG. 2.1 – Réalisations de $U_q(\widehat{g})$

Chacune de ces réalisations a ses avantages. L'algèbre "RTT" est idéale pour l'étude des systèmes intégrables et la formulation d'une sous-algèbre abélienne se déduit facilement. La quantification de Drinfel'd-Jimbo permet de construire la théorie des représentations de dimension finie et leur classification, ou encore de construire la matrice R universelle [60, 61, 62] par la méthode du double de Drinfel'd [43]. L'algèbre de courant possède des relations de commutation plus simples que l'algèbre "RTT". Suivant le problème considéré, il est donc judicieux de choisir la réalisation appropriée pour le résoudre.

Il existe aussi une autre quantification des algèbres de Lie simples appelée Yangien. Afin de définir correctement le Yangien [41], il faut préalablement introduire la notion de bigèbre de Lie :

Définition 2.1.5. Une bigèbre de Lie est une algèbre de Lie g avec une application linéaire antisymétrique $\delta : g \rightarrow g \otimes g$ tel que :

- $\delta^* : g^* \otimes g^* \rightarrow g^*$ est un crochet de Lie sur g^* (duale de g)
- δ est un 1-cocycle de g avec des valeurs dans $g \otimes g$, i.e :

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)], \quad [x, y \otimes z] = [x, y] \otimes z + y \otimes [x, z].$$

Pour g une algèbre de Lie simple dans la base de Serre-Chevalley, la structure de bigèbre est donnée par :

$$\delta(H_i) = 0 \quad \delta(X_i^\pm) = d_i X_i^\pm \wedge H_i \quad \text{avec} \quad a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a. \quad (2.1.24)$$

A partir d'une algèbre de Lie sur \mathbb{C} et d'une variable formelle u , l'ensemble $g[u] = g \otimes \mathbb{C}[u]$ peut être identifié avec l'ensemble des applications polynomiales $f : \mathbb{C} \rightarrow g$. Pour une algèbre

de Lie simple, il est possible de définir une structure de bigèbre pour $g[u]$:

$$\begin{aligned}\delta : g[u] &\rightarrow g[u] \otimes g[v] = (g \otimes g)[u, v], \\ \delta(f)(u, v) &= (ad_{f(u)} \otimes 1 + 1 \otimes ad_{f(v)}) \left(\frac{t}{u-v} \right),\end{aligned}\tag{2.1.25}$$

où t est le Casimir de g associé à la forme bilinéaire invariante $(\ , \)$. Si $\{x_i\}$ est une base orthogonale de g par rapport à $(\ , \)$ alors $t = \sum x_i \otimes x_i$. Par exemple, pour $g = A_1 = sl(2)$ la base $\{X_1 = \frac{H}{\sqrt{2}}, X_2 = \frac{X^+ + X^-}{\sqrt{2}}, X_3 = \frac{i(X^+ - X^-)}{\sqrt{2}}\}$ vérifie $(X_i, X_j) = \delta_{ij}$ et $t = \sum_{i=1}^3 X_i \otimes X_i = \frac{1}{2}H \otimes H + X^+ \otimes X^- + X^- \otimes X^+$. La déformation homogène de $\mathcal{U}(g[u])$, appelée Yangien, est unique et définie par :

Définition 2.1.6. *Soit g une algèbre de Lie simple. Soit une forme bilinéaire invariante $(\ , \)$ sur g et $\{x_i\}$ une base orthonormée de g . Il existe, à un isomorphisme près, une unique quantification homogène $\mathcal{Y}_h(g[u])$ de $(g[u], \delta)$. Elle est engendrée par les éléments $x, J(x)$, avec $x \in g$, avec les relations suivantes :*

$$[x, y](\in \mathcal{Y}_h(g[u])) = [x, y](\in g), \quad J(ax + by) = aJ(x) + bJ(y), \quad [x, J(y)] = J([x, y]),$$

$$[J(x), J([y, z])] + [J(z), J([x, y])] + [J(y), J([z, x])] = h^2 \sum_{i,j,k} ([x, x_i], [[y, x_j], [z, x_k]]) \{x_i, x_j, x_k\}$$

$$[[J(x), J(y)], [z, J(w)]] + [[J(z), J(w)], [x, J(y)]] = h^2 \sum_{i,j,k} ([x, x_i], [[y, x_j], [[z, w], x_k]]) \{x_i, x_j, J(x_k)\}$$

Pour tout $x, y, z, w \in g$ et $a, b \in \mathbb{C}$ et $\{x_i, x_j, x_k\} = \frac{1}{24} \sum_{\sigma \in S_3} \{x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(k)}\}$ où S_3 est le groupe de permutation de 3 éléments.

La structure de Hopf de $\mathcal{Y}_h(g[u])$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \Delta(J(x)) = J(x) \otimes 1 + 1 \otimes J(x) + \frac{1}{2}h[x \otimes 1, t] \\ S(x) &= -x, \quad S(J(x)) = -J(x) + \frac{1}{4}cx, \quad \epsilon(x) = \epsilon(J(x)) = 0,\end{aligned}$$

où c est la valeur propre du Casimir $t \in \mathcal{U}(g)$ dans la représentation adjointe de g . Le degré sur $\mathcal{Y}_h(g[u])$ est donné par :

$$\deg(x) = 0, \quad \deg(J(x)) = 1$$

Par définition, le nom Yangien est associé au cas $h = 1$ cependant, pour $h \neq 0$, $\mathcal{Y}_h(g[u])$ et $\mathcal{Y}(g)$ sont isomorphes. Nous ne tiendrons pas compte de cette subtilité dans le cadre de cette thèse et parlerons aussi de Yangien pour $\mathcal{Y}_h(g[u])$.

Dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$, le Yangien redonne $g[u]$, l'espace des polynômes, avec comme coefficients les éléments de g . Cet espace est de dimension infinie. La définition précédente ne montre pas explicitement le caractère infini de cette algèbre. Il existe une autre réalisation [42] du Yangien, appelée réalisation de Drinfel'd, permettant d'écrire explicitement l'infinité de générateurs du Yangien.

Théorème 2.1.7. *Le Yangien $\mathcal{Y}(g)$ est isomorphe à l'algèbre associative ayant comme générateurs $\{X_{i,r}^\pm, H_{i,r}\}$, $i \in 1, \dots, n, r \in \mathbb{N}$, satisfaisant les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} [H_{i,r}, H_{j,s}] &= 0, \quad [H_{i,0}, X_{j,s}^\pm] = \pm d_i a_{ij} X_{j,s}^\pm, \quad [X_{i,r}^+, X_{j,s}^-] = \delta_{ij} H_{i,r+s}, \\ [H_{i,r+1}, X_{j,s}^\pm] - [H_{i,r}, X_{j,s+1}^\pm] &= \pm \frac{1}{2} d_i a_{ij} (H_{i,r} X_{j,s}^\pm + X_{j,s}^\pm H_{i,r}) \\ [X_{i,r+1}^\pm, X_{j,s}^\pm] - [X_{i,r}^\pm, X_{j,s+1}^\pm] &= \pm \frac{1}{2} d_i a_{ij} (X_{i,r} X_{j,s}^\pm + X_{i,s} X_{j,r}^\pm) \\ \sum_{\sigma \in S_m} [X_{i,r_{\sigma(1)}}^\pm, [X_{i,r_{\sigma(2)}}^\pm, \dots, [X_{i,r_{\sigma(m)}}^\pm, X_{j,s}^\pm] \dots] &= 0 \end{aligned}$$

pour tout ensemble d'entiers positifs r_1, \dots, r_m et $m = 1 - a_{ij}$.

L'isomorphisme entre les deux réalisations de $\mathcal{Y}(g)$ est donné par Drinfeld [42]. La structure de Hopf est sous-entendue [56] par l'isomorphisme entre les deux réalisations qui est donc un isomorphisme d'algèbre de Hopf. L'action explicite du co-produit sur les générateurs $\{X_{i,r}^\pm, H_{i,r}\}$ est seulement connue dans certains cas, par exemple pour $\mathcal{Y}(sl(\mathbf{n}))$ [67].

La troisième réalisation, valable pour $g = sl(\mathbf{n})$, correspond à la formulation "RTT" du Yangien. Historiquement, elle fut la première proposée. Elle apparaît dans le cadre des systèmes intégrables quantiques sous la forme de l'équation de Yang-Baxter puis de l'algèbre "RTT". Soit l'algèbre libre associative \mathcal{T} sur \mathbb{C} avec comme générateurs $t_{ij}^{(r)}$, où $r \geq 1$ et $1 \leq i, j \leq n+1$. Ces générateurs sont collectés dans la matrice $T(u)$ ayant comme composantes les séries formelles :

$$t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{\infty} t_{ij}^{(r)} u^{-r}. \quad (2.1.26)$$

Soit le déterminant quantique de la matrice $T(u)$:

$$qdet(T(u)) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \text{sgn}(\sigma) t_{1\sigma(1)}(u + \frac{n}{2}) t_{2\sigma(2)}(u + \frac{n}{2} - 1) \dots t_{n+1\sigma(n+1)}(u - \frac{n}{2}) \quad (2.1.27)$$

La troisième réalisation du Yangien $\mathcal{Y}(sl_{n+1})$ est définie de la manière suivante :

Définition 2.1.8. *Le Yangien $\mathcal{Y}(sl(\mathbf{n}))$ est isomorphe au quotient de \mathcal{T} par l'idéal à droite et à gauche engendré par les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} R_{12}(u-v) T_1(u) T_2(v) &= T_2(v) T_1(u) R_{12}(u-v), \quad qdet(T(u)) = 1 \\ R(u) &= u\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - P. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

La matrice R (2.1.28) est appelée solution rationnelle de l'équation de YB, nous utiliserons cet adjectif pour caractériser la matrice R associée aux Yangiens $\mathcal{Y}(sl(\mathbf{n}))$ et $\mathcal{Y}(gl(\mathbf{n}))$. Il est à noter que cette matrice n'est pas la seule solution rationnelle de l'équation de YB et qu'il est possible d'en construire d'autres par la méthode de fusion [74]. En définissant les series formelles suivantes :

$$H_i(u) = 1 + \sum_{r=0}^{\infty} H_{i,r} u^{-r-1}, \quad X_i^\pm(u) = \sum_{r=0}^{\infty} X_{i,r}^\pm u^{-r-1}. \quad (2.1.29)$$

L'isomorphisme entre la seconde et la troisième réalisation est donné par :

$$\begin{aligned}\psi(H_i(u)) &= a_i(u)^{-1}a_i(u+1)^{-1}a_{i-1}(u+\frac{1}{2})a_{i+1}(u+\frac{1}{2}), \\ \psi(X_i^+(u)) &= b_i(u)a_i(u)^{-1}, \quad \psi(X_i^-(u)) = a_i(u)^{-1}c_i(u),\end{aligned}\tag{2.1.30}$$

où $a_i(u)$ (respectivement $b_i(u)$ et $c_i(u)$) correspond au déterminant quantique de la $i \times i$ sous-matrice de $T(u)$ formée par les entrées $t_{kl}(u)$ avec $1 \leq k, l \leq i+1$ et $k, l \neq i+1$ (respectivement $k \neq i+1, l \neq i$ et $k \neq i, l \neq i+1$). Si la condition sur le déterminant quantique est abandonnée, le groupe quantique obtenu est associé à l'algèbre de Lie classique $gl(n)$.

Pour finir, nous remarquerons que les Yangiens et les algèbres quantiques ne sont pas les seuls exemples de groupes quantiques. Il existe aussi les groupes quantiques elliptiques qui correspondent à la déformation des algèbres "classiques" par deux paramètres [68]. Par exemple, le modèle XYZ est relié à ces groupes.

2.2 Théorie des représentations

Le point fondamental pour réaliser l'ABA est de connaître précisément la théorie des représentations des algèbres "RTT". Comme nous l'avons discuté préalablement, ces algèbres correspondent à différentes algèbres quantiques suivant le choix de la matrice R . Par la suite, nous nous intéresserons aux groupes quantiques $\mathcal{U}_q(\widehat{gl(\mathfrak{n})})$ et $\mathcal{V}(gl(\mathfrak{n}))$ dans le formalisme "RTT". Nous les noterons d'une manière unifiée $\mathcal{A}(R)$ faisant référence au choix de la matrice R , rationnel pour $\mathcal{V}(gl(\mathfrak{n}))$ et trigonométrique pour $\mathcal{U}_q(\widehat{gl(\mathfrak{n})})$. Pour les chaînes de spins, nous ne considérerons que les représentations de dimension finie des groupes quantiques. Ces dernières sont construites à partir des représentations de dimension finie de la sous-algèbre $\mathcal{B}(R)$ de dimension finie de $\mathcal{A}(R)$. Ces représentations font intervenir un homomorphisme d'évaluation entre les deux algèbres. Nous commencerons donc par rappeler les propriétés essentielles des représentations des algèbres de Lie $gl(\mathfrak{n})$. Nous présenterons ensuite la théorie des représentations de dimension finie de l'algèbre $\mathcal{U}_q(gl(\mathfrak{n}))$. Enfin, nous obtiendrons les représentations de dimension finie de $\mathcal{A}(R)$. Pour le cas des super-algèbres, nous renvoyons le lecteur à l'article reproduit à la fin de ce chapitre et aux références de ce dernier.

2.2.1 Représentation de l'algèbre de Lie $gl(\mathfrak{n})$

L'algèbre de Lie $gl(\mathfrak{n})$ est une algèbre associative avec \mathfrak{n}^2 générateurs \mathcal{E}_{ij} , $i, j = 1, \dots, \mathfrak{n}$ sujets aux relations [58] :

$$[\mathcal{E}_{ij}, \mathcal{E}_{kl}] = \delta_{kj}\mathcal{E}_{il} - \delta_{il}\mathcal{E}_{kj}\tag{2.2.1}$$

Pour un ensemble de n nombres complexes $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, nous appellerons $\pi(\lambda)$ représentation irréductible de l'algèbre de Lie $gl(n)$ de plus haut poids λ . π^λ est généré pour un vecteur non nul Ω tel que :

$$\mathcal{E}_{ij}\Omega = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq n \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{ii}\Omega = \lambda_i\Omega \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.\tag{2.2.2}$$

La représentation $L(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+$ pour tous les $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Pour mieux comprendre le critère, pour que la dimension de la représentation soit finie, considérons le cas $gl(2)$. Le théorème de la base PBW nous dit que le $gl(2)$ -module $L(\lambda)$ a comme base les vecteurs $\Omega(r) = (E_{21})^r \Omega$. La base duale s'écrit $\Omega(r)^* = \Omega^*(E_{12})^r$ avec $\Omega^* \Omega = 1$. Les relations de commutation de $gl(n)$ nous permettent de calculer :

$$\Omega(r)^* \Omega(r) = r! \prod_{l=1}^r (\lambda_1 - \lambda_2 - (r - l)). \quad (2.2.3)$$

Afin que la dimension de la représentation soit finie, il doit exister un r tel que le produit scalaire soit nul i.e. $(\lambda_1 - \lambda_2 - a) = 0$ pour a entier positif. La dimension de la représentation est alors $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$. Ce résultat se généralise pour le cas n arbitraire et donne le critère garantissant que la représentation soit de dimension finie.

Il y a donc dans le cas d'une représentation de dimension finie un ensemble de poids ordonné : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Le cas $\lambda = (1, 0, \dots, 0)$ est appelé représentation fondamentale.

Nous pouvons étendre l'étude des représentations au cas de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(gl(\mathbf{n}))$. Cette algèbre a une structure de Hopf et nous pouvons donc considérer le produit tensoriel de représentations. Le produit tensoriel de représentations peut être décomposé en la somme directe de représentations irréductibles :

$$\pi \otimes \pi' = \bigoplus_i n_i \pi_i \quad (2.2.4)$$

La méthode de décomposition est basée sur l'utilisation des tableaux de Young. Par cette méthode, il est possible de construire des représentations de dimensions plus grandes à partir de la représentation fondamentale. Cette décomposition est vraie pour toutes les représentations de dimensions finies et donne lieu à un théorème stipulant que toutes ces représentations sont semi-simples (ou complètement réductibles).

2.2.2 Représentation de $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$

Avant de présenter la théorie des représentations de plus haut poids de $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$, nous allons donner la relation entre $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$ et $\mathcal{U}_q(sl(\mathbf{n}))$. Nous avons vu dans la section précédente la version q -déformée des algèbres de Lie simples. L'algèbre de Lie $gl(\mathbf{n})$ n'est pas une algèbre de Lie simple et il n'existe pas de matrice de Cartan associée. L'algèbre $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$ est construite en généralisant $\mathcal{U}_q(sl(\mathbf{n}))$ [44]. Il faut introduire de nouveaux générateurs h_i tel que $H_i = h_i - h_{i+1}$. $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$ est une algèbre associative sur \mathbb{C} engendrée par $q^{\pm h_j}$ et X_i^{\pm} ($1 \leq j \leq \mathbf{n}$, $1 \leq i \leq \mathbf{n} - 1$) avec les relations :

$$\begin{aligned} q^{h_i} q^{-h_i} &= q^{-h_i} q^{h_i} = 1 & q^{h_i} X_j^{\pm} q^{-h_i} &= q^{\pm(\delta_{ij} - \delta_{ij+1})} X_j^{\pm}, \\ [X_i^+, X_j^-] &= \delta_{ij} \frac{q^{h_i - h_{i+1}} - q^{-h_i + h_{i+1}}}{q - q^{-1}} & X_i^{\pm} X_j^{\pm} &= X_j^{\pm} X_i^{\pm} \quad \text{pour } |i - j| \geq 2 \\ (X_i^{\pm})^2 X_{i\pm 1}^{\pm} &- (q - q^{-1}) X_i^{\pm} X_{i\pm 1}^{\pm} X_i^{\pm} + X_{i\pm 1}^{\pm} (X_i^{\pm})^2 &= 0 &\quad \text{pour } 1 \leq i, i \pm 1 \leq \mathbf{n} \end{aligned}$$

Les représentations de $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$, pour q non racine de l'unité, sont caractérisées par les plus hauts poids de $gl(\mathbf{n})$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et un ensemble de paramètres $\eta_j = \{\pm 1\}$. Ces représentations sont de dimension finie sous les mêmes conditions que pour $gl(\mathbf{n})$ et sont toutes de plus haut

poids. Pour Ω vecteur de plus haut poids d'une telle représentation π^λ , l'action des générateurs de $\mathcal{U}_q(\widehat{gl(\mathfrak{n})})$ est définie comme :

$$q^{h_i}\Omega = \eta_i q^{\lambda_i}\Omega, \quad X_i^+\Omega = 0, \quad X_i^-\Omega \neq 0 \quad (2.2.5)$$

De la même façon que pour le cas non déformé, ces représentations sont toutes semi-simples [69, 70].

2.2.3 Représentations de dimension finie de $\mathcal{A}(R)$

Dans le cadre des représentations irréductibles de dimensions finies, l'algèbre $\mathcal{U}_q(\widehat{gl(\mathfrak{n})})$ a une charge centrale nulle. Dans le cas d'une charge centrale non nulle, les représentations associées sont de dimension infinie et sortent du cadre de cette thèse. Pour une charge centrale nulle, les trois relations (2.1.22) sont identiques et en utilisant l'homomorphisme d'évaluation, que nous définirons par la suite, il est possible de montrer que les opérateurs $L^\pm(u)$ sont égaux à une fonction multiplicative près. Nous pouvons donc utiliser la notation $T(u)$ pour la matrice de monodromie aussi bien pour le cas rationnel que pour le cas trigonométrique.

Nous rappelons que pour utiliser l'ABA, il nous faut connaître les représentations de plus haut poids associées à $\mathcal{A}(R)$. Sans ces représentations, il est impossible de l'appliquer. Nous allons donc définir ces représentations et expliquer leur construction.

Définition 2.2.1. Une représentation $\rho(\Lambda)$ de $\mathcal{A}(R)$ est appelée de plus haut poids s'il existe un vecteur non nul Ω tel que :

$$t_{ii}(u)\Omega = \Lambda_i(u)\Omega \quad \text{et} \quad t_{ij}(u)\Omega = 0 \quad \text{si } i > j \quad (2.2.6)$$

pour des scalaires $\Lambda_i(u) \in \mathbb{C}[[u^{-1}]]$. $\Lambda(u) = (\Lambda_1(u), \dots, \Lambda_n(u))$ est appelé poids et Ω vecteur de plus haut poids.

Ces représentations peuvent être vues comme l'image par une application surjective d'une représentation de plus haut poids universelle appelée module Verma $M(\Lambda)$. Il s'ensuit que $\rho(\Lambda)$ est isomorphe au quotient de $M(\Lambda)$ par le noyau de l'application : $M(\Lambda) \rightarrow \rho(\Lambda)$

Définition 2.2.2. Soit un ensemble de séries formelles $\Lambda(u) = (\Lambda_1(u), \dots, \Lambda_n(u))$ de la forme :

$$\Lambda_i(u) = 1 + \Lambda_i^{(1)}u^{-1} + \Lambda_i^{(2)}u^{-2} + \dots \quad \text{avec} \quad \Lambda_i^{(r)} \in \mathbb{C}.$$

Le module de Verma $M(\Lambda)$ est le quotient de $\mathcal{A}(R)$ par l'idéal à droite engendré par les séries $t_{ij}(u)$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $t_{ii}(u) - \Lambda_i(u)$ pour $1 \leq i \leq n$

Le module de Verma permet un traitement purement algébrique des représentations de $\mathcal{Y}(gl(\mathfrak{n}))$. Dans le cadre de l'ABA, il est possible de remplacer le pseudo-vide (vecteur de plus haut poids) par le module de Verma. L'un des éléments motivant notre étude des chaînes de spins "universelles" est le théorème classifiant les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathcal{A}(R)$ [43, 69] :

Théorème 2.2.3. Toutes les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathcal{A}(R)$ sont de plus haut poids. De plus, elles contiennent un unique vecteur de plus haut poids (à la multiplication par un scalaire près) .

Ces représentations de plus haut poids sont construites à partir des sous-algèbres finies $\mathcal{B}(R)$ de $\mathcal{A}(R)$ en utilisant l'application d'évaluation :

$$ev_x : \mathcal{A}(R) \rightarrow \mathcal{B}(R), \quad (2.2.7)$$

où x est le paramètre d'évaluation. Pour le cas rationnel $\mathcal{B}(R) = \mathcal{U}(gl(\mathfrak{n}))$ et pour le cas trigonométrique $\mathcal{B}(R) = \mathcal{U}_q(gl(\mathfrak{n}))$. La forme explicite de ces deux évaluations est donnée par :

$$ev_x : T(u) \mapsto \begin{cases} (u-x)\mathbb{I} - \hbar \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \otimes \mathcal{E}_{ji} & \text{pour } \mathcal{Y}(gl(\mathfrak{n})) \text{ (2.2.1),} \\ \frac{u}{x} L^+ - \frac{x}{u} L^- & \text{pour } \mathcal{U}_q(\widehat{gl(\mathfrak{n})}) \text{ (2.1.20),} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

En utilisant la structure de Hopf ainsi que la théorie des représentations des algèbres $\mathcal{B}(R)$, il est possible d'introduire la matrice de transfert universelle. Cette matrice est une fonction de $L \times (\mathfrak{n} + 1)$ paramètres, caractérisant le nombre de sites L et les représentations d'évaluation associées $\rho^{\lambda^{(i)}}(x_i) = \pi^{\lambda^{(i)}} \circ ev_{x_i}$.

$$\mathfrak{t}(u, \{\lambda^{(i)}, x_i\}_{i=1}^L) = tr(\mathcal{T}(u, \{\lambda^{(i)}, x_i\}_{i=1}^L)) \quad (2.2.9)$$

$$\mathcal{T}(u, \{\lambda^{(i)}, x_i\}_{i=1}^L) = \left(\otimes_{i=1}^L \rho^{\lambda^{(i)}}(x_i) \right) \circ \Delta^{(L)}(T(u)) \quad (2.2.10)$$

où $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_n^{(i)})$, $i = 1, \dots, L$ sont les poids des représentations de $\mathcal{B}(R)$. Les poids d'une telle représentation de $\mathcal{A}(R)$ sont de la forme :

$$\Lambda_j(u) = \prod_{i=1}^L \Lambda_j^{(i)}(u), \quad j = 1, \dots, \mathfrak{n} \quad (2.2.11)$$

2.3 Problème spectral

L'ensemble de ces structures algébriques a été identifié comme symétrie d'Hamiltonien de systèmes intégrables quantiques. Comme l'Hamiltonien fait partie de la sous-algèbre abélienne d'un groupe quantique, le problème spectral de celui-ci est équivalent à la résolution de celui de la matrice de transfert :

$$t(u) \Psi(\{u\}) = \Lambda(u) \Psi(\{u\}). \quad (2.3.1)$$

La méthode de résolution la plus populaire, par son efficacité et sa polyvalence, est l'AB. Cette méthode connaît plusieurs variantes : la version dite coordonnée proposée initialement par H. Bethe, la version algébrique développée par le groupe de Leningrad (Faddeev, Takhtan, Sklyanin, ...), la version analytique proposée par Reshetikhin, et la version fonctionnelle introduite par Sklyanin. Nous ne discuterons ici que la version analytique, qui a été utilisée par le groupe d'Annecy précédemment, et la version algébrique qui est appliquée dans le cadre de cette thèse. Nous interpréterons la résolution du problème spectral comme l'obtention d'un système d'équations caractérisant ce problème.

Ansatz de Bethe analytique [47]

L'ansatz de Bethe analytique permet de trouver les valeurs propres de la matrice de transfert ainsi que les équations de Bethe associées. La procédure est la suivante :

- Au préalable, il faut trouver un vecteur propre de la matrice de transfert et la valeur propre associée :

$$t(u)\Omega = \sum_{i=1}^n \Lambda_i(u)\Omega \quad (2.3.2)$$

- Il faut faire l'hypothèse que toutes les valeurs propres du problème sont de la forme :

$$\Lambda(u) = \sum_{i=1}^n A_i(u) \Lambda_i(u), \quad (2.3.3)$$

où les $A_i(u)$ sont des fonctions à déterminer. Cette hypothèse est appelée "habillage des valeurs propres".

- Puis, la forme de ces fonctions est contrainte en utilisant les propriétés des valeurs propres (valeurs asymptotiques, méthode de fusion, connaissance du déterminant quantique, ...). Ces valeurs propres sont alors fonction d'un certain nombre de paramètres.
- Enfin, des équations sur ces paramètres sont obtenues en imposant que $\Lambda(u)$ soit une fonction analytique. Ces équations correspondent aux équations de Bethe, et les différentes solutions donnent les valeurs propres du problème.

Cette méthode ne donne qu'une conjecture sur les valeurs propres de la matrice de transfert. La démonstration exacte de ce résultat ne peut se faire que dans le cadre des autres ansatz de Bethe avec la version algébrique.

Ansatz de Bethe algébrique [35]

L'ansatz de Bethe algébrique permet de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transfert ainsi que les équations de Bethe associées.

La procédure est la suivante :

- Il faut d'abord trouver une représentation de plus haut poids pour le groupe quantique considéré. La matrice de monodromie est de forme triangulaire par action sur le vecteur de plus haut poids. Les opérateurs de la partie strictement triangulaire supérieure sont considérés comme des opérateurs de création et ceux de la partie strictement triangulaire inférieure comme des opérateurs d'annihilation.
- Les vecteurs propres sont ensuite construits comme une combinaison linéaire de produits d'opérateurs de création. Dans le cas d'une algèbre de rang supérieur à deux, il est important d'étudier le groupe quantique pour mettre en évidence l'existence d'un plongement du rang n à un rang inférieur afin d'obtenir une récurrence sur les vecteurs propres.
- Puis nous calculons les relations de commutation entre la matrice de transfert et les opérateurs de création.
- L'action de la matrice de transfert sur les vecteurs propres donne alors deux termes, l'un contenant le vecteur propre initial et le second contenant d'autres vecteurs. L'annulation du second terme donne les équations de Bethe.

2.4 Premier article

Dans cet article réalisé en collaboration avec E. Ragoucy, nous présentons d'une façon unifiée et détaillée l'ansatz de Bethe emboîté pour les chaînes de spins périodiques basées sur les (super)algèbres $\mathcal{Y}(gl(\mathbf{n}))$, $\mathcal{Y}(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$, $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{n}))$ ou $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$, avec des représentations arbitraires (i.e. 'spins') pour chaque site de la chaîne. En particulier, le cas des représentations indécomposables des superalgèbres est étudié. Cette construction étend et unifie les résultats obtenus préalablement pour les chaînes de spins basées sur $\mathcal{Y}(gl(\mathbf{n}))$ ou $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{n}))$ et pour certains cas particuliers de "super" chaînes de spins. Nous donnons les équations de Bethe et la forme des vecteurs de Bethe. Les cas de $gl(2|1)$, $gl(2|2)$ et $gl(4|4)$ (reliés à la correspondance AdS/CFT) sont aussi détaillés.

Cet article a été publié dans "Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical" **41** No 29 (25 July 2008) page 295202.

Nested Bethe ansatz for "all" closed spin chains

S. Belliard¹ and E. Ragoucy²

Laboratoire de Physique Théorique LAPTH³

BP 110, F-74941 Annecy-le-Vieux Cedex, France.

We present in an unified and detailed way the Nested Bethe Ansatz for closed spin chains based on $\mathcal{Y}(gl(\mathbf{n}))$, $\mathcal{Y}(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$, $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{n}))$ or $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$ (super)algebras, with arbitrary representations (i.e. ‘spins’) on each site of the chain. In particular, the case of indecomposable representations of superalgebras is studied. The construction extends and unifies the results already obtained for spin chains based on $\mathcal{Y}(gl(\mathbf{n}))$ or $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{n}))$ and for some particular super-spin chains. We give the Bethe equations and the form of the Bethe vectors. The case of $gl(2|1)$, $gl(2|2)$ and $gl(4|4)$ superalgebras (that are related to AdS/CFT correspondence) is also detailed.

LAPTH-1245/08

arXiv :0804.2822 [math-ph]

April 2008

2.4.1 Introduction

Finding eigenvectors and eigenvalues of a transfer matrix is a fundamental problem in integrable systems. It started with the work of Bethe, which led to the celebrated Bethe ansatz [16]. Then, the framework of the Quantum Inverse Scattering Problem based on the Yang-Baxter equation became one of the most used way to adress this question. This technique is being developed since the 70’s by the Leningrad School, see for example the review [2] and references therein. Since then, numerous publications have been devoted to the subject, so that it is becoming difficult to make exhaustive citation. In the seek of such an impossible task, we will focus on Bethe equations and Bethe vectors for closed (or periodic) spin chains based on $gl(\mathbf{n})$ or $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ algebras (leading to generalized XXX (super)spin chains) and their quantum deformations (leading to generalized XXZ (super)spin chains). The resolution of the general spin chain model started with the calculation of the Bethe equations, computed for $gl(\mathbf{n})$ chains (with spins in the fundamental representation) in [71, 72]. Other cases (e.g. combining different spins) have been done in [73], see also [74, 53]. Closed spin chains based on $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ superalgebras in the distinguished diagram were studied in [75] and [76] and, in the case of alternating fundamental-conjugate representations of $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ in [77]. In [78], closed spin chains in the fundamental representation but for any type of Dynkin diagram where studied using the Baxter Q -operator, and generalized in [79] to a chain where all the spins are in a (type 1) typical representation depending on a free parameter. The general approach for arbitrary representations with any type of Dynkin diagram was done in [52]. General approach using

¹samuel.belliard@lapp.in2p3.fr

²eric.ragoucy@lapp.in2p3.fr

³UMR 5108 du CNRS, associée à l’Université de Savoie.

Hirota equation was done in [80]. The case of quantum deformations was dealt in [44, 81] for algebras (see also [51] for a global treatment)

However, in most of the above papers, one computes the Bethe equations and the transfer matrix eigenvalues, but not the Bethe vectors (i.e. the transfer matrix eigenvectors). To get them, one needs a more involved Bethe ansatz, the algebraic Bethe ansatz [37] (for rank 1 algebras) and its refinement to higher rank algebras, the nested Bethe ansatz [36, 82]. Algebraic Bethe ansatz for a general $gl(2)$ spin chain can be found in [83]. Generalization to superalgebras has been done in some particular cases, such as the $gl(1|2)$ superalgebra [84]. Nested Bethe ansatz for generalized XXZ spin chains with fundamental representations has been studied [85]. Alternating generalized XXZ super-spin chain has been treated in [86].

More recently, a unified presentation for Bethe vectors of $gl(\mathbf{n})$ and $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$ spin chains has been developped [87, 88], producing a ‘trace formula’ for Bethe vectors. This trace formula was shown to obey the same recursion formula that is obtained from the nested Bethe ansatz, proving equivalence between the two approaches.

Let us also mention an alternative approach [89, 90] to the construction of Bethe vectors, using currents in the Drinfeld presentation of (quantum) algebras. The construction is off-shell (i.e. without any reference to Bethe equations) and thus may open a way to compute correlation functions. In this formalism, the construction is done without any reference to a highest weight, but rather computing modulo a suitably defined Borel subalgebra. The Bethe vectors are then viewed as special projections of currents that obey (Bethe ansatz) comultiplication properties. Note that these properties are valid even without Bethe equations : these equations appear when asking the off-shell Bethe vectors to be eigenvectors of the transfer matrix [91]. The construction (and the connection with the previous approach) has been done for $\mathcal{Y}(\mathbf{n})$ and $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathbf{n})$ algebras [92]. The case of (deformed) superalgebras remains to be treated in this formalism.

In the present paper we present in a unified way the nested Bethe ansatz for spin chains based on $gl(\mathbf{n})$, $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$, $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$ and $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$ (super)algebras, with arbitrary representations (i.e. ‘spins’) on each site of the chain. In the case of (quantum) algebras, the construction is equivalent to the ‘trace formula’ approach, and we make contact between the two presentations. Our construction also works for (quantum) superalgebras and we exhibit a ‘supertrace formula’ for the Bethe vectors. The technique is essentially algebraic and works as soon as the representations on the spin chains are highest weight. Then we use the Shapovalov form to prove orthogonality condition between Bethe vectors.

The plan of the paper is as follows. In section 2.4.2, we introduce the different algebras that are concerned with our approach, presenting their R -matrices and their finite-dimensional irreducible representations. In section 2.4.4, as a warm up, we remind the algebraic Bethe ansatz, which deals with spin chains based on $gl(2)$, $gl(1|1)$ algebras and their quantum deformations. Then, in section 2.4.5, we perform the nested Bethe ansatz in a very detailed and pedestrian way⁴ and up to the end. Finally, in section 2.4.11, we study the Bethe vectors that have been constructed in the previous section, showing connection with the ‘trace formula’ and generalizing it to (quantum) superalgebras. Some examples of Bethe vectors are also given. The case of $gl(2|1)$, $gl(2|2)$ and $gl(4|4)$ superalgebras (that are related to AdS/CFT correspondence) is detailed in section 2.4.14. An appendix is devoted to the presentations of the finite dimensional

⁴At least to our opinion. . .

(super)algebras used in the paper.

2.4.2 Algebraic structures for closed spin chains

Auxiliary graded spaces

We use the so-called auxiliary space framework, a useful notation for the R -matrix formalism. In this formalism, one deals with multiple tensor product of vectorial spaces $\mathcal{V} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}$ and operators (defining an algebra \mathcal{A}) therein. For a matrix valued operator $A := \sum_{ij} E_{ij} \otimes A_{ij} \in \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{A}$, and any numbers $k \leq m$ we set :

$$A_k := \sum_{ij} \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes E_{ij} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(m-k)} \otimes A_{ij} \in \text{End}(\mathcal{V}^{\otimes m}) \otimes \mathcal{A}, \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.4.1)$$

where E_{ij} are elementary matrices with 1 at position (i, j) and 0 elsewhere.

The notation is also valid for complex matrices, taking $\mathcal{A} := \mathbb{C}$ and using the isomorphism $\text{End}(\mathcal{V}) \otimes \mathbb{C} \sim \text{End}(\mathcal{V})$.

When $A \in \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{A}$, for k, l such that $1 \leq k < l \leq m$, we denote by A_{kl} the operator in $\text{End}(\mathcal{V}^{\otimes m}) \otimes \mathcal{A}$ defined by

$$A_{kl} := \sum_{ijab} \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes E_{ij} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(l-k-1)} \otimes E_{ab} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(m-l)} \otimes A_{ijab}. \quad (2.4.2)$$

We will work on \mathbb{Z}_2 -graded spaces $\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$. The elementary $\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ column vectors e_i (with 1 at position i and 0 elsewhere) and elementary $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}})$ matrices E_{ij} have grade

$$[e_i] = [i] \quad \text{and} \quad [E_{ij}] = [i] + [j]. \quad (2.4.3)$$

This grading is also extended to the superalgebras we deal with, see section 2.4.2 below.

The tensor product is graded accordingly :

$$(A_{ij} \otimes A_{kl})(A_{ab} \otimes A_{cd}) = (-1)^{([k]+[l])([a]+[b])} (A_{ij}A_{ab} \otimes A_{kl}A_{cd}). \quad (2.4.4)$$

To simplify the presentation we work with the *distinguished* \mathbb{Z}_2 -grade defined by

$$[i] = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq \mathfrak{m}, \\ 1, & \mathfrak{m} + 1 \leq i \leq \mathfrak{m} + \mathfrak{n}. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Simplification in the expressions follows from the following rule :

$$[i][j] = [i] \quad \text{when} \quad i \leq j, \quad (2.4.6)$$

which is valid only for the distinguished grade. Generalization to other gradings is easy to do.

The non graded case is obtained setting formally $\mathfrak{n} = 0$ in the above expressions.

R matrices

In what follows, we will deal with different types of $R \in \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \text{End}(\mathcal{V})$ matrices, all obeying (graded) Yang-Baxter equation (written in auxiliary space $\text{End}(\mathcal{V}) \otimes \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \text{End}(\mathcal{V})$) :

$$R_{12}(u_1, u_2) R_{13}(u_1, u_3) R_{23}(u_2, u_3) = R_{23}(u_2, u_3) R_{13}(u_1, u_3) R_{12}(u_1, u_2) \quad (2.4.7)$$

and unitarity relation :

$$R_{12}(u, v) R_{21}(v, u) = \zeta(u, v) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (2.4.8)$$

where $\zeta(u, v)$ is a \mathbb{C} -function depending on the model under consideration (see below). These are the two fundamental properties used to construct transfer matrix for periodic spin chains. Below, we focus on infinite dimensional associative algebras based on $gl(\mathfrak{n})$ and $gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ Lie (super) algebras : Yangians $\mathcal{Y}(gl(\mathfrak{n})) \equiv \mathcal{Y}(\mathfrak{n})$, super Yangians $\mathcal{Y}(gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})) \equiv \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$, quantum affine (super) group $\mathcal{U}_q(\widehat{gl}(\mathfrak{n})) \equiv \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{n})$ and $\mathcal{U}_q(\widehat{gl}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})) \equiv \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$. We note these algebras $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}} = \mathcal{Y}(\mathfrak{n})$ or $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{n})$ and $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} = \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ or $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$. As a notation, we will write also $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|0} = \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$.

Depending on the choice of the algebra, we will construct different spin chains :

- **For $gl(\mathfrak{n})$ or generalized XXX spin chains**, the algebra is the Yangian $\mathcal{Y}(\mathfrak{n})$ with rational R -matrix :

$$R_{12}(u, v) = R_{12}(u - v) = (u - v) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \hbar P_{12} \quad \text{with} \quad P_{12} = \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \otimes E_{ji} \quad (2.4.9)$$

where u is a spectral parameter over the field \mathbb{C} and P_{12} is the permutation operator ($P_{12}(a \otimes b) = b \otimes a$). It is the simplest rational solution of the Yang-Baxter equation found by Yang and Baxter in [1, 27] and studied by Drinfel'd [42, 43] in connection with enveloping Lie algebras. When $\mathfrak{n} = 2$ and all the spins are in fundamental (i.e. spin $\frac{1}{2}$) representation, the spin chain model constructed from this R -matrix is the celebrated Heisenberg XXX model [17].

The unitarity relation reads :

$$R_{12}(u, v) R_{21}(v, u) = (u - v - \hbar)(v - u - \hbar) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (2.4.10)$$

Note that the matrix is symmetric :

$$R_{21}(u) \equiv P_{12} R_{12}(u) P_{12} = R_{12}(u). \quad (2.4.11)$$

From the mathematical point of view, the parameter of deformation \hbar is irrelevant since we have the isomorphism $\mathcal{Y}_{\hbar}(\mathfrak{n}) \sim \mathcal{Y}_{\hbar'}(\mathfrak{n})$ for any non-vanishing values of \hbar and \hbar' . For this reason, it is in general set to 1 in the mathematical literature. However, in spin chains studies, it is set to $\pm i$, to ensure that the Hamiltonian is Hermitian. In this paper, we keep it free to encompass these two conventions.

- **For $gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ or supersymmetric XXX spin chains**, one considers the super-Yangian $\mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$, introduced in [36, 75, 93] with the same form (2.4.9) for the R -matrix and unitarity relation (2.4.10), but with a \mathbb{Z}_2 graded auxiliary space. The permutation operator in the graded space takes the form :

$$P_{12} = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (-1)^{[j]} E_{ij} \otimes E_{ji}, \quad (2.4.12)$$

so that we have $P_{12}(a \otimes b) = (-1)^{[a][b]} b \otimes a$.

- **We will also deal with $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{n})$ or generalized XXZ spin chains.** In that case, one considers the R -matrix of the (centerless) affine quantized algebra $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{n})$:

$$\begin{aligned} R_{12}(u, v) &= R_{12}\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{uq}{v} - \frac{v}{uq}\right) \sum_{a=1}^{\mathfrak{n}} E_{aa} \otimes E_{aa} + \left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) \sum_{1 \leq a \neq b \leq \mathfrak{n}} E_{aa} \otimes E_{bb} \\ &\quad + (q - q^{-1}) \sum_{1 \leq a \neq b \leq \mathfrak{n}} \left(\frac{u}{v}\right)^{\text{sign}(b-a)} E_{ab} \otimes E_{ba} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

with unitarity relation :

$$R_{12}(u, v) R_{21}(v, u) = \left(\frac{uq}{v} - \frac{v}{uq}\right) \left(\frac{vq}{u} - \frac{u}{vq}\right) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \quad (2.4.14)$$

where q is a generic complex number, not root of unity. It has been introduced by Jimbo or Faddeev, Reshetikhin and Takhtajan [44, 49]. When $\mathfrak{n} = 2$ and the spins lie in fundamental representation we recover the Heisenberg XXZ model.

- **The last cases considered are $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ or supersymmetric XXZ spin chains.** The R -matrix of the (centerless) affine quantized algebra $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ reads [94, 95, 96] :

$$\begin{aligned} R_{12}(u, v) &= R_{12}\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{a=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \left(\frac{u}{v} q^{1-2[a]} - \frac{v}{u} q^{-1+2[a]}\right) E_{aa} \otimes E_{aa} + \left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) \sum_{1 \leq a \neq b \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{aa} \otimes E_{bb} \\ &\quad + (q - q^{-1}) \sum_{1 \leq a \neq b \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \left(\frac{u}{v}\right)^{\text{sign}(b-a)} (-1)^{[b]} E_{ab} \otimes E_{ba}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

The auxiliary space is graded, and the unitarity relation reads :

$$R_{12}(u, v) R_{21}(v, u) = \left(\frac{uq}{v} - \frac{v}{uq}\right) \left(\frac{vq}{u} - \frac{u}{vq}\right) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (2.4.16)$$

- **We will encompass all these cases writing :**

$$\begin{aligned} R_{12}(u, v) &= \sum_{a=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \mathfrak{a}_a(u, v) E_{aa} \otimes E_{aa} + \mathfrak{b}(u, v) \sum_{1 \leq a \neq b \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{aa} \otimes E_{bb} \\ &\quad + \sum_{1 \leq a \neq b \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \mathfrak{c}_{ab}(u, v) E_{ab} \otimes E_{ba} \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

with the following identifications :

$$\text{For } Y(\mathfrak{n}) : \quad \mathfrak{a}_a(u, v) = u - v - \hbar \quad ; \quad \mathfrak{b}(u, v) = u - v \quad ; \quad \mathfrak{c}_{ab}(u, v) = -\hbar \quad (2.4.18)$$

$$\begin{aligned} \text{For } Y(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) : \quad \mathfrak{a}_a(u, v) &= u - v - (-1)^{[a]} \hbar \quad ; \quad \mathfrak{b}(u, v) = u - v \\ \mathfrak{c}_{ab}(u, v) &= -(-1)^{[b]} \hbar \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

$$\begin{aligned} \text{For } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{n}) : \quad \mathfrak{a}_a(u, v) &= \left(\frac{uq}{v} - \frac{v}{uq}\right) \quad ; \quad \mathfrak{b}(u, v) = \frac{u}{v} - \frac{v}{u} \\ \mathfrak{c}_{ab}(u, v) &= (q - q^{-1}) \left(\frac{u}{v}\right)^{\text{sign}(b-a)} \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

$$\begin{aligned} \text{For } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) : \quad & \mathfrak{a}_a(u, v) = \left(\frac{u}{v}q^{1-2[a]} - \frac{v}{u}q^{-1+2[a]}\right) \quad ; \quad \mathfrak{b}(u, v) = \frac{u}{v} - \frac{v}{u} \\ & \mathfrak{c}_{ab}(u, v) = (q - q^{-1})\left(\frac{u}{v}\right)^{\text{sign}(b-a)}(-1)^{[b]} \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

In this notation, the unitary relation reads

$$\zeta(u, v) = \mathfrak{a}_1(u, v)\mathfrak{a}_1(v, u). \quad (2.4.22)$$

Remark that we have the properties

$$\mathfrak{a}_k(u, v)\mathfrak{a}_k(v, u) = \mathfrak{a}_l(u, v)\mathfrak{a}_l(v, u), \quad \forall k, l \quad (2.4.23)$$

$$\mathfrak{b}(u, v) = -\mathfrak{b}(v, u) \quad \text{and} \quad \mathfrak{c}_{ab}(u, v) = (-1)^{[a]+[b]}\mathfrak{c}_{ba}(v, u) \quad (2.4.24)$$

We will also use ‘reduced’ R -matrices $R^{(k)}(u)$, deduced from $R(u)$ by suppressing all the terms containing indices j with $j < k$:

$$\begin{aligned} R_{12}^{(k)}(u, v) &= \sum_{a=k}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \mathfrak{a}_a(u, v) E_{aa} \otimes E_{aa} + \mathfrak{b}(u, v) \sum_{k \leq a \neq b \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{aa} \otimes E_{bb} \\ &+ \sum_{k \leq a \neq b \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \mathfrak{c}_{ab}(u, v) E_{ab} \otimes E_{ba}. \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Hence, we have $R_{12}^{(1)}(u, v) = R_{12}(u, v)$, and more generally $R_{12}^{(k)}(u, v)$ corresponds to the embedding $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}+1-k|\mathfrak{n}} \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ when $k \leq \mathfrak{m} + 1$ or $\mathcal{A}_{0|\mathfrak{n}-(k-\mathfrak{m}-1)} \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ otherwise. In the following, to make the presentation concise, we will write, for a generic k , $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}+1-k|\mathfrak{n}}$, keeping in mind that one should write $\mathcal{A}_{0|\mathfrak{n}-(k-\mathfrak{m}-1)}$ when $k > \mathfrak{m} + 1$.

We define the normalized reduced R -matrices

$$\mathbb{R}_{12}^{(k)}(u, v) = \frac{1}{\mathfrak{a}_k(u, v)} R_{12}^{(k)}(u, v) \quad \text{such that} \quad \mathbb{R}_{12}^{(k)}(u, v) \mathbb{R}_{21}^{(k)}(v, u) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (2.4.26)$$

RTT relation and transfer matrix

The algebraic structures associated to spin chains are defined using the RTT relations [43, 49]. They allow to generate all the relations between each generator of the graded unital associative algebra $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$. We gather the $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ generators into a $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) \times (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$ matrix acting in an auxiliary space $\mathcal{V} = \mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ whose entries are formal series of a complex parameter u ,

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{ij} \otimes t_{ij}(u) \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{A}[[u, u^{-1}]].$$

Since the auxiliary space $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}})$ is interpreted as a representation of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ (see below), the \mathbb{Z}_2 -grading of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ must correspond to the one defined on $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}})$ matrices (section 2.4.2). Hence, the generator $t_{ij}(u)$ has grade $[i] + [j]$, so that the monodromy matrix $T(u)$ is globally even. As for matrices, the tensor product of algebras will be graded, as well as between algebras and matrices, e.g.

$$(E_{ij} \otimes t_{ij}(u)) (E_{kl} \otimes t_{kl}(u)) = (-1)^{([i]+[j])([k]+[l])} E_{ij} E_{kl} \otimes t_{ij}(u) t_{kl}(u). \quad (2.4.27)$$

The ‘true’ generators $t_{ij}^{(n)}$ of $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ appear upon expansion of $t_{ij}(u)$ in u . For the (super) Yangians $\mathcal{Y}(\mathbf{n})$ and $\mathcal{Y}(\mathbf{m}|\mathbf{n})$, $t_{ij}(u)$ is a series in u^{-1} :

$$t_{ij}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{ij}^{(n)} u^{-n} \quad \text{with} \quad t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}. \quad (2.4.28)$$

In the quantum affine (super)algebra case, a complete description of the algebras requires the introduction of two matrices $L^{\pm}(u)$

$$L^{\pm}(u) = \sum_{i,j=1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} E_{ij} \otimes L_{ij}^{\pm}(u) = \sum_{i,j=1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} E_{ij} \otimes \sum_{n=0}^{\infty} L_{ij}^{\pm(n)} u^{\pm n} \quad (2.4.29)$$

with relations :

$$L_{ii}^{+(0)} L_{ii}^{-(0)} = 1, \forall i \quad \text{and} \quad L_{ij}^{+(0)} = 0 = L_{ji}^{-(0)}, \quad i < j \quad (2.4.30)$$

$$R_{12}(u, v) L_1^{\pm}(u) L_2^{\pm}(v) = L_2^{\pm}(v) L_1^{\pm}(u) R_{12}(u, v), \quad (2.4.31)$$

$$R_{12}(u, v) L_1^{\mp}(u) L_2^{\pm}(v) = L_2^{\pm}(v) L_1^{\mp}(u) R_{12}(u, v). \quad (2.4.32)$$

However, in the context of evaluation representations it is sufficient to consider only one, say $T(u) = L^{+}(u) - L^{-}(u)$, to construct a transfer matrix, see e.g. [51] for more details.

Then, the RTT relations take the form :

$$R_{12}(u, v) T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T_1(u) R_{12}(u, v). \quad (2.4.33)$$

From the R -matrix (2.4.17), we get the commutation relations through an expansion on the graded basis $E_{ij} \otimes E_{kl}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(u, v) [t_{ij}(u), t_{kl}(v)] &= \delta_{ik} (\mathbf{b}(u, v) - \mathbf{a}_i(u, v)) t_{kj}(u) t_{il}(v) \\ &\quad - (1 - \delta_{ik}) (-1)^{([i]+[k])([k]+[l])} \mathbf{c}_{ik}(u, v) t_{kj}(u) t_{il}(v) \\ &\quad - \delta_{jl} (-1)^{([k]+[l])([i]+[j])} (\mathbf{b}(u, v) - \mathbf{a}_j(u, v)) t_{kj}(v) t_{il}(u) \\ &\quad + (1 - \delta_{jl}) (-1)^{[j]+[i][k]+[l]([i]+[k])} \mathbf{c}_{lj}(u, v) t_{kj}(v) t_{il}(u) \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

with

$$[t_{ij}(u), t_{kl}(v)] = t_{ij}(u) t_{kl}(v) - (-1)^{([i]+[j])([k]+[l])} t_{kl}(v) t_{ij}(u) \quad (2.4.35)$$

$$= -(-1)^{([i]+[j])([k]+[l])} [t_{kl}(v), t_{ij}(u)]. \quad (2.4.36)$$

In the context of spin chain models, $T(u)$ is called the (algebraic) monodromy matrix. The connection with usual monodromy matrix is done upon representation (see next section).

\mathcal{A} has a Hopf algebra structure, whose coproduct Δ reads :

$$\begin{aligned} \Delta : \quad \text{End}(\mathbb{C}^{\mathbf{m}|\mathbf{n}}) \otimes \mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}} &\rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{\mathbf{m}|\mathbf{n}}) \otimes \mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}} \otimes \mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}} \\ T(u) &\mapsto T(u) \otimes T(u) = \sum_{i,j,k=1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} (-1)^{([k]+[i])([k]+[j])} E_{ij} \otimes t_{ik}(u) \otimes t_{kj}(u) \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

More generally, one defines recursively for $L \geq 2$

$$\Delta^{(L+1)} = (\mathbb{I}^{\otimes(L-1)} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(L)} \quad (2.4.38)$$

with $\Delta^{(2)} = \Delta$ and $\Delta^{(1)} = \mathbb{I}$. The map $\Delta^{(L)}$ is an algebra homomorphism.

One defines the transfer matrix as the supertrace over the auxiliary space of the monodromy matrix :

$$t(u) = \text{str}(T(u)) = \sum_{i=1}^{m+n} (-1)^{[i]} t_{ii}(u). \quad (2.4.39)$$

Relations (2.4.33) and (2.4.8) then show that the transfer matrices at two different values of the spectral parameter commute

$$[t(u), t(v)] = 0. \quad (2.4.40)$$

Thus, $t(u)$ generates (via an expansion in u) a set of L (the number of sites) independent integrals of motion or charges in involution which ensure integrability of the model.

The diagonalisation of the transfer matrix can be done in an algebraic way when working in a highest weight representation. Thus, we briefly describe the representation theory of the algebras we use.

2.4.3 Finite dimensional representations of $\mathcal{A}_{m|n}$ and spin chains

The fundamental point in using the ABA is to know a pseudo-vacuum for the model. In the mathematical framework it is equivalent to know a highest weight vector for the representation of the algebra which underlies the model. We describe the link between highest weight vector of the standard finite dimensional Lie (super)algebras $gl(\mathbf{n})$ or $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ and the infinite dimensional (graded) algebras $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ or $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$.

Définition 2.4.1. *A representation of $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ is called highest weight if there exists a nonzero vector Ω such that :*

$$t_{ii}(u) \Omega = \Lambda_i(u) \Omega \quad \text{and} \quad t_{ij}(u) \Omega = 0 \text{ if } i > j \quad (2.4.41)$$

for some scalars $\Lambda_i(u) \in \mathbb{C}[[u^{-1}]]$. $\Lambda(u) = (\Lambda_1(u), \dots, \Lambda_{m+n}(u))$ is called the highest weight and Ω the highest weight vector.

The action of the T-matrix on Ω gives a triangular matrix. We can interpret the operators $t_{ij}(u)$ for $i \neq j$ as creation or annihilation operators. The main theorem on highest weights is :

Théorème 2.4.2. *Every finite-dimensional irreducible representation of $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ or $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ is highest weight. Moreover, it contains a unique (up to scalar multiples) highest weight vector.*

This theorem is presented in [42] for $\mathcal{Y}(\mathbf{n})$, [97] for $\mathcal{Y}(\mathbf{m}|\mathbf{n})$, [69] for $\widehat{\mathcal{U}}_q(n)$ and [98] for $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathbf{m}|\mathbf{n})$.

To construct such representations, one uses the evaluation morphism, which relates the infinite dimensional algebra $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ to its finite dimensional subalgebra $\mathcal{B}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$. The correspondence between the algebras \mathcal{A} and \mathcal{B} is given in table (2.4.42). The algebraic structure of the $\mathcal{B}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ algebras and their irreducible finite dimensional representations are described in the appendix.

(Super)algebra $\mathcal{A}_{\mathbf{m} \mathbf{n}}$	$\mathcal{Y}(\mathbf{n})$	$\mathcal{Y}(\mathbf{m} \mathbf{n})$	$\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathbf{n})$	$\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathbf{m} \mathbf{n})$
Subalgebra $\mathcal{B}_{\mathbf{m} \mathbf{n}}$	$gl(\mathbf{n})$	$gl(\mathbf{m} \mathbf{n})$	$\mathcal{U}_q(\mathbf{n})$	$\mathcal{U}_q(\mathbf{m} \mathbf{n})$

(2.4.42)

The evaluation morphism with parameter $a \in \mathbb{C}$ is given by

$$ev_a : \begin{cases} \mathcal{V} \otimes \mathcal{A} & \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{B} \\ T(u) & \mapsto \begin{cases} (u-a)\mathbb{I} - \hbar \mathbb{E} & \text{for } \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \\ \frac{u}{a} L^+ - \frac{a}{u} L^- & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \end{cases} \end{cases} \quad (2.4.43)$$

where

$$\mathbb{E} = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (-1)^{[j]} E_{ij} \otimes \mathcal{E}_{ji} \in \mathcal{V} \otimes gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \quad \text{and} \quad L^\pm = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{ij} \otimes l_{ij}^\pm \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \quad (2.4.44)$$

with the convention $gl(\mathfrak{m}|0) \equiv gl(\mathfrak{m})$ and $\mathcal{U}_q(\mathfrak{m}|0) \equiv \mathcal{U}_q(\mathfrak{m})$ as for the infinite dimensional superalgebras $\mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ and $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$.

From the evaluation morphism ev_a and a highest weight representation π_λ of \mathcal{B} , one can construct a highest weight representation of \mathcal{A} , called evaluation representation :

$$\rho_a^\lambda = ev_a \circ \pi_\lambda : \mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} \xrightarrow{ev_a} \mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} \xrightarrow{\pi_\lambda} \mathcal{V}_\lambda. \quad (2.4.45)$$

The weight of this evaluation representation is given by $\Lambda(u) = (\Lambda_1(u), \dots, \Lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(u))$, with

$$\Lambda_j(u) = \begin{cases} u - a - (-1)^{[j]} \hbar \lambda_j & \text{for } \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \\ (-1)^{[j]} \left(\frac{u}{a} \eta_j q^{\lambda_j} - \frac{a}{u} \eta_j q^{-\lambda_j} \right) & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \end{cases} \quad j = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} \quad (2.4.46)$$

where λ_j , $j = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ are the weights of the $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ representation (see appendix).

More generally, one constructs tensor product of evaluation representations using the co-product of \mathcal{A} :

$$\left(\bigotimes_{i=1}^L \rho_{a_i}^{\lambda^{(i)}} \right) \circ \Delta^{(L)}(T(u)) = \rho_{a_1}^{\lambda^{(1)}}(T(u)) \dot{\otimes} \rho_{a_2}^{\lambda^{(2)}}(T(u)) \dot{\otimes} \dots \dot{\otimes} \rho_{a_L}^{\lambda^{(L)}}(T(u)) \quad (2.4.47)$$

where $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}^{(i)})$, $i = 1, \dots, L$ are the weights of the $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ representations. This provides a $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ representation with weight

$$\Lambda_j(u) = \prod_{i=1}^L \Lambda_j^{(i)}(u), \quad j = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} \quad (2.4.48)$$

where $\Lambda_j^{(i)}(u)$ have the form (2.4.46).

In a spin chain context, the number L of evaluation representations is the number of sites of the chain, the weights $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}^{(i)})$, $i = 1, \dots, L$ characterize the \mathcal{B} representation (the spin) on each of these sites, and the evaluation parameter a_i is the so-called inhomogeneity parameter at site i .

From the mathematical point of view, evaluation representations are relevant because of :

Théorème 2.4.3. *All finite dimensional irreducible representations of $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ can be constructed as (subquotient of) tensor products of evaluation representations.*

This theorem is proven in [99, 100] for $\mathcal{Y}(\mathbf{n})$ (see also [56, 137]). It is proven in [101, 102, 103, 56] for $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{n}))$ and in [97] for $\mathcal{Y}(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ (see also [104]). We don't know any reference for the case of $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$, but the proof should be similar to the other cases, and, at least, one can construct a wide set of finite dimensional irreducible representations from tensor product of evaluation representations.

Hence, the study of spin chains amounts to study finite dimensional representations of $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$, and the nested Bethe ansatz can be viewed as the construction of a Gelfand-Tsetlin type basis.

Case of indecomposable (superalgebras) representations

It is well-known that (most of the) Lie superalgebras (and specifically the $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ superalgebras studied in the present paper) contain finite dimensional representations which are indecomposable. To discuss these special cases, we first remind some definitions about representations of Lie (super)algebras (see e.g. [58] for more details).

Definitions

We focus on finite dimensional representations.

Définition 2.4.4. *A representation is called **irreducible** if it does not contain any non-trivial invariant subspace. A representation which is not irreducible is called **reducible**.*

Définition 2.4.5. *A representation is called **fully reducible** if, for any invariant subspace, there exists a complementary subspace which is also invariant. A reducible representation which is not fully reducible is called **indecomposable**.*

It may be useful to illustrate these various definitions. If one considers finite dimensional representations, the representation of the Lie (super)algebra generators are square matrices. Considering a general linear combination of all these matrices, we have roughly the following (very sketchy) picture

$$\pi_V(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & * & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix} \quad V \text{ irreducible} \quad (2.4.49)$$

$$\pi_V(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad V \text{ fully reducible } (V = V_1 \oplus V_2) \quad (2.4.50)$$

$$\pi_V(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad V \text{ indecomposable} \quad (2.4.51)$$

where $*$ denotes the non-zero entries and V is the representation of \mathcal{A} under consideration.

Théorème 2.4.6. *Any finite dimensional representation of semi-simple Lie algebras is fully reducible. This is not the case of $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ superalgebras. In particular, for these superalgebras, the tensor product of irreducible representations is not always fully reducible.*

Examples of indecomposable representations and of indecomposable tensor products can be found for $sl(1|2)$ in e.g. [105, 106].

Définition 2.4.7. *A vector v in a vector space V , representation of \mathcal{A} , is called **cyclic** if the (iterative) action of all the generators of \mathcal{A} on v span all V .*

For example, in an irreducible highest weight representation, the highest weight vector is cyclic. This is not true for a fully reducible highest weight representation, which contains several highest weight vectors, all of them being needed to span the full representation. However, in an indecomposable representation (finite dimensional), there exists a highest weight vector which is cyclic (see example in [105]).

Application to spin super-chains

It is natural to wonder whether the presence of indecomposable representations on a spin chain alters the Bethe ansatz technics. We argue (and prove in some cases) that the algebraic Bethe ansatz still works. The reasoning is done for the $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ superalgebras, but quite likely it applies to the deformed case.

The basic ingredient for the algebraic Bethe ansatz is the existence of a cyclic highest weight vector. Through the recursive application of creation-like generators (see section below), one constructs the eigenvectors of the transfer matrix. Hence, it is not the reducibility of the representations, but rather the existence of highest weight that guarantees the Bethe ansatz technics. Indeed, when the representations are fully reducible, one gets several highest weight vectors. In that case, one needs to apply the ansatz on each of the highest weight vectors, but the technics is still valid. For indecomposable representations, since there is a cyclic highest weight vector, it is very plausible that the Bethe ansatz works.

In particular, for indecomposable representations obtained from the tensor product of two irreducible representations, one can prove that the Bethe ansatz indeed works in the following way. From the original spin chain (that contains the indecomposable representation(s)), one constructs a new chain, where each of the sites carrying an indecomposable representation is replaced by two sites, one for each irreducible representation underlying the indecomposable one. Obviously, the new chain is equivalent to the original one. Moreover, since the new chain contains only irreducible representations, it is clear that one can apply the algebraic Bethe ansatz, to this chain as well as to the original one.

Since no classification of indecomposable representations is known, it is difficult to tell whether they can all be obtained from tensor products of irreducible ones. Nevertheless, we have argued above that the Bethe ansatz should still work in all cases.

As a last remark, let us add that the algebraic structures underlying spin chains are not the finite dimensional (super)algebras, but rather the infinite dimensional ones (super-Yangians or affine quantum algebras). For these algebras, tensor products of representations are in most of the cases also irreducible. Then, the spin chain as a whole appears as a sole (irreducible) representation of these algebras, although it is reducible for the finite dimensional algebra.

Thus, it is natural to expect that indecomposable representations of the finite dimensionanl superalgebras appear as ‘usual’ representations for the infinite dimensional one.

2.4.4 Algebraic Bethe Ansatz for the case $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$

In this section, we remind the framework of the Algebraic Bethe Ansatz (ABA) [35] introduced in order to compute eigenvalues and eigenvectors of the transfer matrix.

For $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$, one can consider two different algebras : $\mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}_{0|2} \equiv \mathcal{A}_{2|0}$ or $\mathcal{A}_{1|1}$. We write the monodromy matrix in the following matricial form :

$$T(u) = \begin{pmatrix} t_{11}(u) & t_{12}(u) \\ t_{21}(u) & t_{22}(u) \end{pmatrix}, \quad (2.4.52)$$

and the transfer matrix as $t(u) = \text{str}(T(u)) = (-1)^{[1]}t_{11}(u) + (-1)^{[2]}t_{22}(u)$. Let Ω be the pseudo-vacuum state presented in previous section :

$$t_{11}(u)\Omega = \Lambda_1(u)\Omega \quad ; \quad t_{22}(u)\Omega = \Lambda_2(u)\Omega \quad ; \quad t_{21}(u)\Omega = 0. \quad (2.4.53)$$

Using the ternary (RTT) relation one can find the following relations between the different operators of \mathcal{A}_2 or $\mathcal{A}_{1|1}$:

$$t_{12}(u)t_{12}(v) = \begin{cases} t_{12}(v)t_{12}(u), & \text{for } \mathcal{A}_2 \\ \mathfrak{h}(u, v)t_{12}(v)t_{12}(u), & \text{for } \mathcal{A}_{1|1} \end{cases} \quad (2.4.54)$$

$$t_{11}(u)t_{12}(v) = \mathfrak{f}_1(u, v)t_{12}(v)t_{11}(u) + \mathfrak{g}_1^+(u, v)t_{12}(u)t_{11}(v) \quad (2.4.55)$$

$$t_{22}(u)t_{12}(v) = \mathfrak{f}_2(v, u)t_{12}(v)t_{22}(u) + \mathfrak{g}_2^-(v, u)t_{12}(u)t_{22}(v) \quad (2.4.56)$$

where we have used the functions

$$\mathfrak{f}_i(u, v) = \frac{\mathfrak{a}_i(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} \quad ; \quad \mathfrak{g}_i^\pm(u, v) = \frac{\mathfrak{c}_{i\pm 1, i}(u, v)}{\mathfrak{b}(u, v)} \quad ; \quad \mathfrak{h}(u, v) = (-1)^{[1]+[2]} \frac{\mathfrak{a}_2(u, v)}{\mathfrak{a}_1(u, v)} \quad (2.4.57)$$

Applying M creation operators we generate a Bethe vector :

$$\Phi(\{u\}) = t_{12}(u_1) \dots t_{12}(u_M) \Omega. \quad (2.4.58)$$

Demanding $\Phi(\{u\})$ to be an eigenvector of $t(u)$ leads to a set of algebraic relations on the parameters u_1, \dots, u_M , the so-called Bethe equations.

The relation between creation operators prove the invariance (up to a function for $\mathcal{A}_{1|1}$) of the Bethe vector under reordering of the operators $t_{12}(u_j)$. This condition is usefull to compute the unwanted terms from the action of $t(u)$ on $\Phi(\{u\})$. First, we compute the action of $t_{11}(u)$ on $\Phi(\{u\})$:

$$\begin{aligned} t_{11}(u)t_{12}(u_1) \dots t_{12}(u_M) \Omega &= \prod_{k=1}^M \mathfrak{f}_1(u, u_k) \Lambda_1(u) t_{12}(u_1) \dots t_{12}(u_M) \Omega \\ &+ \sum_{k=1}^M P_k(u; \{u_j\}) t_{12}(u_1) \dots t_{12}(u_k \rightarrow u) \dots t_{12}(u_M) \Omega \end{aligned} \quad (2.4.59)$$

$$P_k(u; \{u_j\}) = \mathfrak{g}_1^+(u, u_k) \prod_{j \neq k}^M \mathfrak{f}_1(u_k, u_j) \Lambda_1(u_k). \quad (2.4.60)$$

where the notation $t_{12}(u_k \rightarrow u)$ is used to indicate the position of $t_{12}(u)$ in the ordered product. $P_k(u; \{u_j\})$ corresponds to the $(2^M - 1)$ terms containing $\Lambda_1(u_k)$. The form of $P_1(u; \{u_j\})$ is easily computed. The other polynomials $P_k(u; \{u_j\})$ are then computed using the commutation relation between the operators $t_{12}(u_j)$ and putting $t_{12}(u_k)$ on the left. With the same method we compute the action of $t_{22}(u)$ on $\Phi(\{u\})$:

$$\begin{aligned} t_{22}(u) t_{12}(u_1) \dots t_{12}(u_M) \Omega &= \prod_{k=1}^M f_2(u_k, u) \Lambda_2(u) t_{12}(u_1) \dots t_{12}(u_M) \Omega \\ &+ \sum_{k=1}^M Q_k(u; \{u_j\}) t_{12}(u_1) \dots t_{12}(u_k \rightarrow u) \dots t_{12}(u_M) \Omega \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

$$Q_k(u; \{u_j\}) = \mathfrak{g}_2^-(u_k, u) \prod_{j \neq k}^M f_2(u_j, u_k) \Lambda_2(u_k). \quad (2.4.62)$$

Demanding $\Phi(\{u\})$ to be an eigenvector of $t(u)$ leads to :

$$(-1)^{[1]} P_k(u; \{u\}) + (-1)^{[2]} Q_k(u; \{u\}) = 0, \quad (2.4.63)$$

which corresponds to the cancelling of the so-called ‘unwanted terms’ carried by the terms $t_{12}(u_1) \dots t_{12}(u_k \rightarrow u) \dots t_{12}(u_M)$. In this way, we get the Bethe equations

$$\frac{\Lambda_1(u_k)}{\Lambda_2(u_k)} = \prod_{j \neq k}^M \frac{f_2(u_k, u_j)}{f_1(u_j, u_k)} = (-1)^{M-1} \prod_{j \neq k}^M \frac{\mathfrak{a}_2(u_j, u_k)}{\mathfrak{a}_1(u_k, u_j)}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (2.4.64)$$

Remark that the r.h.s. depends only on the structure constants of the (super)algebra under consideration, while the l.h.s. encodes the representations entering the spin chain.

Then, the eigenvalues of the transfer matrix read

$$t(u) \Phi(\{u\}) = \left((-1)^{[1]} t_{11}(u) + (-1)^{[2]} t_{22}(u) \right) \Phi(\{u\}) = \Lambda(u; \{u\}) \Phi(\{u\}) \quad (2.4.65)$$

$$\Lambda(u; \{u\}) = (-1)^{[1]} \Lambda_1(u) \prod_{k=1}^M f_1(u, u_k) + (-1)^{[2]} \Lambda_2(u) \prod_{k=1}^M f_2(u_k, u). \quad (2.4.66)$$

Note that Bethe equations correspond to the vanishing of the residue of $\Lambda(u; \{u\})$. This is the tool used in analytical Bethe ansatz to obtain Bethe equations, see e.g. [53, 51].

2.4.5 Nested Bethe Ansatz

The method, called the Nested Bethe Ansatz (NBA), consists in a recurrent application of the ABA to express higher rank solutions using the lower ones. It has been introduced in [82]. In this way we can compute the eigenvalues, eigenvectors and Bethe equations of the $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ model from the ones of \mathcal{A}_2 or $\mathcal{A}_{1|1}$ model.

Although we are in a (tensor product of) representation(s) of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$, we will loosely keep writing $t_{ij}(u)$ the representation of the operators $t_{ij}(u)$, assuming that the reader will understand that when $t_{ij}(u)$ applies to the highest weight Ω , it is in fact its (matricial) representation that is used.

2.4.6 Preliminaries

As a starter, we decompose the monodromy matrix in the following form (in the auxiliary space $End(\mathbb{C}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}})$) :

$$T(u) = \begin{pmatrix} t_{11}(u) & B^{(1)}(u) \\ C^{(1)}(u) & T^{(2)}(u) \end{pmatrix} \quad (2.4.67)$$

where $B^{(1)}(u)$ (resp. $C^{(1)}(u)$) is a row (resp. column) vector of $\mathbb{C}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}-1}$, and $T^{(2)}(u)$ is a matrix of $End(\mathbb{C}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}-1})$.

Then, $T^{(2)}(u)$ is itself decomposed in the same way, and more generally, for a given k in $\{1, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n} - 2\}$, we gather the generators $t_{kj}(u)$, (resp. $t_{jk}(u)$) $j = k+1, \dots, \mathbf{n} + \mathbf{m}$, in a row (resp. column) vector of $\mathbb{C}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}-k}$ and $t_{ij}(u)$, $i, j \geq k$, into a matrix of $End(\mathbb{C}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}-k})$:

$$B^{(k)}(u) = \sum_{j=k+1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} e_j^t \otimes t_{kj}(u) \quad \text{and} \quad C^{(k)}(u) = \sum_{j=k+1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} e_j \otimes t_{jk}(u) \quad (2.4.68)$$

$$T^{(k+1)}(u) = \sum_{i,j=k+1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} E_{ij} \otimes t_{ij}(u) \quad (2.4.69)$$

$$T^{(k)}(u) = \begin{pmatrix} t_{kk}(u) & B^{(k)}(u) \\ C^{(k)}(u) & T^{(k+1)}(u) \end{pmatrix}. \quad (2.4.70)$$

We decompose the transfer matrix in the same way :

$$\begin{aligned} t(u) &= t^{(1)}(u) = (-1)^{[1]} t_{11}(u) + t^{(2)}(u), \\ t^{(k)}(u) &= str\left(T^{(k)}(u)\right) = (-1)^{[k]} t_{kk}(u) + t^{(k+1)}(u). \end{aligned} \quad (2.4.71)$$

At each step of the recursion, the relations between $t^{(k)}(u)$, $T^{(k)}(u)$ and $B^{(k)}(u)$ remain similar :

$$B_1^{(k)}(u) B_2^{(k)}(v) = (-1)^{[k]} \frac{\mathbf{a}_{k+1}(u, v)}{\mathbf{a}_k(u, v)} B_2^{(k)}(v) B_1^{(k)}(u) \mathbb{R}_{12}^{(k+1)}(u, v) \quad (2.4.72)$$

$$t_{kk}(u) B^{(k)}(v) = \mathbf{f}_k(u, v) B^{(k)}(v) t_{kk}(u) + \mathbf{g}_k^+(u, v) B^{(k)}(u) t_{kk}(v) \quad (2.4.73)$$

$$\begin{aligned} T_1^{(k+1)}(u) B_2^{(k)}(v) &= \mathbf{f}_{k+1}(v, u) B_2^{(k)}(v) T_1^{(k+1)}(u) \mathbb{R}_{12}^{(k+1)}(u, v) \\ &\quad + \mathbf{g}_{k+1}^-(v, u) B_2^{(k)}(u) T_1^{(k+1)}(v) \mathbb{R}_{12}^{(k+1)}(u, u) \end{aligned} \quad (2.4.74)$$

$$\mathbb{R}_{12}^{(k)}(u, v) T_1^{(k)}(u) T_2^{(k)}(v) = T_2^{(k)}(v) T_1^{(k)}(u) \mathbb{R}_{12}^{(k)}(u, v). \quad (2.4.75)$$

These relations are proven using the RTT relations (2.4.33) and the Yang–Baxter equation (2.4.7). When $k = \mathbf{m} + \mathbf{n} - 1$, one recovers the commutation relations of \mathcal{A}_2 or $\mathcal{A}_{1|1}$.

At each step $k = 1, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n} - 1$ of the nesting, we will introduce a family of spectral parameters $u_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, M_k$, the number M_k of these parameters being a free integer. The partial unions of these families will be noted as

$$\{u^{(\ell)}\} = \bigcup_{k=1}^{\ell} \{u_j^{(k)}, j = 1, \dots, M_k\} \quad (2.4.76)$$

so that the whole family of spectral parameters is $\{u\} = \{u^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}\}$.

These parameters correspond to the different pseudo-excitations above the pseudo-vacuum, and the cardinal of $\{u\}$, $M = \sum_{k=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1} M_k$, is the total number of these pseudo-excitations. Let us stress that, in the same way the pseudo-vacuum is not the (physical) ground state of the spin chain, these pseudo-excitations (above the pseudo-vacuum) are not physical excitations. However, they do describe states and even it is believed/proven (depending on the cases) that they describe *all* the states of the chain.

2.4.7 First step of the construction

From the definition of the highest weight, we have

$$C^{(1)}(u) \Omega = 0 \quad (2.4.77)$$

and we can use $B^{(1)}(u)$ as a creation operator. However, since $B^{(1)}(u)$ contains only $t_{1j}(u)$ operators, it is clear that we need to act on several vectors to describe the whole representation with highest weight Ω . The NBA spirit is to construct these different vectors as Bethe vectors of an $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$ chain that is related to the chain we start with.

More generally, at each step k corresponding to the decomposition (2.4.70) of the monodromy matrix, we use (a suitable refinement of) $B^{(k)}(u)$ as a creation operator acting on a set of (to be defined) vectors. These vectors are constructed as Bethe vectors of an $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}-k-1|\mathfrak{n}}$ chain.

At the first step of the recursion, the Bethe vectors have the form :

$$\Phi(\{u\}) = B_{a_1}^{(1)}(u_1^{(1)}) \dots B_{a_{M_1}}^{(1)}(u_{M_1}^{(1)}) F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega \quad (2.4.78)$$

$$F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \in (\mathbb{C}^{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}})^{\otimes M_1} \otimes \mathcal{A}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}} \quad (2.4.79)$$

where $F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\})$ is built from operators $t_{ij}(u)$, $2 \leq i \leq j \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ only. Since $B^{(1)}(u)$ belongs to $\mathbb{C}^{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}} \otimes \mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$, we have introduced in the construction M_1 additional auxiliary spaces (labelled a_1, \dots, a_{M_1}) that are also carried by $F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\})$. These new auxiliary spaces take care of the linear combination one has to do between the different generators $t_{1j}(u)$, $j = 2, \dots, \mathfrak{m}+\mathfrak{n}$, that enter into the construction. In the next step of the recursion, these new auxiliary spaces are re-interpreted as new *quantum* spaces (i.e. new sites) in the fundamental representation of an $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$ chain. We come back on this point later.

Since $F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\})$ is built up from operators $t_{ij}(u)$, $2 \leq i \leq j \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{n}$, it obeys the relation (proven in a more general context in lemma 2.4.9 below)

$$t_{11}(u) F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega = \Lambda_1(u) F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega \quad (2.4.80)$$

so that the action of $t_{11}(u)$ on $\Phi(\{u\})$ takes the form :

$$t_{11}(u) \Phi(\{u\}) = \Lambda_1(u) \prod_{i=1}^{M_1} \mathfrak{f}_1(u, u_i^{(1)}) \Phi(\{u\}) + \sum_{j=1}^{M_1} P_j(u; \{u^{(1)}\}) \Phi_j(\{u\}) \quad (2.4.81)$$

$$P_j(u; \{u^{(1)}\}) = \Lambda_1(u_j^{(1)}) \mathfrak{g}_1^+(u, u_j^{(1)}) \prod_{i \neq j}^{M_1} \mathfrak{f}_1(u_i^{(1)}, u_j^{(1)}) \quad (2.4.82)$$

where $\Phi_j(\{u\})$ is deduced from $\Phi(\{u\})$ by the change $u_j^{(1)} \rightarrow u$. Expression (2.4.81) is computed as it has been done in section 2.4.4 : $P_1(u; \{u^{(1)}\})$ is easy to compute ; the other terms are obtained through a reordering of the operators $B^{(1)}(u_j^{(1)})$. For details, see lemma 2.4.8 below which deals with the general case.

It remains to compute the action of $t^{(2)}(u)$ on $\Phi(\{u\})$. We do it in two stages. We first commute $t^{(2)}(u)$ with the operators $B^{(1)}(u_j^{(1)})$:

$$\begin{aligned} t^{(2)}(u) \Phi(\{u\}) &= \prod_{j=1}^{M_1} f_2(u_j^{(1)}, u) B_{a_1}^{(1)}(u_1^{(1)}) \dots B_{a_{M_1}}^{(1)}(u_{M_1}^{(1)}) \tilde{t}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}) F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega \\ &+ \sum_{j=1}^{M_1} \widehat{Q}_j(u; \{u^{(1)}\}) B_{a_1}^{(1)}(u_1^{(1)}) \dots B_{a_j}^{(1)}(u) \dots B_{a_{M_1}}^{(1)}(u_{M_1}^{(1)}) \tilde{t}^{(2)}(u_j^{(1)}; \{u^{(1)}\}) F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega \\ \widehat{Q}_j(u; \{u^{(1)}\}) &= \mathfrak{g}_2^-(u_j^{(1)}, u) \prod_{i \neq j}^{M_1} f_2(u_j^{(1)}, u_i^{(1)}) \end{aligned} \quad (2.4.83)$$

where we used the notation

$$\tilde{t}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}) = str_a \left(T_a^{(2)}(u) \prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_1}} \mathbb{R}_{a, a_j}^{(2)}(u, u_j^{(1)}) \right). \quad (2.4.84)$$

Again, calculation is done for $\widehat{Q}_1(u; \{u^{(1)}\})$ and then generalized to $\widehat{Q}_j(u; \{u^{(1)}\})$ using the reordering lemma 2.4.8 and the Yang-Baxter equation.

As already mentionned, the calculation makes appear a new transfer matrix $\tilde{t}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\})$ corresponding to an $\mathcal{A}_{m-1|n}$ chain with $L + M_1$ sites, the M_1 additional sites corresponding to fundamental representations of $\mathcal{A}_{m-1|n}$. This interpretation is supported by the relations

$$R_{ab}^{(2)}(u, v) \tilde{T}_a^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}) \tilde{T}_b^{(2)}(v; \{u^{(1)}\}) = \tilde{T}_b^{(2)}(v; \{u^{(1)}\}) \tilde{T}_a^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}) R_{ab}^{(2)}(u, v) \quad (2.4.85)$$

$$\tilde{T}_a^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}) = T_a^{(2)}(u) \prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_1}} \mathbb{R}_{aa_j}^{(2)}(u, u_j^{(1)}) \quad (2.4.86)$$

which ensure that $\tilde{T}_a^{(2)}(u; \{u^{(1)}\})$ generates $\mathcal{A}_{m-1|n}$, and that $\tilde{t}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\})$ is indeed a transfer matrix which obeys

$$[\tilde{t}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}), \tilde{t}^{(2)}(v; \{u^{(1)}\})] = 0. \quad (2.4.87)$$

Then, if we assume that $F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega$ is an eigenvector of this new transfer matrix :

$$\tilde{t}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}) F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega = \tilde{\Gamma}^{(2)}(u) F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega, \quad (2.4.88)$$

we deduce

$$t^{(2)}(u) \Phi(\{u\}) = \tilde{\Gamma}^{(2)}(u) \prod_{j=1}^{M_1} f_2(u_j^{(1)}, u) \Phi(\{u\}) + \sum_{j=1}^{M_1} Q_j(u; \{u^{(1)}\}) \Phi_j(\{u\}) \quad (2.4.89)$$

$$Q_j(u; \{u^{(1)}\}) = \tilde{\Gamma}^{(2)}(u_j^{(1)}) \mathfrak{g}_2^-(u_j^{(1)}, u) \prod_{i \neq j}^{M_1} f_2(u_j^{(1)}, u_i^{(1)}). \quad (2.4.90)$$

Gathering the relations (2.4.81) and (2.4.89), we get a first expression of the action of $t(u)$ on $\Phi(\{u\})$. When we cancel in this expression the unwanted terms (carried by $\Phi_j(\{u\})$), we get the first Bethe equation and a first expression of the eigenvalue :

$$(-1)^{[1]} \Lambda_1(u_j^{(1)}) \mathfrak{g}_1^+(u, u_j^{(1)}) \prod_{i \neq j}^{M_1} f_1(u_j^{(1)}, u_i^{(1)}) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(u_j^{(1)}) \mathfrak{g}_2^-(u_j^{(1)}, u) \prod_{i \neq j}^{M_1} f_2(u_i^{(1)}, u_j^{(1)}) = 0 \quad (2.4.91)$$

$$t(u) \Phi(\{u\}) = \left((-1)^{[1]} \Lambda_1(u) \prod_{j=1}^{M_1} f_1(u, u_j^{(1)}) + \tilde{\Gamma}^{(2)}(u) \prod_{j=1}^{M_1} f_2(u_j^{(1)}, u) \right) \Phi(\{u\}). \quad (2.4.92)$$

In the above relations, everything is known *but* the eigenvalue $\tilde{\Gamma}^{(2)}(u)$, introduced in (2.4.88), and the explicit form of $F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\})$ ensuring that (2.4.88) is indeed satisfied.

Thus, at the end of this first recursion step, we have ‘reduced’ the problem of computing an eigenvector $\Phi(\{u\})$ for the transfer matrix $t(u)$ of an $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ chain with L sites to the problem of computing an eigenvector $\Phi^{(1)}(\{u\}) = F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega$ for the transfer matrix $\tilde{t}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\})$ of an $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$ chain with $L + M_1$ sites.

To prepare the second step, it remains to single out the highest weights corresponding to the fundamental representations carried by the new sites. This is done in the following way.

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\{u\}) &= F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega \\ \Phi^{(1)}(\{u\}) &= \tilde{B}_{a_1^2}^{(2)}(u_1^{(2)}; \{u^{(1)}\}) \dots \tilde{B}_{a_{M_2}^2}^{(2)}(u_{M_2}^{(2)}; \{u^{(1)}\}) F_{a_1^2 \dots a_{M_2}^2}^{(2)}(\{u\}) \Omega^{(2)} \end{aligned} \quad (2.4.93)$$

$$\Omega^{(2)} = (e_1^{(1)})^{\otimes M_1} \otimes \Omega, \quad (2.4.94)$$

where $e_1^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{C}^{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$ and $F_{a_1^2 \dots a_{M_2}^2}^{(2)}(\{u\})$ is built on operators $\tilde{t}_{ij}(u; \{u^{(1)}\})$, with $j \geq i > 2$. The operators $\tilde{B}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\})$ play the role, for the $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$ chain of length $L + M_1$, of the operators $B^{(1)}(u)$ for the $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ chain of length L . Explicitly, they are obtained from the following decomposition of the monodromy matrix :

$$\tilde{T}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}) = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{22}(u; \{u^{(1)}\}) & \tilde{B}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}) \\ \tilde{C}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\}) & T^{(3)}(u; \{u^{(1)}\}) \end{pmatrix} \quad (2.4.95)$$

where $\tilde{T}^{(2)}(u; \{u^{(1)}\})$ has been defined in (2.4.86). Note that if we follow the second step up to the end, we will produce, as in the first step, a new monodromy matrix

$$\tilde{T}_a^{(3)}(u; \{u^{(2)}\}) = T_a^{(3)}(u; \{u^{(1)}\}) \prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_2}} \mathbb{R}_{aa_j}^{(3)}(u, u_j^{(2)}) \quad (2.4.96)$$

corresponding to a new chain based on $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}-2|\mathfrak{n}}$ and of length $L + M_1 + M_2$. We want to stress the difference between the monodromy matrix $T^{(3)}(u; \{u^{(1)}\})$ appearing at the beginning of the second step and the monodromy matrix $\tilde{T}_a^{(3)}(u; \{u^{(2)}\})$ constructed at the end of the same step.

General construction at step k

More generally, the step k starts with the problem

$$\tilde{t}^{(k)}(u; \{u^{(k-1)}\}) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) = \tilde{\Gamma}^{(k)}(u) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) \quad (2.4.97)$$

where

$$\tilde{t}^{(k)}(u; \{u^{(k-1)}\}) = \text{str} \left(\tilde{T}^{(k)}(u; \{u^{(k-1)}\}) \right). \quad (2.4.98)$$

is the transfer matrix of a $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}+1-k|\mathfrak{n}}$ spin chain of length $L + \sum_{j=1}^{k-1} M_j$ (obtained from the previous step). We define

$$\Phi^{(k-1)}(\{u\}) = F_{a_1^{k-1} \dots a_{M_k}^{k-1}}(\{u\}) \Omega^{(k-1)} = \mathbb{B}^{(k)}(\{u^{(k)}\}) F_{a_1^k \dots a_{M_k}^k}(\{u\}) \Omega^{(k)} \quad (2.4.99)$$

$$\Omega^{(k)} = (e_1^{(k-1)})^{\otimes M_{k-1}} \otimes \Omega^{(k-1)}, \quad (2.4.100)$$

with $e_1^{(k)} = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{C}^{\mathfrak{m}-k|\mathfrak{n}}$. We have introduced

$$\mathbb{B}^{(k)}(\{u^{(k)}\}) = \tilde{B}_{a_1^k}^{(k)}(u_1^{(k)}; \{u^{(k-1)}\}) \dots \tilde{B}_{a_{M_k}^k}^{(k)}(u_{M_k}^{(k)}; \{u^{(k-1)}\}) \quad (2.4.101)$$

where the operators are extracted from the monodromy matrix :

$$\tilde{T}^{(k)}(u; \{u^{(k-1)}\}) = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-1)}\}) & \tilde{B}^{(k)}(u; \{u^{(k-1)}\}) \\ \tilde{C}^{(k)}(u; \{u^{(k-1)}\}) & T^{(k+1)}(u; \{u^{(k-1)}\}) \end{pmatrix}. \quad (2.4.102)$$

Remark 2.4.1. In (2.4.101), we have indicated only the auxiliary spaces a_j^k , $j = 1, \dots, M_k$. In fact, since $\tilde{T}^{(k)}$ is viewed as the monodromy matrix of a spin chain of length $L + \sum_{j=1}^{k-1} M_j$, the other spaces a_j^ℓ , $j = 1, \dots, M_\ell$, $\ell < k$, are now quantum spaces. Thus, they do not appear explicitly in $\tilde{T}^{(k)}$, as the sites of the original spin chain, but obviously this monodromy matrix (and its components) does depend on all these spaces.

We extract from $\tilde{t}^{(k)}(u; \{u^{(k-1)}\})$ the component $\tilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-1)}\})$,

$$\tilde{t}^{(k)}(u; \{u^{(k-1)}\}) = (-1)^{[k]} \tilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-1)}\}) + \text{str} \left(\tilde{T}^{(k+1)}(u; \{u^{(k)}\}) \right), \quad (2.4.103)$$

and compute its action on the vector $\Phi^{(k-1)}(\{u\})$.

At the first stage, we commute $\tilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-1)}\})$ with the operators $B_j^{(k)}(u_j^{(k)}; \{u^{(k-1)}\})$:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-1)}\}) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) &= \prod_{j=1}^{M_k} \mathfrak{f}_k(u, u_j^{(k)}) \mathbb{B}^{(k)}(\{u^{(k)}\}) \tilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-1)}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_k} \hat{P}_j(u; \{u^{(k-1)}\}) \mathbb{B}_j^{(k)}(u; \{u^{(k)}\}) \tilde{t}_{kk}(u_j^{(k)}; \{u^{(k-1)}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \end{aligned} \quad (2.4.104)$$

where we have introduced

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_j^{(k)}(u; \{u^{(k)}\}) &= \tilde{B}_{a_1^k}^{(k)}(u_1^{(k)}; \{u^{(k-1)}\}) \dots B_{a_j^k}^{(k)}(u_j^{(k)} \rightarrow u; \{u^{(k-1)}\}) \dots B_{a_{M_k}^k}^{(k)}(u_{M_k}^{(k)}; \{u^{(k-1)}\}) \\ \hat{P}_j(u; \{u^{(k-1)}\}) &= \mathfrak{g}_k^+(u, u_j^{(k)}) \prod_{i \neq j}^{M_k} \mathfrak{f}_k(u_i^{(k)}, u_j^{(k)}) \end{aligned} \quad (2.4.105)$$

The calculation is done directly for \widehat{P}_1 by collecting the terms containing $\widetilde{t}_{kk}(u_1^{(k)}; \{u^{(k-1)}\})$. It is then generalized to \widehat{P}_j thanks to the following reordering lemma :

Lemme 2.4.8. *For each $k = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 1$ and $j = 1, \dots, M_k$, we have*

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^{(k)}(\{u^{(k)}\}) &= \widetilde{B}_j^{(k)}(u_j^{(k)}) \widetilde{B}_1^{(k)}(u_1^{(k)}) \dots \widetilde{B}_{j-1}^{(k)}(u_{j-1}^{(k)}) \widetilde{B}_{j+1}^{(k)}(u_{j+1}^{(k)}) \dots \widetilde{B}_{M_k}^{(k)}(u_{M_k}^{(k)}) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{\overleftarrow{j-1}} (-1)^{[j]} \frac{\mathfrak{a}_{j+1}(u_i^{(k)}, u_j^{(k)})}{\mathfrak{a}_j(u_i^{(k)}, u_j^{(k)})} \mathbb{R}_{ij}^{(k+1)}(u_i^{(k)}, u_j^{(k)}) \end{aligned} \quad (2.4.106)$$

where the dependence in $\{u^{(k-1)}\}$ has been omitted in $\widetilde{B}_p^{(k)}$.

Proof: : Direct calculation using the commutation relations (2.4.72). ■

Since the new \mathbb{R} -matrices appearing in lemma 2.4.8 commute with $\widetilde{t}_{kk}(u_j^{(k)}; \{u^{(k-1)}\})$, one deduces that all \widehat{P}_j polynomials have the same form.

In a second stage, we compute the action of \widetilde{t}_{kk} on $F^{(k)} \Omega^{(k)}$:

Lemme 2.4.9. *For $k = 1, 2, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 1$, the vector $F_{a_1 \dots a_M}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)}$ obeys the following relation :*

$$\widetilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-1)}\}) F_{a_1 \dots a_M}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)} = \widetilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k-1)}\}) F_{a_1 \dots a_M}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)} \quad (2.4.107)$$

where $\widetilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k-1)}\})$ is the weight of the representation with highest weight vector $\Omega^{(k)}$:

$$\widetilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-1)}\}) \Omega^{(k)} = \widetilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k-1)}\}) \Omega^{(k)} \quad (2.4.108)$$

Proof: : For $k < i, j, l$, the commutation relations of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ rewrite :

$$\begin{aligned} t_{kk}(u) t_{ij}(v) &= t_{ij}(v) t_{kk}(u) + (-1)^{([k]+[j])([i]+[j])} \frac{\mathfrak{c}_{ik}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} t_{kj}(v) t_{ik}(u) \\ &\quad - (-1)^{([k]+[i])([k]+[j])} \frac{\mathfrak{c}_{kj}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} t_{kj}(u) t_{ik}(v) \end{aligned} \quad (2.4.109)$$

$$\begin{aligned} t_{lk}(u) t_{ij}(v) &= (-1)^{([i]+[j])([l]+[k])} \left(1 + \delta_{ik} \frac{\mathfrak{a}_i(v, u) - \mathfrak{b}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} \right) t_{ij}(v) t_{lk}(u) \\ &\quad + (1 - \delta_{il}) \frac{\mathfrak{c}_{il}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} (-1)^{([i]+[j])([l]+[k])} t_{lj}(v) t_{ik}(u) \\ &\quad - (-1)^{([i]+[j])([k]+[j])} \frac{\mathfrak{c}_{kj}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} t_{lj}(u) t_{ik}(v) \end{aligned} \quad (2.4.110)$$

Since $F^{(k)}$ contains terms of type $t_{ij}(u)$ with $k < i \leq j$ only, and because of the property

$$\widetilde{t}_{ik}(u; \{u^{(k-1)}\}) \Omega^{(k)} = 0, \quad i > k \quad (2.4.111)$$

we conclude that $\widetilde{t}_{kk}(u; \{u\})$ commutes with $F^{(k)}$.

The action of $\widetilde{t}_{kk}(u; \{u\})$ on $\Omega^{(k)}$ leads to the result. ■

Gathering equation (2.4.104) and lemma 2.4.9, we get the action of \tilde{t}_{kk} on $\Phi^{(k-1)}(\{u\})$:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-1)}\}) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) &= \prod_{j=1}^{M_k} f_k(u, u_j^{(k)}) \tilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k-1)}\}) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_k} P_j(u; \{u^{(k-1)}\}) \mathbb{B}_j^{(k)}(u; \{u^{(k)}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \end{aligned} \quad (2.4.112)$$

$$\Phi^{(k)}(\{u\}) = F_{a_1^{(k)} \dots a_{M^k}^{(k)}}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)}$$

$$P_j(u; \{u^{(k-1)}\}) = \tilde{\Lambda}_k(u_j^{(k)}; \{u^{(k-1)}\}) \mathfrak{g}_k^+(u, u_j^{(k)}) \prod_{i \neq j}^{M_k} f_k(u_i^{(k)}, u_j^{(k)}) . \quad (2.4.113)$$

It remains to do the same for $t^{(k+1)}(u; \{u^{(k-1)}\}) = \text{str} \left(T^{(k+1)}(u; \{u^{(k-1)}\}) \right)$. We first commute $t^{(k+1)}(u; \{u^{(k-1)}\})$ with $\mathbb{B}^{(k)}(\{u^{(k)}\})$ using relations (2.4.7) and (2.4.74) :

$$\begin{aligned} t^{(k+1)}(u; \{u^{(k-1)}\}) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) &= \prod_{j=1}^{M_k} f_{k+1}(u_j^{(k)}, u) \mathbb{B}^{(k)}(\{u^{(k)}\}) \tilde{t}^{(k+1)}(u; \{u^{(k)}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_k} \widehat{Q}_j(u; \{u^{(k)}\}) \mathbb{B}_j^{(k)}(u; \{u^{(k)}\}) \tilde{t}^{(k+1)}(u_j^{(k)}; \{u^{(k)}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \end{aligned} \quad (2.4.114)$$

$$\widehat{Q}_j(u; \{u^{(k)}\}) = \mathfrak{g}_{k+1}^-(u_j^{(k)}, u) \prod_{i \neq j}^{M_k} f_{k+1}(u_j^{(k)}, u_i^{(k)}) . \quad (2.4.115)$$

It makes appear new monodromy and transfer matrices :

$$\tilde{T}_a^{(k+1)}(u; \{u^{(k)}\}) = T_a^{(k+1)}(u; \{u^{(k-1)}\}) \prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_k}} \mathbb{R}_{a, a_j}^{(k+1)}(u, u_j^{(k)}) \quad (2.4.116)$$

$$\tilde{t}^{(k+1)}(u; \{u^{(k)}\}) = \text{str}_a \left(\tilde{T}_a^{(k+1)}(u; \{u^{(k)}\}) \right) . \quad (2.4.117)$$

The new monodromy matrix also satisfies the RTT relation

$$R_{ab}^{(k+1)}(u, v) \tilde{T}_a^{(k+1)}(u; \{u^{(k)}\}) \tilde{T}_b^{(k+1)}(v; \{u^{(k)}\}) = \tilde{T}_b^{(k+1)}(v; \{u^{(k)}\}) \tilde{T}_a^{(k+1)}(u; \{u^{(k)}\}) R_{ab}^{(k+1)}(u, v)$$

so that the problem

$$\tilde{t}^{(k+1)}(u; \{u^{(k)}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) = \tilde{\Gamma}^{(k+1)}(u) \Phi^{(k)}(\{u\}) \quad (2.4.118)$$

is integrable, and defines a $\mathcal{A}_{m-k|n}$ spin chain, with $L + \sum_{j=1}^k M_j$ sites.

Assuming the form (2.4.118), we get

$$\begin{aligned} t^{(k+1)}(u; \{u^{(k-1)}\}) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) &= \tilde{\Gamma}^{(k+1)}(u) \prod_{j=1}^{M_k} \mathbf{f}_{k+1}(u_j^{(1)}, u) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_k} Q_j(u; \{u^{(k)}\}) \mathbb{B}_j^{(k)}(u; \{u^{(k)}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \end{aligned} \quad (2.4.119)$$

$$Q_j(u; \{u^{(k)}\}) = \tilde{\Gamma}^{(k+1)}(u_j^{(k)}) \mathfrak{g}_{k+1}^-(u_j^{(k)}, u) \prod_{i \neq j}^{M_k} \mathbf{f}_{k+1}(u_j^{(k)}, u_i^{(k)}) \quad (2.4.120)$$

Gathering (2.4.112) and (2.4.120), and comparing them with (2.4.97), we get the k^{th} Bethe equation and an expression for $\tilde{\Gamma}^{(k)}(u)$:

$$\begin{aligned} (-1)^{[k]} \tilde{\Lambda}_k(u_j^{(k)}; \{u^{(k)}\}) \mathfrak{g}_k^+(u, u_j^{(k)}) \prod_{i \neq j}^{M_k} \mathbf{f}_k(u_j^{(k)}, u_i^{(k)}) + \tilde{\Gamma}^{(k+1)}(u_j^{(k)}) \mathfrak{g}_{k+1}^-(u_j^{(k)}, u) \prod_{i \neq j}^{M_k} \mathbf{f}_{k+1}(u_i^{(k)}, u_j^{(k)}) &= 0 \\ \tilde{\Gamma}^{(k)}(u) &= (-1)^{[k]} \tilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k)}\}) \prod_{j=1}^{M_k} \mathbf{f}_k(u, u_j^{(k)}) + \tilde{\Gamma}^{(k+1)}(u) \prod_{j=1}^{M_k} \mathbf{f}_{k+1}(u_j^{(k)}, u) \end{aligned} \quad (2.4.121)$$

End of the recursion

To end the recursion, we remark that

$$\tilde{\Gamma}^{(\mathbf{m}+\mathbf{n})}(u) = (-1)^{[\mathbf{m}+\mathbf{n}]} \tilde{\Lambda}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}(u; \{u^{(\mathbf{m}+\mathbf{n})}\}) \quad (2.4.122)$$

so that $\tilde{\Gamma}$ is expressed in term of $\tilde{\Lambda}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(k)}(u) &= (-1)^{[k]} \tilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k)}\}) \prod_{j=1}^{M_k} \mathbf{f}_k(u, u_j^{(k)}) \\ &+ \sum_{\ell=k+1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}-1} (-1)^{[\ell]} \tilde{\Lambda}_\ell(u; \{u^{(\ell)}\}) \left(\prod_{j=1}^{M_\ell} \mathbf{f}_\ell(u, u_j^{(\ell)}) \right) \left(\prod_{p=k}^{\ell-1} \prod_{j=1}^{M_p} \mathbf{f}_{p+1}(u_j^{(p)}, u) \right) \\ &+ (-1)^{[\mathbf{m}+\mathbf{n}]} \tilde{\Lambda}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}(u; \{u\}) \left(\prod_{p=k}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}-1} \prod_{j=1}^{M_p} \mathbf{f}_{p+1}(u_j^{(p)}, u) \right) \end{aligned} \quad (2.4.123)$$

It remains to compute the values $\tilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k)}\})$. It is done in the following lemma :

Lemme 2.4.10. *The eigenvalue $\tilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k)}\})$ of $\tilde{t}_{kk}(u; \{u^{(k-2)}\})$ on $\Omega^{(k-1)}$ is given by*

$$\tilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k)}\}) = \Lambda_k(u) \prod_{\ell=1}^{k-2} \prod_{j=1}^{M_\ell} \frac{\mathbf{b}(u, u_j^{(\ell)})}{\mathbf{a}_{\ell+1}(u, u_j^{(\ell)})} = \Lambda_k(u) \prod_{\ell=1}^{k-2} \prod_{j=1}^{M_\ell} \frac{1}{\mathbf{f}_{\ell+1}(u_j^{(\ell)}, u)} \quad k = 1, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n}$$

where we have used $t_{kk}(u) \Omega = \Lambda_k(u) \Omega$ for the original spin chain.

Proof: For $\ell = 1, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n} - 1$, we compute :

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_\ell}} R_{aa_j}^{(\ell+1)}(u, u_j^{(\ell)}) \right) (e_{\ell+1})^{\otimes M_\ell} = \left(\prod_{j=1}^{M_\ell} \mathbf{a}_{\ell+1}(u, u_j^{(\ell)}) \right) E_{\ell+1, \ell+1} \otimes (e_{\ell+1})^{\otimes M_\ell} \\
& + \left(\prod_{j=1}^{M_\ell} \mathbf{b}(u, u_j^{(\ell)}) \right) \sum_{s=\ell+2}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} E_{ss} \otimes (e_{\ell+1})^{\otimes M_\ell} \\
& + \sum_{p=1}^{M_\ell} \left(\prod_{j=p+1}^{M_\ell} \mathbf{a}_{\ell+1}(u, u_j^{(\ell)}) \right) \left(\sum_{s=\ell+2}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} (-1)^{(p-1)[\ell+1]([s]+[\ell+1])} \mathbf{c}_{\ell+1, s}(u, u_p^{(\ell)}) \right) \left(\prod_{j=1}^{p-1} \mathbf{b}(u, u_j^{(\ell)}) \right) \\
& \times E_{\ell+1, s} \otimes (e_{\ell+1})^{\otimes (p-1)} \otimes e_s \otimes (e_{\ell+1})^{\otimes (M_\ell - p)} \quad (2.4.124)
\end{aligned}$$

where the calculation has been done in $\mathbb{C}^{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ with the identification $e_1^{(\ell)} \equiv e_{\ell+1}$.

In the product of such terms, we want to select the term(s) carried by E_{kk} in the auxiliary space (labelled a in equation (2.4.124)). Since the matrices E_{ij} appearing in (2.4.124) are all upper triangular, this implies that each term must be carried by a E_{kk} matrix in space a . Denoting by $E_{kk}^{(a)}$ such matrix, one deduces

$$\begin{aligned}
& str_a \left(E_{kk}^{(a)} \prod_{\ell=1}^{\overrightarrow{k-1}} \prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_\ell}} R_{aa_j}^{(\ell+1)}(u, u_j^{(\ell)}) \right) (e_k)^{\otimes M_{k-1}} \otimes \dots \otimes (e_3)^{\otimes M_2} \otimes (e_2)^{\otimes M_1} = \\
& = \left(\prod_{\ell=1}^{k-2} \prod_{j=1}^{M_\ell} \mathbf{b}(u, u_j^{(\ell)}) \right) \prod_{j=1}^{M_{k-1}} \mathbf{a}_k(u, u_j^{(k-1)}) (e_k)^{\otimes M_{k-1}} \otimes \dots \otimes (e_3)^{\otimes M_2} \otimes (e_2)^{\otimes M_1} \quad (2.4.125)
\end{aligned}$$

Remark that we didn't mention the contribution of the original $t_{kk}(u)$: in fact, since Ω is a highest weight, the monodromy matrix $T(u)$ is also upper triangular, so that we need also to select only $E_{kk}^{(a)}$ for this term. As a consequence, the product of R -matrices on its own must be carried by $E_{kk}^{(a)}$.

Finally, from (2.4.125) and the normalisation (2.4.26), we get the result. ■

From the expression given in lemma 2.4.10, one deduces that :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(k)}(u; \{u\}) &= \left(\prod_{p=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{M_p} \frac{1}{f_{p+1}(u_j^{(p)}, u)} \right) \left\{ (-1)^{[k]} \Lambda_k(u) \left(\prod_{j=1}^{M_k} f_k(u, u_j^{(k)}) \right) \left(\prod_{j=1}^{M_{k-1}} f_k(u_j^{(k-1)}, u) \right) \right. \\
&+ \sum_{\ell=k+1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}-1} (-1)^{[\ell]} \Lambda_\ell(u) \left(\prod_{j=1}^{M_\ell} f_\ell(u, u_j^{(\ell)}) \right) \left(\prod_{j=1}^{M_{\ell-1}} f_\ell(u_j^{(\ell-1)}, u) \right) \\
&\left. + (-1)^{[\mathbf{m}+\mathbf{n}]} \Lambda_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}(u) \left(\prod_{j=1}^{M_{\mathbf{m}+\mathbf{n}-1}} f_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}(u_j^{(\mathbf{m}+\mathbf{n}-1)}, u) \right) \right\}. \quad (2.4.126)
\end{aligned}$$

Let us note that since $\mathfrak{b}(u, u) = 0$, equation (2.4.126) implies that :

$$\tilde{\Gamma}_k(u_j^{(\ell)}; \{u\}) = 0 \quad \text{for } j = 1, \dots, M_\ell; \ell = 1, \dots, k-2 \quad (2.4.127)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_k(u_i^{(k-1)}; \{u\}) &= (-1)^{[k]} \Lambda_k(u) \left(\prod_{j=1}^{M_k} \mathfrak{f}_k(u_i^{(k-1)}, u_j^{(k)}) \right) \left(\prod_{p=1}^{k-2} \prod_{j=1}^{M_p} \frac{1}{\mathfrak{f}_{p+1}(u_j^{(p)}, u_i^{(k-1)})} \right) \\ &\text{for } i = 1, \dots, M_{k-1}. \end{aligned} \quad (2.4.128)$$

2.4.8 Final form of Bethe vectors, eigenvalues and equations

Using these expressions and the value of $\tilde{\Lambda}_k(u; \{u^{(k)}\})$ given in lemma 2.4.10, one can recast the Bethe equation (2.4.121) in its final form :

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{k+1}(u_j^{(k)})}{\Lambda_k(u_j^{(k)})} &= (-1)^{M_k} \prod_{i=1}^{M_{k-1}} \frac{\mathfrak{a}_k(u_j^{(k)}, u_i^{(k-1)})}{\mathfrak{b}(u_j^{(k)}, u_i^{(k-1)})} \prod_{i \neq j}^{M_k} \frac{\mathfrak{a}_k(u_i^{(k)}, u_j^{(k)})}{\mathfrak{a}_{k+1}(u_j^{(k)}, u_i^{(k)})} \prod_{i=1}^{M_{k+1}} \frac{\mathfrak{b}(u_i^{(k+1)}, u_j^{(k)})}{\mathfrak{a}_{k+1}(u_i^{(k+1)}, u_j^{(k)})} \\ j &= 1, \dots, M_k, \quad k = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 1 \end{aligned} \quad (2.4.129)$$

with the convention $M_0 = M_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = 0$. Remark that, in the distinguished gradation, one can simplify these equations, see section 2.4.14.

The eigenvalue of the transfer matrix is obtained from (2.4.126), remarking that $\Lambda(u) = \tilde{\Gamma}^{(1)}(u)$:

$$\Lambda(u) = \sum_{k=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (-1)^{[k]} \Lambda_k(u) \prod_{j=1}^{M_{k-1}} \mathfrak{f}_k(u_j^{(k-1)}, u) \prod_{j=1}^{M_k} \mathfrak{f}_k(u, u_j^{(k)}). \quad (2.4.130)$$

Again, due to the distinguished gradation, one can simplify the expression of $\Lambda(u)$.

The number of parameter families is $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 1$. The Bethe equations (2.4.129) ensure that $\Lambda(u)$ is analytical, in accordance with the analytical Bethe ansatz.

The Bethe vectors take the form

$$\begin{aligned} \Phi(\{u\}) &= B_{a_1}^{(1)}(u_1^{(1)}) \cdots B_{a_{M_1}}^{(1)}(u_{M_1}^{(1)}) F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega \\ &= B_{a_1^1}^{(1)}(u_1^{(1)}) \cdots B_{a_{M_1}^1}^{(1)}(u_{M_1}^{(1)}) \tilde{B}_{a_2^2}^{(2)}(u_1^{(2)}) \cdots \tilde{B}_{a_{M_2}^2}^{(2)}(u_{M_2}^{(2)}) \cdots \tilde{B}_{a_M^{n+\mathfrak{m}-1}}^{(n+\mathfrak{m}-1)}(u_M^{(n+\mathfrak{m}-1)}) \Omega^{(n+\mathfrak{m}-1)}. \end{aligned} \quad (2.4.131)$$

We remind the notation $M = \sum_{j=1}^{n+\mathfrak{m}-1} M_j$, $\Omega^{(k)} = (e_1^{(k-1)})^{\otimes M_{k-1}} \Omega^{(k-1)}$, $\Omega^{(1)} = \Omega$ and the auxiliary spaces are indicated according to remark 2.4.1.

2.4.9 Bethe equation in the distinguished gradation

For this grade, the properties

$$\mathfrak{a}_k(u, v) = \mathfrak{a}_1(u, v) \equiv \mathfrak{a}(u, v) \quad \text{for } k \leq \mathfrak{m} \quad \text{and} \quad \mathfrak{a}_k(u, v) = -\mathfrak{a}(v, u) \quad \text{for } k > \mathfrak{m} \quad (2.4.132)$$

$$\mathfrak{f}_k(u, v) = \mathfrak{f}_1(u, v) \equiv \mathfrak{f}(u, v) \quad \text{for } k \leq \mathfrak{m} \quad \text{and} \quad \mathfrak{f}_k(u, v) = \mathfrak{f}(v, u) \quad \text{for } k > \mathfrak{m} \quad (2.4.133)$$

allow to simplify the Bethe equations to the following form

$$\frac{\Lambda_2(u_j^{(1)})}{\Lambda_1(u_j^{(1)})} = - \prod_{i \neq j}^{M_1} \frac{f(u_j^{(1)}, u_i^{(1)})}{f(u_i^{(1)}, u_j^{(1)})} \prod_{i=1}^{M_2} \left(f(u_j^{(1)}, u_i^{(2)}) \right)^{-1} \quad j = 1, \dots, M_1, \quad (2.4.134)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{k+1}(u_j^{(k)})}{\Lambda_k(u_j^{(k)})} &= - \prod_{i=1}^{M_{k-1}} f(u_i^{(k-1)}, u_j^{(k)}) \prod_{i \neq j}^{M_k} \frac{f(u_j^{(k)}, u_i^{(k)})}{f(u_i^{(k)}, u_j^{(k)})} \prod_{i=1}^{M_{k+1}} \left(f(u_j^{(k)}, u_i^{(k+1)}) \right)^{-1} \\ j &= 1, \dots, M_k, \quad k = 2, \dots, \mathfrak{m} - 1 \end{aligned} \quad (2.4.135)$$

$$\frac{\Lambda_{\mathfrak{m}+1}(u_j^{(\mathfrak{m})})}{\Lambda_{\mathfrak{m}}(u_j^{(\mathfrak{m})})} = - \prod_{i=1}^{M_{\mathfrak{m}-1}} f(u_i^{(\mathfrak{m}-1)}, u_j^{(\mathfrak{m})}) \prod_{i=1}^{M_{\mathfrak{m}+1}} \left(f(u_i^{(\mathfrak{m}+1)}, u_j^{(\mathfrak{m})}) \right)^{-1} \quad j = 1, \dots, M_{\mathfrak{m}} \quad (2.4.136)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{k+1}(u_j^{(k)})}{\Lambda_k(u_j^{(k)})} &= - \prod_{i=1}^{M_{k-1}} f(u_j^{(k)}, u_i^{(k-1)}) \prod_{i \neq j}^{M_k} \frac{f(u_i^{(k)}, u_j^{(k)})}{f(u_j^{(k)}, u_i^{(k)})} \prod_{i=1}^{M_{k+1}} \left(f(u_i^{(k+1)}, u_j^{(k)}) \right)^{-1} \\ j &= 1, \dots, M_k, \quad k = \mathfrak{m} + 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 2 \end{aligned} \quad (2.4.137)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(u_j^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)})}{\Lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}(u_j^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)})} &= - \prod_{i=1}^{M_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}} f(u_j^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}, u_i^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2)}) \prod_{i \neq j}^{M_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}} \frac{f(u_i^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}, u_j^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)})}{f(u_j^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}, u_i^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)})} \\ j &= 1, \dots, M_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}. \end{aligned} \quad (2.4.138)$$

The Bethe equations depend on the highest weights $\Lambda_j(u)$ and on a sole function :

$$f(u, v) = \frac{\mathfrak{a}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} = \begin{cases} \frac{u - v + \hbar}{u - v} & \text{for super-Yangians} \\ \frac{q^{-1} u^2 - q v^2}{u^2 - v^2} & \text{for deformed superalgebras} \end{cases} \quad (2.4.139)$$

It is also true for the transfer matrix eigenvalue :

$$\begin{aligned} \Lambda(u) &= \Lambda_1(u) \prod_{j=1}^{M_1} f(u, u_j^{(1)}) + \sum_{k=2}^{\mathfrak{m}} \Lambda_k(u) \prod_{j=1}^{M_{k-1}} f(u_j^{(k-1)}, u) \prod_{j=1}^{M_k} f(u, u_j^{(k)}) \\ &\quad - \sum_{k=\mathfrak{m}+1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1} \Lambda_k(u) \prod_{j=1}^{M_{k-1}} f(u, u_j^{(k-1)}) \prod_{j=1}^{M_k} f(u_j^{(k)}, u) - \Lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(u) \prod_{j=1}^{M_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}} f(u, u_j^{(\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}) \end{aligned} \quad (2.4.140)$$

2.4.10 Cartan eigenvalues of Bethe vectors

It was shown in [53, 52, 51] that the transfer matrix $t(u)$ commutes with the Cartan subalgebra of $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$. Hence, Bethe vectors are also eigenvectors of the Cartan generators. We give hereafter their eigenvalues. Let us remark that when $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} = \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ (or $\mathcal{Y}(\mathfrak{n})$) the symmetry algebra extends to the whole $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ algebra. We remind that we note $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}^{(k)})$ the $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ highest weight at site k .

For super Yangian $\mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$, the $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ Cartan generators have the form :

$$t_{jj}^{(1)} = -(-1)^{[j]} \hbar \sum_{k=1}^L \mathbb{I}^{\otimes k-1} \otimes \mathcal{E}_{jj} \otimes \mathbb{I}^{\otimes L-k-1} \quad (2.4.141)$$

$$t_{jj}^{(1)} \Phi(\{u\}) = -(-1)^{[j]} \hbar \left(M_{j-1} - M_j + \sum_{k=1}^L \lambda_j^{(k)} \right) \Phi(\{u\}). \quad (2.4.142)$$

For the super quantum affine algebra $\hat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$, the $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ Cartan generators are given by :

$$l_{jj}^{\pm} = (-1)^{[j]L} (q^{\pm H_j})^{\otimes L} \equiv (-1)^{[j]L} q^{\pm h_j} \quad (2.4.143)$$

$$q^{h_j} \Phi(\{u\}) = \left(\prod_{\ell=1}^L \eta_{\ell} \right) q^{(1-2[j])(M_j - M_{j-1}) + \sum_{k=1}^L \lambda_j^{(k)}} \Phi(\{u\}). \quad (2.4.144)$$

2.4.11 Form of the Bethe vectors

In this section, we make contact with the expressions obtained in [87, 88] for Bethe vectors of $\mathcal{Y}(\mathfrak{n})$ and $\hat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{n})$ chains. Note that the construction there is quite the same, but the proof is rather different. We have chosen to stick to the original NBA formalism with a constructive approach for the Bethe vectors. In this section, we show how to reproduce some of the results given in [87, 88], such as the recursion formula for Bethe vector and the ‘trace form’ which is the central result of these papers. We also generalise them to the case of superalgebras.

Recursion formula for Bethe vectors

From expression (2.4.131), we can extract a recurrent form for the Bethe vectors :

$$\Phi_M^{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}}(\{u\}) = B_{a_1^1}^{(1)}(u_1^{(1)}) \cdots B_{a_{M_1}^1}^{(1)}(u_{M_1}^{(1)}) \hat{\Psi}_{\{u^{(1)}\}} \left(\Phi_{M-M_1}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}-1}(\{u^{(>1)}\}) \right) \quad (2.4.145)$$

$$\hat{\Psi}_{\{u^{(1)}\}} = v^{(2)} \circ (\psi \otimes \pi_{u_{M_1}^{(1)}} \otimes \cdots \otimes \pi_{u_1^{(1)}}) \circ \Delta^{(M_1)} \quad (2.4.146)$$

where π_a is the fundamental representation evaluation homomorphism normalized as :

$$\begin{aligned} \pi_a : \mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} \otimes \text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}) &\rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}) \\ T(u) &\mapsto \mathbb{R}(u, a) \end{aligned} \quad (2.4.147)$$

$v^{(k)}$ is the application of the highest weight vector from the right,

$$v^{(k)}(X \Omega) = X (e_1^{(k)})^{\otimes M_{k-1}} \otimes \Omega, \quad (2.4.148)$$

and ψ is the embedding of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$ in $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ given by

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{A}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}} &\rightarrow \mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} \\ t_{ij}(u) &\mapsto t_{i+1,j+1}(u) \end{aligned} \quad (2.4.149)$$

If we denote by $[\cdot]_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ the grading used in the $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ superalgebra, the embedding ψ corresponds to the identification $[j]_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}} = [j+1]_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$.

Expression (2.4.145) has been given in [87, 88] in the case of $\mathcal{Y}(\mathfrak{n})$ and $\hat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{n})$ chains. It is also valid in the case of $\mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ and $\hat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ superalgebras.

2.4.12 Supertrace formula for Bethe vectors

We can also write the Bethe vector into a supertrace formula and prove the equivalence with the recurrence relation discussed above.

$$\begin{aligned} \Phi_M^{n+m}(\{u\}) &= (-1)^{A_1} \text{str}_{1\dots M} \left(T_1(u_1^{(1)}) \dots T_M(u_{M_{n+m-1}}^{(n+m-1)}) \mathbb{R}_{1\dots M}(\{u\}) \right. \\ &\quad \left. \times E_{n+m, n+m-1}^{\vec{\otimes} M_{n+m-1}} \otimes \dots \otimes E_{21}^{\vec{\otimes} M_1} \right) \Omega \end{aligned} \quad (2.4.150)$$

$$\mathbb{R}_{1\dots M}(\{u\}) = \prod_{j < k} \prod_{l=1}^{\overrightarrow{M_k}} \prod_{i=1}^{\overleftarrow{M_j}} \mathbb{R}_{a_l^k a_i^j}(u_l^{(k)}, u_i^{(j)}) \frac{\mathbf{a}_1(u_l^{(k)}, u_i^{(j)})}{\mathbf{a}_k(u_l^{(k)}, u_i^{(j)})} \quad (2.4.151)$$

$$A_k = \sum_{i=k}^{n+m-2} \frac{M_i(M_i+1)}{2} [i] \quad (2.4.152)$$

We note $1, \dots, M$ the ordered sequence of auxiliary spaces $a_1^1, \dots, a_{M_1}^1, a_1^2, \dots, a_{M_{n+m-1}}^{n+m-1}$. When $[i] = 0$, we recognize the expression given in [87, 88] for the Yangian $\mathcal{Y}(\mathfrak{n})$ and for the quantum group $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{n})$. The above expression is also valid in the case of $\mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ and $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ superalgebras.

Equivalence is proven along the following lines. Starting from expression (2.4.150), we can extract the M_1 auxiliary spaces corresponding to the first step of the nested Bethe ansatz :

$$\begin{aligned} \Phi_M^{n+m}(\{u\}) &= (-1)^{\frac{M_1(M_1+1)}{2}[1]} \text{str}_{1\dots M_1} \left[T_1(u_1^{(1)}) \dots T_{M_1}(u_{M_1}^{(1)}) (-1)^{A_2} \text{str}_{M_1+1\dots M} \left(\right. \right. \\ &\quad \left. \left. T_{M_1+1}(u_1^{(2)}) \dots T_M(u_{M_{n+m-1}}^{(n+m-1)}) \mathbb{R}_{1\dots M}(\{u\}) E_{n+m, n+m-1}^{\vec{\otimes} M_{n+m-1}} \otimes \dots \otimes E_{32}^{\vec{\otimes} M_2} \right) \right. \\ &\quad \left. \otimes E_{21}^{\vec{\otimes} M_1} \right] \otimes \Omega \end{aligned}$$

Using the isomorphism $\text{End}(\mathbb{C}^{m+n}) \sim \mathbb{C}^{m+n} \otimes \mathbb{C}^{m+n}$, one can rewrite, for any $A(v)$, the supertrace with an E_{21} matrix as

$$\text{str} \left(T(u) A(v) E_{21} \right) = \sum_{j=1}^{m+n} (e_1^t \otimes e_j^t \otimes t_{1j}(u)) A(v) (e_1 \otimes e_2 \otimes 1) \quad (2.4.153)$$

$$= (-1)^{[1]+[1][A]} \sum_{j=1}^{m+n} (e_j^t \otimes t_{1j}(u)) A(v) (e_2 \otimes 1). \quad (2.4.154)$$

Using formula (2.4.153) for the auxiliary spaces $1, \dots, M_1$, and remarking that the case $j_a = 1$ for $a = 1, \dots, M_1$ does not contribute, we obtain :

$$\begin{aligned} \Phi_M^{n+m}(\{u\}) &= B_{a_1^1}^{(1)}(u_1^{(1)}) \dots B_{a_{M_1}^1}^{(1)}(u_{M_1}^{(1)}) (-1)^{A_2} \text{str}_{M_1+1\dots M} \left(T_{M_1+1}(u_1^{(2)}) \dots T_M(u_{M_{n+m-1}}^{(n+m-1)}) \right. \\ &\quad \left. \times \mathbb{R}_{1\dots M}(\{u\}) E_{n+m, n+m-1}^{\vec{\otimes} M_{n+m-1}} \otimes \dots \otimes E_{32}^{\vec{\otimes} M_2} \right) \Omega^{(2)} \end{aligned} \quad (2.4.155)$$

To end the proof, we make the following mappings :

$$\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{m}-1|\mathbf{n}} \quad (2.4.156)$$

$$[i]_{\mathbf{m}|\mathbf{n}} \rightarrow [i-1]_{\mathbf{m}-1|\mathbf{n}} \quad (2.4.157)$$

$$\mathbb{R}_{a_j^i a_k^1}(u_i^{(j)}, u_k^{(1)}) \rightarrow \pi_{u_k^{(1)}}(T_{a_j^i}(u_i^{(j)})) \quad (2.4.158)$$

$$E_{j+1,j} \in \mathbb{C}^{\mathbf{m}|\mathbf{n}} \rightarrow E_{j,j-1} \in \mathbb{C}^{\mathbf{m}-1|\mathbf{n}} \quad (2.4.159)$$

they allow to recover the definition of $\widehat{\Psi}_{\{u^{(1)}\}}$ and the form (2.4.145).

2.4.13 Orthogonality relation for Bethe vectors

In this part we prove the condition for the orthogonality of the on-shell Bethe vectors (i.e. when Bethe equations are satisfied).

Let \mathcal{F} be the space of all Bethe vectors. We introduce the Shapovalov form [87, 107] :

$$\langle ., . \rangle : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.4.160)$$

which obeys the following properties :

$$\langle \Omega, \Omega \rangle = 1, \quad \text{where } \Omega \text{ is the highest weight vector of } gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}), \quad (2.4.161)$$

$$\langle t_{ij}(u) \omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1, t_{ji}(u) \omega_2 \rangle \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}. \quad (2.4.162)$$

Proposition 2.4.11. *$\langle \Phi(\{u\}), \Phi(\{v\}) \rangle$ is different from zero if and only if $\{u^{(k)}\} = \{v^{(k)}\}$, $\forall k = 1, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n} - 1$, the sets being not ordered.*

Proof: From the eigenvalues of $t(u)$ computed within the NBA method we have

$$t(w) \Phi(\{v\}) = \Lambda(w; \{v\}) \Phi(\{v\}) \quad (2.4.163)$$

$$\langle t(w) \Phi(\{u\}), \Phi(\{v\}) \rangle = \langle \Phi(\{u\}), t(w) \Phi(\{v\}) \rangle \quad (2.4.164)$$

$$\Lambda(w; \{u\}) \langle \Phi(\{u\}), \Phi(\{v\}) \rangle = \Lambda(w; \{v\}) \langle \Phi(\{u\}), \Phi(\{v\}) \rangle \quad (2.4.165)$$

where $\{u\}$ and $\{v\}$ refer to two different sets of parameters for the Bethe vector. Thus, in order to get $\langle \Phi(\{u\}), \Phi(\{v\}) \rangle$ different from zero, we must have :

$$\Lambda(w; \{u\}) = \Lambda(w; \{v\}). \quad (2.4.166)$$

Since this equality must be satisfied for all values of w , and looking at (2.4.129), we conclude that all the families of Bethe roots must be the same up to a permutation in each family M_i : $\{u_i^{(k)}, i = 1, \dots, M_k\} = \{v_j^{(k)}, j = 1, \dots, M_k\}$ for all k . ■

Examples of Bethe vectors

Using the definition of the Bethe vector (2.4.151), it is easy to compute their explicit form in some specific cases. We illustrate it below, but a general expression in term of the generators $t_{ij}(v)$ is still lacking.

Bethe vectors of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ with $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = 2$ and $M_1 = M$. We reproduce here the well-known case obtained with algebraic Bethe ansatz.

$$\Phi_M^2(\{u^{(1)}\}) = (-1)^{M[2]} t_{12}(u_1^{(1)}) \cdots t_{12}(u_M^{(1)}) \Omega \quad (2.4.167)$$

Note that this expression is also valid when $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} > 2$, setting $M_1 = M$ and $M_k = 0$, $k > 1$.

Bethe vectors of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ with $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = 3$, $M_1 = M$ and $M_2 = 1$. This case is a generalization of the case $M_1 = M_2 = 1$ done for $\mathcal{Y}(gl_{\mathfrak{n}})$ and $\mathcal{U}_q(gl_{\mathfrak{n}})$ in [87, 88].

$$\begin{aligned} \Phi_{M+1}^3(u_1^{(1)}, \dots, u_M^{(1)}, u_1^{(2)}) = & \quad (2.4.168) \\ & (-1)^{\frac{(M+1)M}{2}[1]+M[2]} \left(\prod_{i=1}^M \frac{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_i^{(1)})}{\mathfrak{a}_2(u_1^{(2)}, u_i^{(1)})} \right) \left\{ (-1)^{[3]} t_{12}(u_1^{(1)}) \cdots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{23}(u_1^{(2)}) \right. \\ & + (-1)^{[2]} \sum_{i=1}^M \frac{\mathfrak{c}_{23}(u_1^{(2)}, u_i^{(1)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_i^{(1)})} \prod_{k=i+1}^M \frac{\mathfrak{a}_2(u_1^{(2)}, u_k^{(1)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_k^{(1)})} \\ & \left. \times t_{12}(u_1^{(1)}) \cdots t_{12}(u_{i-1}^{(1)}) t_{13}(u_i^{(1)}) t_{12}(u_{i+1}^{(1)}) \cdots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{22}(u_1^{(2)}) \right\} \Omega \end{aligned}$$

Again, this expression is also valid when $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} > 3$, setting $M_k = 0$, $k > 2$.

Bethe vectors of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ with $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = 4$, $M_1 = M$ and $M_2 = M_3 = 1$. This case is a generalization of the case $M_1 = M_2 = M_3 = 1$ done for $\mathcal{Y}(gl_{\mathfrak{n}})$ and $\mathcal{U}_q(gl_{\mathfrak{n}})$ in [87, 88].

$$\begin{aligned} \Phi_{M+2}^4(u_1^{(1)}, \dots, u_M^{(1)}, u_1^{(2)}, u_1^{(3)}) = & (-1)^{A_1+[2]M_1+[4]} \left(\prod_{j=1}^{M_1} \frac{\mathfrak{b}(u_1^{(3)}, u_j^{(1)})}{\mathfrak{a}_3(u_1^{(3)}, u_j^{(1)})} \right) \left(\prod_{j=1}^{M_1} \frac{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_j^{(1)})}{\mathfrak{a}_2(u_1^{(2)}, u_j^{(1)})} \right) \\ & \times \frac{\mathfrak{b}(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})}{\mathfrak{a}_3(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})} \left\{ (-1)^{[3]} t_{12}(u_1^{(1)}) \cdots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{23}(u_1^{(2)}) t_{34}(u_1^{(3)}) \Omega \right. \\ & + (-1)^{[4]} \frac{\mathfrak{c}_{34}(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})} t_{12}(u_1^{(1)}) \cdots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{24}(u_j^{(2)}) t_{33}(u_1^{(3)}) \Omega \\ & + \sum_{k=1}^{M_1} (-1)^{[2]} \frac{\mathfrak{c}_{23}(u_1^{(2)}, u_k^{(1)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_k^{(1)})} \left(\prod_{j=k+1}^{M_1} \frac{\mathfrak{a}_2(u_1^{(2)}, u_j^{(1)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_j^{(1)})} \right) \\ & \quad \times t_{12}(u_1^{(1)}) \cdots t_{13}(u_k^{(1)}) \cdots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{22}(u_1^{(2)}) t_{34}(u_1^{(3)}) \Omega \\ & + \sum_{k=1}^{M_1} (-1)^{[2]} \frac{\mathfrak{c}_{24}(u_1^{(2)}, u_k^{(1)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_k^{(1)})} \frac{\mathfrak{c}_{34}(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})} \left(\prod_{j=k+1}^{M_1} \frac{\mathfrak{a}_2(u_1^{(2)}, u_j^{(1)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_j^{(1)})} \right) \\ & \quad \left. \times t_{12}(u_1^{(1)}) \cdots t_{14}(u_k^{(1)}) \cdots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{22}(u_1^{(2)}) t_{33}(u_1^{(3)}) \Omega \right\} \quad (2.4.169) \end{aligned}$$

where A_1 is defined in (2.4.152).

2.4.14 Application to AdS/CFT correspondence

To illustrate the technics, we present some Bethe vectors in the case of $\mathcal{A}_{2|1}$, $\mathcal{A}_{2|2}$ and $\mathcal{A}_{4|4}$. These superalgebras, when they are undeformed, appeared recently in the AdS/CFT correspondence, so that it may be useful to look for their Bethe equations, their Bethe eigenvalues and vectors. To encompass future possible developments, we treat both the deformed and undeformed cases. We focus on distinguished gradation, as dealt in section 2.4.9. The transfer matrix eigenvalues are then given by (2.4.140), where the weights $\Lambda_j(u)$ depends on representations at each site. If we focus on fundamental representations on each site, with inhomogeneity parameters a_l , $l = 1, \dots, L$, they take the form

$$\Lambda_1(u) = \begin{cases} \prod_{l=1}^L (u - a_l - \hbar) \\ \prod_{l=1}^L \left(\frac{qu}{a_l} - \frac{a_l}{qu} \right) \end{cases} \quad \Lambda_j(u) = \begin{cases} \prod_{l=1}^L (u - a_l) \\ \prod_{l=1}^L \left(\frac{u}{a_l} - \frac{a_l}{u} \right) \end{cases} \quad j = 2, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n} \quad (2.4.170)$$

where the first line corresponds to $\mathcal{Y}(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ and the second one to $\mathcal{U}_q(\mathbf{m}|\mathbf{n})$.

2.4.15 $\mathcal{A}_{2|1}$ spin chains

In addition to the \mathcal{A}_2 Bethe vectors (2.4.167), one can consider the vectors (2.4.168) that simplifies as (up to a normalisation coefficient) :

$$\begin{aligned} \Phi_{M+1}^3(u_1^{(1)}, \dots, u_M^{(1)}, u_1^{(2)}) &= t_{12}(u_1^{(1)}) \cdots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{23}(u_1^{(2)}) \Omega \\ &- \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{c}_{23}(u_1^{(2)}, u_i^{(1)})}{\mathbf{b}(u_1^{(2)}, u_i^{(1)})} \left(\prod_{k=i+1}^M \mathbf{f}(u_i^{(1)}, u_1^{(2)}) \right) \\ &\quad \times t_{12}(u_1^{(1)}) \cdots t_{12}(u_{i-1}^{(1)}) t_{13}(u_i^{(1)}) t_{12}(u_{i+1}^{(1)}) \cdots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{22}(u_1^{(2)}) \Omega \end{aligned} \quad (2.4.171)$$

where the function $\mathbf{f}(u, v)$ is given in (2.4.139) and the functions $\mathbf{b}(u, v)$ and $\mathbf{c}_{jk}(u, v)$ are given in (2.4.18)-(2.4.21). The form of the Bethe equations depend on the superalgebra one chooses :

$gl(2|1)$ spin chain

$$\frac{\Lambda_2(u_j^{(1)})}{\Lambda_1(u_j^{(1)})} = - \prod_{i \neq j}^{M_1} \frac{u_i^{(1)} - u_j^{(1)} - \hbar}{u_i^{(1)} - u_j^{(1)} + \hbar} \prod_{i=1}^{M_2} \frac{u_i^{(2)} - u_j^{(1)}}{u_i^{(2)} - u_j^{(1)} - \hbar} \quad j = 1, \dots, M_1 \quad (2.4.172)$$

$$\frac{\Lambda_3(u_j^{(2)})}{\Lambda_2(u_j^{(2)})} = - \prod_{i=1}^{M_1} \frac{u_j^{(2)} - u_i^{(1)} - \hbar}{u_j^{(2)} - u_i^{(1)}} \quad j = 1, \dots, M_2 \quad (2.4.173)$$

$\mathcal{U}_q(gl(2|1))$ spin chain

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_2(u_j^{(1)})}{\Lambda_1(u_j^{(1)})} &= - \prod_{i \neq j}^{M_1} \frac{q(u_i^{(1)})^2 - q^{-1}(u_j^{(1)})^2}{q^{-1}(u_i^{(1)})^2 - q(u_j^{(1)})^2} \prod_{i=1}^{M_2} \frac{(u_i^{(2)})^2 - (u_j^{(1)})^2}{q(u_i^{(2)})^2 - q^{-1}(u_j^{(1)})^2} \quad j = 1, \dots, M_1, \\ \frac{\Lambda_3(u_j^{(2)})}{\Lambda_2(u_j^{(2)})} &= - \prod_{i=1}^{M_1} \frac{q(u_j^{(2)})^2 - q^{-1}(u_i^{(1)})^2}{(u_j^{(2)})^2 - (u_i^{(1)})^2} \quad j = 1, \dots, M_2 \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_{2|2}$ spin chain

In addition to the vectors (2.4.167) and (2.4.171), the vector (2.4.169) rewrites (up to normalisation) :

$$\begin{aligned}
\Phi_{M+2}^4(\{u\}) &= t_{12}(u_1^{(1)}) \dots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{23}(u_1^{(2)}) t_{34}(u_1^{(3)}) \Omega \\
&+ \frac{\mathfrak{c}_{34}(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})} t_{12}(u_1^{(1)}) \dots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{24}(u_j^{(2)}) t_{33}(u_1^{(3)}) \Omega \\
&- \sum_{k=1}^{M_1} \frac{\mathfrak{c}_{23}(u_1^{(2)}, u_i^{(1)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_i^{(1)})} \left(\prod_{j=k+1}^{M_1} \mathfrak{f}(u_j^{(1)}, u_1^{(2)}) \right) \\
&\quad \times t_{12}(u_1^{(1)}) \dots t_{12}(u_{k-1}^{(1)}) t_{13}(u_k^{(1)}) t_{12}(u_{k+1}^{(1)}) \dots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{22}(u_1^{(2)}) t_{34}(u_1^{(3)}) \Omega \\
&- \sum_{k=1}^{M_1} \frac{\mathfrak{c}_{24}(u_1^{(2)}, u_k^{(1)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(2)}, u_k^{(1)})} \frac{\mathfrak{c}_{34}(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})}{\mathfrak{b}(u_1^{(3)}, u_1^{(2)})} \left(\prod_{j=k+1}^{M_1} \mathfrak{f}(u_j^{(1)}, u_1^{(2)}) \right) \\
&\quad \times t_{12}(u_1^{(1)}) \dots t_{12}(u_{k-1}^{(1)}) t_{14}(u_k^{(1)}) t_{12}(u_{k+1}^{(1)}) \dots t_{12}(u_M^{(1)}) t_{22}(u_1^{(2)}) t_{33}(u_1^{(3)}) \Omega
\end{aligned} \tag{2.4.174}$$

$gl(2|2)$ spin chain

$$\frac{\Lambda_2(u_j^{(1)})}{\Lambda_1(u_j^{(1)})} = - \prod_{i \neq j}^{M_1} \frac{u_i^{(1)} - u_j^{(1)} - \hbar}{u_i^{(1)} - u_j^{(1)} + \hbar} \prod_{i=1}^{M_2} \frac{u_i^{(2)} - u_j^{(1)}}{u_i^{(2)} - u_j^{(1)} - \hbar} \quad j = 1, \dots, M_1 \tag{2.4.175}$$

$$\frac{\Lambda_3(u_j^{(2)})}{\Lambda_2(u_j^{(2)})} = - \prod_{i=1}^{M_1} \frac{u_j^{(2)} - u_i^{(1)} - \hbar}{u_j^{(2)} - u_i^{(1)}} \prod_{i=1}^{M_3} \frac{u_i^{(3)} - u_j^{(2)}}{u_i^{(3)} - u_j^{(2)} + \hbar} \quad j = 1, \dots, M_2 \tag{2.4.176}$$

$$\frac{\Lambda_4(u_j^{(3)})}{\Lambda_3(u_j^{(3)})} = - \prod_{i=1}^{M_2} \frac{u_j^{(3)} - u_i^{(2)} - \hbar}{u_j^{(3)} - u_i^{(2)}} \prod_{i \neq j}^{M_3} \frac{u_i^{(3)} - u_j^{(3)} + \hbar}{u_i^{(3)} - u_j^{(3)} - \hbar} \quad j = 1, \dots, M_3 \tag{2.4.177}$$

$\mathcal{U}_q(gl(2|2))$ spin chain

$$\frac{\Lambda_2(u_j^{(1)})}{\Lambda_1(u_j^{(1)})} = - \prod_{i \neq j}^{M_1} \frac{q(u_i^{(1)})^2 - q^{-1}(u_j^{(1)})^2}{q^{-1}(u_i^{(1)})^2 - q(u_j^{(1)})^2} \prod_{i=1}^{M_2} \frac{(u_i^{(2)})^2 - (u_j^{(1)})^2}{q(u_i^{(2)})^2 - q^{-1}(u_j^{(1)})^2} \quad j = 1, \dots, M_1,$$

$$\frac{\Lambda_3(u_j^{(2)})}{\Lambda_2(u_j^{(2)})} = - \prod_{i=1}^{M_1} \frac{q(u_j^{(2)})^2 - q^{-1}(u_i^{(1)})^2}{(u_j^{(2)})^2 - (u_i^{(1)})^2} \prod_{i=1}^{M_3} \frac{(u_i^{(3)})^2 - (u_j^{(2)})^2}{q^{-1}(u_i^{(3)})^2 - q(u_j^{(2)})^2} \quad j = 1, \dots, M_2$$

$$\frac{\Lambda_4(u_j^{(3)})}{\Lambda_3(u_j^{(3)})} = - \prod_{i=1}^{M_2} \frac{q(u_j^{(3)})^2 - q^{-1}(u_i^{(2)})^2}{(u_j^{(3)})^2 - (u_i^{(2)})^2} \prod_{i \neq j}^{M_3} \frac{q(u_i^{(3)})^2 - q^{-1}(u_j^{(3)})^2}{q^{-1}(u_i^{(3)})^2 - q(u_j^{(3)})^2} \quad j = 1, \dots, M_3$$

$\mathcal{A}_{4|4}$ spin chain

The form of new Bethe vectors is becoming very complicated and we refrain from giving an example. However, since $\mathcal{A}_{4|4}$ is the first superalgebra in the ‘super-Yang-Mills series’ $\mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}_{2|0}$, $\mathcal{A}_{2|1}$, $\mathcal{A}_{2|2}$, $\mathcal{A}_{4|4}$, that leads to generic Bethe ansatz equations, we write them :

$gl(4|4)$ spin chain

$$\frac{\Lambda_2(u_j^{(1)})}{\Lambda_1(u_j^{(1)})} = - \prod_{i \neq j}^{M_1} \frac{u_i^{(1)} - u_j^{(1)} - \hbar}{u_i^{(1)} - u_j^{(1)} + \hbar} \prod_{i=1}^{M_2} \frac{u_i^{(2)} - u_j^{(1)}}{u_i^{(2)} - u_j^{(1)} - \hbar} \quad j = 1, \dots, M_1$$

$$\frac{\Lambda_{k+1}(u_j^{(k)})}{\Lambda_k(u_j^{(k)})} = - \prod_{i=1}^{M_{k-1}} \frac{u_j^{(k)} - u_i^{(k-1)} - \hbar}{u_j^{(k)} - u_i^{(k-1)}} \prod_{i \neq j}^{M_k} \frac{u_i^{(k)} - u_j^{(k)} - \hbar}{u_i^{(k)} - u_j^{(k)} + \hbar} \prod_{i=1}^{M_{k+1}} \frac{u_i^{(k+1)} - u_j^{(k)}}{u_i^{(k+1)} - u_j^{(k)} - \hbar}$$

$$j = 1, \dots, M_k, \quad k = 2, 3$$

$$\frac{\Lambda_5(u_j^{(4)})}{\Lambda_4(u_j^{(4)})} = - \prod_{i=1}^{M_3} \frac{u_j^{(4)} - u_i^{(3)} - \hbar}{u_j^{(4)} - u_i^{(3)}} \prod_{i=1}^{M_5} \frac{u_i^{(5)} - u_j^{(4)}}{u_i^{(5)} - u_j^{(4)} + \hbar} \quad j = 1, \dots, M_4$$

$$\frac{\Lambda_{k+1}(u_j^{(k)})}{\Lambda_k(u_j^{(k)})} = - \prod_{i=1}^{M_{k-1}} \frac{u_j^{(k)} - u_i^{(k-1)} + \hbar}{u_j^{(k)} - u_i^{(k-1)}} \prod_{i \neq j}^{M_k} \frac{u_i^{(k)} - u_j^{(k)} + \hbar}{u_i^{(k)} - u_j^{(k)} - \hbar} \prod_{i=1}^{M_{k+1}} \frac{u_i^{(k+1)} - u_j^{(k)}}{u_i^{(k+1)} - u_j^{(k)} + \hbar}$$

$$j = 1, \dots, M_k, \quad k = 5, 6$$

$$\frac{\Lambda_8(u_j^{(7)})}{\Lambda_7(u_j^{(7)})} = - \prod_{i=1}^{M_6} \frac{u_j^{(7)} - u_i^{(6)} + \hbar}{u_j^{(7)} - u_i^{(6)}} \prod_{i \neq j}^{M_7} \frac{u_i^{(7)} - u_j^{(7)} + \hbar}{u_i^{(7)} - u_j^{(7)} - \hbar} \quad j = 1, \dots, M_7,$$

$\mathcal{U}_q(gl(4|4))$ spin chain

$$\frac{\Lambda_2(u_j^{(1)})}{\Lambda_1(u_j^{(1)})} = - \prod_{i \neq j}^{M_1} \frac{q(u_i^{(1)})^2 - q^{-1}(u_j^{(1)})^2}{q^{-1}(u_i^{(1)})^2 - q(u_j^{(1)})^2} \prod_{i=1}^{M_2} \frac{(u_i^{(2)})^2 - (u_j^{(1)})^2}{q(u_i^{(2)})^2 - q^{-1}(u_j^{(1)})^2} \quad j = 1, \dots, M_1,$$

$$\frac{\Lambda_{k+1}(u_j^{(k)})}{\Lambda_k(u_j^{(k)})} = - \prod_{i=1}^{M_{k-1}} \frac{q(u_j^{(k)})^2 - q^{-1}(u_i^{(k-1)})^2}{(u_j^{(k+1)})^2 - (u_i^{(k)})^2} \prod_{i \neq j}^{M_k} \frac{q(u_i^{(k)})^2 - q^{-1}(u_j^{(k)})^2}{q^{-1}(u_i^{(k)})^2 - q(u_j^{(k)})^2}$$

$$\times \prod_{i=1}^{M_{k+1}} \frac{(u_i^{(k+1)})^2 - (u_j^{(k)})^2}{q(u_i^{(k+1)})^2 - q^{-1}(u_j^{(k)})^2} \quad j = 1, \dots, M_k, \quad k = 2, 3$$

$$\frac{\Lambda_5(u_j^{(4)})}{\Lambda_4(u_j^{(4)})} = - \prod_{i=1}^{M_3} \frac{q(u_j^{(4)})^2 - q^{-1}(u_i^{(3)})^2}{(u_j^{(4)})^2 - (u_i^{(3)})^2} \prod_{i=1}^{M_5} \frac{(u_i^{(5)})^2 - (u_j^{(4)})^2}{q^{-1}(u_i^{(5)})^2 - q(u_j^{(4)})^2} \quad j = 1, \dots, M_4$$

$$\frac{\Lambda_{k+1}(u_j^{(k)})}{\Lambda_k(u_j^{(k)})} = - \prod_{i=1}^{M_{k-1}} \frac{q^{-1}(u_j^{(k)})^2 - q(u_i^{(k-1)})^2}{(u_j^{(k)})^2 - (u_i^{(k-1)})^2} \prod_{i \neq j}^{M_k} \frac{q^{-1}(u_i^{(k)})^2 - q(u_j^{(k)})^2}{q(u_i^{(k)})^2 - q^{-1}(u_j^{(k)})^2}$$

$$\times \prod_{i=1}^{M_{k+1}} \frac{(u_i^{(k+1)})^2 - (u_j^{(k)})^2}{q^{-1}(u_i^{(k+1)})^2 - q(u_j^{(k)})^2} \quad j = 1, \dots, M_k, \quad k = 5, 6$$

$$\frac{\Lambda_8(u_j^{(7)})}{\Lambda_7(u_j^{(7)})} = - \prod_{i=1}^{M_6} \frac{q^{-1}(u_j^{(7)})^2 - q(u_i^{(6)})^2}{(u_j^{(7)})^2 - (u_i^{(6)})^2} \prod_{i \neq j}^{M_7} \frac{q^{-1}(u_i^{(7)})^2 - q(u_j^{(6)})^2}{q(u_i^{(7)})^2 - q^{-1}(u_j^{(6)})^2} \quad j = 1, \dots, M_7,$$

Acknowledgments

Sections 2.4.3 and 2.4.14 follow from useful comments of the referee : we thank him for his remarks.

We also thank Paul Sorba for quoting references [105] and [106].

2.4.16 Finite dimensional algebras

$gl(\mathbf{n})$ and $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ algebras

The Lie algebra $gl(\mathbf{n})$ is a vector space over \mathbb{C} spanned by the generators $\{\mathcal{E}_{ij}|i, j = 1, 2, \dots, \mathbf{n}\}$. The bilinear commutator associated to $gl(\mathbf{n})$ is defined by :

$$[\mathcal{E}_{ij}, \mathcal{E}_{kl}] = \delta_{kj} \mathcal{E}_{il} - \delta_{il} \mathcal{E}_{kj} . \quad (2.4.178)$$

The Lie superalgebra $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ is a \mathbb{Z}_2 -graded vector space over \mathbb{C} spanned by the generators $\{\mathcal{E}_{ij}|i, j = 1, 2, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n}\}$. The bilinear graded commutator associated to $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ is defined by :

$$[\mathcal{E}_{ij}, \mathcal{E}_{kl}] = \delta_{kj} \mathcal{E}_{il} - (-1)^{([i]+[j])([k]+[l])} \delta_{il} \mathcal{E}_{kj} . \quad (2.4.179)$$

It is graded anti-symmetric :

$$[\mathcal{E}_{ij}, \mathcal{E}_{kl}] = -(-1)^{([i]+[j])([k]+[l])} [\mathcal{E}_{kl}, \mathcal{E}_{ij}] \quad (2.4.180)$$

The highest weight representations of these Lie (super)algebras are characterized by the highest weight $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathbf{m}+\mathbf{n}})$ (with $\mathbf{m} = 0$ for the non-graded case). Finite dimensional irreducible representations are obtained when the following relations are obeyed :

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1 \quad \text{for } gl(\mathbf{n}) \quad (2.4.181)$$

$$\begin{cases} \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, 2, \dots, \mathbf{m} - 1 \\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+, \quad i = \mathbf{m} + 1, \dots, \mathbf{n} + \mathbf{m} - 1 \end{cases} \quad \text{for } gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}) \quad (2.4.182)$$

$\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$ and $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$ algebra

We suppose that q is not a root of unity.

$\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$ is an associative algebra over \mathbb{C} generated by $q^{\pm H_j}$, e_i and f_i ($1 \leq j \leq \mathbf{n}$, $1 \leq i \leq \mathbf{n} - 1$) with the relations :

$$q^{H_i} q^{-H_i} = q^{-H_i} q^{H_i} = 1 \quad (2.4.183)$$

$$q^{H_i} e_j q^{-H_i} = q^{\delta_{ij} - \delta_{i,j+1}} e_j \quad (2.4.184)$$

$$q^{H_i} f_j q^{-H_i} = q^{-\delta_{ij} + \delta_{i,j+1}} f_j \quad (2.4.185)$$

$$e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{q^{H_i - H_{i+1}} - q^{-H_i + H_{i+1}}}{q - q^{-1}} \quad (2.4.186)$$

$$e_i e_j = e_j e_i, \quad f_i f_j = f_j f_i \quad \text{for } |i - j| \geq 2 \quad (2.4.187)$$

$$e_i^2 e_{i\pm 1} - (q - q^{-1}) e_i e_{i\pm 1} e_i + e_{i\pm 1} e_i^2 = 0 \quad \text{for } 1 \leq i \quad \text{and} \quad i \pm 1 \leq \mathbf{n} \quad (2.4.188)$$

$$f_i^2 f_{i\pm 1} - (q - q^{-1}) f_i f_{i\pm 1} f_i + f_{i\pm 1} f_i^2 = 0 \quad \text{for } 1 \leq i \quad \text{and} \quad i \pm 1 \leq \mathbf{n} \quad (2.4.189)$$

The highest weight finite-dimensional irreducible representations of $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{n}))$, are characterized by a $gl(\mathbf{n})$ highest weight $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ as given in (2.4.181) and a set of parameters $\eta_j = \pm 1, \pm i$ ($j = 1, \dots, \mathbf{n}$), see [69] for more details. Explicitly, the weights of the $\mathcal{U}_q(\mathbf{n})$ algebra read :

$$(\eta_1 q^{\lambda_1}, \eta_2 q^{\lambda_2}, \dots, \eta_n q^{\lambda_n}) \quad \text{with} \quad \lambda_j - \lambda_{j+1} \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{and} \quad \eta_j = \pm 1, \pm i \quad (2.4.190)$$

$\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$ is an associative algebra over \mathbb{C} generated by $q^{\pm H_j}$, e_i and f_i ($1 \leq j \leq \mathbf{m} + \mathbf{n}$, $1 \leq i \leq \mathbf{m} + \mathbf{n} - 1$) with the defining relations :

$$q^{H_i} q^{-H_i} = q^{-H_i} q^{H_i} = 1 \quad (2.4.191)$$

$$q^{H_i} e_j q^{-H_i} = q^{(-1)^{[i]}(\delta_{ij} - \delta_{ij+1})} e_j \quad (2.4.192)$$

$$q^{H_i} f_j q^{-H_i} = q^{-(-1)^{[i]}(\delta_{ij} - \delta_{ij+1})} f_j \quad (2.4.193)$$

$$e_i f_j - (-1)^{([i]+[i+1])([j]+[j+1])} f_j e_i = \delta_{ij} \frac{q^{H_i - H_{i+1}} - q^{-H_i + H_{i+1}}}{q^{(-1)^{[i]}} - q^{-(-1)^{[i]}}} \quad (2.4.194)$$

$$e_i e_j = (-1)^{([i]+[i+1])([j]+[j+1])} e_j e_i \quad , \quad f_i f_j = (-1)^{([i]+[i+1])([j]+[j+1])} f_j f_i \quad (2.4.195)$$

$$e_i^2 e_{i\pm 1} - (q - q^{-1}) e_i e_{i\pm 1} e_i + e_{i\pm 1} e_i^2 = 0 \quad \text{with} \quad i \neq \mathbf{m} \quad (2.4.196)$$

$$f_i^2 f_{i\pm 1} - (q - q^{-1}) f_i f_{i\pm 1} f_i + f_{i\pm 1} f_i^2 = 0 \quad \text{with} \quad i \neq \mathbf{m} \quad (2.4.197)$$

The following identification gives the isomorphism between the RTT presentation and the Serre-Chevalley one [49].

$$l_{ii}^+ = (-1)^{[i]} q^{H_i} \quad ; \quad l_{i,i+1}^+ = (-1)^{[i+1]} (q - q^{-1}) q^{H_i} f_i \quad ; \quad l_{i,i-1}^+ = 0 \quad (2.4.198)$$

$$l_{ii}^- = (-1)^{[i]} q^{-H_i} \quad ; \quad l_{i,i-1}^- = (-1)^{[i-1]} (q - q^{-1}) e_i q^{-H_i} \quad ; \quad l_{i,i+1}^- = 0 \quad (2.4.199)$$

Highest weight finite-dimensional irreducible representations of $\mathcal{U}_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$ have been studied in [98]. They are characterized by a $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ highest weight $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathbf{m}+\mathbf{n}})$ as given in (2.4.182) and a set of parameters η_a :

$$((-1)^{[1]} \eta_1 q^{\lambda_1}, \dots, (-1)^{[\mathbf{m}+\mathbf{n}]} \eta_{\mathbf{m}+\mathbf{n}} q^{\lambda_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}}) \quad \text{with} \quad \begin{cases} \lambda_j - \lambda_{j+1} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \neq \mathbf{m} \\ \eta_j = \pm 1, \quad j = 1, \dots, \mathbf{n} + \mathbf{m} \end{cases} \quad (2.4.200)$$

Chapitre 3

ABA pour les chaînes de spins avec bords

Les premiers résultats sur les chaînes de spins avec bords ont été obtenus avec l'ansatz de Bethe coordonnées [18, 108, 109, 110] pour des conditions diagonales aux bords. Le choix des conditions diagonales permet d'identifier le pseudo-vide de la chaîne avec bords avec celui de la chaîne périodique. Il est alors possible d'utiliser l'ansatz de Bethe pour trouver les fonctions d'ondes et les valeurs propres.

Sklyanin [45], en utilisant les travaux de Cherednik [46] sur la théorie de diffusion factorisable sur la demi-ligne, généralise la structure des groupes quantiques pour les chaînes de spins avec bords. Il introduit une nouvelle structure algébrique, l'algèbre de réflexion, permettant de générer des quantités conservées. Utilisant cette nouvelle algèbre, il calcule, par la technique de l'ABA, le problème spectral de la chaîne XXZ- $sl(2)$ avec des conditions diagonales aux bords. L'algèbre de réflexion s'écrit à partir d'une matrice R , solution de l'équation de YB, et de la matrice $\mathcal{K}(u)$ dont les entrées sont les générateurs de l'algèbre de réflexion :

$$R_{12}(u_1, u_2)\mathcal{K}_1(u_1)\bar{R}_{21}(u_1, u_2)\mathcal{K}_2(u_2) = \mathcal{K}_2(u_2)\bar{R}_{12}(u_1, u_2)\mathcal{K}_1(u_1)R_{21}(u_1, u_2), \quad (3.0.1)$$

où les notations seront précisées dans la section suivante. La matrice $\mathcal{K}(u)$ peut être réalisée à partir du produit de la matrice de monodromie du groupe quantique associé à la matrice R et de son inverse. Sous cette forme, l'algèbre de réflexion est un coidéale de l'algèbre quantique, d'une manière plus générale cette algèbre admet une application de coaction.

Afin de pouvoir utiliser l'ABA pour les chaînes de spins avec bords, il est nécessaire d'étudier la théorie des représentations de l'algèbre de réflexion. Une classification complète des représentations de dimension finie de l'algèbre de réflexion est encore un problème ouvert. Cependant, en considérant la réalisation à partir du produit de la matrice de monodromie du groupe quantique associé à la matrice R et de son inverse, il est possible de construire les représentations de plus haut poids de l'algèbre de réflexion en utilisant celles de l'algèbre quantique [111]. Cette construction est possible seulement pour des conditions diagonales aux bords. Il s'ensuit que toutes les chaînes avec bords traitées par l'AB admettent une transformation se ramenant au cas diagonal, ou encore qu'elles sont des chaînes avec des conditions diagonales cachées aux bords. Nous discuterons le problème d'une chaîne n'admettant pas une telle transformation dans le dernier chapitre de cette thèse.

Dans ce chapitre, nous introduirons l'algèbre de réflexion et présenterons certaines de ses propriétés. Nous ferons un état des lieux des solutions scalaires de cette algèbre nécessaires pour la construction des chaînes de spins et discuterons des contraintes sur le choix de ces solutions pour appliquer l'ABA.

Ce chapitre s'achèvera par l'article, réalisé pendant cette thèse en collaboration avec E. Ragoucy, sur l'application de l'ABA pour les chaînes avec bords reliées aux matrices R rationnelles et trigonométriques associées aux groupes quantiques des algèbres $gl(\mathbf{n})$ et $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$. Cet article présente, pour la première fois, l'ABA pour une chaîne de spins "universelle" (i.e. avec un choix arbitraire des représentations de plus haut poids) et met en évidence les contraintes sur les bords pour que cette technique puisse être rigoureusement appliquée. Il présente aussi une formulation par trace des vecteurs de Bethe, étendant la formulation de Tarasov et Varchenko pour le cas périodique à celui avec bords.

3.1 Algèbre de réflexion et matrice de transfert

L'algèbre de réflexion $\mathfrak{D}(R)$ est définie par l'introduction de deux algèbres duales $\mathfrak{D}^+(R)$ et $\mathfrak{D}^-(R)$ engendrées par $\{\mathcal{K}^+(u), \mathcal{K}^-(u)\}$ respectivement. Pour une matrice R , solution de l'équation de YB (comme pour le cas périodique nous nous limiterons aux solutions rationnel et trigonométrique), inversible et satisfaisant la relation de croisement (3.1.2), les $\{\mathcal{K}^+(u), \mathcal{K}^-(u)\}$ satisfont [112] :

$$\begin{aligned} R_{12}(u_1, u_2) \mathcal{K}_1^-(u_1) \bar{R}_{21}(u_1, u_2) \mathcal{K}_2^-(u_2) &= \mathcal{K}_2^-(u_2) \bar{R}_{12}(u_1, u_2) \mathcal{K}_1^-(u_1) R_{21}(u_1, u_2), \\ R_{12}(u_2, u_1) (\mathcal{K}_1^+(u_1))^{t_1} M_1^{-1} \bar{R}_{21}(\iota(\tilde{u}_1), \iota(\tilde{u}_2)) M_1 (\mathcal{K}_2^+(u_2))^{t_2} &= \\ (K_2^+(u_2))^{t_2} M_1 \bar{R}_{12}(\iota(\tilde{u}_1), \iota(\tilde{u}_2)) M_1^{-1} (\mathcal{K}_1^+(u_1))^{t_1} R_{21}(u_2, u_1). \\ \bar{R}_{12}(u_1, u_2) &= R_{21}(u_1, \iota(u_2)) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$\iota(u)$ est l'inverse du paramètre u (cette notation permet de considérer $(u_1, u_2) = (u_1 - u_2)$ où $(u_1, u_2) = (\frac{u_1}{u_2})$, et où l'inverse doit être comprise respectivement au sens additif et multiplicatif), \tilde{u} un shift tel que :

$$R_{12}^{t_1}(u, v) M_1 \bar{R}_{12}^{t_2}(\iota(\tilde{v}), \iota(\tilde{u})) M_1^{-1} = \bar{\zeta}(u, v) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (3.1.2)$$

et M une matrice diagonale scalaire dépendant du choix de R . Ces deux algèbres sont isomorphes :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathfrak{D}^-(R) &\rightarrow \mathfrak{D}^+(R) \\ \mathcal{I}(\mathcal{K}^-(u)) &= M(\mathcal{K}^+(\iota(\tilde{u})))^{t_1} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

De cette formulation, il est possible de construire une famille de matrices de transfert faisant partie d'une sous-algèbre abélienne de l'algèbre de réflexion :

$$d(u) = \text{tr}(\mathcal{K}^+(u) \mathcal{K}^-(u)), \quad [d(u), d(v)] = 0. \quad (3.1.4)$$

Cette structure algébrique permet donc, à l'instar des groupes quantiques, de construire des quantités conservées.

L'isomorphisme entre $\mathfrak{D}^-(R)$ et $\mathfrak{D}^+(R)$ nous permet de considérer seulement les propriétés de $\mathfrak{D}^-(R)$. Ces dernières se transposent pour $\mathfrak{D}^+(R)$ par action de \mathcal{I} . En utilisant les matrices de monodromie du groupe quantique $\mathcal{A}(R)$, il est possible de montrer que :

$$\bar{\mathcal{K}}^-(u) = T(u)\mathcal{K}^-(u)T^{-1}(\iota(u)) \quad (3.1.5)$$

satisfait les relations de l'algèbre de réflexion. Les $T(u)$ correspondent aux générateurs de l'algèbre "RTT" liée à la matrice R choisie. D'un point de vue algébrique, ces relations montrent que les $\mathcal{K}(u)$ sont un "RTT"-comodule à droite avec une application de coaction δ tel que $\delta(\mathcal{K}(u)) = T(u)\mathcal{K}(u)T^{-1}(\iota(u))$. Pour le cas où le groupe quantique associé est $\mathcal{U}_q(\widehat{gl(\mathfrak{n})})$, nous avons vu au chapitre précédent que la formulation "RTT" fait intervenir deux matrices de monodromie $L^\pm(u)$. Les relations entre ces matrices font intervenir la charge centrale c . L'algèbre de réflexion introduite précédemment doit être comprise comme étant de charge centrale nulle. L'écriture de l'algèbre de réflexion pour une charge centrale non nulle reste un problème ouvert. Pour $\mathcal{U}_q(\widehat{gl(\mathfrak{n})})$, nous choisirons $T(u) = L^+(u)$.

Pour la construction des chaînes de spins, les opérateurs $\mathcal{K}^\pm(u)$ sont choisis comme les solutions scalaires $K^\pm(u)$ de l'algèbre de réflexion et la matrice de transfert est définie par :

$$d(u) = \text{tr}(K^+(u)T(u)K^-(u)T^{-1}(\iota(u))). \quad (3.1.6)$$

Dans ce cas, l'application δ est identifiée avec le coproduit de $\mathcal{A}(R)$. Le problème à résoudre pour continuer l'étude des chaînes de spins avec bords est de déterminer ces solutions scalaires.

3.2 Solutions scalaires de $K(u)$

Pour la solution rationnelle des équations de Yang-Baxter, l'ensemble des solutions a pu être classifié [113, 114] :

Théorème 3.2.1. *Toutes les solutions inversibles de l'équation de réflexion sont de la forme $K(u) = U(u\mathbb{E} - c\mathbb{I})U^{-1}$ où :*

(i) \mathbb{E} est diagonal et $\mathbb{E}^2 = \mathbb{I}$ (solution diagonale : $\mathbb{E} = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_a, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-a})$),

(ii) \mathbb{E} est strictement triangulaire et $\mathbb{E}^2 = 0$ (solution non diagonale).

U est un élément du groupe $GL(\mathfrak{n})$ et c un paramètre libre. La classification est faite à la multiplication par une fonction de u près.

Pour la solution trigonométrique, seulement quelques solutions particulières sont connues. La méthode pour classier les matrices $K(u)$ du cas rationnel utilisant l'invariance par conjugaison d'un élément du groupe $GL(\mathfrak{n})$ ne peut pas être utilisée. Les solutions sont donc trouvées au cas par cas. Pour $\mathfrak{n} = 2$, les solutions obtenues par force brute sont de la forme [115, 116] :

$$K(u, a, b, c) = \begin{pmatrix} (u+a) & b(u^2 - u^{-2}) \\ c(u^2 - u^{-2}) & (u^{-1} + a) \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

Cette solution dépend de quatre paramètres libres. Les solutions diagonales pour \mathfrak{n} arbitraire ont été obtenues par de Vega et González Ruiz [117] :

$$K^-(u, a) = \text{diag}(\underbrace{u+a, \dots, u+a}_m, \underbrace{u^{-1}+a, \dots, u^{-1}+a}_{n-m}) \quad \text{pour } \mathcal{U}_q(\widehat{gl(\mathfrak{n})}) \quad . \quad (3.2.2)$$

Pour les cas non diagonaux, des solutions sont connues à partir de différentes méthodes. La première est la résolution par "force brute" de l'équation de réflexion, . C'est le cas de [118], où les solutions des matrices $K^-(u)$ régulières (i.e. $K^-(0) = \mathbb{I}$) sont obtenues. Les matrices $K^-(u)$ sont classifiées en deux familles de solutions. La première famille dépend de trois paramètres libres et la seconde, fonction de la parité de n , dépend de $2 + [n/2]$ paramètres libres. Le nombre de paramètres libres est important car il correspond, dans certains cas, au couplage de la chaîne avec le bord : plus ce nombre est élevé plus le couplage considéré peut être complexe.

Une seconde approche consiste à générer des matrices non diagonales à partir de matrices diagonales [119, 120]. Cette méthode utilise la correspondance *face-vertex* entre deux familles de matrices R trigonométriques. Les solutions non diagonales dans la formulation *vertex* sont obtenues à partir des solutions diagonales de la formulation *face* en utilisant la correspondance *face-vertex* ou matrice d'entrelacement. Les matrices $K(u)$ dépendent, dans ce cas, de n paramètres libres. Cette approche est aussi utilisée pour étendre l'ABA pour des matrices $K(u)$ non diagonales.

Une troisième méthode possible repose sur la propriété d'entrelacement de la matrice K pour la représentation des générateurs de l'algèbre de réflexion [121]. Ce cas sera discuté en détail dans le dernier chapitre de cette thèse. Nous ne mentionnerons ici que les matrices $K(u)$ non diagonales obtenues dépendant de n paramètres. Enfin, nous mentionnerons l'approche basée sur l'algèbre de Hecke affine [122].

Il est à noter que ces solutions sont associées aux matrices \mathcal{R} universelles dans la représentation fondamentale. Les matrices $K(u)$, pour les autres représentations de dimensions finies, peuvent être construites par la méthode de fusion introduite par Mezincescu et Nepomechie [123]

3.3 Théorie des représentations

Afin de pouvoir appliquer l'ABA, il est nécessaire de connaître les représentations de plus haut poids associées à l'algèbre de réflexion. Lorsque les matrices $K(u)$ sont de la forme la plus générale (par exemple du type (3.2.1) sans contrainte entre les paramètres), nous ne savons pas construire une telle représentation pour l'algèbre de réflexion dans la réalisation (3.1.5). Les seules représentations connues, dans ce cas, sont reliées aux algèbres tridiagonales que nous aborderons dans le dernier chapitre de cette thèse. Cependant, pour des solutions diagonales de l'équation de réflexion, nous pouvons construire des représentations de plus haut poids pour les $\tilde{K}^-(u)$ à partir de celle de l'algèbre $\mathcal{A}(R)$ correspondante [111, 51] :

Théorème 3.3.1. *Si Ω est un vecteur de plus haut poids de $\mathcal{A}(R)$, avec comme valeurs propres $(\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u))$, alors pour $K^-(u) = \text{diag}(\kappa_1(u), \dots, \kappa_n(u))$, Ω est aussi un vecteur de plus haut poids de $\mathfrak{D}(R)$,*

$$d_{ij}(u) \Omega = 0 \quad \text{pour } i > j, \quad \text{et} \quad d_{ii}(u) \Omega = \Lambda_i(u, \{\lambda_i(u)\}, \{\kappa_i(u)\}) \Omega, \quad (3.3.1)$$

où les $d_{ij}(u)$ sont les entrées de la matrice $\bar{K}(u)$.

L'existence d'une telle représentation permet l'utilisation de l'ansatz de Bethe algébrique. Nous appellerons chaînes de spins "universelles" toutes les matrices de transfert de la forme (3.1.5) avec $K^+(u)$ et $K^-(u)$ diagonales et formant une paire NABA (i.e pour $K^+(u)$ il faut ajouter la contrainte $a = 0, 1$ dans (3.2.2, 3.2.1)).

Le choix de $K^+(u)$ diagonale est nécessaire pour que la matrice de transfert soit la somme des éléments diagonaux de $\tilde{K}^-(u)$. Dans ce cas, il est alors possible de construire les vecteurs de Bethe à partir des éléments triangulaires supérieurs de $\tilde{K}^-(u)$ comme pour le cas périodique. La contrainte sur $K^+(u)$ permet de factoriser les termes non voulus et d'obtenir les équations de Bethe d'une façon purement algébrique.

3.4 Limites de l'ansatz de Bethe algébrique

Nous avons insisté sur le fait qu'il n'est possible de réaliser l'ABA seulement lorsque les matrices $K^\pm(u)$ sont diagonales. Plus précisément, il est possible de réaliser l'ABA si les matrices $K^\pm(u)$ peuvent être diagonalisées simultanément. Pour l'algèbre $\mathcal{A}(R)$ avec R du type rationnel, et des matrices $K(u)$ du type (i) (3.2.1), il est possible de considérer le cas où les deux matrices $K(u)$ sont diagonalisables dans la même base [124, 125]. Il existe donc une matrice de passage U tel que :

$$K^+(u) = UD^+(u, c_+)U^{-1}, \quad K^-(u) = UD^-(u, c_-)U^{-1}. \quad (3.4.1)$$

En utilisant l'isomorphisme (3.1.3), il s'ensuit que $U^{-1} = U^t$. Les matrices U sont donc des éléments du groupe $O(n)$ des matrices carrées $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ orthogonales. La matrice de transfert est alors de la forme :

$$d(u) = \text{tr}(D^+(u)(U^{-1}T(u)U)D^-(u)(U^{-1}T^{-1}(-u)U)) \quad (3.4.2)$$

Dans le cas de la représentation fondamentale $T_1(u, \{v\}, L) = R_{1a_1}(u-v_1) \dots R_{1a_L}(u-v_L)$, et en utilisant la propriété d'invariance par rapport au groupe $GL(\mathbf{n})$ de la matrice R rationnelle :

$$[U_1U_2, R_{12}(u)] = 0 \quad (3.4.3)$$

Il est possible de réécrire $U_1T_1(u, \{v\}, L)U_1^{-1}$ sous la forme $(\prod_{i=1}^L U_{a_i})T_1(u, \{v\}, L)(\prod_{i=1}^L U_{a_i}^{-1})$. De plus, comme $R^{-1}(u) = R(-u)$, il suit $U_1^{-1}T_1^{-1}(-u)U_1 = (\prod_{i=1}^L U_{a_i})T_1(u, \{v\}, L)(\prod_{i=1}^L U_{a_i}^{-1})$. Finalement, la matrice de transfert s'écrit :

$$d(u) = \left(\prod_{i=1}^L U_{a_i}\right) \text{tr}(D^+(u)T(u)D^-(u)T^{-1}(-u)) \left(\prod_{i=1}^L U_{a_i}^{-1}\right) \quad (3.4.4)$$

Nous pouvons donc, dans le cas fondamental, étendre la famille des matrices de transfert pouvant être diagonalisées par l'ABA. Cette construction doit pouvoir s'étendre aux cas non fondamentaux. Pour une chaîne périodique twistée, ce problème est considéré dans [125] et pour la chaîne XXX-sl(2) spin-s dans [126]. Du point de vue des paramètres des matrices $K^\pm(u)$, cette procédure impose que les paramètres non diagonaux des deux matrices de bord soient liés par une équation. Le même type de résultat a été obtenu pour la chaîne XXX-sl(2) spin-1/2 en utilisant l'ADF [127].

Pour le cas R trigonométrique, ce type de transformation fait intervenir la relation *face-vertex* dont nous avons parlé pour la construction de matrice $K(u)$ non diagonale à partir des matrices diagonales [119, 120]. Les cas traités par cette méthode correspondent au choix d'une représentation fondamentale pour $T(u)$. Dans le formalisme *face*, la matrice de monodromie est

fonction, en plus du paramètre spectral, d'un vecteur défini dans \mathbb{C}^n , avec n la dimension de l'espace auxiliaire. Ce nouvel espace vectoriel est lié à l'équation de YB dynamique décrivant les poids des modèles de type *face* tels les modèles SOS et RSOS. La construction du pseudo-vidé dans le formalisme *face* impose, comme pour le cas rationnel, des contraintes entre les paramètres des matrices $K^\pm(u)$. Pour le cas XXZ-sl(2), il a été montré que la complétude de la solution fait intervenir deux systèmes d'équations de Bethe [128] ainsi que deux familles de vecteurs de Bethe [129]. Ces résultats ont aussi été obtenus par la méthode de l'ABan pour le même type de contraintes entre les bords [130].

Pour le cas de matrices $K^\pm(u)$ arbitraires, très peu de résultats sont connus, mais il semble qu'il soit impossible d'utiliser l'ABA. Lorsque q est racine de l'unité, les valeurs propres peuvent être obtenues par l'ABan pour la XXZ-sl(2) [130]. Pour q non racine de l'unité, il existe deux solutions [131, 132] ne faisant pas intervenir l'ansatz de Bethe. La solution proposée par Galleas fait intervenir des propriétés fonctionnelles. Pour la solution de Baseilhac et Koizumi, nous renvoyons le lecteur au dernier chapitre de cette thèse.

3.5 Second article

Dans cet article réalisé en collaboration avec E. Ragoucy, nous présentons d'une façon unifiée et détaillée l'ansatz de Bethe emboîté pour les chaînes de spins ouvertes basées sur les (super)algèbres $\mathcal{Y}(gl(n))$, $\mathcal{Y}(gl(m|n))$, $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(n))$ ou $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(m|n))$, avec des représentations arbitraires (i.e. 'spins') pour chaque site de la chaîne et des matrices diagonales de bords ($K^+(u)$, $K^-(u)$). L'ansatz de Bethe emboîté peut être réalisé pour une matrice diagonale $K^-(u)$ générale, mais avec un choix particulier de $K^+(u)$.

Cette construction étend et unifie les résultats obtenus préalablement pour les chaînes de spins ouvertes basées sur la représentation fondamentale et pour certaines "super" chaînes de spins. Nous donnons les équations de Bethe et la forme des vecteurs de Bethe. Les vecteurs de Bethe sont aussi exprimés par une formule de trace.

Cet article a été publié dans "Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical" **42** No 20 (22 May 2009) page 205203.

Nested Bethe ansatz for ‘all’ open spin chains with diagonal boundary conditions

S. Belliard and E. Ragoucy

Laboratoire de Physique Théorique LAPTH

UMR 5108 du CNRS, associée à l’Université de Savoie

BP 110, F-74941 Annecy-le-Vieux Cedex, France.

We present in an unified and detailed way the nested Bethe ansatz for open spin chains based on $\mathcal{Y}(gl(\mathbf{n}))$, $\mathcal{Y}(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$, $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{n}))$ or $\widehat{\mathcal{U}}_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$ (super)algebras, with arbitrary representations (i.e. ‘spins’) on each site of the chain and diagonal boundary matrices $(K^+(u), K^-(u))$. The nested Bethe ansatz applies for a general $K^-(u)$, but a particular form of the $K^+(u)$ matrix. The construction extends and unifies the results already obtained for open spin chains based on fundamental representation and for some particular super-spin chains. We give the eigenvalues, Bethe equations and the explicit form of the Bethe vectors for the corresponding models. The Bethe vectors are also expressed using a trace formula.

LAPTH-1309/09

arXiv :0902.0321 [math-ph]

February 2009

3.6 Introduction

The systematic studies of the open spins chains using R matrices formalism start with the seminal papers of Cherednik [46] and Sklyanin [45], who generalized to these models the QISM approach developped by the Leningrad school. They introduced the reflection algebra as the fundamental ingredient to construct the Abelian Bethe subalgebra and ensure integrability of the model. This algebra is a subalgebra of the FRT algebra introduced by Leningrad group for the periodic spin chains (for a review, see e.g. [2] and references therein). The boundary conditions are encoded in two matrices, $K^-(u)$ solution of the reflection equation, see equation (3.8.8) below, and $K^+(u)$ solution of the dual equation, see equation (3.8.14). With these matrices and the standard closed spin chain monodromy matrix, one can construct a transfer matrix that belongs to the Bethe subalgebra. The existence of this subalgebra lead to the integrability of the model when the expansion of the transfer matrix as a series provides a sufficient number of operators in involution. In the following we consider that this number is sufficient.

After proving integrability of the model, the next step is to find the eigenvalues and eigenvectors of this Bethe subalgebra. It depends on the choice of the boundary matrices. Focusing on diagonalizable boundary matrices, two main cases can be distinguished : $K^+(u)$ and $K^-(v)$ are diagonalizable in the same basis ; or not.

Very few is known in the latter case, apart from two recent approaches developped for XXZ spin chain and that does not rely on (nested) algebraic Bethe ansatz [37, 36, 71] : in

[133], the reflection equation is replaced by a deformed Onsager algebra (which may be another presentation of the reflection algebra); and in [130], eigenvalues are computed using generalized TQ relations when $K^-(u)$ and $K^+(u)$ obey some relations, or when the deformation parameter is root of unity.

The first case can be divided into two sub-families, depending whether (i) the diagonalization matrix is a constant or (ii) depends on the spectral parameter. Again, in the case (ii), only some results are known from the gauge transformation construction of [120, 124, 119], that allows to relate non-diagonal solutions to diagonal ones via a Face-Vertex correspondence. The case (i) is the one studied by analytical Bethe ansatz [47] and corresponds to diagonal matrices

$$K^-(u) = \text{diag}(\underbrace{k^-(u), \dots, k^-(u)}_{a_-}, \underbrace{\bar{k}^-(u), \dots, \bar{k}^-(u)}_{m+n-a_-}), \quad (3.6.1)$$

$$K^+(u) = \text{diag}(\underbrace{k^+(u), \dots, k^+(u)}_{a_+}, \underbrace{\bar{k}^+(u), \dots, \bar{k}^+(u)}_{m+n-a_+}). \quad (3.6.2)$$

Indeed, using this ansatz, eigenvalues of the transfer matrix can be computed for all (open or closed) chains based on $gl(\mathbf{n})$ and $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ (super)algebras and their deformation, and with arbitrary representations on each sites [50, 51, 52]. It is in general believed that a Nested (algebraic) Bethe Ansatz (NBA) can provide the eigenvectors of the corresponding models. This was shown in a unified way in [134] for closed spin chains.

We present here the open spin chains case. We will show that the standard NBA approach does not work in the general case. Keeping a general diagonal solution for $K^-(u)$, one needs to take $a_+ = 0$ or $a_+ = 1$ to perform a complete nested algebraic Bethe ansatz. In this case, the couple $(K^-(u), K^+(u))$ will be called a **NABA couple**. When one studies an open spin chain possessing a couple of diagonal matrices $(K^-(u), K^+(u))$ that is not of type NABA, one can start the first step of NBA approach, but then needs to switch (and end) the calculation with an analytical Bethe ansatz, as it has been done in e.g. [117, 124, 119].

In the present paper, we focus on NABA couples. Performing NBA, we compute the Bethe ansatz equations, the eigenvalues and the eigenvectors of the corresponding transfer matrix and show where the constraint $a_+ = 0$ or $a_+ = 1$ is needed in the calculation. Our presentation considers **universal transfer matrices** in the sense that the calculation applies to transfer matrices based on $gl(\mathbf{n})$ and $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ algebras and their deformation, with any finite dimensional irreducible representations of the monodromy matrix. In particular, it encompasses the previous results obtained for fundamental representations [117, 124, 135].

In addition to the derivation of the Bethe ansatz equations and transfer matrix spectrum, our main result is the explicit construction of the Bethe vectors. This is reflected in e.g. the trace formula (see theorem 3.12.1 at the end of the paper).

The plan of the paper is as follows. In section 3.7, we introduce the different notations and R -matrices we use in the paper. Then, in section 3.8, we present, using the FRT [49] formalism, the algebras concerned with our approach. They are generalizations of loop algebras (quantum algebras or Yangians, and their graded versions) and noted $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$. They contain as subalgebras the reflection algebras, noted $\mathfrak{D}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$. We also construct mappings

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}} \rightarrow \mathfrak{D}_{\mathbf{m}-1|\mathbf{n}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{D}_{1|1} \text{ or } \mathfrak{D}_2$$

that are needed for the nesting. In section 3.9, we present the finite dimensional irreducible representations of $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ and we compute the form of $T^{-1}(u)$. We also construct the representa-

tions of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ from the $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ ones. In section 3.10, as a warm up, we recall the algebraic Bethe ansatz, which deals with spin chains based on $gl(2)$, $gl(1|1)$ algebras and their quantum deformations. Then, in section 3.11, we perform the nested Bethe ansatz in a very detailed and pedestrian way and up to the end. Finally, in section 3.12, we study the Bethe vectors that have been constructed in the previous section, showing connection with a **trace formula**. As a conclusion, we discuss our results and present some possible applications or extensions of our work.

3.7 Notations

3.7.1 Graded auxiliary spaces

We use the so-called auxiliary space framework. In this formalism, one deals with multiple tensor product of vectorial spaces $\mathcal{V} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}$, and operators (defining an algebra \mathcal{A}) therein. For any matrix valued operator, $A := \sum_{ij} E_{ij} \otimes a_{ij} \in \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{A}$, we set

$$A_k := \sum_{ij} \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes E_{ij} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(m-k)} \otimes a_{ij} \in \text{End}(\mathcal{V}^{\otimes m}) \otimes \mathcal{A}, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (3.7.1)$$

where E_{ij} are elementary matrices, with 1 at position (i, j) and 0 elsewhere. The notation is valid for complex matrices, taking $\mathcal{A} := \mathbb{C}$ and using the isomorphism $\text{End}(\mathcal{V}) \otimes \mathbb{C} \sim \text{End}(\mathcal{V})$.

We will work on \mathbb{Z}_2 -graded spaces $\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$. The elementary $\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ column vectors e_i (with 1 at position i and 0 elsewhere) and elementary $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}})$ matrices E_{ij} have grade :

$$[e_i] = [i] \quad \text{and} \quad [E_{ij}] = [i] + [j]. \quad (3.7.2)$$

This grading is also extended to the superalgebras we deal with, see section 3.8.1 below. The tensor product is graded accordingly :

$$(a_{ij} \otimes a_{kl})(a_{pq} \otimes a_{rs}) = (-1)^{([k]+[l])([p]+[q])} (a_{ij}a_{pq} \otimes a_{kl}a_{rs}). \quad (3.7.3)$$

The transposition $(.)^t$ and trace $\text{str}(\cdot)$ operators are also graded :

$$A^t = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (-1)^{[j]+[j][i]} E_{ji} \otimes a_{ij}, \quad \text{str} A = \sum_{i=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (-1)^{[i]} a_{ii} \quad \text{for} \quad A = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{ij} \otimes a_{ij}. \quad (3.7.4)$$

To simplify the presentation we work with the *distinguished* \mathbb{Z}_2 -grade defined by :

$$[i] = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq \mathfrak{m}, \\ 1, & \mathfrak{m} + 1 \leq i \leq \mathfrak{m} + \mathfrak{n}. \end{cases} \quad (3.7.5)$$

Simplification in the expressions follows from the rule $[i][j] = [i]$ when $i \leq j$, which is valid only for the distinguished grade. The non graded case is recovered setting $\mathfrak{n} = 0$ and $[k] = 0$.

3.7.2 Spectral parameters transformations

For spectral parameter u we use the following notations :

$$\begin{aligned} \iota(u) &= \begin{cases} -u & \text{for } \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \\ \frac{1}{u} & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \end{cases} ; \quad \tilde{u} = \begin{cases} u - \frac{(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\hbar}{2} & \text{for } \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \\ u q^{\frac{(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})}{2}} & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \end{cases} ; \\ u^{(k)} &= \begin{cases} u + \frac{\hbar}{2}(-1)^{[k]} & \text{for } \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \\ u q^{-\frac{1}{2}+2[k]} & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \end{cases} ; \quad u^{(\bar{k})} = \begin{cases} u - \frac{\hbar}{2}(-1)^{[k]} & \text{for } \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \\ u q^{\frac{1}{2}-[k]} & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \end{cases} ; \\ u^{(k\dots l)} &= (\dots (u^{(k)})^{(k+1)} \dots)^{(l)} . \end{aligned}$$

3.7.3 R -matrices

In what follows, we will deal with different types of matrices $R \in \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \text{End}(\mathcal{V})$, all obeying (graded) Yang-Baxter equation (written in auxiliary space $\text{End}(\mathcal{V}) \otimes \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \text{End}(\mathcal{V})$) :

$$R_{12}(u_1, u_2) R_{13}(u_1, u_3) R_{23}(u_2, u_3) = R_{23}(u_2, u_3) R_{13}(u_1, u_3) R_{12}(u_1, u_2). \quad (3.7.6)$$

The R -matrix satisfy unitarity relation,

$$R_{12}(u, v) R_{21}(v, u) = \zeta(u, v) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (3.7.7)$$

and crossing unitarity (see (3.7.11) below for the definition of \bar{R}),

$$R_{12}^{t_1}(u, v) M_1 \bar{R}_{12}^{t_2}(\iota(\tilde{v}), \iota(\tilde{u})) M_1^{-1} = \bar{\zeta}(u, v) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (3.7.8)$$

where $\zeta(u, v)$ and $\bar{\zeta}(u, v)$ are \mathbb{C} -functions depending on the model under consideration, M is a \mathbb{C} -valued matrix defined in appendix 3.14 for each model and t_a is the transposition in the auxiliary space a . All the R -matrices used here also obey the parity relation :

$$R_{12}(u, v)^{t_1 t_2} = R_{21}(u, v). \quad (3.7.9)$$

To each R -matrix, one associates an algebra $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ using the FRT formalism. Below, we focus on infinite dimensional associative algebras based on $gl(\mathfrak{n})$ and $gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ Lie (super)algebras and their q -deformation. We note these algebras $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}} = Y(\mathfrak{n})$ or $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{n})$ and $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} = \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ or $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$. We will write also $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|0} = \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$. We will encompass all R -matrices of these algebras writing :

$$R_{12}(u, v) = \mathfrak{b}(u, v) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \mathfrak{w}_{ij}(u, v) E_{ij} \otimes E_{ji}. \quad (3.7.10)$$

All functions are defined in appendix 3.15 for each cases (one can refer to [134] for details and references). To define the reflection equation, we need another R -matrix :

$$\bar{R}_{12}(u, v) = R_{12}(u, \iota(v)) = \bar{\mathfrak{b}}(u, v) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \bar{\mathfrak{w}}_{ij}(u, v) E_{ij} \otimes E_{ji} \quad (3.7.11)$$

From (3.7.6) we can deduce the relation between these two R matrices :

$$R_{12}(u_1, u_2) \bar{R}_{13}(u_1, u_3) \bar{R}_{23}(u_2, u_3) = \bar{R}_{23}(u_2, u_3) \bar{R}_{13}(u_1, u_3) R_{12}(u_1, u_2). \quad (3.7.12)$$

We will also use ‘reduced’ R -matrices $R^{(k)}(u)$, deduced from $R(u)$ by suppressing all the terms containing indices j with $j < k$:

$$\begin{aligned} R_{12}^{(k)}(u, v) &= (\mathbb{I}^{(k)} \otimes \mathbb{I}^{(k)}) R_{12}(u, v) (\mathbb{I}^{(k)} \otimes \mathbb{I}^{(k)}) \\ &= \mathfrak{b}(u, v) \mathbb{I}^{(k)} \otimes \mathbb{I}^{(k)} + \sum_{i,j=k}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \mathfrak{w}_{ij}(u, v) E_{ij} \otimes E_{ji}, \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

$$\text{where} \quad \mathbb{I}^{(k)} = \sum_{i=k}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{ii}, \quad \forall k. \quad (3.7.14)$$

$R_{12}^{(k)}(u, v)$ corresponds to the R -matrix of¹ $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}+1-k|\mathfrak{n}}$. We will also use :

$$\begin{aligned} R_{12}^{(k,p)}(u, v) &= (\mathbb{I}^{(k)} \otimes \mathbb{I}^{(p)}) R_{12}(u, v) (\mathbb{I}^{(k)} \otimes \mathbb{I}^{(p)}) \\ &= \mathfrak{b}(u, v) \mathbb{I}^{(k)} \otimes \mathbb{I}^{(p)} + \sum_{i,j=\max(k,p)}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \mathfrak{w}_{ij}(u, v) E_{ij} \otimes E_{ji}. \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

Note that $R_{12}^{(k,k)}(u, v) = R_{12}^{(k)}(u, v)$. We define the ‘normalized reduced’ R -matrices :

$$\mathbb{R}_{12}^{(k,p)}(u, v) = \frac{1}{\mathfrak{a}_p(u, v)} R_{12}^{(k,p)}(u, v) \quad \text{with} \quad \mathbb{R}_{12}^{(k,k)}(u, v) \mathbb{R}_{21}^{(k,k)}(v, u) = \mathbb{I}^{(k)} \otimes \mathbb{I}^{(k)}. \quad (3.7.16)$$

3.8 Algebraic structures

3.8.1 FRT formalism

The FRT (or RTT) relations [41, 42, 49] allow us to generate all the relations between the generators of the graded unital associative algebra $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$. We gather the $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ generators into a $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) \times (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$ matrix acting in an auxiliary space $\mathcal{V} = \mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ whose entries are formal series of a complex parameter u :

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{ij} \otimes t_{ij}(u) \in \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{A}[[u, u^{-1}]]. \quad (3.8.1)$$

Since the auxiliary space $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}})$ is interpreted as a representation of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$, the \mathbb{Z}_2 -grading of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ must correspond to the one defined on $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}})$ matrices (see section 3.7). Hence, the generator $t_{ij}(u)$ has grade $[i] + [j]$, so that the monodromy matrix $T(u)$ is globally even. As for matrices, the tensor product of algebras will be graded, as well as between algebras and matrices,

$$(E_{ij} \otimes t_{ij}(u)) (E_{kl} \otimes t_{kl}(v)) = (-1)^{([i]+[j])([k]+[l])} E_{ij} E_{kl} \otimes t_{ij}(u) t_{kl}(v). \quad (3.8.2)$$

¹We will write, for a generic k , $\mathfrak{m} - k|\mathfrak{n}$, keeping in mind that one should write $0|\mathfrak{n} - (k - \mathfrak{m})$ when $k > \mathfrak{m}$.

The ‘real’ generators $t_{ij}^{(n)}$ of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ appear upon expansion of $t_{ij}(u)$ in u . For the (super) Yangians $\mathcal{Y}(\mathfrak{n})$ and $\mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$, $t_{ij}(u)$ is a series in u^{-1} :

$$t_{ij}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{ij}^{(n)} u^{-n} \quad \text{with} \quad t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}. \quad (3.8.3)$$

In the quantum affine (super)algebra [44, 52] without central charge case, a complete description of the algebras requires the introduction of two matrices $L^{\pm}(u)$. However, in the context of evaluation representations it is sufficient to consider only $T(u) = L^{+}(u)$ to construct a transfer matrix. Indeed, in an evaluation representation, the choices $T(u) = L^{-}(u)$ or $T(u) = L^{+}(u) - L^{-}(u)$ lead to the same operator up to a multiplication function. Then, the RTT relations take the form :

$$R_{12}(u, v) T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T_1(u) R_{12}(u, v). \quad (3.8.4)$$

$\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ has the following antimorphisms :

$$\begin{aligned} \text{Matrix inversion} \quad inv : \quad T(u) &\rightarrow T^{-1}(u) = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{ij} \otimes t'_{ij}(u), \\ \text{Matrix transposition} \quad t : \quad T(u) &\rightarrow T^t(u) = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (E_{ij})^t \otimes t_{ij}(u), \\ \text{Spectral parameter inversion} \quad \iota : \quad T(u) &\rightarrow T(\iota(u)). \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

$\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ has a Hopf algebra structure, with coproduct

$$\Delta(T(u)) = T(u) \dot{\otimes} T(u) = \sum_{i,j,k=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (-1)^{([k]+[i])([k]+[j])} E_{ij} \otimes t_{ik}(u) \otimes t_{kj}(u). \quad (3.8.6)$$

More generally, one defines recursively for $L \geq 2$, the algebra homomorphism

$$\Delta^{(L+1)} = (\text{id}^{\otimes(L-1)} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(L)} \quad \text{with} \quad \Delta^{(2)} = \Delta \quad \text{and} \quad \Delta^{(1)} = \text{id}. \quad (3.8.7)$$

3.8.2 Reflection algebra and $K(u)$ matrices

The $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ algebra is enough to construct a transfer matrix leading to periodic spin chain models. In the context of open spin chains, one needs another algebra, the reflection algebra $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$, which turns out to be a subalgebra of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$. Indeed, physically, one can interpret the FRT relation as encoding the interaction between the spins of the chain. Hence, it is the only relation needed to describe a periodic chain. On the other hand, in the case of open chain, the interaction with the boundaries has to be taken into account. Following the seminal paper of Sklyanin [45], we construct the reflection algebra and the dual reflection equation for the boundary scalar matrices $K^{-}(u)$ and $K^{+}(u)$. We first define the matrix $K^{-}(u)$ to be the solution of the reflection equation :

$$R_{12}(u_1, u_2) K_1^{-}(u_1) \bar{R}_{21}(u_1, u_2) K_2^{-}(u_2) = K_2^{-}(u_2) \bar{R}_{12}(u_1, u_2) K_1^{-}(u_1) R_{21}(u_1, u_2). \quad (3.8.8)$$

Depending on the type of R -matrix one considers, solutions to the reflection equation have been classified : see [114] for the Yangian and super-Yangian cases ; in the other cases, partial

classifications have been obtained in e.g. [136, 117]. In all cases, diagonal solutions of the reflection equations are known. They take the form (up to normalisation),

$$K^-(u) = \begin{cases} \text{diag}(\underbrace{u - c_-, \dots, u - c_-}_a, \underbrace{-u - c_-, \dots, -u - c_-}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-a}) & \text{for } \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}), \\ \text{diag}(\underbrace{u^2 - c_-^2, \dots, u^2 - c_-^2}_a, \underbrace{u^{-2} - c_-^2, \dots, u^{-2} - c_-^2}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-a}) & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}), \end{cases} \quad (3.8.9)$$

where c_- is a free complex parameter and a is an integer such that $0 \leq a \leq \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$. From this $K^-(u)$ matrix and the monodromy matrix $T(u)$ for closed spin chains, we can construct the monodromy matrix of open spin chain :

$$D(u) = T(u) K^-(u) T^{-1}(\iota(u)) = \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{ij} \otimes d_{ij}(u), \quad (3.8.10)$$

$$d_{ij}(u) = \sum_{a=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (-1)^{([i]+[a])([a]+[j])} \kappa_a(u) t_{ia}(u) t'_{aj}(\iota(u)). \quad (3.8.11)$$

From (3.8.4) and (3.8.8), we can prove that $D(u)$ also satisfies the reflection equation :

$$R_{12}(u_1, u_2) D_1(u_1) \bar{R}_{21}(u_1, u_2) D_2(u_2) = D_2(u_2) \bar{R}_{12}(u_1, u_2) D_1(u_1) R_{21}(u_1, u_2). \quad (3.8.12)$$

This relation defines the reflection algebra $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$. The algebra $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ is a left coideal [111] of the algebra $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ with coproduct :

$$\Delta D_{[2]}(u) = T_{[1]}(u) D_{[2]}(u) T_{[1]}^{-1}(\iota(u)) \in \text{End}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} \otimes \mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} \quad (3.8.13)$$

where $[i]$ labels the two copies of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$. This expression allows to increase the number of sites for an open spin chain in the same way one does for periodic ones : one acts on the monodromy matrix with the coproduct and then represents the new copy of algebra on the new ‘site’.

We also need a dual equation to construct transfer matrices in involution :

$$\begin{aligned} R_{12}(u_2, u_1) (K_1^+(u_1))^{t_1} M_1^{-1} \bar{R}_{21}(\iota(\tilde{u}_1), \iota(\tilde{u}_2)) M_1 (K_2^+(u_2))^{t_2} = \\ (K_2^+(u_2))^{t_2} M_1 \bar{R}_{12}(\iota(\tilde{u}_1), \iota(\tilde{u}_2)) M_1^{-1} (K_1^+(u_1))^{t_1} R_{21}(u_2, u_1). \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

where M is given in appendix 3.14. From the property

$$R_{12}(u_1, u_2) M_1 M_2 = M_1 M_2 R_{12}(u_1, u_2), \quad (3.8.15)$$

one can construct solutions to the dual reflection equation using $K^-(u)$ solutions :

$$(K^+(u))^t = M K^-(\iota(\tilde{u})). \quad (3.8.16)$$

With $D(u)$ and $K^+(u)$ we construct the transfer matrix :

$$d(u) = \text{str}(K^+(u) D(u)). \quad (3.8.17)$$

The reflection equation and its dual form ensure the commutation relation $[d(u), d(v)] = 0$. Thus, $d(u)$ generates (via an expansion in u) a set of L (the number of sites) independent integrals of motion (or charges) in involution which ensure integrability of the model.

Commutation relations of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$

Projecting (3.8.12) on the $E_{ij} \otimes E_{kl}$ basis we get the commutation relations for $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$:

$$\begin{aligned}
[d_{ij}(u), d_{kl}(v)] &= -\delta_{kj} \sum_{a=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \frac{\bar{\mathfrak{w}}_{ka}(u, v)}{\bar{\mathfrak{b}}(u, v)} (-1)^{([i]+[l])([a]+[k])} d_{ia}(u) d_{al}(v) \\
&+ \delta_{il} \sum_{a=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \frac{\bar{\mathfrak{w}}_{ia}(u, v)}{\bar{\mathfrak{b}}(u, v)} (-1)^{[l]+[a][k]+[a][j]+[k][j]} d_{ka}(v) d_{aj}(u) \\
&- \delta_{ij} \frac{\mathfrak{w}_{ik}(u, v)}{\mathfrak{b}(u, v)} \sum_{a=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \frac{\bar{\mathfrak{w}}_{ia}(u, v)}{\bar{\mathfrak{b}}(u, v)} (-1)^{([a]+[k])([k]+[l])} d_{ka}(u) d_{al}(v) \\
&+ \delta_{ij} \frac{\mathfrak{w}_{il}(u, v)}{\mathfrak{b}(u, v)} \sum_{a=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \frac{\bar{\mathfrak{w}}_{ia}(u, v)}{\bar{\mathfrak{b}}(u, v)} (-1)^{([a]+[l])([k]+[l])} d_{ka}(v) d_{al}(u) \\
&- \frac{\mathfrak{w}_{ik}(u, v)}{\mathfrak{b}(u, v)} (-1)^{([i]+[k])([k]+[l])} d_{kj}(u) d_{il}(v) + \frac{\mathfrak{w}_{jl}(u, v)}{\mathfrak{b}(u, v)} (-1)^{([i]+[l])([k]+[l])} d_{kj}(v) d_{il}(u) \quad (3.8.18)
\end{aligned}$$

where $[x, y] = xy - (-1)^{[x][y]}yx$ is the graded commutator.

3.8.3 Embeddings of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ algebras

The algebraic cornerstone for the nested Bethe ansatz is a recursion relation on the $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ algebraic structure. In this section we present a coset construction for $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ algebras (see theorem 3.8.1), that extends to the coideal property (see lemma 3.8.2 and theorem 3.8.3).

Théorème 3.8.1. *For $k = 1, 2, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 1$, let $F^{(k)}$ be a linear combination of elements $d_{i_1 j_1}(u_1) \dots d_{i_l j_l}(u_l)$ with all indices $i_p, j_p > k - 1$, and let \mathcal{I}_k be the left ideal generated by $d_{ij}(u)$ for $i > j$ and $j < k$. Then, we have the following properties :*

$$d_{ij}(u) F^{(k)} \equiv 0 \mod \mathcal{I}_k, \quad \text{for } i > j \text{ and } j < k, \quad (3.8.19)$$

$$[d_{ii}(u), F^{(k)}] \equiv 0 \mod \mathcal{I}_k, \quad \text{for } i < k. \quad (3.8.20)$$

Using the functions ψ_j given in (3.15.2), we introduce the generators :

$$\widehat{D}^{(k)}(u) = \sum_{i,j=k}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} E_{ij} \otimes d_{ij}^{(k)}(u), \quad (3.8.21)$$

$$d_{ij}^{(k)}(u) = d_{ij}(u^{(1\dots k-1)}) - \delta_{ij} \sum_{a=1}^{k-1} q^{2(k-1-a)-4\sum_{l=a+1}^{k-1}[l]} \psi_a(u^{(a)}) d_{aa}(u^{(1\dots k-1)}). \quad (3.8.22)$$

They satisfy in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}/\mathcal{I}_k$ the reflection equation for $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}-k+1|\mathfrak{n}}$:

$$R_{12}^{(k)}(u_1, u_2) \widehat{D}_1^{(k)}(u_1) \bar{R}_{21}^{(k)}(u_1, u_2) \widehat{D}_2^{(k)}(u_2) \equiv \widehat{D}_2^{(k)}(u_2) \bar{R}_{12}^{(k)}(u_1, u_2) \widehat{D}_1^{(k)}(u_1) R_{21}^{(k)}(u_1, u_2) \mod \mathcal{I}_k. \quad (3.8.23)$$

Proof: We first prove relation (3.8.20) for $k = 2$, the case $k = 1$ being trivially satisfied. A direct calculation from the commutation relations (3.8.18) of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ leads to (for $i, j, l > 1$) :

$$d_{j1}(u)d_{11}(v) \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}_2} \quad (3.8.24)$$

$$[d_{ij}(u), d_{l1}(v)] \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}_2} \quad (3.8.25)$$

$$[d_{ij}(u), d_{11}(v)] \equiv -\delta_{ij} \frac{\mathfrak{w}_{i1}(u, v) \bar{\mathfrak{w}}_{i1}(u, v)}{\mathfrak{b}(u, v) \bar{\mathfrak{b}}(u, v)} [d_{11}(u), d_{11}(v)] \pmod{\mathcal{I}_2} . \quad (3.8.26)$$

$$[d_{11}(u), d_{11}(v)] \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}_2} . \quad (3.8.27)$$

Gathering all these equations, we get relation (3.8.20) for $k = 2$.

We now prove relation (3.8.23) for $k = 1, 2$. For $k = 1$, $d_{ij}^{(1)}(u) = d_{ij}(u)$, the ideal \mathcal{I}_1 is empty, and we have the starting algebra $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$, so that relation (3.8.23) for $k = 1$ just corresponds to the standard reflection equation. For $k = 2$, we use the following commutation relations :

$$[d_{ij}(u), d_{11}(v)] \equiv 0 \text{ for } i, j > 1 \text{ and } [d_{11}(u), d_{11}(v)] \equiv 0, \quad (3.8.28)$$

$$d_{j1}(u) \equiv 0 \text{ for } j > 1 \pmod{\mathcal{I}_2} . \quad (3.8.29)$$

This implies that for $i, j, g, l > 1$, we have :

$$[d_{ij}^{(2)}(u), d_{gl}^{(2)}(v)] \equiv [d_{ij}(u^{(1)}), d_{gl}(v^{(1)})] \pmod{\mathcal{I}_2} . \quad (3.8.30)$$

Hence, it just remains to prove that the relation can be re-expressed in terms of $d_{rs}^{(1)}(u)$, $r, s > 1$, only. For such a purpose, we compute the commutation relations between $d_{i1}(u)$ and $d_{1j}(v)$:

$$\begin{aligned} d_{i1}(u) d_{1j}(v) &\equiv (-1)^{[j]([j]+[i])} \frac{\mathfrak{w}_{1j}(u, v)}{\mathfrak{b}(u, v)} d_{11}(v) d_{ij}(u) + \delta_{ij} (-1)^{[j]+[1]} \frac{\bar{\mathfrak{w}}_{i1}(u, v)}{\bar{\mathfrak{b}}(u, v)} d_{11}(v) d_{11}(u) \\ &- (-1)^{[1]+[j][i]} \frac{\mathfrak{w}_{i1}(u, v)}{\mathfrak{b}(u, v)} d_{11}(u) d_{ij}(v) - \sum_{a=1}^{m+n} (-1)^{([i]+[j])[a]} \frac{\bar{\mathfrak{w}}_{1a}(u, v)}{\bar{\mathfrak{b}}(u, v)} d_{ia}(u) d_{aj}(v) . \end{aligned} \quad (3.8.31)$$

Using this equation, one can compute² for any polynomial function $f([a], [b], [c], [d])$:

$$\begin{aligned} &\sum_{a=1}^{m+n} (-1)^{f([i], [l], [a], [g])} \frac{\bar{\mathfrak{w}}_{ga}(u^{(1)}, v^{(1)})}{\bar{\mathfrak{b}}(u^{(1)}, v^{(1)})} d_{ia}(u^{(1)}) d_{al}(v^{(1)}) \equiv \\ &\equiv \sum_{a=2}^{m+n} (-1)^{f([i], [l], [a], [g])} \frac{\bar{\mathfrak{w}}_{ga}(u, v)}{\bar{\mathfrak{b}}(u, v)} d_{ia}(u^{(1)}) d_{al}(v^{(1)}) \\ &- (-1)^{[1]+[g][i]+f([i], [l], [1], [g])} \frac{\mathfrak{w}_{i1}(u, v) \bar{\mathfrak{w}}_{g1}(u^{(1)}, v^{(1)})}{\mathfrak{b}(u, v) \bar{\mathfrak{a}}_1(u^{(1)}, v^{(1)})} d_{11}(u^{(1)}) d_{il}(v^{(1)}) \\ &+ (-1)^{[l]([l]+[i])+f([i], [l], [1], [g])} \frac{\mathfrak{w}_{1l}(u, v) \bar{\mathfrak{w}}_{g1}(u^{(1)}, v^{(1)})}{\mathfrak{b}(u, v) \bar{\mathfrak{a}}_1(u^{(1)}, v^{(1)})} d_{11}(v^{(1)}) d_{il}(u^{(1)}) \\ &+ \delta_{il} (-1)^{[1]+[i]+f([i], [l], [1], [g])} \frac{\bar{\mathfrak{w}}_{i1}(u^{(1)}, v^{(1)}) \bar{\mathfrak{w}}_{g1}(u^{(1)}, v^{(1)})}{\bar{\mathfrak{b}}(u^{(1)}, v^{(1)}) \bar{\mathfrak{a}}_1(u^{(1)}, v^{(1)})} d_{11}(u^{(1)}) d_{11}(v^{(1)}) . \end{aligned} \quad (3.8.32)$$

²To obtain this equation, we started from the lhs of (3.8.32), and changed the term $a = 1$ according to (3.8.31).

Now using (3.8.28), we can write the commutation relations for the new operator $d_{ij}^{(1)}(u)$ with (3.8.18). We extract the term $d_{i1}(u) d_{1j}(v)$ of each sum and using (3.8.32) we are left with only operators $d_{11}(u)$ and $d_{ij}(u)$ with $i, j \neq 1$. We use the transformation

$$d_{ij}^{(2)}(u) = d_{ij}^{(1)}(u^{(1)}) - \delta_{ij} \psi_1(u^{(1)}) d_{11}^{(1)}(u^{(1)}), \quad (3.8.33)$$

and we obtain the desired commutation relation plus some unwanted terms. It is a straightforward calculation to find that the unwanted terms cancel for all value of $i, j, g, l \in \{2, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n}\}$. This proves that $\hat{d}_{ij}(u)$ has the same commutation relation as (3.8.18) with a sum starting at 2 for $i, j > 1$. Thus, theorem 3.8.1 is proved for $k = 2$.

For $k > 2$, we first remark that one has $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$, so that one can use the results of step k in the proof of step $k + 1$. Then, the calculation becomes equivalent to the $k = 2$ case. The transformation of D operator for each step is :

$$D^{(k)}(u) = \mathbb{I}^{(k)} \hat{D}^{(k-1)}(u) \mathbb{I}^{(k)}, \quad k > 1 \quad (3.8.34)$$

$$\hat{D}^{(k)}(u) = \mathbb{I}^{(k)} \left(\hat{D}^{(k-1)}(u^{(k-1)}) - \psi_{k-1}(u^{(k-1)}) d_{kk}^{(k-1)}(u^{(k-1)}) \mathbb{I}^{(k)} \right) \mathbb{I}^{(k)}, \quad k > 1 \quad (3.8.35)$$

$$D^{(1)}(u) = \hat{D}^{(1)}(u) = \mathbb{I}^{(1)} D(u) \mathbb{I}^{(1)} = D(u) \quad (3.8.36)$$

A direct calculation using identity (3.15.10) gives the form (3.8.22). ■

Lemme 3.8.2. *For $k = 1, 2, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n} - 1$, let $G^{(k)}$ be a linear combination of elements,*

$$t_{i_1 j_1}(u_1) t'_{g_1 l_1}(\iota(u_1)) \dots t_{i_p j_p}(u_p) t'_{g_p l_p}(\iota(u_p)),$$

with all indices $i_r, j_r, g_r, l_r > k - 1$, and let \mathcal{J}_k be the left ideal generated by $\{t_{ij}(u), t'_{ij}(u)\}$ for $i > j$ and $j < k$. Then, we have the following properties :

$$t_{ij}(u) G^{(k)} \equiv 0 \mod \mathcal{J}_k \quad \text{for } i > j \text{ and } j < k, \quad (3.8.37)$$

$$t'_{ij}(u) G^{(k)} \equiv 0 \mod \mathcal{J}_k \quad \text{for } i > j \text{ and } j < k, \quad (3.8.38)$$

$$[t_{ii}(u), G^{(k)}] \equiv 0 \mod \mathcal{J}_k \quad \text{for } i < k, \quad (3.8.39)$$

$$[t'_{ii}(u), G^{(k)}] \equiv 0 \mod \mathcal{J}_k \quad \text{for } i < k. \quad (3.8.40)$$

Moreover, the generators,

$$T^{(k)}(u) = \sum_{i,j=k}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} E_{ij} \otimes t_{ij}^{(k)}(u) \quad \text{and} \quad (T^{-1})^{(k)}(\iota(u)) = \sum_{i,j=k}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} E_{ij} \otimes t'_{ij}^{(k)}(\iota(u)), \quad (3.8.41)$$

$$t_{ij}^{(k)}(u) = t_{ij}(u^{(1 \dots k-1)}) \quad \text{and} \quad t'_{ij}^{(k)}(\iota(u)) = t'_{ij}(\iota(u^{(1 \dots k-1)})), \quad (3.8.42)$$

satisfy in $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}/\mathcal{J}_k$ the relation :

$$(T_2^{-1})^{(k)}(\iota(u)) R_{12}^{(k)}(u, \iota(u)) T_1^{(k)}(u) \equiv T_1^{(k)}(u) R_{12}^{(k)}(u, \iota(u)) (T_2^{-1})^{(k)}(\iota(u)) \mod \mathcal{J}_k. \quad (3.8.43)$$

Proof: As for theorem 3.8.1, the case $k = 1$ is just the definition of the algebra and relations (3.8.37)-(3.8.40) do not existe.

We prove the case $k = 2$, the proof for the other cases being similar. From the relation

$$T_2^{-1}(v) R_{12}(u, v) T_1(u) = T_1(u) R_{12}(u, v) T_2^{-1}(v) \quad (3.8.44)$$

one gets by projecting on $E_{ij} \otimes E_{gl}$:

$$\begin{aligned} \left[t'_{ij}(u), t_{gl}(v) \right] &= \delta_{il} \sum_{a=1}^{m+n} (-1)^{([j]+[a])([g]+[a])} \frac{\mathfrak{w}_{al}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} t_{ga}(v) t'_{aj}(u) \\ &\quad - \delta_{jg} \sum_{a=1}^{m+n} (-1)^{([g]+[a])([i]+[l])} \frac{\mathfrak{w}_{ga}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} t'_{ia}(u) t_{al}(v). \end{aligned} \quad (3.8.45)$$

From (3.8.45) we find for $i, j, g, l \neq 1$:

$$t'_{i1}(u) t_{11}(v) \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}_2} \quad ; \quad \left[t'_{ij}(u), t_{g1}(v) \right] \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}_2} \quad (3.8.46)$$

$$t_{g1}(v) t'_{11}(u) \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}_2} \quad ; \quad \left[t'_{i1}(u), t_{gl}(v) \right] \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}_2} \quad (3.8.47)$$

We also need the following commutation relation proved in [134] :

$$\left[t_{ij}(u), t_{k1}(v) \right] \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}_2}. \quad (3.8.48)$$

In the same way, one can compute :

$$\left[t'_{ij}(u), t'_{k1}(v) \right] \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}_2}. \quad (3.8.49)$$

Starting from the left-hand-side of relations (3.8.37)-(3.8.40), a recursive use of commutation relations (3.8.46)-(3.8.49) prove that one gets only terms with $t_{a1}(u)$ and $t'_{a1}(u)$ on the right, so that properties (3.8.37)-(3.8.40) hold for $k = 2$.

To prove (3.8.43), we start again with relation (3.8.45) with $i, j, g, l \neq 1$ and extract the first term in the summation :

$$\begin{aligned} \left[t'_{ij}(u), t_{gl}(v) \right] &= \delta_{il} \sum_{a=2}^{m+n} (-1)^{([j]+[a])([g]+[a])} \frac{\mathfrak{w}_{al}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} t_{ga}(v) t'_{aj}(u) \\ &\quad - \delta_{jg} \sum_{a=2}^{m+n} (-1)^{([g]+[a])([i]+[l])} \frac{\mathfrak{w}_{ga}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} t'_{ia}(u) t_{al}(v) \\ &\quad + \delta_{il} (-1)^{[j][g]+[1]} \frac{\mathfrak{w}_{1l}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} t_{g1}(v) t'_{1j}(u) - \delta_{jg} (-1)^{[g]([i]+[l])} \frac{\mathfrak{w}_{g1}(v, u)}{\mathfrak{b}(v, u)} t'_{i1}(u) t_{1l}(v) \end{aligned} \quad (3.8.50)$$

Inserting in this equation the relations (valid modulo \mathcal{J}_2) :

$$t'_{i1}(u) t_{1l}(v) \equiv - \sum_{a=2}^{m+n} (-1)^{[a]([i]+[l])} \frac{\mathfrak{w}_{1a}(v, u)}{\mathfrak{a}_1(v, u)} t'_{ia}(u) t_{al}(v) + \delta_{il} \frac{\mathfrak{w}_{1l}(v, u)}{\mathfrak{a}_1(v, u)} t'_{11}(u) t_{11}(v), \quad (3.8.51)$$

$$\begin{aligned}
(-1)^{[1]+[i][j]} t_{i1}(v) t'_{1j}(u) &\equiv - \sum_{a=2}^{m+n} (-1)^{([a]+[j])([a]+[i])} \frac{\mathfrak{w}_{a1}(v, u)}{\mathfrak{a}_1(v, u)} t_{ia}(v) t'_{aj}(u) \\
&\quad + \delta_{ji} \frac{\mathfrak{w}_{1l}(v, u)}{\mathfrak{a}_1(v, u)} t'_{11}(u) t_{11}(v),
\end{aligned} \tag{3.8.52}$$

$$[t'_{11}(u), t_{11}(v)] \equiv 0, \tag{3.8.53}$$

and making the transformation $u \rightarrow \iota(u^{(1)})$ and $v \rightarrow u^{(1)}$ it is straightforward to end the proof. For $k > 2$ we use the same argument as in the proof of theorem 3.8.1. ■

Théorème 3.8.3. *In the coset $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}/\mathcal{J}_k \otimes \mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}/\mathcal{I}_k$, the coproduct takes the form*

$$\Delta(D_{[1]}^{(k)}(u)) \equiv T_{[2]}^{(k)}(u) D_{[1]}^{(k)}(u) (T_{[2]}^{-1})^{(k)}(\iota(u)) \mod \mathcal{J}_k, \tag{3.8.54}$$

where $[1]$ labels the space $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}/\mathcal{I}_k$, $[2]$ labels the space $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}/\mathcal{J}_k$ and Δ is the coproduct of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$.

Proof: As in theorem 3.8.1, we just do the proof for $k = 2$, the other cases follow. From

$$\begin{aligned}
\Delta\left(d_{ij}(u^{(1)}) - \delta_{ij} \psi_1(u^{(1)}) d_{11}(u^{(1)})\right) &= \sum_{a,b=1}^{m+n} \left\{ t_{ia}(u^{(1)}) t'_{bj}(\iota(u^{(1)})) \otimes d_{ab}(u^{(1)}) \right. \\
&\quad \left. - \delta_{ij} \psi_1(u^{(1)}) t_{1a}(u^{(1)}) t'_{b1}(\iota(u^{(1)})) \otimes d_{ab}(u^{(1)}) \right\}.
\end{aligned}$$

and using the quotient \mathcal{I}_2 and \mathcal{J}_2 , it follows :

$$\begin{aligned}
\Delta\left(d_{ij}(u^{(1)}) - \delta_{ij} \psi_1(u^{(1)}) d_{11}(u^{(1)})\right) &= \sum_{a,b=2}^{m+n} t_{ia}(u^{(1)}) t'_{bj}(\iota(u^{(1)})) \otimes d_{ab}(u^{(1)}) + \\
&\quad + t_{i1}(u^{(1)}) t'_{1j}(\iota(u^{(1)})) \otimes d_{11}(u^{(1)}) - \delta_{ij} \psi_1(u^{(1)}) t_{11}(u^{(1)}) t'_{11}(\iota(u^{(1)})) \otimes d_{11}(u^{(1)}).
\end{aligned}$$

Using the commutation relation (3.8.45) for the second term we find :

$$\Delta\left(d_{ij}(u^{(1)}) - \delta_{ij} \psi_1(u^{(1)}) d_{11}(u^{(1)})\right) = \sum_{a,b=2}^{m+n} t_{ia}(u^{(1)}) t'_{bj}(\iota(u^{(1)})) \otimes \left(d_{ij}(u^{(1)}) - \delta_{ij} \psi_1(u^{(1)}) d_{11}(u^{(1)})\right).$$

Theorem 3.8.1 and lemma 3.8.2 allow us to generalise this result to each k . ■

3.9 Highest weight representations

The fundamental point in using the ABA is to know a pseudo-vacuum for the model. In the mathematical framework it is equivalent to know a highest weight representation for the algebra which underlies the model. Since the generators of the algebra $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ can be constructed from the $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ ones, see eq. (3.8.10), we first describe how to construct highest representations for the infinite dimensional (graded) algebras $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ from highest weight representation of the finite dimensional Lie subalgebras $gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ or $\mathcal{U}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$. Next, we show how these representations induce (for diagonal $K^-(u)$ matrix) a representation for $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ with same highest weight vector.

3.9.1 Finite dimensional representations of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$

Définition 3.9.1. A representation of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ is called *highest weight* if there exists a nonzero vector Ω such that,

$$t_{ii}(u)\Omega = \lambda_i(u)\Omega \quad \text{and} \quad t_{ij}(u)\Omega = 0 \quad \text{for } i > j, \quad (3.9.1)$$

for some scalars $\lambda_i(u) \in \mathbb{C}[[u^{-1}]]$. $\lambda(u) = (\lambda_1(u), \dots, \lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(u))$ is called the *highest weight* and Ω the *highest weight vector*.

It is known (see [56, 100, 137, 138, 69]) that any finite-dimensional irreducible representation of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ is highest weight and that it contains a unique (up to scalar multiples) highest weight vector. To construct such representations, one uses the evaluation morphism, which relates the infinite dimensional algebra $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ to its finite dimensional subalgebra $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ (see [134]). From the evaluation morphism ev_a (with $a \in \mathbb{C}$) and a highest weight representation π_μ of $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ (where μ is a $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ highest weight), one can construct a highest weight representation of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$, called *evaluation representation* :

$$\rho_a^\mu = ev_a \circ \pi_\mu : \mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} \xrightarrow{ev_a} \mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} \xrightarrow{\pi_\mu} \mathcal{V}_\lambda. \quad (3.9.2)$$

The weight of this evaluation representation is given by $\lambda(u) = (\lambda_1(u), \dots, \lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(u))$, with

$$\lambda_j(u) = \begin{cases} u - a - (-1)^{[j]} \hbar \mu_j & \text{for } \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \\ (-1)^{[j]} \left(\frac{u}{a} \eta_j q^{\mu_j} - \frac{a}{u} \eta_j q^{-\mu_j} \right) & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \end{cases} \quad j = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n}, \quad (3.9.3)$$

where μ_j , $j = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ are the weights of the $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ representation. More generally, one constructs tensor product of evaluation representations using the coproduct of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$,

$$\left(\bigotimes_{i=1}^L \rho_{a_i}^{\mu^{(i)}} \right) \circ \Delta^{(L)}(T(u)) = \rho_{a_1}^{\mu^{(1)}}(T(u)) \dot{\otimes} \rho_{a_2}^{\mu^{(2)}}(T(u)) \dot{\otimes} \dots \dot{\otimes} \rho_{a_L}^{\mu^{(L)}}(T(u)), \quad (3.9.4)$$

where $\mu^{(i)} = (\mu_1^{(i)}, \dots, \mu_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}^{(i)})$, $i = 1, \dots, L$, are the weights of the $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ representations. This provides a $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ representation with weight,

$$\lambda_j(u) = \prod_{i=1}^L \lambda_j^{(i)}(u), \quad j = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n}, \quad (3.9.5)$$

where $\lambda_j^{(i)}(u)$ have the form (3.9.3).

3.9.2 Representations of $T^{-1}(u)$ from $T(u)$

The construction of the finite dimensional representations for $T^{-1}(u)$ in relation with the $T(u)$ ones is different for the $gl(\mathfrak{n})$ and the super symmetric case $gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$. For the $gl(\mathfrak{n})$ algebra, the representations are constructed using the quantum determinant $qdet(T(u))$ and the comatrix $\widehat{T}(u)$ see [139], while for the $gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ superalgebra, one uses the Liouville contraction, the quantum Berezinian $Ber(T(u))$ [93] and crossing symmetry of $T(u)$.

We define for this section :

$$u_{\{k\}} = \begin{cases} u + \hbar k \\ u q^{-k} \end{cases} \quad \text{and} \quad f_{ij}(\sigma) = \begin{cases} (-1)^{i+j+1} s(\sigma) & \text{for } \mathcal{Y}(\mathbf{n}) \text{ and } \mathcal{Y}(\mathbf{m}|\mathbf{n}) \\ (-q)^{l(\sigma)+i-j} & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathbf{n}) \text{ and } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathbf{m}|\mathbf{n}) \end{cases} \quad (3.9.6)$$

where $s(\sigma)$ is the sign of the permutation σ and $l(\sigma)$ its length.

$\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ case : We use the $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ quantum determinant $qdet(T(u))$ which generates the center of $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$,

$$qdet(T(u)) = \sum_{\sigma \in S_{\mathbf{n}}} f_{00}(\sigma) \prod_{i=1}^{\mathbf{n}} t_{i\sigma(i)}(u_{\{i-\mathbf{n}\}}), \quad (3.9.7)$$

and the quantum comatrix,

$$\widehat{T}(u) = \sum_{ij=1} E_{ij} \otimes \widehat{t}_{ij}(u) \quad (3.9.8)$$

$$\begin{aligned} \widehat{t}_{ij}(u) &= \sum_{\sigma \in S_{\mathbf{n}}} f_{ij}(\sigma)^{-1} t_{1a_{\sigma(1)}}(u_{\{2-\mathbf{n}\}}) \dots t_{i-1a_{\sigma(i-1)}}(u_{\{i-\mathbf{n}\}}) t_{i+1a_{\sigma(i)}}(u_{\{i+1-\mathbf{n}\}}) \dots t_{\mathbf{n}a_{\sigma(\mathbf{n})}}(u) \\ &\text{with } (a_1, \dots, a_{\mathbf{n}-1}) = (1, \dots, j-1, j+1, \dots, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (3.9.9)$$

which obeys $\widehat{T}(u) T(u_{\{1-\mathbf{n}\}}) = qdet(T(u))$. This equation allows to relate $T^{-1}(u)$ to $\widehat{T}(u)$:

$$T^{-1}(u) = \sum_{i,j=1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} E_{ij} \otimes t'_{ij}(u) = \frac{\widehat{T}(u_{\{\mathbf{n}-1\}})}{qdet(T(u_{\{\mathbf{n}-1\}}))}. \quad (3.9.10)$$

To write the form of the highest weight irreducible representation for $T^{-1}(u)$, one first computes the action of $qdet(T(u))$ and $\widehat{t}_{ii}(u)$ on Ω :

$$qdet(T(u)) \Omega = \prod_{i=1}^{\mathbf{n}} \lambda_i(u_{\{i-\mathbf{n}\}}) \Omega, \quad (3.9.11)$$

$$\widehat{t}_{ii}(u) \Omega = \lambda_1(u_{\{2-\mathbf{n}\}}) \dots \lambda_{i-1}(u_{\{i-\mathbf{n}\}}) \lambda_{i+1}(u_{\{i+1-\mathbf{n}\}}) \dots \lambda_{\mathbf{n}}(u) \Omega. \quad (3.9.12)$$

Then, since $\widehat{t}_{ij}(u) \Omega = 0$ for $i > j$, one finds :

$$\begin{aligned} t'_{ii}(u) \Omega &= \lambda'_i(u) \Omega \quad \text{with} \quad \lambda'_i(u) = \left(\prod_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda_k(u_{\{k\}})}{\lambda_k(u_{\{k-1\}})} \right) \frac{1}{\lambda_i(u_{\{i-1\}})}, \\ t'_{ij}(u) \Omega &= 0 \quad \text{if } i > j. \end{aligned} \quad (3.9.13)$$

$\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ case : First, one has to prove that Ω is a highest weight vector of $T^{-1}(u)$. The proof is done in [52] for the super-Yangian case. The quantum superalgebra $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ case is done in the following theorem :

Théorème 3.9.2. *For the quantum superalgebra $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathbf{m}|\mathbf{n})$, the highest weight vector Ω of $T(u)$ is also a highest weight vector of $T^{-1}(u)$.*

$$t'_{ii}(u) \Omega = \lambda'_i(u) \Omega \quad \text{and} \quad t'_{ij}(u) \Omega = 0 \quad \text{if } i > j \quad (3.9.14)$$

Proof: To prove this theorem we must use the commutation relation between the modes of $T(u) = L^+(u)$ and $T^{-1}(u) = (L^+)^{-1}(u) = \sum_{i,j=1}^{m+n} \bar{L}_{ij}^+(u)$. As $L^+(u)$ is a formal Taylor series in u , its inverse is also a formal Taylor series of u :

$$L_{ij}^+(u) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{ij}^{(n)} u^{2n} \quad \text{and} \quad \bar{L}_{ij}^+(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{L}_{ij}^{(n)} u^{2n}. \quad (3.9.15)$$

Projecting the commutation relation (3.8.45) on the modes we find the following relation :

$$\begin{aligned} [\bar{L}_{ij}^{(p)}; L_{kl}^{(q)}] &= \delta_{il} \sum_{a=1}^{m+n} (-1)^{([a]+[j])([a]+[k])} \left(c_{al}^+ \sum_{b=0}^p L_{ka}^{(q+b)} \bar{L}_{aj}^{(p-b)} - c_{al}^- \sum_{b=1}^p L_{ka}^{(q+b)} \bar{L}_{aj}^{(p-b)} \right) \\ &\quad - \delta_{jk} \sum_{a=1}^{m+n} (-1)^{([i]+[l])([a]+[k])} \left(c_{ka}^+ \sum_{b=0}^p \bar{L}_{ia}^{(p-b)} L_{al}^{(q+b)} - c_{ka}^- \sum_{b=1}^p \bar{L}_{ia}^{(p-b)} L_{al}^{(q+b)} \right), \\ \text{with} \quad c_{al}^{\pm} &= q^{\pm(1-2[l])} - q^{\text{sign}(l-a)(1-2[l])}. \end{aligned} \quad (3.9.16)$$

From the relation $T(u) T^{-1}(u) = T^{-1}(u) T(u) = \mathbb{I}$ we find :

$$\sum_{a=1}^{m+n} \sum_{q=0}^p (-1)^{([i]+[a])([a]+[j])} \bar{L}_{ia}^{(q)} L_{aj}^{(p-q)} = \sum_{a=1}^{m+n} \sum_{q=0}^p (-1)^{([i]+[a])([a]+[j])} L_{ia}^{(q)} \bar{L}_{aj}^{(p-q)} = \delta_{ij} \delta_{0p}. \quad (3.9.17)$$

We also know that $L_{ij}^{(0)} = 0$ for $i < j$ and that $L_{ii}^{(0)}$ has an inverse. First we prove the same properties for $\bar{L}^{(0)}$. From (3.9.17), we deduce :

$$\sum_{a=1}^{m+n} (-1)^{([i]+[a])([a]+[j])} L_{ia}^{(0)} \bar{L}_{aj}^{(0)} = 0 \quad \text{for } i \neq j. \quad (3.9.18)$$

As $L_{ii}^{(0)} \neq 0$, we find for $i = 1$, $\bar{L}_{1j}^{(0)} = 0$. By induction on i , we find $\bar{L}_{ij}^{(0)} = 0$ for $i < j$. Then,

$$\sum_{a=1}^{m+n} (-1)^{[i]+[a]} L_{ia}^{(0)} \bar{L}_{ai}^{(0)} = \sum_{a=1}^{m+n} (-1)^{[i]+[a]} \bar{L}_{ia}^{(0)} L_{ai}^{(0)} = 1 \quad (3.9.19)$$

implies that $L_{ii}^{(0)} \bar{L}_{ii}^{(0)} = \bar{L}_{ii}^{(0)} L_{ii}^{(0)} = 1$.

Now, we have to prove that Ω is a highest weight vector of $\bar{L}_{ij}^{(p)}$. We already know that :

$$L_{ij}^{(p)} \Omega = 0 \quad \text{for } i < j \quad \text{and} \quad L_{ii}^{(p)} \Omega = \lambda_i^{(p)} \Omega. \quad (3.9.20)$$

We can write from (3.9.17) with $i > j$:

$$\sum_{q=0}^p \lambda_j^{(p-q)} \bar{L}_{ij}^{(q)} \Omega = - \sum_{a=1}^{j-1} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{([k]+[a])([i]+[j])} \bar{L}_{ia}^{(q)} L_{aj}^{(p-q)} \Omega. \quad (3.9.21)$$

To prove that $L_{ij}^{(p)} \Omega = 0$ for $i < j$, we use a double induction, on p and on i . We already proved directly that $\bar{L}_{ij}^{(0)} \Omega = 0$, $i < j$. For $p = 1$ we have :

$$\lambda_j^{(0)} \bar{L}_{ij}^{(1)} \Omega = - \sum_{a=1}^{j-1} (-1)^{([k]+[a])([i]+[j])} \bar{L}_{ia}^{(0)} L_{aj}^{(1)} \Omega = - \sum_{a=1}^{j-1} (-1)^{([k]+[a])([i]+[j])} [\bar{L}_{ia}^{(0)}, L_{aj}^{(1)}] \Omega.$$

Using the commutation relations (3.9.16) we find :

$$[\bar{L}_{ia}^{(0)}, L_{aj}^{(1)}] \Omega = -q^{-1+2[a]} (q - q^{-1}) (-1)^{([i]+[j])[a]} \sum_{b=1}^{a-1} (-1)^{[b]([i]+[b]+[j])} [\bar{L}_{ib}^{(0)}, L_{bj}^{(1)}] \Omega. \quad (3.9.22)$$

We get a triangular system in a , so that the property is proved for $p = 1$ by induction on a . For a general p we use the same method.

Finally, we prove that $\bar{L}_{ii}^{(p)} \Omega = \bar{\lambda}_i^{(p)} \Omega$. For $p = 0$, from the equation $\bar{L}_{ii}^{(0)} L_{ii}^{(0)} = 1$, we already know that $\bar{L}_{ii}^{(0)} \Omega = (\lambda_i^{(0)})^{-1} \Omega$. We prove the property of the general case by a double induction, assuming the property is true for $p - 1$ and starting from :

$$\sum_{q=0}^p \lambda_i^{(p-q)} \bar{L}_{ii}^{(q)} \Omega = \left(\delta_{0,p} - \sum_{a=1}^{i-1} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{[i]+[a]} [\bar{L}_{ia}^{(q)}, L_{ai}^{(p-q)}] \right) \Omega. \quad (3.9.23)$$

From the commutation relation we get :

$$\begin{aligned} [\bar{L}_{ia}^{(q)}, L_{ai}^{(p-q)}] \Omega &= \sum_{b=1}^a \left(c_{bi}^- \sum_{r=1}^q [\bar{L}_{ib}^{(q-r)}, L_{bi}^{(p-q+r)}] - c_{ab}^+ \sum_{r=0}^q [\bar{L}_{ib}^{(q-r)}, L_{bi}^{(p-q+r)}] \right) \Omega, \\ [\bar{L}_{ia}^{(0)}, L_{ai}^{(q)}] \Omega &= -q^{-1+2[a]} (q - q^{-1}) (-1)^{[a]} \sum_{b=1}^{a-1} [\bar{L}_{ib}^{(0)}, L_{bi}^{(q)}] \Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.9.24)$$

From the second equation, equals to zero by induction on a , we find :

$$[\bar{L}_{ia}^{(q)}, L_{ai}^{(p-q)}] \Omega = -q^{-1+2[a]} (q - q^{-1}) (-1)^{[a]} \sum_{b=1}^{a-1} \sum_{r=1}^q [\bar{L}_{ib}^{(q-r)}, L_{bi}^{(p-q+r)}] \Omega. \quad (3.9.25)$$

By induction on q then on a we find the last equality equals to zero. Thus, we have the relation :

$$\sum_{q=0}^p \lambda_i^{(p-q)} \bar{L}_{ii}^{(q)} \Omega = \delta_{0,p} \Omega \quad (3.9.26)$$

It follows that $\bar{L}_{ii}^{(q)} \Omega = \bar{\lambda}_i^{(q)} \Omega$ with $\bar{\lambda}_i^{(q)}$ rational function of $\lambda_i^{(q)}, \dots, \lambda_i^{(0)}$. ■

Secondly, we use the crossing symmetry of the monodromy matrix $T_a(u)$ and the quantum Berezinian to give an explicit expression of the weight of $T^{-1}(u)$. Let us introduce :

$$T^*(u) = (T^{-1}(u))^t. \quad (3.9.27)$$

The crossing symmetry takes the form for $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ (see [52, 140]) :

$$(T^t(u))^{-1} = \frac{1}{Z(u_{\{\mathbf{n}-\mathbf{m}\}})} M U T^*(u_{\{\mathbf{n}-\mathbf{m}\}}) U M^{-1} \quad \text{with} \quad U = \sum_{i=1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} (-1)^{[i]} E_{ii}, \quad (3.9.28)$$

where the Liouville contraction $Z(u)$ lies in the centre of $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$. It can be written in term of the Berezinian, that itself relies on the quantum determinant (3.9.7) :

$$Ber(T(u)) = qdet\left(T^{(\mathbf{m})}(u_{\{\mathbf{m}-\mathbf{n}-1\}})\right) \widetilde{qdet}\left((T^*)^{(\mathbf{n})}(u_{\{\mathbf{n}\}})\right) = \prod_{i=1}^{\mathbf{m}} \lambda_i(u_{\{i-\mathbf{n}-1\}}) \prod_{i=1}^{\mathbf{n}} \lambda'_{i+\mathbf{m}}(u_{\{i-\mathbf{n}-1\}}) \quad (3.9.29)$$

$$Z(u) = \frac{Ber(T(u_{\{1\}}))}{Ber(T(u))} \quad \text{with} \quad \widetilde{qdet}(T^{(\mathbf{n})}(u)) = \sum_{\sigma \in S_{\mathbf{n}}} f_{00}(\sigma)^{-1} \prod_{i=1}^{\mathbf{n}} t_{i+\mathbf{m}, \sigma(i)+\mathbf{m}}(u_{\{\mathbf{n}-i\}}), \quad (3.9.30)$$

with $T^{(k)}(u) = \mathbb{I}^{(k)} T(u) \mathbb{I}^{(k)}$, $\forall k$ and $\mathbb{I}^{(k)}$ defined in (3.7.14). In $\mathcal{A}_{0|\mathbf{n}} \subset \mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$, we have :

$$(T^{(\mathbf{n})}(u)^t)^{-1} = z(u) M T^{(\mathbf{n})*}(u_{\{\mathbf{n}\}}) M^{-1}, \quad (3.9.31)$$

where $z(u)$, the $\mathcal{A}_{0|\mathbf{n}}$ Liouville contraction, can be written in term of the quantum determinant :

$$z(u) = \frac{\widetilde{qdet}(T^{(\mathbf{n})}(u_{\{1\}}))}{\widetilde{qdet}(T^{(\mathbf{n})}(u))} = \prod_{i=1}^{\mathbf{n}} \frac{\lambda_{i+\mathbf{m}}(u_{\{\mathbf{n}-i+1\}})}{\lambda_{i+\mathbf{m}}(u_{\{\mathbf{n}-i\}})}. \quad (3.9.32)$$

Lemme 3.9.3. *For the superalgebra $\mathcal{A}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$, we have :*

$$\begin{aligned} t'_{ii}(u) \Omega &= \lambda'_i(u) \Omega \quad \text{and} \quad t'_{ij}(u) \Omega = 0 \quad \text{for } i > j, \\ \text{with } \lambda'_i(u) &= \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i(u_{\{i-1\}})} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda_k(u_{\{k\}})}{\lambda_k(u_{\{k-1\}})} \right) & \text{for } 1 \leq i \leq \mathbf{m} \\ \frac{Z(u)}{\lambda_i(u_{\{2\mathbf{m}-i\}})} \left(\prod_{k=i+1}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} \frac{\lambda_k(u_{\{2\mathbf{m}+1-k\}})}{\lambda_k(u_{\{2\mathbf{m}-k\}})} \right) & \text{for } \mathbf{m}+1 \leq i \leq \mathbf{m}+\mathbf{n} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9.33)$$

Proof: From theorem 3.9.2, we have,

$$T^{-1}(u) \Omega = \begin{pmatrix} T^{-1}(u)^{(\mathbf{m})} & * \\ 0 & T^{-1}(u)^{(\mathbf{n})} \end{pmatrix} \Omega, \quad (3.9.34)$$

$$T^*(u) \Omega = \begin{pmatrix} T^*(u)^{(\mathbf{m})} & 0 \\ * & T^*(u)^{(\mathbf{n})} \end{pmatrix} \Omega. \quad (3.9.35)$$

Multiplying (3.9.34) by $T(u)$ and (3.9.35) by $UM^{-1}T^t(u_{\{\mathbf{n}-\mathbf{m}\}})MU$, one gets :

$$T^{(\mathbf{m})}(u) (T^{-1})^{(\mathbf{m})}(u) \Omega = \Omega \quad \text{and} \quad (M^{-1})^{(\mathbf{n})} (T^t)^{(\mathbf{n})}(u_{\{\mathbf{n}-\mathbf{m}\}}) M^{(\mathbf{n})} (T^*)^{(\mathbf{n})}(u) \Omega = Z(u) \Omega.$$

Finally, upon multiplication by $T^{(\mathbf{m})}(u)^{-1}$ and $(T^t)^{(\mathbf{n})}(u)^{-1}$, one is led to

$$(T^{-1})^{(\mathbf{m})}(u) \Omega = (T^{(\mathbf{m})})^{-1}(u) \Omega \quad \text{and} \quad (T^*)^{(\mathbf{n})}(u) \Omega = Z(u) z(u_{\{\mathbf{m}-\mathbf{n}\}}) (T^{(\mathbf{n})})^*(u_{\{\mathbf{m}\}}) \Omega \quad (3.9.36)$$

that gives the lemma. ■

3.9.3 Finite dimensional representations of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ from $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ ones

For the study of the representations of the reflection algebra, we follow essentially the lines given in [111] for the reflection algebra based on the Yangian of $gl(\mathfrak{n})$ and in [52] for the reflection algebra based on the super-Yangian of $gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$.

Théorème 3.9.4. *If Ω is a highest weight vector of $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$, with eigenvalue $(\lambda_1(u), \dots, \lambda_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(u))$, then, when $K^-(z) = \text{diag}(\kappa_1(u), \dots, \kappa_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(u))$, Ω is also a highest weight vector for $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$,*

$$d_{ij}(u) \Omega = 0 \quad \text{for } i > j, \quad \text{and} \quad d_{ii}(u) \Omega = \Lambda_i(u) \Omega, \quad (3.9.37)$$

with eigenvalues :

$$\Lambda_i(u) = \mathcal{K}_i(u) \lambda_i(u) \lambda'_i(\iota(u)) + \sum_{k=1}^{i-1} \psi_k(u^{\overline{(1\dots k-1)}}) \mathcal{K}_k(u) \lambda_k(u) \lambda'_k(\iota(u)), \quad (3.9.38)$$

$$\mathcal{K}_i(u) = \kappa_i(u) - \sum_{k=1}^{i-1} \kappa_k(u) \frac{\mathfrak{w}_{ik}(u^{\overline{(1\dots k-1)}}, \iota(u^{\overline{(1\dots k-1)}}))}{\mathfrak{a}_{i-1}(u^{\overline{(1\dots i-2)}}, \iota(u^{\overline{(1\dots i-2)}}))} q^{i-k-1-2\sum_{l=k+1}^{i-1} [l]}. \quad (3.9.39)$$

Proof: First, we prove $d_{ij}(u) \Omega = 0$ for $j < i$. One computes :

$$\begin{aligned} d_{ij}(u) \Omega &= \sum_{a=1}^{j-1} (-1)^{([i]+[a])([a]+[j])} \kappa_a(u) t_{ia}(u) t'_{aj}(\iota(u)) \Omega \\ &= - \sum_{a=1}^{j-1} \kappa_a(u) \left[t'_{aj}(\iota(u)), t_{ia}(u) \right] \Omega. \end{aligned} \quad (3.9.40)$$

Applying the super-commutator on Ω with the constraint $a \leq j < i$, one gets :

$$\left[t'_{aj}(u), t_{ia}(\iota(u)) \right] \Omega = - \sum_{b=1}^{j-1} \frac{\mathfrak{w}_{ba}(u, \iota(u))}{\mathfrak{b}(u, \iota(u))} \left[t'_{bj}(\iota(u)), t_{ib}(u) \right] \Omega. \quad (3.9.41)$$

Considering the case $a = j$, one obtains :

$$\sum_{b=1}^{j-1} \left[t'_{bj}(\iota(u)), t_{ib}(u) \right] \Omega = 0. \quad (3.9.42)$$

Plugging this result in the former equation, we get :

$$\left[t'_{aj}(u), t_{ia}(\iota(u)) \right] \Omega = \frac{\mathfrak{w}_{a-1,a}(u, \iota(u)) - \mathfrak{w}_{a+1,a}(u, \iota(u))}{\mathfrak{a}_a(u, \iota(u)) - \mathfrak{w}_{a-1,a}(u, \iota(u))} \sum_{b=a+1}^{j-1} \left[t'_{bj}(\iota(u)), t_{ib}(u) \right] \Omega. \quad (3.9.43)$$

By iteration ($a = j-1, \dots, a = 1$) one finds :

$$\left[t'_{aj}(u), t_{ia}(\iota(u)) \right] \Omega = 0, \quad (3.9.44)$$

which proves that $d_{ij}(u)\omega = 0$, $j < i$.

Secondly, we prove $d_{ii}(u)\Omega = \Lambda_i(u)\Omega$. Acting on Ω with $d_{ii}(u)$ one obtains :

$$d_{ii}(u)\Omega = \kappa_i(u)\lambda_i(u)\lambda'_i(\iota(u))\Omega + \sum_{a=1}^{i-1} (-1)^{[i]+[a]} \kappa_a(u) t_{ia}(u) t'_{ai}(\iota(u))\Omega. \quad (3.9.45)$$

One can restrict this problem to the computation of $t_{ia}(u) t'_{ai}(\iota(u))\Omega$ for $i > a$ in term of the eigenvalues $\lambda_i(u)\lambda'_i(\iota(u))$. From the relation (3.8.45), we get

$$\begin{aligned} (-1)^{[i]+[a]} t_{ia}(u) t'_{ai}(\iota(u))\Omega &= - \sum_{b=1}^i (-1)^{[i]+[b]} \frac{\mathfrak{w}_{ba}(u, \iota(u))}{\mathfrak{b}(u, \iota(u))} t_{ib}(u) t'_{bi}(\iota(u))\Omega \\ &\quad + \sum_{b=1}^a \frac{\mathfrak{w}_{ib}(u, \iota(u))}{\mathfrak{b}(u, \iota(u))} t'_{ab}(\iota(u)) t_{ba}(u)\Omega. \end{aligned} \quad (3.9.46)$$

Applying (3.8.45) on Ω for $i = j = k = l$, one finds the identity :

$$\sum_{b=1}^{i-1} \frac{\mathfrak{w}_{ib}(u, \iota(u))}{\mathfrak{b}(u, \iota(u))} t'_{ib}(\iota(u)) t_{bi}(u)\Omega = \sum_{b=1}^{i-1} (-1)^{[i]+[b]} \frac{\mathfrak{w}_{bi}(u, \iota(u))}{\mathfrak{b}(u, \iota(u))} t_{ib}(u) t'_{bi}(\iota(u))\Omega.$$

Let $F_{ij} = t_{ij}(u) t'_{ji}(\iota(u))\Omega$. Using the two previous equations, one finds for $j < i$:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= (-1)^{[i]+[j]} \frac{\mathfrak{w}_{ij}(u, \iota(u))}{\mathfrak{b}(u, \iota(u))} (F_{jj} - F_{ii}) + \sum_{a=1}^{j-1} (-1)^{[i]+[a]} \frac{\mathfrak{w}_{ai}(u, \iota(u))}{\mathfrak{b}(u, \iota(u))} F_{ja} \\ &\quad - \sum_{a=1}^{i-1} (-1)^{[j]+[a]} \frac{\mathfrak{w}_{aj}(u, \iota(u))}{\mathfrak{b}(u, \iota(u))} F_{ia}. \end{aligned} \quad (3.9.47)$$

It is then easy (but lengthy) to show that the solution is :

$$\begin{aligned} F_{ij} &= (-1)^{[i]+[j]} \mathfrak{m}_{ij}(u^{\overline{(1\dots j-1)}}, \iota(u^{\overline{(1\dots j-1)}})) \left[\frac{F_{jj}}{\mathfrak{a}_j(u^{\overline{(1\dots j-1)}}, \iota(u^{\overline{(1\dots j-1)}}))} \right. \\ &\quad - \frac{q^{(i-j-1-2\sum_{a=j+1}^{i-1}[a])}}{\mathfrak{a}_{i-1}(u^{\overline{(1\dots i-2)}}, \iota(u^{\overline{(1\dots i-2)}}))} F_{ii} \\ &\quad \left. - \sum_{a=j+1}^{i-1} \frac{\mathfrak{m}_{ia}(u^{\overline{(1\dots a-1)}}, \iota(u^{\overline{(1\dots a-1)}})) q^{(a-j-1-2\sum_{l=j+1}^{a-1}[l])}}{\mathfrak{a}_j(u^{\overline{(1\dots a-1)}}, \iota(u^{\overline{(1\dots a-1)}})) \mathfrak{a}_{a-1}(u^{\overline{(1\dots a-2)}}, \iota(u^{\overline{(1\dots a-2)}}))} F_{aa} \right]. \end{aligned} \quad (3.9.48)$$

One must use relations (3.15.7)-(3.15.9) between functions. Plugging the value of F_{ik} into the equation (3.9.45), after some rearrangement one gets the eigenvalues $\Lambda_i(u)$. \blacksquare

3.10 Algebraic Bethe ansatz for $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ with $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$

In this section, we remind the framework of the Algebraic Bethe Ansatz (ABA) [35] introduced in order to compute transfer matrix eigenvalues and eigenvectors. For $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$, one can

consider three different algebras : $\mathfrak{D}_{0|2}$, $\mathfrak{D}_{2|0}$ and $\mathfrak{D}_{1|1}$. The method follows the same steps as the closed chain case, up to a preliminary step. We write the monodromy matrix in the following matricial form :

$$D(u) = \begin{pmatrix} d_{11}(u) & d_{12}(u) \\ d_{21}(u) & d_{22}(u) \end{pmatrix}. \quad (3.10.1)$$

In the open case the transfer matrix have the form :

$$d(u) = \text{str}(K_a^+(u) D_a(u)) = (-1)^{[1]} m_1 k(u) d_{11}(u) + (-1)^{[2]} m_2 d_{22}(u), \quad (3.10.2)$$

$$K^+(u) = M K(u). \quad (3.10.3)$$

The matrix K is construct from the solution (3.8.9) :

$$K(u) = \begin{cases} \mathbb{I} & \text{for } a_+ = 0 \\ \text{diag}(k(u), 1) & \text{for } a_+ = 1 \end{cases} \quad \text{with } k(u) = \begin{cases} \frac{-u - \frac{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}}{2}\hbar - c_+}{u + \frac{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}}{2}\hbar - c_+} & \text{for } \mathcal{Y}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \\ \frac{u^{-2} q^{-\frac{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}}{2}} - c_+^2}{u^2 q^{\frac{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}}{2}} - c_+^2} & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \end{cases}. \quad (3.10.4)$$

Remark that for the particular case $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$, the form chosen for $K^+(u)$ exhausts all possible diagonal solutions. We recall that for $K^-(u)$ we keep the general diagonal solution (3.8.9). Let Ω be the pseudo-vacuum state :

$$d_{11}(u) \Omega = \Lambda_1(u) \Omega, \quad d_{22}(u) \Omega = \Lambda_2(u) \Omega, \quad d_{21}(u) \Omega = 0. \quad (3.10.5)$$

Looking at the commutation relations (3.8.18) for $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$, one can see that the $d_{22}(u) d_{12}(v)$ exchange relation is not symmetric to the $d_{11}(u) d_{12}(v)$ one. In order to compensate this asymmetry, we perform a change of basis and a shift,

$$d_{11}(u^{(1)}) = \widehat{d}_{11}(u), \quad d_{12}(u^{(1)}) = \widehat{d}_{12}(u), \quad d_{21}(u^{(1)}) = \widehat{d}_{21}(u), \quad (3.10.6)$$

$$d_{22}(u^{(1)}) = \widehat{d}_{22}(u) + \psi_1(u^{(1)}) \widehat{d}_{11}(u). \quad (3.10.7)$$

The function $\psi(u)$ is chosen in such a way that it leads to symmetric exchange relations :

$$\widehat{d}_{12}(u) \widehat{d}_{12}(v) = \begin{cases} \widehat{d}_{12}(v) \widehat{d}_{12}(u), & \text{for } \mathfrak{D}_{2|0}, \mathfrak{D}_{0|2} \\ \mathfrak{h}(u, v) \widehat{d}_{12}(v) \widehat{d}_{12}(u), & \text{for } \mathfrak{D}_{1|1} \end{cases}, \quad (3.10.8)$$

$$\widehat{d}_{11}(u) \widehat{d}_{12}(v) = \mathfrak{f}_1(u, v) \widehat{d}_{12}(v) \widehat{d}_{11}(u) + \mathfrak{g}_1(u, v) \widehat{d}_{12}(u) \widehat{d}_{11}(v) + \mathfrak{h}_1(u, v) \widehat{d}_{12}(u) \widehat{d}_{22}(v) \quad (3.10.9)$$

$$\widehat{d}_{22}(u) \widehat{d}_{12}(v) = \widetilde{\mathfrak{f}}_2(u, v) \widehat{d}_{12}(v) \widehat{d}_{22}(u) + \widetilde{\mathfrak{g}}_2(u, v) \widehat{d}_{12}(u) \widehat{d}_{22}(v) + \widetilde{\mathfrak{h}}_2(u, v) \widehat{d}_{12}(v) \widehat{d}_{11}(u) \quad (3.10.10)$$

The explicit form of the functions appearing above is given in appendix 3.15. In the new basis, Ω is still a pseudo-vacuum :

$$\widehat{d}_{11}(u) \Omega = \widehat{\Lambda}_1(u) \Omega = \Lambda_1(u^{(1)}) \Omega, \quad \widehat{d}_{21}(u) \Omega = 0, \quad (3.10.11)$$

$$\widehat{d}_{22}(u) \Omega = \widehat{\Lambda}_2(u) \Omega = (\Lambda_2(u^{(1)}) - \psi_1(u^{(1)}) \Lambda_1(u^{(1)})) \Omega. \quad (3.10.12)$$

and we can use the algebraic Bethe ansatz as in the closed chain case. The transfer matrix rewrites :

$$d(u^{(1)}) = \left((-1)^{[1]} m_1 k(u^{(1)}) + (-1)^{[2]} m_2 \psi_1(u^{(1)}) \right) \widehat{d}_{11}(u) + (-1)^{[2]} m_2 \widehat{d}_{22}(u) \equiv \widehat{d}(u) \quad (3.10.13)$$

Applying M creation operators $\widehat{d}_{12}(u_j)$ on the pseudo vacuum we generate a Bethe vector :

$$\Phi(\{u\}) = \widehat{d}_{12}(u_1) \dots \widehat{d}_{12}(u_M) \Omega. \quad (3.10.14)$$

Demanding $\Phi(\{u\})$ to be an eigenvector of $\widehat{d}(u)$ leads to a set of algebraic relations on the parameters u_1, \dots, u_M , the so-called Bethe equations. The relation (3.10.8) between creation operators proves the invariance (up to a function for $\mathfrak{D}_{1|1}$) of the Bethe vector under the reordering of creation operators. This condition is usefull to compute the unwanted terms from the action of $\widehat{d}(u)$ on $\Phi(\{u\})$. We compute the action of $\widehat{d}_{11}(u)$ on $\Phi(\{u\})$,

$$\begin{aligned} \widehat{d}_{11}(u) \Phi(\{u\}) &= \prod_{k=1}^M \mathfrak{f}_1(u, u_k) \widehat{\Lambda}_1(u) \Phi(\{u\}) \\ &+ \sum_{k=1}^M \left(M_k(u, \{u\}) \widehat{\Lambda}_1(u_k) + N_k(u, \{u\}) \widehat{\Lambda}_2(u_k) \right) \Phi_k(u, \{u\}), \\ \Phi_k(u, \{u\}) &= \widehat{d}_{12}(u_1) \dots \widehat{d}_{12}(u_k \rightarrow u) \dots \widehat{d}_{12}(u_M) \Omega. \end{aligned} \quad (3.10.15)$$

where the notation $\widehat{d}_{12}(u_k \rightarrow u)$ is used to indicate the position of $\widehat{d}_{12}(u)$ in the ordered product. The form of $M_1(u; \{u\})$ and $N_1(u; \{u\})$ is easily computed. The other polynomials $M_k(u; \{u\})$ and $N_k(u; \{u\})$ are then computed using the commutation relation between the $\widehat{d}_{12}(u)$ operators and putting $\widehat{d}_{12}(u_k)$ on the left. We get :

$$M_k(u, \{u\}) = \mathfrak{g}_1(u, u_k) \prod_{i \neq k}^M \mathfrak{f}_1(u_k, u_i) \quad \text{and} \quad N_k(u, \{u\}) = \mathfrak{h}_1(u, u_k) \prod_{i \neq k}^M \widetilde{\mathfrak{f}}_2(u_k, u_i).$$

Similarly, we compute the action of $\widehat{d}_{22}(u)$ on $\Phi(\{u\})$,

$$\begin{aligned} \widehat{d}_{22}(u) \Phi(\{u\}) &= \left(\prod_{k=1}^M \widetilde{\mathfrak{f}}_2(u, u_k) \right) \widehat{\Lambda}_2(u) \Phi(\{u\}) + \\ &+ \sum_{k=1}^M \left(O_k(u, \{u\}) \widehat{\Lambda}_2(u_k) + P_k(u, \{u\}) \widehat{\Lambda}_1(u_k) \right) \Phi_k(u, \{u\}), \end{aligned} \quad (3.10.16)$$

$$O_k(u, \{u\}) = \widetilde{\mathfrak{g}}_2(u, u_k) \prod_{i \neq k}^M \widetilde{\mathfrak{f}}_1(u_k, u_i) \quad \text{and} \quad P_k(u, \{u\}) = \widetilde{\mathfrak{h}}_2(u, u_k) \prod_{i \neq k}^M \mathfrak{f}_1(u_k, u_i). \quad (3.10.17)$$

Demanding $\Phi(\{u\})$ to be an eigenvector of $\widehat{d}(u)$ corresponds to the cancelling of the so-called ‘unwanted terms’ carried by the vectors $\Phi_k(u, \{u\})$. In this way, we get the Bethe equations :

$$\frac{\widehat{\Lambda}_1(u_k)}{\widehat{\Lambda}_2(u_k)} = \chi_1(u_k) \prod_{i \neq k}^M \frac{\widetilde{\mathfrak{f}}_2(u_k, u_i)}{\mathfrak{f}_1(u_k, u_i)}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (3.10.18)$$

Remark that the r.h.s. depends only on the structure constants of the (super)algebra under consideration, while the l.h.s. encodes the representations entering the spin chain. Then, the

eigenvalues of the transfer matrix read :

$$\widehat{d}(u) \Phi(\{u\}) = \widehat{\Lambda}(u; \{u\}) \Phi(\{u\}), \quad (3.10.19)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}(u; \{u\}) &= \left((-1)^{[1]} m_1 k(u^{(1)}) + (-1)^{[2]} m_2 \psi_1(u^{(1)}) \right) \widehat{\Lambda}_1(u) \prod_{k=1}^M \mathfrak{f}_1(u, u_k) \\ &\quad + (-1)^{[2]} m_2 \widehat{\Lambda}_2(u) \prod_{k=1}^M \widetilde{\mathfrak{f}}_2(u, u_k). \end{aligned} \quad (3.10.20)$$

Note that Bethe equations correspond to the vanishing of the residue of $\Lambda(u; \{u\})$. This is the tool used in analytical Bethe ansatz [47] to obtain Bethe equations, see e.g. [50, 52].

3.11 Nested Bethe ansatz

3.11.1 Preliminaries

The method, called the Nested Bethe Ansatz (NBA), consists in a recurrent application of the ABA to express higher rank solutions using the lower ones. It has been introduced in [71] for the periodic case. The same method can be used for the boundary case. In this way, we can compute the eigenvalues, eigenvectors and Bethe equations of the $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ model from the ones of \mathfrak{D}_2 or $\mathfrak{D}_{1|1}$ model. Although we are in a (tensor product of) representation(s) of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$, we will loosely keep writing $d_{ij}(u)$ the representation of the operators $d_{ij}(u)$, assuming that the reader will understand that when $d_{ij}(u)$ applies to the highest weight Ω , it is in fact its (matricial) representation that is used. Another way to understand this method in an algebraic way is to work in the coset of the $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ algebra by the left ideal $\mathcal{I}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$.

We consider now the open case with general diagonal boundary condition (3.8.9) for $K^-(u)$, and $K^+(u)$ of the form :

$$K^+(u) = M K(u), \quad \text{with} \quad K(u) = \begin{cases} \mathbb{I} & \text{for } a_+ = 0 \\ \text{diag}(k(u), 1, \dots, 1) & \text{for } a_+ = 1 \end{cases},$$

where the function $k(u)$ is defined in (3.10.4). The matrix $K^+(u) = M K(u)$ is the only solution we can use to perform the NBA up to the end (see remarks 3.11.1 and 3.11.2 below). We decompose the monodromy matrix in the following form (in the $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}})$ auxiliary space),

$$D(u) = \begin{pmatrix} d_{11}(u) & B^{(1)}(u) \\ C^{(1)}(u) & D^{(2)}(u) \end{pmatrix}, \quad (3.11.1)$$

where $B^{(1)}(u)$ (resp. $C^{(1)}(u)$) is a row (resp. column) vector of $\mathbb{C}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}$, and $D^{(2)}(u)$ is a matrix of $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1})$.

Then, $D^{(2)}(u)$ is itself decomposed in the same way, and more generally, for a given k in $\{1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 2\}$, we gather the generators $d_{kj}(u)$, (resp. $d_{jk}(u)$) $j = k + 1, \dots, \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$, in a row (resp. column) vector of $\mathbb{C}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-k}$ and $d_{ij}(u)$, $i, j \geq k$, into a matrix of $\text{End}(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-k})$:

$$B^{(k)}(u) = \sum_{j=k+1}^{m+n} e_j^t \otimes d_{kj}(u) \quad \text{and} \quad C^{(k)}(u) = \sum_{j=k+1}^{m+n} e_j \otimes d_{jk}(u), \quad (3.11.2)$$

$$D^{(k+1)}(u) = \sum_{i,j=k+1}^{m+n} E_{ij} \otimes d_{ij}(u), \quad (3.11.3)$$

$$D^{(k)}(u) = \begin{pmatrix} d_{kk}(u) & B^{(k)}(u) \\ C^{(k)}(u) & D^{(k+1)}(u) \end{pmatrix}. \quad (3.11.4)$$

We decompose the transfer matrix in the same way :

$$\begin{aligned} d(u) &= d^{(1)}(u) = (-1)^{[1]} m_1 k(u) d_{11}(u) + d^{(2)}(u), \\ d^{(k)}(u) &= \text{str} \left(M_a^{(k)} D^{(k)}(u) \right) = (-1)^{[k]} m_k d_{kk}(u) + d^{(k+1)}(u), \end{aligned} \quad (3.11.5)$$

$$M^{(k)} = \mathbb{I}^{(k)} M \mathbb{I}^{(k)}. \quad (3.11.6)$$

At each step of the recursion, we make a transformation of the operator and a shift of the spectral parameter :

$$\begin{aligned} d_{kk}(u^{(k)}) &= \widehat{d}_{kk}(u), \quad B_a^{(k)}(u^{(k)}) = \widehat{B}_a^{(k)}(u), \\ D_a^{(k+1)}(u^{(k)}) &= \widehat{D}_a^{(k+1)}(u) + \psi_k(u^{(k)}) \mathbb{I}_a^{(k+1)} \otimes \widehat{d}_{kk}(u). \end{aligned} \quad (3.11.7)$$

The commutation relations for these operators remain similar for each k :

$$\widehat{B}_a^{(k)}(u) \widehat{B}_b^{(k)}(v) = (-1)^{[k]} \frac{\mathbf{a}_{k+1}(u^{(k)}, v^{(k)})}{\mathbf{a}_k(u^{(k)}, v^{(k)})} \widehat{B}_b^{(k)}(v) \widehat{B}_a^{(k)}(u) \mathbb{R}_{ba}^{(k+1)}(u, v), \quad (3.11.8)$$

$$\begin{aligned} \widehat{d}_{kk}(u) \widehat{B}_b^{(k)}(v) &= \mathbf{f}_k(u, v) \widehat{B}_b(v) \widehat{d}_{kk}(u) + \mathbf{g}_k(u, v) \widehat{B}_b^{(k)}(u) \widehat{d}_{kk}(v) + \\ &+ \frac{\mathbf{h}_k(u, v)}{\mathbf{e}_{k+1}(v)} \widehat{B}_b^{(k)}(u) \text{str}_a \left(M_a^{(k+1)} \overline{\mathbb{R}}_{ab}^{(k+1)}(v, v) \widehat{D}_a^{(k+1)}(v) \mathbb{R}_{ba}^{(k+1)}(v, v) \right), \end{aligned} \quad (3.11.9)$$

$$\begin{aligned} \text{str}_a \left(M_a^{(k+1)} \widehat{D}_a^{(k+1)}(u) \right) \widehat{B}_b^{(k)}(v) &= \widetilde{\mathbf{h}}_{k+1}(u, v) \mathbf{e}_{k+1}(u) \widehat{B}_b^{(k)}(u) \widehat{d}_{kk}(v) \\ &+ \frac{\widetilde{\mathbf{g}}_{k+1}(u, v) \mathbf{e}_{k+1}(u)}{\mathbf{e}_{k+1}(v)} \widehat{B}_b^{(k)}(u) \text{str}_a \left(M_a^{(k+1)} \overline{\mathbb{R}}_{ab}^{(k+1)}(v, v) \widehat{D}_a^{(k+1)}(v) \mathbb{R}_{ba}^{(k+1)}(v, v) \right) + \\ &+ \widetilde{\mathbf{f}}_{k+1}(u, v) \widehat{B}_b^{(k)}(v) \text{str}_a \left(M_a^{(k+1)} \overline{\mathbb{R}}_{ab}^{(k+1)}(u, v) \widehat{D}_a^{(k+1)}(u) \mathbb{R}_{ba}^{(k+1)}(u, v) \right). \end{aligned} \quad (3.11.10)$$

Remark 3.11.1. The commutation relations (3.11.9) and (3.11.10) impose the restriction on the $K^+(u)$ matrix. The direct use of the reflection equation leads to a matrix $\overline{\mathbb{R}}_{ab}^{(k+1)}(u, u)$ in (3.11.9) and (3.11.10). The change $\overline{\mathbb{R}}_{ab}^{(k+1)}(u, u) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{ab}^{(k+1)}(v, v)$ in the commutation relation is allowed by equality (3.15.5) which shows that the dependence in u is a scalar function. If the $K^+(u)$ matrix is not from a **NABA couple**, equation (3.15.5) cannot be used to get (3.11.9) and (3.11.10) in their present form. Without this form, the nesting cannot be performed (see also remark 3.11.2).

At each step $k = 1, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n} - 1$ of the nesting, we will introduce a family of Bethe parameters u_{kj} , $j = 1, \dots, M_k$, the number M_k of these parameters being a free integer. The partial unions of these families will be noted as,

$$\{u_\ell\} = \bigcup_{i=1}^{\ell} \{u_{ij}, j = 1, \dots, M_i\}, \quad (3.11.11)$$

so that the whole family of Bethe parameters is $\{u\} = \{u_{\mathbf{m}+\mathbf{n}-1}\}$.

3.11.2 First step of the construction

From the definition of the highest weight, $C^{(1)}(u)$ annihilates the pseudo-vacuum Ω and we can use $B^{(1)}(u)$ as a creation operator. However, since $B^{(1)}(u)$ contains only $d_{1j}(u)$ operators, it is clear that we need to act on several vectors to describe the whole representation with highest weight Ω . The NBA spirit is to construct these different vectors as Bethe vectors of an $\mathfrak{D}_{\mathbf{m}-1|\mathbf{n}}$ chain that is related to the chain we start with.

More generally, at each step k corresponding to the decomposition (3.11.4) of the monodromy matrix and to the transformation of the operator of the corresponding algebra $\mathfrak{D}_{\mathbf{m}-k|\mathbf{n}}$, we use (a suitable refinement of) $B^{(k)}(u)$ as a creation operator acting on a set of (to be defined) vectors. These vectors are constructed as Bethe vectors of a $\mathfrak{D}_{\mathbf{m}-k-1|\mathbf{n}}$ chain.

At the first step of the recursion, the Bethe vectors have the form

$$\Phi(\{u^{(1)}\}) = \widehat{B}_{a_1^1}(u_{11}) \dots \widehat{B}_{a_{M_1}^1}(u_{1M_1}) \widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\}) \Omega, \quad (3.11.12)$$

$$\widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\}) \in (\mathbb{C}^{\mathbf{m}-1|\mathbf{n}})^{\otimes M_1} \otimes \mathfrak{D}_{\mathbf{m}-1|\mathbf{n}}, \quad (3.11.13)$$

where $\widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\})$ is built from operators $\widehat{d}_{ij}(u)$, $2 \leq i \leq j \leq \mathbf{m} + \mathbf{n}$ only. Since $\widehat{B}^{(1)}(u)$ belongs to $\mathbb{C}^{\mathbf{m}-1|\mathbf{n}} \otimes \mathfrak{D}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$, we have introduced in the construction M_1 additional auxiliary spaces (labelled $a_1^1, \dots, a_{M_1}^1$) that are also carried by $\widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\})$. These new auxiliary spaces take care of the linear combination one has to do between the different generators $\widehat{d}_{1j}(u)$, $j = 2, \dots, \mathbf{m} + \mathbf{n}$, that enter into the construction.

Since $\widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\})$ is built up from operators $\widehat{d}_{ij}(u)$, $2 \leq i \leq j \leq \mathbf{m} + \mathbf{n}$, it obeys the relation (proven in a more general context in theorem 3.8.1) :

$$\widehat{d}_{11}(u) \widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\}) \Omega = \widehat{\Lambda}_1(u) \widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\}) \Omega. \quad (3.11.14)$$

The transfer matrix is decomposed into

$$d(u^{(1)}) = \widetilde{\mathbf{m}}_1(u) \widehat{d}_{11}(u) + \widetilde{d}^{(2)}(u) \quad \text{with} \quad \widetilde{d}^{(2)}(u) = \text{str}_a \left(M_a^{(2)} \widehat{D}_a^{(2)}(u) \right) \quad (3.11.15)$$

$$\widetilde{\mathbf{m}}_1(u) = (-1)^{[1]} m_1 k(u) + \text{str}(M^{(2)}) \psi_1(u^{(1)}). \quad (3.11.16)$$

The action of $\widehat{d}_{11}(u)$ on $\Phi(\{u^{(1)}\})$ takes the form

$$\begin{aligned} \widehat{d}_{11}(u) \Phi(\{u\}) &= \widehat{\Lambda}_1(u) \prod_{i=1}^{M_1} \mathbf{f}_1(u, u_{1i}) \Phi(\{u\}) + \sum_{j=1}^{M_1} M_j(u; \{u_1\}) \widehat{\Lambda}_1(u_{1j}) \widehat{\Phi}_j(u, \{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_1} N_j(u; \{u_1\}) \widehat{B}_{a_1^1}(u_{11}) \dots \widehat{B}_{a_j^1}(u) \dots \widehat{B}_{a_{M_1}^1}(u_{1M_1}) \widetilde{d}^{(2)}(u_{1j}; \{u_1\}) \widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\}) \Omega \end{aligned} \quad (3.11.17)$$

with

$$M_j(u; \{u_1\}) = \mathfrak{g}_1(u, u_{1j}) \prod_{i \neq j}^{M_1} \mathfrak{f}_1(u_{1i}, u_{1j}) \quad \text{and} \quad N_j(u; \{u\}) = \frac{\mathfrak{h}_1(u, u_{1j})}{\mathfrak{e}_2(u_{1j})} \prod_{i \neq j}^{M_1} \tilde{\mathfrak{f}}_2(u_{1i}, u_{1j}).$$

The action of $\hat{d}^{(2)}(u)$ on $\Phi(\{u\})$ takes the form

$$\begin{aligned} \hat{d}^{(2)}(u) \Phi(\{u^{(1)}\}) &= \prod_{j=1}^{M_1} \tilde{\mathfrak{f}}_2(u, u_{1j}) B_{a_1}^{(1)}(u_{11}) \dots \hat{B}_{a_{M_1}}^{(1)}(u_{1M_1}) \tilde{d}^{(2)}(u; \{u_1\}) \hat{F}_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega \\ &+ \sum_{j=1}^{M_1} P_j(u; \{u_1\}) \hat{B}_{a_1}^{(1)}(u_{11}) \dots B_{a_j}^{(1)}(u) \dots \hat{B}_{a_{M_1}}^{(1)}(u_{1M_1}) \tilde{d}^{(2)}(u_{1j}; \{u_1\}) \hat{F}_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega \\ &+ \sum_{j=1}^{M_1} Q_j(u; \{u_1\}) \hat{\Lambda}_1(u_{1j}) \Phi_j(\{u\}), \end{aligned} \quad (3.11.18)$$

with

$$P_j(u; \{u_1\}) = \frac{\tilde{\mathfrak{g}}_2(u, u_{1i}) \mathfrak{e}_2(u)}{\mathfrak{e}_2(u_{1i})} \prod_{i \neq j}^{M_1} \tilde{\mathfrak{f}}_2(u_{1j}, u_{1i}) \quad ; \quad Q_j(u; \{u_1\}) = \tilde{\mathfrak{h}}_2(u, u_{1i}) \mathfrak{e}_2(u) \prod_{i \neq j}^{M_1} \mathfrak{f}_1(u_{1j}, u_{1i}).$$

where $\Phi_j(\{u\})$ is deduced from $\Phi(\{u\})$ by the change $u_{1j} \rightarrow u$. These expressions are computed as it has been done in section 3.10 : $N_1(u; \{u_1\})$, $M_1(u; \{u_1\})$, $P_1(u; \{u_1\})$ and $Q_1(u; \{u_1\})$ are easy to compute ; the other terms are obtained through a reordering of the operators $\hat{B}^{(1)}(u_{1j})$, using the reordering lemma 3.11.1 and the Yang-Baxter equation. We also used the notation :

$$\tilde{d}^{(2)}(u; \{u_1\}) = str_a \left(M_a^{(2)} \prod_{j=1}^{\overrightarrow{M_1}} \overrightarrow{\mathbb{R}}_{a,a_j}^{(2)}(u, u_{1j}) \hat{D}_a^{(2)}(u) \prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_1}} \overleftarrow{\mathbb{R}}_{a_j,a}^{(2)}(u, u_{1j}) \right). \quad (3.11.19)$$

Remark 3.11.2. *The fact that the wanted and unwanted terms contain the same operator $\tilde{d}^{(2)}$ (but at different values u and u_{1j}) allows to continue the nesting. In this way, the diagonalisation of this operator allows at the same time to compute the eigenvalue and to show that the unwanted terms cancel (when the Bethe ansatz equations are obeyed). The apparition of this operator in the unwanted terms is directly related to the present form of the commutation relations (3.11.9) and (3.11.10), see remark 3.11.1. Hence the need of a NABA couple to perform the nesting.*

As already mentionned, the calculation makes appear a new transfer matrix $\tilde{d}^{(2)}(u; \{u_1\})$ corresponding to a $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$ chain with $L + M_1$ sites, the M_1 additional sites corresponding to fundamental representations of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$. This interpretation is supported by theorem 3.8.1 which ensure that $\tilde{D}_a^{(2)}(u; \{u_1\})$ generates $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$, and that $\tilde{d}^{(2)}(u; \{u_1\})$ is indeed the transfer matrix of an integrable spin chain. Then, if we assume that $F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega$ is an eigenvector of this new transfer matrix,

$$\tilde{d}^{(2)}(u; \{u_1\}) \hat{F}_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega = \tilde{\Gamma}^{(2)}(u) \hat{F}_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega, \quad (3.11.20)$$

we deduce :

$$\begin{aligned}\widehat{d}_{11}(u) \Phi(\{u\}) &= \widehat{\Lambda}_1(u) \prod_{i=1}^{M_1} \mathfrak{f}_1(u, u_{1i}) \Phi(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_1} \left(M_j(u; \{u_1\}) \widehat{\Lambda}_1(u_{1j}) + N_j(u; \{u_1\}) \widetilde{\Gamma}^{(2)}(u_{1j}) \right) \Phi_j(\{u\})\end{aligned}\quad (3.11.21)$$

$$\begin{aligned}\widehat{d}^{(2)}(u) \Phi(\{u\}) &= \widetilde{\Gamma}^{(2)}(u) \prod_{j=1}^{M_1} \widetilde{\mathfrak{f}}_2(u, u_{1j}) \Phi(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_1} \left(P_j(u; \{u_1\}) \widetilde{\Gamma}^{(2)}(u_{1j}) + Q_j(u; \{u_1\}) \widehat{\Lambda}_1(u_{1j}) \right) \Phi_j(\{u\})\end{aligned}\quad (3.11.22)$$

Gathering these relations together, we get a first expression of the action of $d(u)$ on $\Phi(\{u\})$. When we cancel in this expression the unwanted terms (carried by $\Phi_j(\{u\})$), we get the first system of Bethe equations :

$$\frac{\widehat{\Lambda}_1(u_{1j})}{\widetilde{\Gamma}^{(2)}(u_{1j})} = \frac{\chi_1(u_{1j})}{\mathfrak{e}_2(u_{1j})} \prod_{i \neq j}^{M_1} \frac{\widetilde{\mathfrak{f}}_2(u_{1j}, u_{1i})}{\mathfrak{f}_1(u_{1j}, u_{1i})}. \quad (3.11.23)$$

We also get a first expression of the transfer matrix eigenvalue :

$$\widehat{d}^{(1)}(u) \Phi(\{u\}) = \left(\widetilde{\mathfrak{m}}_1(u) \widehat{\Lambda}_1(u) \prod_{j=1}^{M_1} \mathfrak{f}_1(u, u_{1j}) + \widetilde{\Gamma}^{(2)}(u) \prod_{j=1}^{M_1} \widetilde{\mathfrak{f}}_1(u, u_{1j}) \right) \Phi(\{u\}). \quad (3.11.24)$$

In the above relations, everything is known *but* the eigenvalue $\widetilde{\Gamma}^{(2)}(u)$, introduced in (3.11.20), and the explicit form of $\widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\})$ ensuring that (3.11.20) is indeed satisfied.

Thus, at the end of this first recursion step, we have ‘reduced’ the problem of computing an eigenvector $\Phi(\{u\})$ for the transfer matrix $d(u)$ of a $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}}$ chain with L sites to the problem of computing an eigenvector $\Phi^{(1)}(\{u\}) = \widehat{F}_{a_1^1 \dots a_{M_1}^1}^{(1)}(\{u\}) \Omega$ for the transfer matrix $\widetilde{d}^{(2)}(u; \{u_1\})$ of a $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}-1|\mathfrak{n}}$ chain with $L + M_1$ sites.

Remark 3.11.3 (Change of notation). *To avoid too complicated notation for the second step, we need to slightly change the notation at the end of the first step. First, we rename the hatted operators $\widehat{X}(u) \rightarrow X(u)$, although they still have the spectral parameter shift and the operator transformation coming from the first step. Secondly, we omit the tilda on operators, $\widetilde{X}(u) \rightarrow X(u)$, keeping in mind that the new operator $X(u)$ have M_1 sites more than the one of the previous step. In this way, we will be able to re-use the ‘hatted’ and ‘tilded’ notations for the transformations used in the second step.*

This will be the general approach at each step : at the end of step k , we will perform a change of notation, suppressing the hats and tildas on operators, to use them again in step $k + 1$.

It remains to single out the highest weights corresponding to the fundamental representations carried by the new sites. This is done in the following way

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}(\{u\}) &= F_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega, \\ \Phi^{(1)}(\{u\}) &= B_{a_1^2}^{(2)}(u_{21}; \{u_1\}) \dots B_{a_{M_2}^2}^{(2)}(u_{2M_2}; \{u_1\}) F_{a_1^2 \dots a_{M_2}^2}^{(2)}(\{u\}) \Omega^{(2)},\end{aligned}\quad (3.11.25)$$

$$\Omega^{(2)} = (e_1^{(1)})^{\otimes M_1} \otimes \Omega, \quad (3.11.26)$$

where $e_1^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{C}^{m-1|n}$ and $F_{a_1^2 \dots a_{M_2}^2}^{(2)}(\{u\})$ is built on operators $d_{ij}(u^{(2)}; \{u_1\})$, with $j \geq i > 2$. The operators $B^{(2)}(u; \{u_1\})$ play the role, for the $\mathfrak{D}_{m-1|n}$ chain of length $L + M_1$, of the operators $B^{(1)}(u)$ for the $\mathfrak{D}_{m|n}$ chain of length L . Explicitly, they are obtained from the decomposition (3.11.4) of the monodromy matrix.

3.11.3 General step

More generally, the step k starts with the problem

$$d^{(k)}(u; \{u_{k-1}\}) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) = \Gamma^{(k)}(u) \Phi^{(k-1)}(\{u\}), \quad (3.11.27)$$

where $d^{(k)}(u; \{u_{k-1}\}) = \text{str} \left(M^{(k)} D^{(k)}(u; \{u_{k-1}\}) \right)$ is the transfer matrix of a $\mathfrak{D}_{m-k-1|n}$ spin chain of length $L + \sum_{j=1}^{k-1} M_j$ (obtained from the previous step). We recall that hats and tildas have been suppressed, according to remark 3.11.3, including for the function $\Gamma^{(k)}(u)$. We define

$$\Phi^{(k-1)}(\{u\}) = F_{a_1^{k-1} \dots a_{M_{k-1}}^{k-1}}^{(k-1)}(\{u\}) \Omega^{(k-1)} = \mathbb{B}^{(k)}(\{u_k\}) F_{a_1^k \dots a_{M_k}^k}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)}, \quad (3.11.28)$$

$$\Omega^{(k)} = (e_1^{(k-1)})^{\otimes M_{k-1}} \otimes \Omega^{(k-1)}, \quad (3.11.29)$$

with $e_1^{(k)} = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{C}^{m-k|n}$. We have introduced

$$\mathbb{B}^{(k)}(\{u_k\}) = B_{a_1^k}^{(k)}(u_{k1}; \{u_{k-1}\}) \dots B_{a_{M_k}^k}^{(k)}(u_{kM_k}; \{u_{k-1}\}), \quad (3.11.30)$$

where the operators are extracted from the monodromy matrix, see equation (3.11.4).

Remark 3.11.4. In (3.11.30), we have indicated only the auxiliary spaces a_j^k , $j = 1, \dots, M_k$. In fact, since $D^{(k)}(u; \{u_{k-1}\})$ is viewed as the monodromy matrix of a spin chain of length $L + \sum_{j=1}^{k-1} M_j$, the other spaces a_j^ℓ , $j = 1, \dots, M_\ell$, $\ell < k$, are now quantum spaces. Thus, they do not appear explicitly in $D^{(k)}$, as the sites of the original spin chain, but obviously this monodromy matrix (and its components) does depend on all these spaces.

We extract from $d^{(k)}(u; \{u_{k-1}\})$ the component $d_{kk}(u; \{u_{k-1}\})$:

$$d^{(k)}(u; \{u_{k-1}\}) = (-1)^{[k]} m_k d_{kk}(u; \{u_{k-1}\}) + \text{str} \left(M^{(k+1)} D^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\}) \right). \quad (3.11.31)$$

Now we must transform the operator :

$$\begin{aligned}d_{kk}(u^{(k)}) &= \widehat{d}_{kk}(u), & B_a^{(k)}(u^{(k)}) &= \widehat{B}_a^{(k)}(u), \\ D^{(k+1)}(u^{(k)}) &= \widehat{D}^{(k+1)}(u) + \psi_k(u^{(k)}) \widehat{d}_{kk}(u) \mathbb{I}^{(k)}.\end{aligned}\quad (3.11.32)$$

The transfer matrix $d^{(k)}(u^{(k)}; \{u_{k-1}\})$ is rewritten as

$$\widehat{d}^{(k)}(u; \{u_{k-1}\}) = \widetilde{\mathbf{m}}_k(u) \widehat{d}_{kk}(u; \{u_{k-1}\}) + \text{str} \left(M^{(k+1)} \widehat{D}^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\}) \right), \quad (3.11.33)$$

$$\widetilde{\mathbf{m}}_k(u) = (-1)^{[k]} m_k + \text{str}(M^{(k)}) \psi_k(u^{(k)}), \quad (3.11.34)$$

and the Bethe vector :

$$\Phi^{(k-1)}(\{u\}) = \widehat{\mathbb{B}}^{(k)}(\{u_k\}) \widehat{F}_{a_1^k \dots a_{M_k}^k}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)}, \quad (3.11.35)$$

$$\widehat{\mathbb{B}}^{(k)}(\{u_k\}) = \widehat{B}_{a_1^k}^{(k)}(u_{k1}; \{u_{k-1}\}) \dots \widehat{B}_{a_{M_k}^k}^{(k)}(u_{kM_k}; \{u_{k-1}\}). \quad (3.11.36)$$

Now we can compute the action of the transfer matrix on this vector. We first commute $\widehat{d}_{kk}(u; \{u_{k-1}\})$ and $\widehat{d}^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\}) = \text{str} \left(M^{(k)} \widehat{D}^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\}) \right)$ with the operator $\widehat{\mathbb{B}}^{(k)}(\{u_k\})$:

$$\begin{aligned} \widehat{d}_{kk}(u; \{u_{k-1}\}) \Phi^{(k-1)}(\{u^{(k)}\}) &= \prod_{j=1}^{M_k} \mathfrak{f}_k(u, u_{kj}) \widehat{\mathbb{B}}^{(k)}(\{u_k\}) \widehat{d}_{kk}(u; \{u_{k-1}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_k} M_j(u; \{u_{k-1}\}) \widehat{\mathbb{B}}_j^{(k)}(u; \{u_k\}) \widehat{d}_{kk}(u_{kj}; \{u_{k-1}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_k} N_j(u; \{u_{k-1}\}) \widehat{\mathbb{B}}_j^{(k)}(u; \{u_k\}) \widetilde{d}^{(k+1)}(u_{kj}; \{u_k\}) \Phi^{(k)}(\{u\}), \end{aligned} \quad (3.11.37)$$

$$\begin{aligned} \widehat{d}^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\}) \Phi^{(k-1)}(\{u\}) &= \prod_{j=1}^{M_k} \widetilde{\mathfrak{f}}_{k+1}(u, u_{kj}) \widehat{\mathbb{B}}^{(k)}(\{u_k\}) \widetilde{d}^{(k+1)}(u; \{u_k\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_k} P_j(u; \{u_{k-1}\}) \widehat{\mathbb{B}}_j^{(k)}(u; \{u_k\}) \widetilde{d}^{(k+1)}(u_{kj}; \{u_k\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M_k} Q_j(u; \{u_{k-1}\}) \widehat{\mathbb{B}}_j^{(k)}(u; \{u_k\}) \widehat{d}_{kk}(u_{kj}; \{u_{k-1}\}) \Phi^{(k)}(\{u\}), \end{aligned} \quad (3.11.38)$$

where we have introduced :

$$\Phi^{(k)}(\{u\}) = \widehat{F}_{a_1^k \dots a_{M_k}^k}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)},$$

$$\widetilde{d}^{(k+1)}(u; \{u_k\}) = \text{str}_a \left(M_a^{(k+1)} \left(\prod_{j=1}^{\overrightarrow{M_k}} \overrightarrow{\mathbb{R}}_{aa_j^k}^{(k+1)}(u, u_{kj}) \right) \widehat{D}_a^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\}) \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_k}} \overleftarrow{\mathbb{R}}_{a_j^k a}^{(k+1)}(u, u_{kj}) \right) \right).$$

The functions M_j, N_j, P_j and Q_j are the same as in the first step (section 3.11.2) but with indices $1 \rightarrow k$ on functions and Bethe roots. We use the following reordering lemma :

Lemme 3.11.1. For each $k = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 1$ and $j = 1, \dots, M_k$, we have

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{B}}^{(k)}(\{u_k\}) &= \widehat{B}_j^{(k)}(u_{kj}) \widehat{B}_1^{(k)}(u_{k1}) \dots \widehat{B}_{j-1}^{(k)}(u_{k,j-1}) \widehat{B}_{j+1}^{(k)}(u_{k,j+1}) \dots \widehat{B}_{M_k}^{(k)}(u_{kM_k}) \\ &\times \prod_{i=1}^{\overrightarrow{j-1}} (-1)^{[j]} \frac{\mathfrak{a}_{j+1}(u_{ki}^{(k)}, u_{kj}^{(k)})}{\mathfrak{a}_j(u_{ki}^{(k)}, u_{kj}^{(k)})} \mathbb{R}_{ji}^{(k+1)}(u_{ki}, u_{kj}) \end{aligned} \quad (3.11.39)$$

where the dependence in $\{u_{k-1}\}$ has been omitted in $\widehat{B}_p^{(k)}$.

Proof: Direct calculation using the commutation relations (3.11.8)-(3.11.10). ■

We now compute the action of $\widehat{d}_{kk}(u; \{u_{k-1}\})$ and $\widetilde{d}^{(k+1)}(u; \{u_k\})$ on $\widehat{F}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)}$. These actions follow from the theorem 3.8.1. For $\widehat{d}_{kk}(u; \{u_{k-1}\})$ we have :

$$\widehat{d}_{kk}(u; \{u_{k-1}\}) \widehat{F}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)} = \widehat{\Lambda}_k(u; \{u_{k-1}\}) \widehat{F}^{(k)}(\{u\}) \Omega^{(k)}. \quad (3.11.40)$$

It remains to do the same for $\widetilde{d}^{(k+1)}(u; \{u_k\})$. It corresponds to a new monodromy matrix

$$\widetilde{D}_a^{(k+1)}(u; \{u_k\}) = \prod_{j=1}^{\overrightarrow{M_k}} \mathbb{R}_{aa_j^k}^{(k+1)}(u, u_{kj}) \widehat{D}_a^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\}) \prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_k}} \mathbb{R}_{a_j^k a}^{(k+1)}(u, u_{kj}). \quad (3.11.41)$$

It also satisfies the reflexion equation, see the theorem 3.8.1, so that the problem is integrable, and defines a $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}-k|\mathfrak{n}}$ spin chain, with $L + \sum_{j=1}^k M_j$ sites.

We get a new eigenvalue problem :

$$\widetilde{d}^{(k+1)}(u; \{u_k\}) \Phi^{(k)}(\{u\}) = \widetilde{\Gamma}^{(k+1)}(u) \Phi^{(k)}(\{u\}). \quad (3.11.42)$$

Assuming the form (3.11.42), we can show, following the same lines as in the first step, that $\Phi^{(k-1)}(\{u\})$ is a transfer matrix eigenvector provided the the k^{th} system of Bethe equations,

$$\frac{\widehat{\Lambda}_k(u_{kj}; \{u_{k-1}\})}{\widetilde{\Gamma}^{(k+1)}(u_{kj}; \{u_k\})} = \frac{\chi_k(u_{kj})}{\mathfrak{e}_{k+1}(u_{kj})} \prod_{i \neq j}^{M_k} \frac{\widetilde{f}_{k+1}(u_{kj}, u_{ki})}{f_k(u_{kj}, u_{ki})}, \quad (3.11.43)$$

is obeyed. We also get an expression for $\widehat{\Gamma}^{(k)}(u)$, the eigenvalue of $\widehat{d}^{(k)}(u)$:

$$\widehat{\Gamma}^{(k)}(u) = \widetilde{\mathfrak{m}}_k(u) \prod_{j=1}^{M_k} f_k(u, u_{kj}) \widehat{\Lambda}_k(u; \{u_{k-1}\}) + \prod_{j=1}^{M_k} \widetilde{f}_{k+1}(u, u_{kj}) \widetilde{\Gamma}^{(k+1)}(u; \{u_k\}). \quad (3.11.44)$$

3.11.4 End of induction

To end the recursion, we use the $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$ case and remark that :

$$\widehat{\Gamma}^{(\mathfrak{n}+\mathfrak{m})}(u) = \widehat{\Lambda}_{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}}(u, \{u_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}\}). \quad (3.11.45)$$

Using the shift notation, $u^{(k\dots l)} = (\dots (u^{(k)})^{(k+1)} \dots)^{(l)}$, for $k \leq l$, we deduce from (3.11.45) that $\widehat{\Gamma}$ is expressed in term of $\widehat{\Lambda}$:

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}^{(k+1)}(u^{(k+2\dots n+m-1)}) &= \widetilde{m}_{k+1}(u^{(k+2\dots n+m-1)}) \widehat{\Lambda}_{k+1}(u^{(k+2\dots n+m-1)}; \{u_k\}) \mathcal{F}_{k+1}(u) \\ &+ \sum_{\ell=k+2}^{m+n-1} \widetilde{m}_{\ell}(u^{(\ell+1\dots n+m-1)}) \widehat{\Lambda}_{\ell}(u^{(\ell+1\dots n+m-1)}; \{u_{\ell-1}\}) \mathcal{F}_{\ell}(u) \prod_{p=k+1}^{\ell-1} \widetilde{\mathcal{F}}_p(u) \\ &+ (-1)^{[m+n]} m_{m+n} \widehat{\Lambda}_{m+n}(u; \{u_{m+n-2}\}) \prod_{p=k+1}^{m+n-1} \widetilde{\mathcal{F}}_p(u), \end{aligned} \quad (3.11.46)$$

where we have introduced

$$\mathcal{F}_{\ell}(u) = \prod_{j=1}^{M_{\ell}} \mathfrak{f}_{\ell}(u^{(\ell+1\dots n+m-1)}, u_{\ell j}), \quad \widetilde{\mathcal{F}}_{\ell}(u) = \prod_{j=1}^{M_{\ell}} \widetilde{\mathfrak{f}}_{\ell+1}(u^{(\ell+1\dots n+m-1)}, u_{\ell j}), \quad \ell \in \{k \dots m+n-1\},$$

with the convention $u^{(k\dots l)} = u$ if $k > l$. It remains to compute the values $\widehat{\Lambda}_k(u; \{u_{k-1}\})$:

Lemme 3.11.2. *The eigenvalue $\widehat{\Lambda}_k(u; \{u_{k-1}\})$ of $\widehat{d}_{kk}(u; \{u_{k-1}\})$ on $\Omega^{(k-1)}$ is given by,*

$$\widehat{\Lambda}_k(u; \{u_k\}) = \widehat{\Lambda}_k(u) \prod_{\ell=1}^{k-2} \prod_{j=1}^{M_{\ell}} \frac{1}{\widetilde{\mathfrak{f}}_{\ell+1}(u^{(\ell+1\dots k)}, u_{\ell j})} = \widehat{\Lambda}_k(u) \prod_{\ell=1}^{k-2} \frac{1}{\widetilde{\mathcal{F}}_{\ell}(u^{(k+1\dots m+n-1)})}, \quad k = 1, \dots, m+n, \quad (3.11.47)$$

where we have used $\widehat{d}_{kk}(u) \Omega = \widehat{\Lambda}_k(u) \Omega$ with :

$$\widehat{\Lambda}_k(u) = \Lambda_k(u^{(1\dots k)}) - \sum_{i=1}^{k-1} q^{2(k-1-i)-4 \sum_{l=i+1}^{k-1} [l]} \psi_i((u^{(k)})^{(i)}) \Lambda_i(u^{(1\dots k)}) \quad (3.11.48)$$

$$= \mathcal{K}_k(u^{(1\dots k)}) \lambda_k(u^{(1\dots k)}) \lambda'_k(u^{(1\dots k)}). \quad (3.11.49)$$

Proof: First we introduce a useful property between coproduct and supertrace :

$$\text{str}_a(\Delta(D_a^{(k)}(u)) = \Delta(\text{str}_a(D_a^{(k)}(u))). \quad (3.11.50)$$

It is obvious because supertrace and coproduct do not act in the same space. We recall the fundamental representation evaluation map for the $\mathcal{A}_{m-k+1|n}$ algebra :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{m-k+1|n} \otimes \text{End}(\mathbb{C}^{m|n}) &\rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{m-k+1|n}) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^{m|n}) \\ \pi_a^{(k)} : T^{(k)}(u) &\mapsto \overline{\mathbb{R}}_{12}^{(k)}(u, a) \\ (T^{-1}(\iota(u)))^{(k)} &\mapsto \mathbb{R}_{21}^{(k)}(u, a) \end{aligned} \quad (3.11.51)$$

We also need the representation of $\mathcal{A}_{m-k+1|n}$ induced by the inclusion $\mathcal{A}_{m-k+1|n} \hookrightarrow \mathcal{A}_{m-p+1|n}$, $p < k$. From the identity

$$T^{(k)}(u) = \mathbb{I}^{(k)} (T^{(p)}(u^{(p+1\dots k)})) \mathbb{I}^{(k)}, \quad (3.11.52)$$

we can deduce the form of $\pi_v^{(p)}((T^{(k)}(u)))$ in the fundamental representation of $\mathcal{A}_{\mathbf{m}-p+1|\mathbf{n}}$:

$$\begin{aligned} (id \otimes \pi_v^{(p)})(T^{(k)}(u)) &= \mathbb{I}_1^{(k)}(id \otimes \pi_v^{(p)})(T^{(p)}(u^{(p+1\dots k)}))\mathbb{I}_1^{(k)} = \mathbb{I}_1^{(k)}\overline{\mathbb{R}}_{12}^{(p)}(u^{(p+1\dots k)}, v)\mathbb{I}_1^{(k)} \\ &= \overline{\mathbb{R}}_{a,b}^{(k,p)}(u^{(p+1\dots k)}, v). \end{aligned} \quad (3.11.53)$$

The last equality is just the definition of $\overline{\mathbb{R}}_{a,b}^{(k,p)}(u^{(p+1\dots k)}, v)$, see (3.7.15).

Hence, using theorem 3.8.3, we can rewrite the monodromy operator $\tilde{D}_a^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\})$ as :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_a^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\}) &= \left(\prod_{j=1}^{\overrightarrow{M_k}} \overline{\mathbb{R}}_{aa_j^k}^{(k+1)}(u, u_{kj}) \right) \hat{D}_a^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\}) \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{M_k}} \overline{\mathbb{R}}_{a_j^k a}^{(k+1)}(u, u_{kj}) \right) \\ &= (id \otimes (\pi_{u_{ik}}^{(k+1)})^{\otimes_{i=1}^{M_k}}) \circ \Delta^{M_k}(\hat{D}_a^{(k+1)}(u; \{u_{k-1}\})), \end{aligned} \quad (3.11.54)$$

while the operator $\tilde{d}_{kk}^{(k)}(u)$ takes the form :

$$\tilde{d}_{kk}^{(k)}(u; \{u_{k-1}\}) = (id \otimes ((\pi_{u_{pi}}^{(p+1)})^{\otimes_{i=1}^{M_p}})^{\otimes_{p=1}^{k-1}}) \circ \Delta^{\sum_{p=1}^k M_p}(\tilde{d}_{kk}^{(k)}(u)). \quad (3.11.55)$$

Now acting on the highest weight $\Omega^{(k-1)}$ and using lemma 3.8.2, we find the following result :

$$\tilde{d}_{kk}^{(k)}(u) \Omega^{(k-1)} = (id \otimes ((\pi_{u_{ip}}^{(p+1)})^{\otimes_{i=1}^{M_p}})^{\otimes_{p=1}^k}) (t_{kk}^{(k)}(u) t_{kk}'^{(k)}(\iota(u)))^{\otimes_{p=1}^k M_p} \otimes \tilde{d}_{kk}^{(k)}(u) \Omega^{(k-1)} \quad (3.11.56)$$

We have from the definition of \mathbb{R} matrices and $\Omega^{(k-1)}$,

$$\begin{aligned} \pi_{u_{ip}}^{(p+1)}(t_{kk}^{(k)}(u) t_{kk}'^{(k)}(\iota(u))) \Omega^{(k-1)} &= \frac{\mathbf{b}(u^{(p+1\dots k)}, u_{ip}) \bar{\mathbf{b}}(u^{(p+1\dots k)}, u_{ip})}{\mathbf{a}_{p+1}(u^{(p+1\dots k)}, u_{ip}) \bar{\mathbf{a}}_{p+1}(u^{(p+1\dots k)}, u_{ip})} \Omega^{(k-1)}, \\ \pi_{u_{ik}}^{(k)}(t_{kk}^{(k)}(u) t_{kk}'^{(k)}(\iota(u))) \Omega^{(k-1)} &= \Omega^{(k-1)}, \end{aligned} \quad (3.11.57)$$

that leads to the result (3.11.47). The eigenvalue (3.11.48) is computed directly from theorem 3.8.1. To obtain the form (3.11.49), one uses the equalities (3.9.38), (3.9.39) and the identity (3.15.10). \blacksquare

From the expression given in lemma 3.11.2, one deduces that :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{(k+1)}(u^{(k+2\dots \mathbf{n}+\mathbf{m}-1)}) &= \left\{ \tilde{\mathbf{m}}_{k+1}(u^{(k+2\dots \mathbf{n}+\mathbf{m}-1)}) \hat{\Lambda}_{k+1}(u^{(k+2\dots \mathbf{n}+\mathbf{m}-1)}) \mathcal{F}_{k+1}(u) \right. \\ &\quad + \sum_{\ell=k+2}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}-1} \tilde{\mathbf{m}}_{\ell}(u^{(\ell+1\dots \mathbf{n}+\mathbf{m}-1)}) \hat{\Lambda}_{\ell}(u^{(\ell+1\dots \mathbf{n}+\mathbf{m}-1)}) \mathcal{F}_{\ell}(u) \tilde{\mathcal{F}}_{\ell-1}(u) \\ &\quad \left. + (-1)^{[\mathbf{m}+\mathbf{n}]} m_{\mathbf{m}+\mathbf{n}} \hat{\Lambda}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}(u^{(\mathbf{n}+\mathbf{m}-1)}) \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}-1}(u) \right\} \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{k-1} \tilde{\mathcal{F}}_{\ell}(u)} \end{aligned} \quad (3.11.58)$$

Let us note that since $\mathbf{b}(u, u) = 0$, equation (3.11.58) implies that :

$$\hat{\Gamma}^{(k+1)}(u_{\ell j}) = 0, \quad \text{for } j = 1, \dots, M_{\ell}; \ell = 1, \dots, k-1, \quad (3.11.59)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{(k+1)}(u_{kj}) &= \tilde{\mathbf{m}}_{k+1}(u_{kj}) \hat{\Lambda}_{k+1}(u_{kj}) \mathcal{F}_{k+1}(u_{kj}^{\overline{(k+2\dots \mathbf{n}+\mathbf{m}-1)}}) \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{\tilde{\mathcal{F}}_{\ell+1}(u_{kj}^{\overline{(k+2\dots \mathbf{n}+\mathbf{m}-1)}})}, \\ &\quad \text{for } j = 1, \dots, M_k. \end{aligned} \quad (3.11.60)$$

3.11.5 Final form of Bethe vectors, eigenvalues and equations

Using expressions (3.11.59), (3.11.60), and the value of $\widehat{\Lambda}_k(u; \{u^{(k)}\})$ given in lemma 3.11.2, one can recast the Bethe equations (3.11.43) in their final form :

$$\frac{\widehat{\Lambda}_k(u_{kj})}{\widehat{\Lambda}_{k+1}(u_{kj}^{(k+1)})} = \frac{\widetilde{m}_{k+1}(u_{kj}^{(k+1)}) \chi_k(u_{kj})}{\mathfrak{e}_{k+1}(u_{kj})} \prod_{i=1}^{M_{k-1}} \frac{1}{\widetilde{f}_k(u_{kj}^{(k)}, u_{k-1,i})} \prod_{i \neq j}^{M_k} \frac{\widetilde{f}_{k+1}(u_{kj}, u_{ki})}{f_k(u_{kj}, u_{ki})} \prod_{i=1}^{M_{k+1}} f_{k+1}(u_{kj}^{(k+1)}, u_{k+1,i}),$$

$$j = 1, \dots, M_k, \quad k = 1, \dots, \mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 1, \quad (3.11.61)$$

with the convention $M_0 = M_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = 0$. The number of parameter families is $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} - 1$. We checked that using the weights (3.9.3), (3.9.5) and the functions given in appendix 3.15, one reproduces the BAEs already computed, in e.g. [47, 117], and also the general forms given in [50, 51, 52]. In particular, for the fundamental weight $\mu = (1, 0, \dots, 0)$, we recovers the BAEs for a spin chain with fundamental representations. For instance, for the case of $\widehat{\mathcal{U}}_q(2|2)$, which may be of some relevance in the context of AdS/CFT correspondence, one gets (for L sites with evaluation parameter b_i , $a_+ = 1$ and $a_- = 2$) :

$$\begin{aligned} & \frac{c_+ u_{1i} q^{\frac{1}{2}} - \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{c_+ u_{1i}}}{\frac{u_{1i}}{c_+} q^{\frac{1}{2}} - \frac{c_+}{u_{1i}} q^{-\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^L \frac{(\frac{u_{1i}}{b_i} q^{\frac{1}{2}} - \frac{b_i}{u_{1i}} q^{-\frac{1}{2}})(u_{1i} b_i q^{\frac{1}{2}} - \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{b_i u_{1i}})}{(\frac{u_{1i}}{b_i} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{b_i}{u_{1i}} q^{\frac{1}{2}})(u_{1i} b_i q^{-\frac{1}{2}} - \frac{q^{\frac{1}{2}}}{b_i u_{1i}})} \\ &= \prod_{j \neq i}^{M_1} \frac{(\frac{u_{1i}}{u_{1j}} q - \frac{u_{1j}}{u_{1i}} q^{-1})(u_{1i} u_{1j} q - \frac{q^{-1}}{u_{1i} u_{1j}})}{(\frac{u_{1j}}{u_{1i}} q - \frac{u_{1i}}{u_{1j}} q^{-1})(u_{1i} u_{1j} q^{-1} - \frac{q}{u_{1i} u_{1j}})} \prod_{j=1}^{M_2} \frac{(\frac{u_{2j}}{u_{1i}} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{u_{1i}}{u_{2j}} q^{\frac{1}{2}})(u_{2j} u_{1i} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{q^{\frac{1}{2}}}{u_{2j} u_{1i}})}{(\frac{u_{2j}}{u_{1i}} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{u_{2j}}{u_{1i}} q^{\frac{1}{2}})(u_{2j} u_{1i} q^{\frac{1}{2}} - \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{u_{2j} u_{1i}})}, \\ & i = 1, \dots, M_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{2i}^2 q^{-1} - c_-^2 q}{u_{2i}^{-2} - c_-^2 q^2} (-1)^{M_2+1} = \prod_{j=1}^{M_1} \frac{(\frac{u_{2i}}{u_{1j}} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{u_{1j}}{u_{2i}} q^{\frac{1}{2}})(u_{1j} u_{2i} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{q^{\frac{1}{2}}}{u_{1j} u_{2i}})}{(\frac{u_{2i}}{u_{1j}} q^{\frac{1}{2}} - \frac{u_{1j}}{u_{2i}} q^{-\frac{1}{2}})(u_{1j} u_{2i} q^{\frac{1}{2}} - \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{u_{1j} u_{2i}})} \prod_{j=1}^{M_3} \frac{(\frac{u_{3j}}{u_{2i}} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{u_{2i}}{u_{3j}} q^{\frac{1}{2}})(u_{3j} u_{2i} q^{\frac{1}{2}} - \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{u_{3j} u_{2i}})}{(\frac{u_{3j}}{u_{2i}} q^{\frac{1}{2}} - \frac{u_{2i}}{u_{3j}} q^{-\frac{1}{2}})(u_{3j} u_{2i} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{q^{\frac{1}{2}}}{u_{3j} u_{2i}})} \\ & i = 1, \dots, M_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -1 = \prod_{j=1}^{M_2} \frac{(\frac{u_{3i}}{u_{2j}} q^{\frac{1}{2}} - \frac{u_{2j}}{u_{3i}} q^{-\frac{1}{2}})(u_{2j} u_{3i} q^{\frac{1}{2}} - \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{u_{2j} u_{3i}})}{(\frac{u_{3i}}{u_{2j}} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{u_{2j}}{u_{3i}} q^{\frac{1}{2}})(u_{2j} u_{3i} q^{-\frac{1}{2}} - \frac{q^{\frac{1}{2}}}{u_{2j} u_{3i}})} \prod_{j \neq i}^{M_3} \frac{(\frac{u_{3i}}{u_{3j}} q^{-1} - \frac{u_{3j}}{u_{3i}} q)(u_{3i} u_{3j} q^{-1} - \frac{q}{u_{3i} u_{3j}})}{(\frac{u_{3j}}{u_{3i}} q^{-1} - \frac{u_{3i}}{u_{3j}} q)(u_{3i} u_{3j} q - \frac{q^{-1}}{u_{3i} u_{3j}})} \\ & i = 1, \dots, M_3 \end{aligned}$$

The transfer matrix eigenvalues are obtained from (3.11.58), remarking that $\Lambda(u^{(1)}) = \widehat{\Gamma}^{(1)}(u)$:

$$\begin{aligned} \Lambda(u^{(1 \dots \mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}) &= \sum_{k=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \widetilde{m}_k(u^{(k+1 \dots \mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}) \widehat{\Lambda}_k(u^{(k+1 \dots \mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}) \times \\ & \times \prod_{j=1}^{M_k} f_k(u^{(k+1 \dots \mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}, u_{kj}) \prod_{j=1}^{M_{k-1}} \widetilde{f}_k(u^{(k+1 \dots \mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1)}, u_{k-1,j}), \quad (3.11.62) \\ \widetilde{m}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(u) &= (-1)^{[\mathfrak{m}+\mathfrak{n}]} m_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}. \end{aligned}$$

The Bethe equations (3.11.61) ensure that $\Lambda(u)$ is analytical, in accordance with the analytical Bethe ansatz. The Bethe vectors take the form :

$$\begin{aligned}\Phi(\{u\}) &= \widehat{B}_{a_1}^{(1)}(u_{11}) \cdots \widehat{B}_{a_{M_1}}^{(1)}(u_{1M_1}) \widehat{F}_{a_1 \dots a_{M_1}}^{(1)}(\{u\}) \Omega, \\ &= \widehat{B}_{a_1}^{(1)}(u_{11}) \cdots \widehat{B}_{a_{M_1}}^{(1)}(u_{M_1}^{(1)}) \widehat{B}_{a_2}^{(2)}(u_{21}) \cdots \widehat{B}_{a_{M_2}}^{(2)}(u_{1M_2}) \cdots \widehat{B}_{a_M^{n+m-1}}^{(n+m-1)}(u_{n+m-1,M}) \Omega^{(n+m-1)}.\end{aligned}\tag{3.11.63}$$

We recall the notation $M = \sum_{j=1}^{n+m-1} M_j$, $\Omega^{(k)} = (e_1^{(k-1)})^{\otimes M_{k-1}} \otimes \Omega^{(k-1)}$, $\Omega^{(1)} = \Omega$ and the auxiliary spaces are indicated according to remark 3.11.4.

3.12 Bethe vectors

We present here a generalization to open spin chains of the recursion and trace formulas for Bethe vectors, obtained in [87, 88] (see also [134]) for closed spin chains. To our knowledge, this presentation for open spin chain is entirely new.

3.12.1 Recursion formula for Bethe vectors

From expression (3.11.63), we can extract a recurrent form for the Bethe vectors,

$$\Phi_M^{n+m}(\{u\}) = \widehat{B}_{a_1}^{(1)}(u_{11}) \cdots \widehat{B}_{a_{M_1}}^{(1)}(u_{1M_1}) \widehat{\Psi}_{\{u_1\}}^{(1)} \left(\Phi_{M-M_1}^{n+m-1}(\{u_{(>1)}\}) \right), \tag{3.12.1}$$

$$\widehat{\Psi}_{\{u_1\}}^{(1)} = v^{(2)} \circ (\tau \otimes \pi_{u_{1M_1}}^{(2)} \otimes \cdots \otimes \pi_{u_{11}}^{(2)}) \circ \Delta^{(M_1)}, \tag{3.12.2}$$

where π_a is the fundamental representation evaluation homomorphism normalized as in (3.11.51), $v^{(k)}$ is the application of the highest weight vector $e_1^{(k-1)}$:

$$v^{(k)}(X \Omega^{(k-1)}) = X (e_1^{(k-1)})^{\otimes M_{k-1}} \otimes \Omega^{(k-1)} = X \Omega^{(k)}, \tag{3.12.3}$$

and τ is the morphism

$$\begin{aligned}\tau : \quad \mathfrak{D}_{m-1|n} &\rightarrow \mathfrak{D}_{m|n}/\mathcal{I}_1 \\ d_{ij}(u) &\mapsto \widehat{d}_{i+1,j+1}(u)\end{aligned} \tag{3.12.4}$$

If we denote by $[\cdot]_{m|n}$ the grading used in the $\mathfrak{D}_{m|n}$ superalgebra, the mapping τ corresponds to the identification $[j]_{m-1|n} = [j+1]_{m|n}$.

Remark that since all the operators in (3.12.1) apply on the pseudo-vacuum, one can consider the operators built from τ as belonging to $\mathfrak{D}_{m|n}$ instead of $\mathfrak{D}_{m|n}/\mathcal{I}_1$. So by induction we build the Bethe vectors from $\mathfrak{D}_{m|n}$ generators and R -matrices in auxiliary spaces.

3.12.2 Supertrace formula for Bethe vectors

We can also write the Bethe vector into a supertrace formula and prove the equivalence with the recursion relation discussed above.

Théorème 3.12.1. *The Bethe vector (3.12.1) admit a supertrace formulation. We note $A_1; \dots; A_{m+n-1}$ the ordered sequence of auxiliary spaces $a_1^1, \dots, a_{M_1}^1; a_1^2, \dots, a_{M_2}^2; \dots; a_1^{m+n-1}, \dots, a_{M_{m+n-1}}^{m+n-1}$.*

$$\Phi_M^{n+m}(\{u\}) = (-1)^{G_1} \text{str}_{A_1 \dots A_{m+n-1}} \left(\prod_{i=1}^{m+n-1} \widehat{\mathbb{D}}_{A_i}^{(i)}(\{u_i\}) E_{n+m, n+m-1}^{\otimes M_{n+m-1}} \otimes \dots \otimes E_{21}^{\otimes M_1} \right) \Omega, \quad (3.12.5)$$

where

$$\widehat{\mathbb{D}}_{A_i}^{(i)}(\{u_i\}) = \prod_{j=1}^{M_i} \overline{\mathcal{R}}_{A_{<i}, a_j^i}^{(i)}(\{u_{i-1}\}, u_{ij}) \widehat{D}_{a_j^i}^{(i)}(u_{ij}) \mathcal{R}_{a_j^i, A_{<i}}^{(i)}(\{u_{i-1}\}, u_{ij}), \quad (3.12.6)$$

$$G_k = \sum_{i=k}^{n+m-2} \frac{M_i(M_i+1)}{2} [i], \quad (3.12.7)$$

$$\overline{\mathcal{R}}_{A_{<i}, a_j^i}^{(i)}(\{u_{i-1}\}, u_{ij}) = \prod_{b<i}^{\overrightarrow{M_b}} \prod_{c=1}^{\overrightarrow{M_b}} \mathbb{R}_{a_j^i a_c^b}^{(i,b)}(u_{ij}, u_{bc}^{(b+1 \dots i-1)}), \quad (3.12.8)$$

$$\mathcal{R}_{a_j^i, A_{<i}}^{(i)}(\{u_{i-1}\}, u_{ij}) = \prod_{b<i}^{\overleftarrow{M_b}} \prod_{c=1}^{\overleftarrow{M_b}} \mathbb{R}_{a_c^b a_j^i}^{(b,i)}(u_{bc}^{(b+1 \dots i-1)}, u_{ij}). \quad (3.12.9)$$

Proof: Equivalence is proven along the following lines. Starting from expression (3.12.5), we can extract the M_1 auxiliary spaces corresponding to the first step of the nested Bethe ansatz :

$$\begin{aligned} \Phi_M^{n+m}(\{u\}) &= (-1)^{\frac{M_1(M_1+1)}{2} [1]} \text{str}_{A_1} \left[\widehat{\mathbb{D}}_{A_1}^{(1)}(\{u_1\}) \times (-1)^{G_2} \times \right. \\ &\quad \left. \text{str}_{A_2 \dots A_{m+n-1}} \left(\prod_{i=2}^{m+n-1} \widehat{\mathbb{D}}_{A_i}^{(i)}(\{u_i\}) E_{n+m, n+m-1}^{\otimes M_{n+m-1}} \otimes \dots \otimes E_{32}^{\otimes M_2} \right) \otimes E_{21}^{\otimes M_1} \right] \otimes \Omega. \end{aligned}$$

Using the isomorphism $\text{End}(\mathbb{C}^{m+n}) \sim \mathbb{C}^{m+n} \otimes \mathbb{C}^{m+n}$, one can rewrite, for any $A(v)$, the supertrace with an E_{21} matrix as :

$$\begin{aligned} \text{str} \left(\widehat{D}^{(1)}(u) A(v) E_{21} \right) &= \sum_{j=1}^{m+n} (e_1^t \otimes e_j^t \otimes \widetilde{d}_{1j}^{(1)}(u)) A(v) (e_1 \otimes e_2 \otimes 1), \\ &= (-1)^{[1]+[1][A]} \widehat{B}^{(1)}(u) A(v) (e_2 \otimes 1). \end{aligned} \quad (3.12.10)$$

Using formula (3.12.10) for the auxiliary spaces $1, \dots, M_1$, and remarking that the case $j_a = 1$ for $a = 1, \dots, M_1$ does not contribute, we obtain :

$$\begin{aligned} \Phi_M^{n+m}(\{u\}) &= \widehat{B}_{a_1^1}^{(1)}(u_{11}) \dots \widehat{B}_{a_{M_1}^1}^{(1)}(u_{1M_1}) (-1)^{G_2} \times \\ &\quad \text{str}_{A_2 \dots A_{m+n-1}} \left(\prod_{i=2}^{m+n-1} \widehat{\mathbb{D}}_{A_i}^{(i)}(\{u_i\}) E_{n+m, n+m-1}^{\otimes M_{n+m-1}} \otimes \dots \otimes E_{32}^{\otimes M_2} \right) \Omega^{(2)} \end{aligned} \quad (3.12.11)$$

To end the proof, we remark that :

$$(-1)^{G_2} \text{str}_{A_2 \dots A_{m+n-1}} \left(\prod_{i=2}^{m+n-1} \widehat{\mathbb{D}}_{A_i}^{(i)}(\{u_i\}) E_{\mathbf{n}+\mathbf{m}, \mathbf{n}+\mathbf{m}-1}^{\otimes M_{\mathbf{n}+\mathbf{m}-1}} \otimes \dots \otimes E_{32}^{\otimes M_2} \right) \Omega^{(2)} = \widehat{\Psi}_{\{u_1\}}^{(1)} \left(\Phi_{M-M_1}^{\mathbf{n}+\mathbf{m}-1}(\{u_{(>1)}\}) \right)$$

which allows to recover the form (3.12.2). ■

Remark 3.12.1 (Conjecture). *Although theorem 3.12.1 has been proven only when $K^+(u)$ belongs to a NABA couple, the expression (3.12.5) does not depend on $K^+(u)$: we conjecture that this expression is valid for any couple of diagonal $K^\pm(u)$ matrices. This conjecture is supported by the fact that analytical Bethe ansatz is known to work for any diagonal boundary matrices.*

3.12.3 Examples of Bethe vectors

To illustrate the supertrace formula, we present here some explicit examples of Bethe vectors associated to small numbers of excitations.

Bethe vectors of $\mathfrak{D}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ with $\mathbf{n} + \mathbf{m} = 2$ and $M_1 = M$. We reproduce here the well-known case obtained with algebraic Bethe ansatz (see also section 3.10).

$$\Phi_M^2(\{u\}) = (-1)^{M[2]} \widehat{d}_{12}^{(1)}(u_{11}) \cdots \widehat{d}_{12}^{(1)}(u_{1M}) \Omega. \quad (3.12.12)$$

Note that this expression is also valid when $\mathbf{n} + \mathbf{m} > 2$, setting $M_1 = M$ and $M_k = 0$, $k > 1$.

Bethe vectors of $\mathfrak{D}_{\mathbf{m}|\mathbf{n}}$ with $\mathbf{n} + \mathbf{m} = 3$, $M_1 = 1$ and $M_2 = 1$.

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1}^3(\{u\}) &= (-1)^{[1]+[2]+[3]} \frac{\mathbf{b}(u_{11}, u_{21})}{\mathbf{a}_2(u_{11}, u_{21})} \widehat{d}_{12}^{(1)}(u_{11}) \widehat{d}_{23}^{(2)}(u_{21}) \Omega \\ &+ (-1)^{[1]+[2]+[3]} \frac{\overline{\mathbf{b}}(u_{21}, u_{11})}{\overline{\mathbf{a}}_2(u_{21}, u_{11})} \frac{\mathbf{w}_{32}(u_{11}, u_{21})}{\mathbf{a}_2(u_{11}, u_{21})} \widehat{d}_{13}^{(1)}(u_{11}) \widehat{d}_{22}^{(2)}(u_{21}) \Omega \\ &+ (-1)^{[1]} \frac{\overline{\mathbf{w}}_{23}(u_{21}, u_{11})}{\overline{\mathbf{a}}_2(u_{21}, u_{11})} \frac{\mathbf{b}(u_{11}, u_{21})}{\mathbf{a}_2(u_{11}, u_{21})} \widehat{d}_{13}^{(1)}(u_{11}) \widehat{d}_{33}^{(2)}(u_{21}) \Omega. \end{aligned}$$

Again, this expression is also valid when $\mathbf{n} + \mathbf{m} > 3$, setting $M_k = 0$, $k > 2$.

We also computed the Bethe vectors corresponding to $M_1 = M_2 = M_3 = 1$ and $M_k = 0$, $k > 3$. Their expression is rather long, with 11 different terms : we do not write it here explicitly.

3.13 Conclusion

In this paper, we have proposed a global treatment of the NBA for **universal transfer matrices** of open spins chains with **NABA couple** of boundary matrices. The modification of the nested Bethe ansatz applicable to diagonal boundary matrices that do not form a NABA

couple remains to be found. Since the analytical Bethe ansatz can be performed in this case, such a refinement should be possible.

We have computed a **trace formula** for the Bethe vector of the open chain. This formulation could be a starting point for the investigation of the quantized Knizhnik-Zamolodchikov equation following the work [141]. For such a purpose, the coproduct properties of Bethe vectors for open spin chains remain to be studied. Defining a scalar product and computing the norm of these Bethe vectors is also a point of fundamental interest.

From a different point of view, this trace formula and the mapping between the reflection algebras of different size could be the starting point for the construction of a Drinfeld's current realisation [42] for the reflection algebra in the spirit of [89] on the current realisation of the Bethe vector for the periodic case.

The case of open spin chains with general boundary matrices is also a subject of fundamental interest. A deeper understanding of representations of reflection algebras when the K matrix is not diagonal may be of some help. Alternatively, a different approach using another presentation of the reflection algebra could be the clue to go beyond the results obtained so far. Some works have been done for the $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$ case in [132, 133], but the general treatment for universal transfer matrices remains an open problem. The functional approach developped in [130] for $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2$ also deserves a generalization, both for universal transfer matrices, and for bigger algebras.

3.14 R and M matrices

We remind the general form of the R -matrices we used in the paper [134]. Note we use a more compact form :

$$R_{12}(u, v) = \mathfrak{b}(u, v) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \mathfrak{w}_{ij}(u, v) E_{ij} \otimes E_{ji}, \quad (3.14.1)$$

$$\mathfrak{w}_{ij}(u, v) = \begin{cases} \mathfrak{a}_i(u, v) - \mathfrak{b}(u, v) & \text{for } i = j \\ \mathfrak{c}_{ij}(u, v) & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$\bar{R}_{12}(u, v) = R_{12}(u, \iota(v)) = \bar{\mathfrak{b}}(u, v) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sum_{i,j=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \bar{\mathfrak{w}}_{ij}(u, v) E_{ij} \otimes E_{ji}. \quad (3.14.2)$$

The functions involved in these expressions are given by (with the convention $Y(\mathfrak{m}) \equiv Y(\mathfrak{m}|0)$, $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}) \equiv \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|0)$ and $[b] = 0, \forall b$, in these two cases) :

For $Y(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$:

$$\mathfrak{b}(u, v) = u - v \quad ; \quad \mathfrak{a}_a(u, v) = u - v - (-1)^{[a]} \hbar \quad \text{and} \quad \mathfrak{w}_{ab}(u, v) = -(-1)^{[b]} \hbar \quad (3.14.3)$$

$$\bar{\mathfrak{b}}(u, v) = u + v \quad ; \quad \bar{\mathfrak{a}}_a(u, v) = u + v - (-1)^{[a]} \hbar \quad \text{and} \quad \bar{\mathfrak{w}}_{ab}(u, v) = -(-1)^{[b]} \hbar \quad (3.14.4)$$

For $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$:

$$\mathfrak{b}(u, v) = \frac{u}{v} - \frac{v}{u} \quad ; \quad \mathfrak{a}_a(u, v) = \frac{u}{v} q^{1-2[a]} - \frac{v}{u} q^{2[a]-1} \quad (3.14.5)$$

$$\text{and} \quad \mathfrak{w}_{ab}(u, v) = (-1)^{[b]} (q - q^{-1}) \left(\frac{u}{v} \right)^{\text{sign}(b-a)}, \quad a \neq b \quad (3.14.6)$$

$$\bar{\mathfrak{b}}(u, v) = uv - \frac{1}{uv} \quad ; \quad \bar{\mathfrak{a}}_a(u, v) = uv q^{1-2[a]} - \frac{1}{uv} q^{2[a]-1} \quad (3.14.7)$$

$$\text{and} \quad \bar{\mathfrak{w}}_{ab}(u, v) = (-1)^{[b]} (q - q^{-1}) (uv)^{\text{sign}(b-a)}, \quad a \neq b \quad (3.14.8)$$

The matrix M is a diagonal matrix :

$$M = \sum_{i=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} m_i E_{ii} \quad \text{with} \quad \begin{cases} m_i = 1 & \text{for } Y(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \\ m_i = q^{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}-2k+1} q^{-2[k]+4 \sum_{i=1}^k [i]} & \text{for } \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}) \end{cases} \quad (3.14.9)$$

3.15 Functions appearing in NBA

The functions are constructed from the three functions appearing in the R -matrix, whose explicit form are given in equations (3.14.3)-(3.14.8) above :

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_i(u, v) &= \frac{\mathfrak{a}_i(v, u) \bar{\mathfrak{b}}(u^{(i)}, v^{(i)})}{\mathfrak{b}(v, u) \bar{\mathfrak{b}}(u, v)} \quad , \quad \widetilde{\mathfrak{f}}_{i+1}(u, v) = \frac{\mathfrak{a}_{i+1}(u, v) \bar{\mathfrak{a}}_{i+1}(u, v)}{\mathfrak{b}(u, v) \bar{\mathfrak{b}}(u, v)} \\ \mathfrak{g}_i(u, v) &= \frac{\mathfrak{c}_{i-1i}(u, v) \bar{\mathfrak{b}}(v^{(i)}, v^{(i)})}{\mathfrak{b}(u, v) \bar{\mathfrak{b}}(v, v)} \quad , \quad \widetilde{\mathfrak{g}}_{i+1}(u, v) = -(-1)^{[i]+[i+1]} \frac{\mathfrak{c}_{k+1k}(u, v) \bar{\mathfrak{a}}_{k+1}(u, u)}{\mathfrak{b}(u, v) \bar{\mathfrak{b}}(u, u)} \\ \mathfrak{h}_i(u, v) &= -\frac{\bar{\mathfrak{c}}_{i-1i}(u^{(i)}, v^{(i)})}{\bar{\mathfrak{b}}(u, v)} \quad , \quad \widetilde{\mathfrak{h}}_{i+1}(u, v) = \frac{\bar{\mathfrak{c}}_{i+1i}(u^{(i)}, v^{(i)}) \bar{\mathfrak{a}}_{i+1}(u, u) \bar{\mathfrak{b}}(v^{(i)}, v^{(i)})}{\bar{\mathfrak{b}}(u, u) \bar{\mathfrak{b}}(v, v) \bar{\mathfrak{b}}(u, v)} \end{aligned} \quad (3.15.1)$$

We also use (presented here for $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} = \widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$; for $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}|\mathfrak{n}} = Y(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ one has to set $q = 1$ in the relations below) :

$$\psi_i(u) = \frac{\bar{\mathfrak{c}}_{i+1i}(u, u)}{\bar{\mathfrak{a}}_i(u, u)} \quad (3.15.2)$$

$$\chi_k(u) = \begin{cases} -q^{2[k]-1} \frac{\bar{\mathfrak{b}}(u, u)}{\bar{\mathfrak{b}}(u^{(k)}, u^{(k)})} \eta_k(u, c_+) & \text{for } k = 1 \quad \text{and} \quad a = 1 \\ -q^{2[k]-1} \frac{\bar{\mathfrak{b}}(u, u)}{\bar{\mathfrak{b}}(u^{(k)}, u^{(k)})} & \text{else} \end{cases} \quad (3.15.3)$$

$$\eta_k(u, c_+) = \frac{\mathfrak{b}(\widetilde{c}_+, u^{(k+1)})}{\bar{\mathfrak{b}}(\widetilde{c}_+, u^{(k+1)})} \quad (3.15.4)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_k(u) \mathbb{I}_b^{(k)} &= \text{tr}_a(M_a^{(k)} \mathbb{R}_{ab}^{(k)}(u, u) \mathbb{R}_{ba}^{(k)}(u, u)) \\ &= q^{-k+1} q^{-2\mathfrak{n}-2 \sum_{i=k}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} [i]+4 \sum_{i=1}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} [i]} (-1)^{[k]} \frac{\bar{\mathfrak{b}}(u^{\overline{(k \dots \mathfrak{m}+\mathfrak{n})}}, u^{\overline{(k \dots \mathfrak{m}+\mathfrak{n})}})}{\bar{\mathfrak{a}}_k(u, u)} \mathbb{I}_b^{(k)} \end{aligned} \quad (3.15.5)$$

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_k(u) = q^{1-2[k]} \frac{\bar{\mathfrak{a}}_{k+1}(u, u) \mathfrak{e}_{k+1}(u)}{\bar{\mathfrak{b}}(u, u)} \quad \text{for } k \neq 1. \quad (3.15.6)$$

The following useful relations are used in the paper :

$$\mathfrak{b}(u, v) \mathfrak{a}_i(\overline{u^{(j)}}, \overline{v^{(j)}}) = \mathfrak{a}_i(u, v) \mathfrak{a}_j(u, v) - \mathfrak{w}_{ij}(u, v) \mathfrak{w}_{ji}(u, v), \quad i \neq j, \quad (3.15.7)$$

$$\mathfrak{b}(u, v) \mathfrak{w}_{ij}(\overline{u^{(k)}}, \overline{v^{(k)}}) = \mathfrak{w}_{ij}(u, v) \mathfrak{a}_k(u, v) - \mathfrak{w}_{ik}(u, v) \mathfrak{w}_{kj}(u, v), \quad i > j > k;$$

$$\mathfrak{b}(u^{(\overline{i})}, v^{(\overline{i})}) = \mathfrak{a}_i(u, v), \quad (3.15.8)$$

$$\mathfrak{a}_j(u, v) - \mathfrak{w}_{ij}(u, v) = \mathfrak{b}(u, v) q^{sq(j-i)(-1+2[j])}, \quad (3.15.9)$$

$$q^{2-4[i]} \psi_{i-1}(u^{(i-1)}) = \psi_{i-1}(u^{(i-1, i)}) - \psi_{i-1}(u^{(i-1, i)}) \psi_i(u^{(i)}) \quad (3.15.10)$$

Chapitre 4

Vers les fonctions de corrélation

L'aboutissement de l'étude des chaînes de spins se trouve dans le calcul des fonctions de corrélation. La connaissance de ces fonctions de corrélation donne accès à toute l'information du système et permet d'obtenir des quantités physiques qui pourront être confrontées avec l'expérience. Formellement, ces fonctions s'écrivent sous la forme :

$$F(\mathcal{O}, T) = \frac{\text{tr}_{\mathcal{H}}(\mathcal{O}e^{-H/kT})}{\text{tr}_{\mathcal{H}}(e^{-H/kT})} \quad (4.0.1)$$

où \mathcal{O} est un opérateur local, $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^L V_i$ l'espace de Hilbert sur lequel H et \mathcal{O} agissent, k la constante de Boltzmann et T la température du système. Par opérateur local, nous entendons un opérateur agissant sur un petit nombre d'espaces quantiques V_i . Les entrées de la matrice de monodromie, par exemple, sont des opérateurs non locaux et agissent sur tous les espaces quantiques.

Dans le cadre de la limite de température nulle, seul l'état du vide (ou fondamental) contribue au calcul des fonctions de corrélation. En effet, le vide correspond à l'état de plus basse énergie Φ de H et de valeur propre maximale pour $e^{-H/kT}$. Les fonctions de corrélation sont alors obtenues par le calcul de la valeur moyenne de \mathcal{O} sur l'état fondamental :

$$F(\mathcal{O}, T \rightarrow 0) = \frac{\langle \Phi | \mathcal{O} | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} \quad (4.0.2)$$

Dans le cas d'un modèle où l'ansatz de Bethe algébrique est applicable, les vecteurs de Bethe sont connus et l'état fondamental est calculé à partir des équations de Bethe dans la limite thermodynamique. Les deux problèmes qu'il reste à résoudre pour obtenir une formulation de ces fonctions sont de connaître d'une part, l'action de \mathcal{O} sur l'état fondamental, et d'autre part, la valeur du produit scalaire entre deux vecteurs de Bethe.

La solution du premier problème a été introduite par le groupe de Lyon pour le modèle XXZ spin-1/2 [142]. Les opérateurs locaux sont formulés en termes des entrées de la matrice de monodromie. Cette méthode est appelée solution du **problème inverse**. Cette formulation a ensuite été généralisée pour les chaînes de spins inhomogènes, les chaînes des spins dans des représentations arbitraires de dimensions finies ainsi que pour la chaîne $sl(\mathfrak{n})$ XXZ [143]. Cette étape est cruciale pour calculer l'action des opérateurs locaux sur un état de Bethe. En effet, les relations de commutation entre les éléments de la matrice de monodromie sont connues par la relation "RTT" et l'action des opérateurs locaux se réduit alors à celle d'opérateurs non locaux.

Le second problème est le calcul du produit scalaire. Le premier élément pour la résolution de ce problème a été apporté par Gaudin en 1981 [18]. Il donne une conjecture pour la norme de la fonction d'onde de Bethe des modèles XXX et XXZ $sl(2)$. Cette formule correspond au produit scalaire d'un vecteur de Bethe, dont les paramètres satisfont les équations de Bethe, avec lui-même. Cette norme est égale au déterminant de la dérivée seconde de l'action I de Yang et Yang [145] :

$$\det\left(\frac{\partial^2 I}{\partial u_a \partial u_b}\right) \quad (4.0.3)$$

I est défini tel que $\frac{\partial I}{\partial u_a} = 0$ reproduit les équations de Bethe sous leur forme logarithmique. Cette formulation, en termes de déterminant, semble commune à tous les modèles de spins. Le produit scalaire, pour deux ensembles de paramètres distincts, a été proposé par Izergin et Korepin [146] pour $gl(2)$ et s'écrit sous la forme du produit de deux déterminants. Pour les algèbres de rang supérieur très peu de cas sont connus :

- Le produit scalaire pour la chaîne XXX- $sl(3)$, pour un choix particulier de représentation, a été proposé par Reshetikhin [147]
- Le produit scalaire pour le modèle XXZ- $gl(2|1)$ et la fonction à deux points sont étudiés en utilisant la base F [148]. Cette base permet d'écrire les entrées de la matrice de monodromie en terme du produit tensoriel d'opérateurs locaux dont la plupart sont diagonaux. L'action de ces opérateurs sur un état arbitraire peut alors être obtenue et ouvre la voie au calcul du produit scalaire.
- La norme des vecteurs de Bethe pour XXX et XXZ- $gl(\mathbf{n})$ a été définie à une constante près par Varchenko et Tarasov [149] en utilisant les solutions asymptotiques des équations q-Knizhnik-Zamolodchikov (q-KZ) en termes des vecteurs de Bethe.

La connaissance du produit scalaire (pour deux ensembles de paramètres distincts) des chaînes de spins $gl(\mathbf{n})$ reste donc encore un problème ouvert. En collaboration avec S. Pakuliak, S. Khoroshkin et E. Ragoucy, nous avons commencé l'étude du produit scalaire pour le modèle XXZ $U_q(gl(\mathbf{n}))$. Notre approche est basée sur la formulation dans la seconde réalisation de Drinfel'd des vecteurs de Bethe proposée par Pakuliak, Khoroshkin et leurs collaborateurs [89, 90, 92]. Cette formulation repose sur l'existence de deux sous-algèbres de Borel différentes reliées respectivement à la seconde réalisation de Drinfel'd et celle de Jimbo-Drinfel'd. L'écriture des vecteurs de Bethe fait alors intervenir un opérateur de projection sur l'intersection de ces deux sous-algèbres. Cette projection peut être représentée par des intégrales formelles sur les opérateurs de la seconde réalisation de Drinfel'd. Le problème se ramène alors à la commutation d'opérateurs dans la réalisation de Drinfel'd puis à une intégration. Le choix de cette réalisation est motivé par des relations de commutation plus simples que dans la base "RTT" et par l'existence d'une représentation en terme d'un déterminant du noyau de l'intégrale.

Nous allons présenter le cas du produit scalaire pour les modèles du type XXZ- $sl(2)$ dans ce formalisme. Ce résultat résulte des premiers travaux réalisés en collaboration avec S. Pakuliak, S. Khoroshkin et E. Ragoucy, et donnera lieu à une publication lorsque le cas $sl(3)$ sera résolu. Pour simplifier la présentation, nous ne parlerons pas de l'opérateur de projection sur l'intersection des deux types de sous-algèbres de Borel et renvoyons le lecteur intéressé aux articles de Pakuliak Khoroshkin et leurs collaborateurs [89, 90, 92]. Nous utiliserons seulement l'isomorphisme entre les deux réalisations introduit par Ding et Frenkel [64]

4.1 Produit scalaire $XXZ\text{-}sl(2)$ dans le formalisme des courants de Drinfeld

Une fois les vecteurs de Bethe obtenus, il est important de déterminer leurs produits scalaires. L'intérêt de ce calcul est double : il permet de vérifier que ces vecteurs forment bien un ensemble de vecteurs orthogonaux dans l'espace de Hilbert et ouvre la voie pour le calcul des fonctions de corrélation. Le produit scalaire est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Phi_n(\{u\}) &= \prod_{i=1}^n L_{12}^+(u_i)\Omega, & \bar{\Phi}_n(\{v\}) &= \bar{\Omega} \prod_{i=1}^n L_{21}^+(v_i) \\ S_n(\{v\}, \{u\}) &= \bar{\Phi}_n(\{v\})\Phi_n(\{u\}), & S_0(\{v\}, \{u\}) &= 1\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

avec Ω le vecteur de plus haut poids associé à une représentation de dimension finie de l'algèbre RLL (2.1.22) et $\bar{\Omega}$ le vecteur dual tel que $\bar{\Omega}\Omega = 1$. Les $L_{ij}^+(u)$ sont les générateurs de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ dans la formulation RLL. Le choix des modes $+$ ou $-$ est arbitraire pour une représentation de dimension finie (la charge centrale est nulle). Les relations de commutation, $[L_{12}^+(u), L_{12}^+(v)] = 0$ et $[L_{21}^+(u), L_{21}^+(v)] = 0$, nous montrent que $S_n(\{v\}, \{u\})$ est symétrique par rapport à l'ensemble de variables $\{v\}$, respectivement $\{u\}$. De plus, si le nombre de $L_{12}^+(u)$ est différent du nombre de $L_{21}^+(u)$, les relations de commutation "RLL" permettent de montrer que le produit scalaire est nul. Pour la première dérivation du produit scalaire par Izergin et Korepin [38], la dérivation est basée sur l'expression du produit scalaire en termes de la fonction de partition du modèle à 6 vertex avec des conditions aux bords du type mur de domaine, et de l'obtention de relations de récurrence entre $S_n(\{v\}, \{u\})$ et $S_{n-1}(\{v\}, \{u\})$ déterminant de façon unique ce produit scalaire. La dernière étape correspond à l'écriture du produit scalaire en termes de déterminant.

Notre approche est basée sur l'utilisation du formalisme de Drinfeld pour exprimer les vecteurs de Bethe. L'intérêt de cette approche vient du fait que les relations de commutation dans ce formalisme sont beaucoup plus simples que dans le formalisme RLL. Le coût de cette simplification correspond à la nécessité de réaliser une intégration sur l'espace complexe \mathbb{C}^{2n} . Cette intégration est équivalente à la sommation sur les permutations des $\{u\}$ et $\{v\}$ en quatre ensembles présents dans la formule de Izergin et Korepin.

4.1.1 Vecteurs de Bethe dans la réalisation de Drinfeld

Nous allons calculer les vecteurs de Bethe pour la réalisation de Drinfeld. Cette construction est due à Pakuliak et Khoroshkin [89, 90, 92]. Elle fait intervenir l'isomorphisme entre la réalisation de Drinfeld et la réalisation RLL (2.1.22) de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(n)})$ conjecturée par Drinfeld puis construite explicitement par Ding et Frenkel [64]. Pour le cas où la charge centrale est nulle, la réalisation de Drinfeld pour $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ est définie par quatre courants $\{e(u), f(u), \psi^\pm(u)\}$

satisfaisant les relations :

$$\begin{aligned}
e(u) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n u^{-n}, \quad f(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n u^{-n}, \quad \psi^\pm(u) = \sum_{n \geq 0} \psi_n^\pm u^{\mp n} \\
e(u)e(v) &= e(v)e(u) \frac{(q^2 u - v)}{(u - q^2 v)}, \quad f(u)f(v) = f(v)f(u) \frac{(q^{-2} u - v)}{(u - q^{-2} v)} \\
\psi^\pm(u)e(v) &= \frac{q^2 u - v}{u - q^2 v} e(v) \psi^\pm(u), \quad \psi^\pm(u)f(v) = \frac{q^{-2} u - v}{u - q^{-2} v} f(v) \psi^\pm(u) \\
\psi^\pm(u)\psi^\pm(v) &= \psi^\pm(v)\psi^\pm(u), \quad \psi^\pm(u)\psi^\mp(v) = \psi^\mp(v)\psi^\pm(u) \\
[e(u), f(v)] &= (q - q^{-1})^{-1} \delta\left(\frac{v}{u}\right) \left(\psi^+(v) - \psi^-(v)\right), \quad \delta(u) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u^i
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Ces deux réalisations sont reliées par la décomposition de Gauss des matrices $L^\pm(u)$ en termes des générateurs de la réalisation de Drinfel'd. Dans le cas de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$, cette décomposition est de la forme :

$$\begin{aligned}
L^\pm(u) &= \begin{pmatrix} L_{11}^\pm(u) & L_{12}^\pm(u) \\ L_{21}^\pm(u) & L_{22}^\pm(u) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (q - q^{-1})e_\pm(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_\pm)^{-1}(uq^{-2}) & 0 \\ 0 & k_\pm(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (q - q^{-1})f_\pm(u) & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (k_\pm)^{-1}(uq^{-2}) + (q - q^{-1})^2 f_\pm(u) k_\pm(u) e_\pm(u) & (q - q^{-1}) f_\pm(u) k_\pm(u) \\ (q - q^{-1}) k_\pm(u) e_\pm(u) & k_\pm(u) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où $\{e_\pm(u), f_\pm(u), k_\pm(u)\}$ sont des séries entières de u dans le cas $-$ et de u^{-1} pour le cas $+$, comme les $L^\pm(u)$ définis dans 2.1.22. L'action sur le vecteur de plus haut poids Ω pour $\{e_+(u), f_+(u), k_+(u)\}$ se déduit de cette égalité :

$$\begin{aligned}
L^\pm(u)\Omega &= \begin{pmatrix} \Lambda_1(u) & * \\ 0 & \Lambda_2(u) \end{pmatrix} \Omega \quad \text{il s'ensuit,} \\
e_+(u)\Omega &= 0, \quad f_+(u)\Omega \neq 0, \quad k_+(u)\Omega = \Lambda_2(u)\Omega \quad \text{et} \quad (k_+)^{-1}(uq^{-2})\Omega = \Lambda_1(u)\Omega
\end{aligned}$$

Les générateurs de la réalisation de Drinfeld sont reliés aux $\{e_\pm(u), f_\pm(u), k_\pm(u)\}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
e(u) &= e_+(u) - e_-(u), \quad f(u) = f_+(u) - f_-(u), \quad \psi^\pm(u) = (k^\pm(uq^{-2})k^\pm(u))^{-1}, \\
e_+(u) &= \oint \frac{dx}{x} \frac{e(x)}{1 - \frac{x}{u}} = \sum_{n \geq 0} e_n u^{-n}, \quad e_-(u) = - \oint \frac{dx}{x} \frac{e(x) \frac{u}{x}}{1 - \frac{u}{x}} = - \sum_{n < 0} e_n u^{-n}, \\
f_+(u) &= \oint \frac{dx}{x} \frac{f(x) \frac{x}{u}}{1 - \frac{x}{u}} = \sum_{n > 0} f_n u^{-n}, \quad f_-(u) = - \oint \frac{dx}{x} \frac{f(x)}{1 - \frac{u}{x}} = - \sum_{n \leq 0} f_n u^{-n}.
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Nous avons introduit la formulation intégrale en prévision de l'écriture des vecteurs de Bethe par une intégrale multiple. Cette intégrale formelle $\oint f(u) \frac{du}{u}$ d'une série de Laurent $f(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u^{-n} f_n$ doit être comprise comme égale au coefficient f_0 .

En utilisant cet isomorphisme, il est possible de réécrire les vecteurs de Bethe sous la forme suivante :

$$\Phi_n(\{u\}) = (q - q^{-1})^n \prod_{i=1}^n \left(f_+(u_i) k^+(u_i) \right) \Omega, \quad \bar{\Phi}_n(\{v\}) = (q - q^{-1})^n \bar{\Omega} \prod_{i=1}^n \left(k^+(v_i) e_+(v_i) \right).$$

En projetant les relations (4.1.2) sur les modes et en reconstruisant les courants positifs, il est possible d'obtenir les relations de commutation :

$$\begin{aligned} e_+(v) k_+(u) &= k_+(u) \left(\frac{qu - q^{-1}v}{u - v} e_+(v) - \frac{(q - q^{-1})v}{u - v} e_+(u) \right), \\ k_+(u) f_+(v) &= \left(\frac{qu - q^{-1}v}{u - v} f_+(v) - \frac{(q - q^{-1})u}{u - v} f_+(u) \right) k_+(u), \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

ou encore sous une forme plus générale :

$$\begin{aligned} e_+(v_k) \left(\prod_{i=1}^{k-1} k_+(v_i) \right) &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} k_+(v_i) \right) \left(\sum_{j=1}^k \frac{v_k}{v_j} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} (q v_i - q^{-1} v_j)}{\prod_{i=1, i \neq j}^k (v_i - v_j)} e_+(v_j) \right) \\ \left(\prod_{i=1}^{k-1} k_+(u_i) \right) f_+(u_k) &= \left(\sum_{j=1}^k \frac{\prod_{i=1}^{k-1} (q u_i - q^{-1} u_j)}{\prod_{i=1, i \neq j}^k (u_i - u_j)} f_+(u_j) \right) \left(\prod_{i=1}^{k-1} k_+(u_i) \right) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Cette généralisation se prouve par une récurrence simple. Puis, en utilisant la formulation intégrale de $e_+(v)$ et $f_+(u)$ (4.1.3) et la formule d'interpolation de Lagrange pour un polynôme $P(u) = \prod_{i=1}^{n-1} (qu_i - q^{-1}u)$ d'ordre $n - 1$:

$$P(u) = \sum_{i=1}^n P(u_i) \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{u_j - u}{u_j - u_i}. \quad (4.1.6)$$

il est maintenant possible d'écrire les vecteurs de Bethe sous la forme d'une intégrale formelle multiple sur les courants de Drinfeld :

$$\begin{aligned} \Phi_n(\{u\}) &= (q - q^{-1})^n \prod_{i=1}^n \Lambda_2(u_i) \oint \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n} Z(\{u\}; \{x\}) \left(f(x_n) \dots f(x_1) \Omega \right) \\ \bar{\Phi}_n(\{v\}) &= (q - q^{-1})^n \prod_{i=1}^n \Lambda_2(v_i) \oint \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_n}{y_n} Y(\{v\}; \{y\}) \left(\bar{\Omega} e(y_1) \dots e(y_n) \right) \\ Y(\{v\}; \{y\}) &= \prod_{i=1}^n \frac{v_i}{v_i - y_i} \prod_{j < i} \frac{qv_i - q^{-1}y_j}{v_i - y_j}, \quad Z(\{u\}; \{x\}) = Y(\{u\}; \{x\}) \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{u_i}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Avant de calculer à proprement parler le produit scalaire, nous allons discuter des propriétés de ces vecteurs de Bethe. Dans un premier temps, nous introduisons l'opérateur de symétrisation :

$$\text{Sym}_{\{u\}}(F(\{u\})) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S^n} F(\{u\}^\sigma), \quad (4.1.8)$$

où $n = \text{card}(\{u\})$ est le cardinal de l'ensemble de variables $\{u\}$, S^n le groupe des permutations de n éléments et $\{u\}^\sigma = \{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}\}$ une permutation de l'ensemble de variables ordonnées $\{u\}$. Cet opérateur est un projecteur :

$$\text{Sym}_{\{u\}} \text{Sym}_{\{u\}} = \text{Sym}_{\{u\}}. \quad (4.1.9)$$

Le vecteur de Bethe dans la réalisation RLL étant symétrique par rapport à l'ensemble de variables $\{u\}$, donc invariant sous l'action de cet opérateur, il en est de même dans le cas de la réalisation de Drinfeld. Cependant, le noyau $Y(\{u\}; \{x\})$ est clairement non symétrique par rapport aux variables $\{u\}$. Cette asymétrie se compense en réordonnant les variables d'intégration (i.e en faisant commuter les courants et en réarrangeant les fonctions engendrées avec le noyau). Nous allons montrer comment réécrire ces vecteurs pour que cette symétrie soit explicite. Afin de ne plus avoir à prendre en compte l'ordre des $\{x\}$ et des $\{y\}$, nous allons symétriser les vecteurs de Bethe pour ces deux ensembles de variables. Introduisons le symétriseur q -déformé :

$$\text{Sym}_{\{x\}}^q \left(F(\{x\}) \right) = \prod_{i < j} \frac{qx_i - q^{-1}x_j}{x_i - x_j} \text{Sym}_{\{x\}} \left(\prod_{i < j} \frac{x_i - x_j}{qx_i - q^{-1}x_j} F(\{x\}) \right) \quad (4.1.10)$$

Il est possible de montrer, en utilisant les relations de commutation (4.1.2), que les produits de courants de Drinfeld :

$$e(y_1) \dots e(y_n), \quad f(x_n) \dots f(x_1) \quad (4.1.11)$$

sont invariants sous l'action de ce q -symétriseur. Nous allons utiliser l'égalité suivante :

$$\text{Sym}_{\{x\}} \left(F(\{x\}) \text{Sym}_{\{x\}}^q \left(G(\{x\}) \right) \right) = \text{Sym}_{\{x\}}^{q^{-1}} \left(F(\{x\}) \right) \text{Sym}_{\{x\}}^q \left(G(\{x\}) \right) \quad (4.1.12)$$

Le vecteur de Bethe devant globalement être indépendant des $\{x\}$ et des $\{y\}$, la version symétrisée s'écrit de la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_n(\{u\}) &= (q - q^{-1})^n \prod_{i=1}^n \Lambda_2(u_i) \oint \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n} \text{Sym}_{\{x\}}^{q^{-1}} \left(Z(\{u\}; \{x\}) \right) \left(f(x_n) \dots f(x_1) \Omega \right), \\ \bar{\Phi}_n(\{v\}) &= (q - q^{-1})^n \prod_{i=1}^n \Lambda_2(v_i) \oint \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_n}{y_n} \text{Sym}_{\{y\}}^{q^{-1}} \left(Y(\{v\}; \{y\}) \right) \left(\bar{\Omega} e(y_1) \dots e(y_n) \right). \end{aligned}$$

Cette forme étant indépendante de l'ordre des $\{x\}$ et des $\{y\}$ et devant être symétrique par rapport à $\{u\}$ et $\{v\}$ il s'ensuit l'identité :

$$\begin{aligned} \text{Sym}_{\{u\}} \left(\text{Sym}_{\{x\}}^{q^{-1}} \left(Z(\{u\}; \{x\}) \right) \right) &= \text{Sym}_{\{x\}}^{q^{-1}} \left(Z(\{u\}; \{x\}) \right) \\ \text{Sym}_{\{v\}} \left(\text{Sym}_{\{y\}}^{q^{-1}} \left(Y(\{v\}; \{y\}) \right) \right) &= \text{Sym}_{\{y\}}^{q^{-1}} \left(Y(\{v\}; \{y\}) \right) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Ce résultat apparaît avec une autre preuve dans [89].

4.1.2 Produit scalaire

Formulation intégrale

En utilisant la réalisation de Drinfel'd que nous venons d'introduire, le produit scalaire s'écrit :

$$\begin{aligned} S_n(\{v\}, \{u\}) &= (q - q^{-1})^{2n} \prod_{i=1}^n \Lambda_2(u_i) \Lambda_2(v_i) \\ &\times \oint \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_n}{y_n} \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n} \text{Sym}_{\{x\}}^{q^{-1}} \left(Z(\{u\}; \{x\}) \right) \text{Sym}_{\{y\}}^{q^{-1}} \left(Y(\{v\}; \{y\}) \right) \\ &\times \left(\bar{\Omega} e(y_1) \dots e(y_n) f(x_n) \dots f(x_1) \Omega \right) \end{aligned}$$

La partie algébrique peut se calculer simplement grâce aux relations de commutation contrairement au cas de la réalisation RLL. Le calcul est encore simplifié par l'utilisation de la q-symétrisation : dans ce cas, il suffit de faire commuter chaque $e(y_i)$ avec $f(x_i)$ pour donner les $\psi^\pm(x_i)$. Les autres possibilités correspondent aux termes engendrés par q-symétrisation :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} e(y_1) \dots e(y_n) \text{Sym}_{\{x\}}^q (f(x_n) \dots f(x_1)) \Omega &= \\ &= (q - q^{-1})^{-n} \text{Sym}_{\{x\}}^q \left(\prod_{i < j} \frac{q^{-1}x_i - qx_j}{qx_i - q^{-1}x_j} \prod_{i=1}^n \delta\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \right) \prod_{i=1}^n \bar{\Omega}(\psi^+(x_i) - \psi^-(x_i)) \Omega \\ &= (q - q^{-1})^{-n} \prod_{i < j} \frac{q^{-1}x_i - qx_j}{qx_i - q^{-1}x_j} \text{Sym}_{\{x\}}^{q^{-1}} \left(\prod_{i=1}^n \delta\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \right) \prod_{i=1}^n \bar{\Omega}(\psi^+(x_i) - \psi^-(x_i)) \Omega \end{aligned}$$

La seconde écriture est obtenue par l'utilisation de la définition de la q-symétrisation. Les relations de commutation génèrent des $\psi^-(u)$, cependant l'intégration correspond à garder seulement les modes strictement positifs des générateurs de Drinfel'd, donc leur contribution est nulle :

$$\prod_{i=1}^n \bar{\Omega}(\psi^+(x_i) - \psi^-(x_i)) \Omega \simeq \prod_{i=1}^n \frac{\Lambda_1(x_i)}{\Lambda_2(x_i)}. \quad (4.1.14)$$

En utilisant la propriété des fonctions delta :

$$\oint \frac{dy}{y} f(y) \delta\left(\frac{y}{x}\right) = f(x), \quad (4.1.15)$$

nous pouvons réduire le produit scalaire à l'intégration sur un seul ensemble de variables :

$$\begin{aligned} S_n(\{v\}, \{u\}) &= (q - q^{-1})^n \prod_{i=1}^n \frac{\Lambda_2(u_i) \Lambda_2(v_i)}{u_i} \\ &\times \oint dx_1 \dots dx_n \text{Sym}_{\{x\}}^{q^{-1}} \left(Y(\{u\}; \{x\}) \right) \text{Sym}_{\{x\}}^{q^{-1}} \left(Y(\{v\}; \{x\}) \right) \prod_{i=1}^n \frac{\Lambda_1(x_i)}{\Lambda_2(x_i)}. \end{aligned}$$

Cette formule peut se réécrire sous la forme du produit de deux déterminants. Cette étape, hautement non triviale repose sur l'identité :

$$\text{Sym}_{\{x\}}^{q^{-1}}\left(Y(\{u\}; \{x\})\right) = \prod_{i=1}^n u_i \prod_{i < j} \frac{x_i - x_j}{qx_i - q^{-1}x_j} \mathcal{Z}(\bar{u}; \bar{x}) \quad (4.1.16)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\bar{u}; \bar{x}) &= \frac{\prod_{i,j}(qu_i - q^{-1}x_j)}{\prod_{i < j}(u_i - u_j)(x_j - x_i)} \det M(\{u\}, \{x\}) \\ M_{i,j}(\{u\}, \{x\}) &= M(u_i, x_j) = \frac{1}{(u_i - x_j)(qu_i - q^{-1}x_j)} \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Pour prouver cette identité, nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.1.1. *Soit*

$$c_i^{(n)} = \prod_{j=1}^n (u_i - x_j) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n (u_i - u_j)^{-1}. \quad (4.1.18)$$

Alors pour $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{i=1}^n c_i^{(n)} M(u_i, x_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (qx_k - x_j q^{-1}) \prod_{k=1}^n (qu_k - x_j q^{-1})^{-1}. \quad (4.1.19)$$

Proof: Ce lemme se prouve en considérant l'intégrale suivante :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C} \setminus \{\infty\}} \frac{dz}{(z - x_j)(qz - x_j q^{-1})} \prod_{s=1}^n \frac{z - x_s}{z - u_s}, \quad (4.1.20)$$

L'intégrant possède des pôles en $z = u_s$ et $z = x_j q^{-2}$. De plus, la valeur asymptotique $z \rightarrow \infty$ étant nulle, la somme de tous les résidus doit l'être aussi. Le calcul des résidus et leur annulation donnent le lemme. ■

Le déterminant d'une matrice $M(\{u\}, \{x\})$ ayant comme entrées $M(u_i, x_j)$ peut s'écrire, selon la formule de Cramer, comme une anti-symétrisation :

$$\begin{aligned} \det M(\{u\}, \{x\}) &= \text{Asym}_{\{x\}} \left(\prod_{i=1}^n M(u_i, x_i) \right), \\ \text{Asym}_{\{u\}}(F(\{u\})) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S^n} \text{sign}(\sigma) F(\{u\}^\sigma), \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

où $\text{sign}(\sigma)$ est le signe de la permutation. De plus, le déterminant est invariant par l'ajout, pour une ligne, d'une combinaison linéaire des autres lignes. Considérons la transformation pour chaque ligne l de M :

$$M'(u_l, x_j) = \sum_{i=1}^l \frac{c_i^l}{c_l^l} M(u_i, x_j) = \frac{1}{c_l^l} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^l (qx_k - x_j q^{-1}) \prod_{k=1}^l (qu_k - x_j q^{-1})^{-1}. \quad (4.1.22)$$

Le déterminant peut s'écrire avec quelques manipulations sur les produits :

$$\det M(\{u\}, \{x\}) = \det M'(\{u\}, \{x\}) = \text{Asym}_{\{x\}} \left(\frac{\prod_{i < j} (qx_i - x_j q^{-1})(u_j - u_i)}{\prod_{i \leq j} (qu_i - q^{-1}x_j)(u_j - x_i)} \right).$$

En remarquant, grâce au déterminant de Vandermonde, que $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$ est antisymétrique :

$$\text{Asym}_{\{x\}} \left(\prod_{i=1}^n (x_i)^{i-1} \right) = \prod_{i < j} (x_j - x_i) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i < j} (x_i - x_j) \quad (4.1.23)$$

et en utilisant la formule pour $G(\{x\})$ antisymétrique. :

$$\text{Asym}_{\{x\}}(F(\{x\})G(\{x\})) = G(\{x\})\text{Sym}_{\{x\}}(F(\{x\}))$$

nous obtenons :

$$\det M(\{u\}, \{x\}) = \frac{\prod_{i < j} (u_j - u_i)(x_i - x_j)}{\prod_{i=1}^n u_i \prod_{i,j} (qu_j - q^{-1}x_i)} \text{Sym}_{\{x\}} \left(Y(\{u\}, \{x\}) \prod_{i < j} \frac{x_i - x_j}{q^{-1}x_i - qx_j} \right).$$

De par l'égalité (4.1.10), nous retrouvons la formule (4.1.16). Il s'ensuit la forme intégrale du produit scalaire :

$$\begin{aligned} S_n(\{v\}, \{u\}) &= (q - q^{-1})^n \prod_{i=1}^n \Lambda_2(u_i) \Lambda_2(v_i) v_i \prod_{i < j} (u_i - u_j)^{-1} (v_j - v_i)^{-1} \times \\ &\times \oint dx_1 \cdots dx_n \prod_{i \neq j} \frac{(qu_i - q^{-1}x_j)(qv_i - q^{-1}x_j)}{(qx_i - q^{-1}x_j)} \det M(\{v\}; \{x\}) \det M(\{u\}; \{x\}) \prod_{i=1}^n \frac{\Lambda_1(x_i)}{\Lambda_2(x_i)}. \end{aligned}$$

Se pose la question de comment procéder à cette intégration sur les x_j . Il est possible de montrer que les seuls pôles contribuant à l'intégration sont les pôles en u_i et v_i . Nous ne prouverons pas ici cette proposition, mais dans le cas d'une représentation de plus haut poids de dimension finie, elle s'avère vraie. Ce point a été prouvé par Slavnov (communication privée) en utilisant les polynômes de Drinfeld et en déplaçant les contours d'intégration à partir des pôles de ce polynôme.

Formule de Izergin-Korepin

Nous pouvons maintenant retrouver la formule de Izergin-Korepin en calculant les résidus des x_j en u_i et v_j .

Proposition 4.1.2. *Le produit scalaire des vecteurs de Bethe universels $S_n(\{v\}, \{u\})$, défini par la formule (4.1.24), est donné par la somme :*

$$\begin{aligned} S_n(\{v\}, \{u\}) &= \prod_i v_i \prod_{i < j} g(u_i, u_j)^{-1} g(v_i, v_j)^{-1} \\ &\times \sum_{\substack{\beta \cup \bar{\beta} = (1, \dots, n) \\ \gamma \cup \bar{\gamma} = (1, \dots, n) \\ \text{card}(\beta) = \text{card}(\gamma) = m \in \{0, 1, \dots, n\}}} (-1)^{p(\beta, \bar{\beta}) + p(\gamma, \bar{\gamma})} \prod_{\substack{c \in \gamma \\ b \in \bar{\beta}}} h(v_c, u_b) \prod_{\substack{c' \in \gamma \\ c' \in \bar{\gamma}}} h(v_c, v_{c'}) \prod_{\substack{b' \in \bar{\beta} \\ b \in \beta}} h(u_{b'}, u_b) \prod_{\substack{b' \in \bar{\beta} \\ c' \in \bar{\gamma}}} h(u_{b'}, v_{c'}) \\ &\times \det M(\{v\}_\gamma, \{u\}_\beta) \det M(\{u\}_{\beta'}, \{v\}_{\gamma'}) \prod_{c' \in \bar{\gamma}} \Lambda_1(v_{c'}) \prod_{c \in \gamma} \Lambda_2(v_c) \prod_{b' \in \bar{\beta}} \Lambda_1(u_{b'}) \prod_{b \in \beta} \Lambda_2(u_b) \end{aligned}$$

où $g(x, y) = (x - y)$ et $h(x, y) = (qx - q^{-1}y)$, $\beta, \bar{\beta}$ et $\gamma, \bar{\gamma}$ sont des ensembles ordonnés correspondant aux partitions de l'ensemble des indices $(1, \dots, n)$ tel que le cardinal de β est égal au cardinal de γ : $\text{card}(\beta) = \text{card}(\gamma) = m$ avec $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. $p(\beta, \bar{\beta})$ est la parité de la permutation de l'ensemble $(1, \dots, n) \rightarrow (\beta, \bar{\beta})$ et de même pour $p(\gamma, \bar{\gamma})$.

Notre formulation permet donc de retrouver le résultat de Izergin-Korepin. Un des avantages de cette formulation vient du fait que la représentation de plus haut poids de l'algèbre $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$ n'est pas déterminée, et que l'obtention de la formule de Izergin-Korepin ne fait pas intervenir le calcul explicite de la fonction de partition du modèle à 6 vertex. Le calcul de cette dernière demande de spécifier la représentation du modèle. De plus, Slavnov nous a fait remarquer que la formulation intégrale peut se réécrire sous la forme d'un seul déterminant et permet de retrouver sa formule lorsqu'un ensemble des paramètres des vecteurs de Bethe est solution des équations de Bethe [150]. Nous espérons pouvoir étendre cette procédure pour les algèbres de rang supérieur.

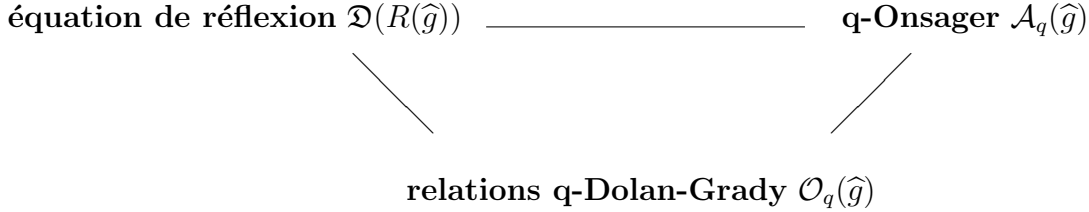
Chapitre 5

Nouvelle approche pour les modèles avec bords

Dans ce chapitre nous nous intéresserons aux modèles intégrables avec bords. L'étape essentielle pour commencer le calcul de quantités physiques est d'identifier les symétries cachées de ces modèles. De même que l'introduction des groupes quantiques a permis de développer notre connaissance sur les symétries des modèles périodiques (chaînes de spins) ou sur la ligne (théorie des champs), l'introduction de l'équation de réflexion [45, 46] apparaît comme l'élément clef pour l'étude des modèles avec bords. Trouver des solutions de cette dernière et déterminer les modèles reliés à chacune de ces solutions présentent donc un grand intérêt. Pour les théories des champs, le processus de diffusion d'une particule avec le bord est décrit par une solution de l'équation de réflexion, et pour les chaînes de spins, ces solutions permettent de construire les matrices de transfert. Les solutions scalaires de cette équation peuvent être obtenues par force brute pour les cas simples (voir au chapitre 3), mais dans les cas plus complexes la résolution devient vite inextricable. Par analogie avec les algèbres quantiques, où l'existence de la quantification des algèbres enveloppantes $\mathcal{U}(g)$ et $\mathcal{U}(\widehat{g})$ de Drinfel'd-Jimbo et celle d'une structure de Hopf associée permettent la construction des matrices R à partir de relations d'entrelacement sur les générateurs. Il est donc d'un grand intérêt de déterminer l'équivalent pour l'algèbre de réflexion. De plus, pour les chaînes de spins, l'obtention des vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de transfert repose sur la connaissance de la théorie des représentations de l'algèbre de réflexion. Comme nous l'avons préalablement discuté, l'ABA requiert la connaissance d'une représentation de plus haut poids et cette contrainte impose un choix spécifique de conditions aux bords. Pour aller au-delà de cette contrainte, il faut approfondir nos connaissances sur l'algèbre de réflexion ainsi que sa théorie des représentations. L'approche est la suivante :

- Définir la réalisation de l'algèbre de réflexion $\mathfrak{D}(R)$ considérée en terme d'un minimum d'opérateurs . $\mathcal{O}_q(\widehat{g})$ (défini par la suite) semble être un bon candidat (pour le cas de l'algèbre "RTT", cette étape est équivalente à la formulation de $U_q(\widehat{g})$ dans la quantification de Jimbo-Drinfel'd).
- Construire l'isomorphisme entre la réalisation $\mathcal{O}_q(\widehat{g})$ et l'algèbre de réflexion ([151] pour $\widehat{g} = \widehat{sl(2)}$). Cette étape est essentielle pour construire la théorie des représentations de $\mathfrak{D}(R)$ à partir de celle de $\mathcal{O}_q(\widehat{g})$.
- Etudier la théorie des représentations de cette algèbre (Pour $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$, cette théorie est reliée aux algèbres tridiagonales [152, 153, 154]).

Dans les cas du modèle de sin-Gordon et pour la chaîne de spins XXZ- $sl(2)$, les travaux de Baseilhac-Kozumi-Shigechi [155, 156, 157, 158, 132, 151] mettent en évidence une nouvelle réalisation pour l'algèbre de réflexion appelée algèbre q-Onsager $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$. Cette algèbre admet comme limite, pour $q \rightarrow 1$, l'algèbre de Onsager que ce dernier a utilisée pour trouver les deux plus grandes valeurs propres de la fonction de partition du modèle d'Ising à deux dimensions [30]. Cette algèbre peut être engendrée par deux opérateurs A_0 et A_1 , sujets aux relations dites de Dolan-Grady (DG) [159]. De même, $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$ peut être engendré par deux opérateurs A et A^* , obéissant aux relations de DG déformé $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$. Pour l'instant, cet isomorphisme prouvé dans [151], n'est pas explicite. Sa construction fera l'objet d'une publication en collaboration avec P. Baseilhac. Pour bien clarifier la différence entre chaque réalisation de l'algèbre de réflexion, nous utilisons un schéma identique à celui des groupes quantiques (fig. 2.1). Les relations entre ces différentes réalisations sont connues seulement pour le cas $\widehat{g} = \widehat{sl(2)}$. Pour le cas général, $\mathcal{A}_q(\widehat{g})$ reste à construire et bien que nous ayons construit $\mathcal{O}_q(\widehat{g})$ (voir dans la suite du chapitre) l'isomorphisme avec $\mathfrak{D}(R(\widehat{g}))$ reste pour l'instant une conjecture.



La première étape de ce programme peut être considérée à partir des travaux réalisés pour les théories de Toda affines quantiques. Lors de cette thèse, les modèles de Toda affine n'ont pas été, à proprement parler, étudiés. Nous ne chercherons donc pas à entrer dans le détail de ces modèles. Cependant, les structures algébriques reliées à ces modèles étant les mêmes que pour les chaînes de spins, il est important de mettre en évidence le potentiel des techniques développées pour les théories des champs quantiques (méthode des charges non locales, bootstrap, perturbation des théories conformes,...) dans le cadre des chaînes de spins. Les informations obtenues peuvent ouvrir de nouvelles voies pour l'étude des chaînes de spins, et vice et versa. Plus précisément, pour l'étude des chaînes de spins ouvertes, les solutions de l'équation de réflexion peuvent être obtenues à partir d'équations d'entrelacement pour les représentations d'un coïdéal de l'algèbre quantique considérée. La connaissance de ces co-idéaux et l'étude de leurs théories des représentations ouvrent la voie vers l'étude des chaînes de spins avec bords au-delà de l'utilisation de l'ansatz de Bethe (qui s'avère inefficace pour certains choix de conditions aux bords). La méthode des charges non locales développée par Bernard et Leclair, [160] à partir des travaux de Zamolodchikov [162] sur l'étude des théories des champs quantiques massifs, comme perturbation de la théorie conforme [163] associée, sera brièvement discutée ainsi que la généralisation aux modèles avec bords. Cette discussion aboutira à la définition de $\mathcal{O}_q(\widehat{g})$ comme une algèbre des charges non locales des théories de Toda affine avec bord. Cette algèbre est liée à l'équation de réflexion trigonométrique des algèbres affines simples et une compréhension plus profonde de ce lien reste pour l'instant ouverte et de grand intérêt. De

plus, cette algèbre permet de retrouver, d'un point de vue algébrique, les contraintes sur les paramètres de bord des théories de Toda affine. Ces résultats ont donné lieu à une publication en collaboration avec P. Baseilhac reproduite à la fin de ce chapitre.

Les propriétés de l'algèbre d'Onsager seront présentées ainsi que ses représentations de dimensions finies. Nous mettrons en évidence le lien entre $\mathcal{O}_q(a_1^{(1)})$ et les relations de DG ainsi que de $\mathcal{O}_q(a_n^{(1)})$, $n > 1$ et la généralisation des relations DG pour $sl(n+1)$. Nous ferons un état des lieux des connaissances sur la version q-déformée et présenterons dans le cas le plus simple (paire de Leonard) la théorie des représentations associée .

5.1 Modèle de Toda affine avec bord

Modèle de Toda affine sur la ligne.

Les théories de Toda affine sont des modèles de théories de champs quantiques relativistes intégrables en 1 + 1 dimensions. L'action de ces dernières pour le cas sans bord est de la forme :

$$S_L = \frac{1}{4\pi} \int dz d\bar{z} \left(\partial\phi \cdot \bar{\partial}\phi + \lambda \sum_{j=0}^n n_j \exp \left(-i\beta \frac{1}{|\alpha_j|^2} \alpha_j \cdot \phi \right) \right), \quad (5.1.1)$$

où $\phi(x, t) = (\phi_1(x, t), \dots, \phi_n(x, t))$ est un champ bosonique à n composantes, les α_i sont les racines simples de \hat{g} , les n_i sont les labels de Kac, β et λ sont respectivement la constante de couplage et l'échelle de masse, $z = x + it$ et $\bar{z} = x - it$. Le choix des α_i et n_i (qui peut être considéré comme arbitraire dans un premier temps) permet d'écrire la relation de courbure nulle pour les théories de Toda affine et donc d'assurer leur intégrabilité par l'existence d'une infinité de charges locales conservées [164]. Les informations à extraire de ces théories sont le spectre de masse, i.e. les particules présentes dans la théorie, ou encore les matrices S décrivant la diffusion de ces particules sur la ligne. Ces matrices sont des solutions de l'équation de Yang-Baxter. Afin de déterminer ces matrices sans passer par une résolution directe de l'équation de YB, il est judicieux de trouver les symétries du modèle. Chaque théorie de Toda affine est associée à une algèbre de Lie affine \hat{g} et possède comme symétrie l'algèbre quantique $\mathcal{U}_q(\hat{g})$ au niveau zero (i.e. charge centrale nulle) [160]. Cette symétrie est construite par la perturbation du modèle de masse nulle ($\lambda=0$) qui possède la symétrie conforme [163]. La méthode proposée par Zamolodchikov [162] consiste à chercher des quantités conservées telles que leurs limites $\lambda \rightarrow 0$ donnent les quantités conservées de la symétrie conforme. La nouvelle symétrie de groupe quantique est alors engendrée au premier ordre de perturbation [160] par les charges topologiques :

$$T_i = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \alpha_i \cdot \partial_x \phi \quad (5.1.2)$$

ainsi que par les quantités conservées non locales :

$$Q_i = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (J_i + \lambda H_i), \quad \bar{Q}_i = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\bar{J}_i + \lambda \bar{H}_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5.1.3)$$

avec

$$\begin{aligned}
J_i &= : \exp\left(\frac{2i}{\beta}\alpha_i \cdot \psi\right) :, \quad \bar{J}_i = : \exp\left(\frac{2i}{\beta}\alpha_i \cdot \bar{\psi}\right) :, \\
H_i &= -\gamma : \exp\left(i\left(\frac{2}{\beta} - \beta\right)\alpha_i \cdot \psi - i\beta\alpha_i \cdot \bar{\psi}\right) :, \\
\bar{H}_i &= -\gamma : \exp\left(i\left(\frac{2}{\beta} - \beta\right)\alpha_i \cdot \bar{\psi} - i\beta\alpha_i \cdot \psi\right) :,
\end{aligned}$$

où $\gamma = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 2}$, $\phi = \psi + \bar{\psi}$ correspondent à la décomposition du champ bosonique libre en une partie holomorphe et une autre antiholomorphe usuelle pour une théorie conforme et : : l'ordre normal. Les J_i correspondent aux courants conservés de la théorie conforme et les H_i à leur correction au premier ordre de la théorie des perturbations. Les relations de commutation entre les $\{T_i, Q_i, \bar{Q}_i\}$ sont :

$$\begin{aligned}
[T_i, Q_j] &= a_{ij}Q_j, \quad [T_i, \bar{Q}_j] = -a_{ij}\bar{Q}_j, \quad Q_i\bar{Q}_j - q^{a_{ij}}\bar{Q}_jQ_i = \delta_{ij}\frac{(1 - q^{2T_i})}{1 - q_i^2}, \\
\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} (Q_i)^{1-a_{ij}-r} Q_j (Q_i)^r &= 0, \\
\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} (\bar{Q}_i)^{1-a_{ij}-r} \bar{Q}_j (\bar{Q}_i)^r &= 0,
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

où $a_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j$, $q = \exp(2i\pi \frac{1-\beta^2}{\beta^2})$ et $q_i = q^{d_i}$. Cette algèbre est isomorphe à $\mathcal{U}_q(\hat{g})$. La formulation en termes des générateurs de Serre Chevalley $\{X_i^\pm, H_i\}$ se fait par l'identification :

$$T_i \rightarrow \frac{H_i}{2}, \quad Q_i \rightarrow cX_i^+ q^{\frac{H_i}{2}} \quad \text{et} \quad \bar{Q}_i \rightarrow cX_i^- q^{\frac{H_i}{2}}, \tag{5.1.5}$$

où $c = \sqrt{\lambda\gamma(q_i^2 - 1)}/2\pi$. Les matrices S de la théorie peuvent être construites par des techniques algébriques faisant intervenir cette symétrie. Les solitons de la théorie sont classés par multiplets ou représentations d'évaluations de $\mathcal{U}_q(\hat{g})$. Soit $\rho(a, u) : \mathcal{U}_q(\hat{g}) \rightarrow \text{End}(V_u^a)$ une telle représentation. Le a correspond au type de multiplets et u à la rapidité. La matrice S correspond à l'interaction de deux solitons.

$$S^{ab}(u - v) : V_u^a \otimes V_v^b \rightarrow V_v^b \otimes V_u^a \tag{5.1.6}$$

La symétrie du modèle implique que cette matrice commute avec les opérateurs non locaux, ou encore qu'elle soit un entrelaceur pour le produit tensoriel de deux représentations :

$$S^{ab}(u - v)(\rho_{a,u} \otimes \rho_{b,v})\Delta(x) = (\rho_{b,v} \otimes \rho_{a,u})\Delta(x)S^{ab}(u - v), \quad x \in \mathcal{U}_q(\hat{g}). \tag{5.1.7}$$

Cette équation pour des représentations irréductibles détermine la matrice S de façon unique à une constante près (Lemme de Schur). Pour trois représentations $V_u^a \otimes V_v^b \otimes V_w^c$ ou encore l'interaction de trois solitons, il est possible de construire cette interaction à partir de la matrice

S pour deux solitons de deux façons différentes :

$$\begin{array}{ccccc}
V_u^a \otimes V_v^b \otimes V_w^c & \xrightarrow{S^{ab}(u-v) \otimes \text{id}} & V_v^b \otimes V_u^a \otimes V_w^c & \xrightarrow{\text{id} \otimes S^{ac}(u-w)} & V_v^b \otimes V_w^c \otimes V_u^a \\
\downarrow \text{id} \otimes S^{bc}(v-w) & & & & \downarrow S^{bc}(v-w) \otimes \text{id} \\
V_u^a \otimes V_w^c \otimes V_v^b & \xrightarrow{S^{ac}(u-w) \otimes \text{id}} & V_w^c \otimes V_u^a \otimes V_v^b & \xrightarrow{\text{id} \otimes S^{ab}(u-v)} & V_w^c \otimes V_v^b \otimes V_u^a
\end{array} \quad (5.1.8)$$

Comme ce diagramme est commutatif, la matrice S doit être solution de l'équation de Yang-Baxter (1.0.26). Pour le produit tensoriel de deux représentations fondamentales, la relation d'entrelacement fut résolue par Jimbo [165] pour les algèbres quantiques affines non-exceptionnelles. Il est alors possible de déterminer les matrices S à partir de ces solutions à un facteur multiplicatif près. Ce facteur est déterminé, en partie, en demandant que la matrice S soit unitaire et satisfasse la relation de croisement.

Modèles de Toda affine sur la demi-ligne

Il est aussi possible de considérer des modèles de Toda affine intégrables avec bord. Il faut alors ajouter à l'action un terme décrivant la perturbation sur le bord. L'action, définie sur la demi-ligne, est de la forme :

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{4\pi} \int_{x < 0} d^2z \left(\partial\phi \bar{\partial}\phi + \lambda \sum_{j=0}^n n_j \exp \left(-i\hat{\beta} \frac{1}{|\alpha_j|^2} \alpha_j \cdot \phi \right) \right) \\
& + \frac{\lambda_b}{2\pi} \int dt \sum_{j=0}^n \epsilon_j \exp \left(-i\frac{\hat{\beta}}{2} \alpha_j \cdot \phi(0, t) \right), \quad (5.1.9)
\end{aligned}$$

où les ϵ_i et λ_b sont des constantes. Pour certaines valeurs de ϵ_i , ces modèles restent intégrables dans le cas classique [166] et quantique [116, 167]. Cependant, la présence d'un bord brise la symétrie globale $\mathcal{U}_q(\widehat{g})$. Il est montré [168, 121, 169] qu'une sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\widehat{g})$, que nous appellerons \mathcal{B} , persiste comme symétrie du modèle. Cette symétrie permet d'étudier les amplitudes de diffusion avec le bord.

Le processus de diffusion sur le bord est décrit par un nouvel opérateur appelé "matrice de réflexion" [46] :

$$K^a(u) : V_u^a \rightarrow V_{-u}^{\bar{a}}. \quad (5.1.10)$$

Le changement de signe correspond au changement de direction de la particule et \bar{a} sous-entend que la particule peut changer de multiplet (à masse égale). En considérant l'interaction de deux solitons avec le bord, il est possible de décrire leur réflexion de deux manières différentes :

$$\begin{array}{ccccccc}
V_u^a \otimes V_v^b & \xrightarrow{\text{id} \otimes K^b(v)} & V_u^a \otimes V_{-v}^{\bar{b}} & \xrightarrow{S^{\bar{a}\bar{b}}(u+v)} & V_{-v}^{\bar{b}} \otimes V_u^a & \xrightarrow{\text{id} \otimes K^a(u)} & V_{-v}^{\bar{b}} \otimes V_{-u}^{\bar{a}} \\
\downarrow S^{ab}(u-v) & & & & & & \downarrow S^{\bar{b}\bar{a}}(u-v) \\
V_v^b \otimes V_u^a & \xrightarrow{\text{id} \otimes K^a(u)} & V_v^b \otimes V_{-u}^{\bar{a}} & \xrightarrow{S^{\bar{b}\bar{a}}(u+v)} & V_{-u}^{\bar{a}} \otimes V_v^b & \xrightarrow{\text{id} \otimes K^b(v)} & V_{-u}^{\bar{a}} \otimes V_{-v}^{\bar{b}}
\end{array} \quad (5.1.11)$$

Ce diagramme est équivalent à l'équation de réflexion. Comme nous l'avons discuté précédemment, les matrices $K(u)$ peuvent être trouvées en résolvant cette équation. Cependant, la connaissance

de la symétrie \mathcal{B} du modèle simplifie grandement la recherche de $K(u)$. Pour $X \in \mathcal{B} \subset \mathcal{U}_q(\hat{g})$, la symétrie se traduit par la relation d'entrelacement :

$$K^a(u)\rho_u^a(X) = \rho_{-u}^{\bar{a}}(X)K^a(u). \quad (5.1.12)$$

Afin de pouvoir considérer des états avec plusieurs particules, \mathcal{B} doit être un coidéal à droite de $\mathcal{U}_q(\hat{g})$:

$$\Delta(X) \in \mathcal{U}_q(\hat{g}) \otimes \mathcal{B}, \quad (5.1.13)$$

Il est possible d'ajouter un degré de liberté associé au bord avec la relation d'entrelacement :

$$K^{a[b]}(u)(\rho_u^a \otimes \rho^{[b]})(\Delta(X)) = (\rho_{-u}^{\bar{a}} \otimes \rho^{[b]})(\Delta(X))K^{a[b]}(u), \quad X \in \mathcal{B} \quad (5.1.14)$$

où $[b]$ correspond à un multiplet du bord. Cette équation pour des représentations irréductibles détermine la matrice $K(u)$ de façon unique à une constante près (Lemma de Schur). Il a été montré [168, 121, 169] que la sous-algèbre \mathcal{B} est engendrée par les charges suivantes :

$$A_i = Q_i + \bar{Q}_i + \hat{\epsilon}_i q_i^{T_i}, \quad (5.1.15)$$

où $\hat{\epsilon}_i$ est proportionnel à ϵ_i (voir article 5.4). Ces opérateurs forment bien un coidéal de $\mathcal{U}_q(\hat{g})$:

$$\Delta(A_i) = (Q_i + \bar{Q}_i) \otimes 1 + q_i^{T_i} \otimes A_i. \quad (5.1.16)$$

Le problème à résoudre, au vu de ces résultats, était d'identifier les relations sur ces opérateurs formant une algèbre (i.e. des relations de fermeture) que nous notons $\mathcal{O}_q(\hat{g})$. Les générateurs de cette algèbre peuvent être réalisés (en spécifiant les constantes ρ_{ij}^k de $\mathcal{O}_q(\hat{g})$) par la sous algèbre \mathcal{B} . La solution fut élaborée en collaboration avec P. Baseilhac pendant la dernière année de cette thèse.

Définition 5.1.1. Soit $\{a_{ij}\}$ la matrice de Cartan de l'algèbre de Lie affine \hat{g} . Soit d_i tel que $d_i a_{ij}$ soit symétrique. Nous définissons $\bar{a}_{ij} = \max(a_{ij}, a_{ji})$ et $\bar{q}_{ij} = q^{\min(d_i, d_j)}$. L'algèbre q -Dolan-Grady généralisée $\mathcal{O}_q(\hat{g})$ est une algèbre associative avec l'unité 1, les éléments A_i et les scalaires $\rho_{ij}^k, \gamma_{ij}^{kl} \in \mathbb{C}$ avec $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $k \in \{0, 1, \dots, [-\frac{\bar{a}_{ij}}{2}] - 1\}$ où $[a]$ correspond à la troncature à l'unité de a et $l \in \{0, 1, \dots, -\bar{a}_{ij} - 1 - 2k\}$ (k et l sont des entiers positifs). Soumis aux relations pour $i \neq j$:

$$\sum_{r=0}^{1-\bar{a}_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - \bar{a}_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{\bar{q}_{ij}} A_i^{1-\bar{a}_{ij}-r} A_j A_i^r = \sum_{k=0}^{[-\frac{\bar{a}_{ij}}{2}]-1} \rho_{ij}^k \sum_{l=0}^{-2k-\bar{a}_{ij}-1} (-1)^l \gamma_{ij}^{kl} A_i^{-2k-\bar{a}_{ij}-1-l} A_j A_i^l.$$

Où les constantes γ_{ij}^{kl} sont définies par :

$$\begin{aligned}
\text{pour } a_{ij} = a_{ji} = -1 & : \gamma_{ij}^{00} = \gamma_{ji}^{00} = 1 ; \\
\text{pour } a_{ij} = -1, -2 \text{ et } a_{ji} = -2 & : \gamma_{ij}^{00} = \gamma_{ji}^{00} = \gamma_{ij}^{01} = \gamma_{ji}^{01} = 1 ; \\
\text{pour } a_{ij} = -1 \text{ et } a_{ji} = -3 & : \gamma_{ij}^{0l} = \left[\begin{matrix} 2 \\ l \end{matrix} \right]_q, \quad \gamma_{ij}^{10} = 0, \quad \gamma_{ji}^{00} = \gamma_{ji}^{02} = \gamma_{ji}^{10} = 1, \\
& \gamma_{ji}^{01} = \frac{(q + q^{-1})(q^2 + q^{-2})(q^2 + 3 + q^{-2})}{(q^4 + 2q^2 + 4 + 2q^{-2} + q^{-4})} ; \\
\text{pour } a_{ij} = -1 \text{ et } a_{ji} = -4 & : \gamma_{ij}^{0l} = \left[\begin{matrix} 3 \\ l \end{matrix} \right]_q, \quad \gamma_{ij}^{1l} = 0, \quad \gamma_{ji}^{00} = \gamma_{ji}^{03} = \gamma_{ji}^{1l} = 1, \\
& \gamma_{ji}^{01} = \gamma_{ji}^{02} = \frac{(q + q^{-1} - 1)(q + q^{-1} + 1)(q^2 - q + 1 - q^{-1} + q^{-2})(q^2 + q + 1 + q^{-1} + q^{-2})}{(q^4 + 3 + q^{-4})}.
\end{aligned}$$

Nous reportons le lecteur à l'article reproduit à la fin de ce chapitre pour plus de détails sur cette algèbre, la définition des q-binomiaux ainsi que pour l'obtention des contraintes sur les \hat{e}_i correspondant aux conditions au bord préservant l'intégrabilité du modèle.

Pour le cas $\hat{g} = a_1^{(1)}$, l'algèbre $O_q(a_1^{(1)})$ a pour limite, pour $q \rightarrow 1$ et $\rho_{12}^0 = \rho_{21}^0 = 16$, les relations de Dolan Grady (5.2.4). Nous allons donc nous intéresser à ces dernières, puis présenter les axes de recherche à développer pour mieux comprendre les propriétés de $\mathcal{O}_q(\hat{g})$.

5.2 Algèbre d'Onsager et relations de Dolan-Grady

L'algèbre d'Onsager est une algèbre de Lie de dimension infinie engendrée par $\{A_m, G_k\}$, pour $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ respectant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
[A_k, A_m] &= 4G_{k-m} \quad k > m, \\
[G_m, A_k] &= 2A_{k+m} - 2A_{k-m}, \\
[G_k, G_m] &= 0.
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Il est possible de construire une sous-algèbre abélienne engendrée par I_{2k+1} tel que :

$$[I_{2k+1}, I_{2l+1}] = 0, \quad I_{2k+1} = \kappa_0(A_k + A_{-k}) + \kappa_1(A_{k+1} + A_{-k+1}), \tag{5.2.2}$$

avec $\kappa_0, \kappa_1 \in \mathbb{C}$. Les modèles quantiques pouvant être associés à une telle structure algébrique (par exemple si $H = I_1 = 2\kappa_0 A_0 + 2\kappa_1 A_1$) sont donc intégrables. Cette structure algébrique est reliée à la hiérarchie de Dolan et Grady [159]. Ils introduisent une classe d'Hamiltoniens de la forme :

$$H = k_0 A + k_1 A^* \tag{5.2.3}$$

avec k_0, k_1 des constantes et A, A^* deux opérateurs satisfaisant les relations maintenant appelées de Dolan Grady :

$$[A, [A, [A, A^*]]] = 16[A, A^*], \quad [A^*, [A^*, [A^*, A]]] = 16[A^*, A]. \tag{5.2.4}$$

Ils prouvent que H fait partie d'une famille abelienne d'opérateurs Q_{2n} tel que :

$$\begin{aligned} Q_{2n} &= k_0(W_{2n} - \tilde{W}_{2n-2}) + k_1(\tilde{W}_{2n} - W_{2n-2}), \\ W_{2n} &= -\frac{1}{8}[A, [A^*, W_{2n-2}] - \tilde{W}_{2n-2}, \quad \tilde{W}_{2n} = -\frac{1}{8}[A^*, [A, \tilde{W}_{2n-2}] - W_{2n-2}, \\ W_0 &= A, \quad \tilde{W}_0 = A^* \quad \text{et} \quad Q_0 = H. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

La correspondance entre les relations de Dolan Grady et l'algèbre d'Onsager a été établie [170, 171]. Perk remarque que l'algèbre de Onsager peut générer la hiérarchie de DG par l'identification :

$$A \rightarrow -A_0, \quad A^* \rightarrow A_1, \quad W_{2n} \rightarrow -A_{-n}, \quad \tilde{W}_{2n} \rightarrow A_{n+1} \quad \text{et} \quad k_0, k_1 \rightarrow -2\kappa_0, 2\kappa_1.$$

De son coté, Davies montre que les opérateurs satisfaisant les relations de DG génèrent l'algèbre de Onsager. Ces deux algèbres sont donc isomorphes.

A titre d'exemple, nous donnons la forme de A_0 et A_1 pour le modèle d'Ising 1D quantique :

$$A_0 = \sum_{i=1}^L \sigma_i^x, \quad A_1 = \sum_{i=1}^L \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z, \quad (5.2.6)$$

le modèle XY :

$$A_0 = \sum_{i=1}^L \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x, \quad A_1 = \sum_{i=1}^L \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z, \quad (5.2.7)$$

avec σ_i^a les matrices de Pauli local, éléments de l'espace $End(V)^{\otimes L}$, tel que l'action de la matrice soit sur le i ème espace de dimension $dim(V) = 2$. Où encore le modèle chiral Potts superintégrable (CPS) :

$$A_0 = \frac{4}{M} \sum_{i=1}^L \sum_{n=1}^{M-1} \frac{X_i^n}{1 - w^{-n}}, \quad A_1 = \frac{4}{M} \sum_{i=1}^L \sum_{n=1}^{M-1} \frac{Z_i^n Z_{i+1}^{M-n}}{1 - w^{-n}} \quad (5.2.8)$$

avec $\{X_i, Z_j\}$ satisfaisant $[X_i, X_j] = [Z_i, Z_j] = 0$, $Z_i X_j = w^{\delta_{ij}} X_j Z_i$, $X_i^M = 1, Z_i^M = 1$ et $w = \exp(\frac{2\pi}{M})$. Ces trois exemples donnent des réalisations des opérateurs de DG reliées à des systèmes intégrables.

Un autre exemple important est la relation entre l'algèbre d'Onsager et l'algèbre de boucle $\mathcal{L}(sl(2)) = \mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes sl(2)$. L'algèbre de boucle est engendrée par une infinité d'opérateurs $\{h^{(i)}, e^{(i)}, f^{(i)}\}$ $i \in \mathbb{Z}$ sujets aux relations :

$$[h^{(i)}, h^{(j)}] = 0, \quad [e^{(i)}, f^{(j)}] = 2h^{(i+j)}, \quad [h^{(i)}, e^{(j)}] = e^{(i+j)}, \quad \text{et} \quad [h^{(i)}, f^{(j)}] = -f^{(i+j)} \quad (5.2.9)$$

Pour $i, j = 0$, ces relations correspondent à celles de $sl(2)$. Il est possible de doter cette algèbre d'une structure de Hopf similaire à celle de l'algèbre enveloppante de $sl(2)$. L'algèbre d'Onsager peut être réalisée par les opérateurs de $\mathcal{L}(sl(2))$ de la manière suivante :

$$A_m = 2(e^{(m)} + f^{(-m)}), \quad G_m = 2(h^{(m)} - h^{(-m)}). \quad (5.2.10)$$

La question suivante, après avoir identifié une structure algébrique et avoir prouvé sa cohérence (i.e. trouver une réalisation de cette dernière liée à des objets mathématiques concrets) est de déterminer sa théorie des représentations. Le premier élément pour construire des représentations finies, est de considérer une version finie de l'algèbre d'Onsager, i.e à partir d'un certain $|m| > 0$, les A_{m+l} ne sont plus indépendants des A_{k+l} pour $|m| > |k|$:

$$\sum_{k=-m}^m \alpha_k A_{k+l} = 0, \quad (5.2.11)$$

où, par les propriétés de l'algèbre d'Onsager, $\alpha_k = \pm \alpha_{-k}$. Par exemple, considérons la représentation d'évaluation de l'algèbre de boucle :

$$\rho_c : x^{(i)} \rightarrow c^i x \quad \text{avec} \quad x \in \mathcal{L}(sl(2)). \quad (5.2.12)$$

Il est alors possible de montrer que (avec les relations (5.2.10)) :

$$A_{-1} - (c + c^{-1})A_0 + A_1 = 0. \quad (5.2.13)$$

Nous pouvons aussi imposer une condition de périodicité sur les opérateurs $A_{2L} = A_0$ (tel est le cas pour le modèle d'Ising où L correspond au nombre de sites [30]). Ce type de relation, apportant des contraintes sur l'algèbre d'Onsager, est relié aux relations de Askey-Wilson que nous discuterons par la suite. A partir de ce type de contraintes, Davies [172] a montré que les valeurs propres des Hamiltoniens (5.2.3) sont des multiplets paramétrisés par α, β nombres réels, n entier positif, n nombres réels θ_j et n entiers positifs s_j de la forme suivante :

$$\alpha + k\beta + \sum_{j=1}^n 4m_j \sqrt{1 + k^2 + 2k \cos(\theta_j)}, \quad m_j = -s_j, -s_j + 1, \dots, s_j. \quad (5.2.14)$$

Ce spectre est dit de type Ising. Les grandes lignes de sa construction sont les suivantes :

- Il faut considérer le polynôme caractéristique de (5.2.11) :

$$f(z) = \sum_{-m}^m \alpha_k z^{k+m}. \quad (5.2.15)$$

Du fait des propriétés des constantes α_k , $f(z) = \pm z^{2m+1} f(1/z)$, les zéros différents de ± 1 sont présents par paires $(z_i, 1/z_i)$.

- Si ces zéros sont différents de ± 1 et distincts, les opérateurs A_k et G_k peuvent s'écrire de la forme suivante :

$$A_k = 2 \sum_{j=1}^m (z_j^k e_j + z_j^{-k} f_j), \quad G_k = 2 \sum_{j=1}^m (z_j^k - z_j^{-k}) h_j \quad (5.2.16)$$

où z_j, z_j^{-1} sont les zéros du polynôme caractéristique et $\{e_j, f_j, h_j\}$ les générateurs de $sl(2)$ sur l'espace j . Cette réalisation correspond à la représentation d'évaluation $\rho_{z_1} \otimes \dots \otimes \rho_{z_m}$ du coproduit Δ^m de (5.2.10).

- Les valeurs propres de l'Hamiltonien $H = A_0 + kA_1$ sont construites à partir de la théorie des représentations de $U(sl(2))$ (voir chapitre 2). L'algèbre d'Onsager est alors la somme directe de m copies de $sl(2)$.

Les cas, où les zéros sont du type ± 1 ou bien apparaissent plusieurs fois, sont discutés dans l'article de Davies et par Date et Roan [173, 174] (la deuxième référence apportant une rigueur mathématique accrue aux idées de Davies). Ils montrent que ces zéros engendrés des éléments centraux de l'algèbre donnent la contribution $\alpha + k\beta$ dans le spectre. L'obtention du spectre correspond donc à l'étude du polynôme caractéristique. Il n'y a pas de méthode générale pour étudier ce dernier. La forme de $f(z)$ est connue pour le modèle d'Ising [30] et le modèle CPS [175]. Une autre possibilité pour trouver le spectre et les vecteurs propres de l'hamiltonien serait d'utiliser la structure tridiagonale de l'algèbre de DG. Nous discuterons ce point dans le cadre de l'algèbre q-DG par la suite.

Il existe une généralisation de l'algèbre d'Onsager pour $g = \mathcal{L}(sl(n))$ [176]. Cette généralisation montre l'intégrabilité d'Hamiltonien de la forme (les k_i sont des constantes) :

$$H = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{A}_i, \quad \text{avec} \quad [\mathcal{A}_i, [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i\pm 1}]] = A_{i\pm 1}, \quad [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = 0, \quad |i - j| > 1. \quad (5.2.17)$$

Ces relations sont appelées relations de DG généralisées.

5.3 Déformation de l'algèbre d'Onsager et des relations DG

Il existe un lien entre l'algèbre $\mathcal{O}_q(\widehat{g})$ et l'algèbre de réflexion $\mathfrak{D}(R)$. La connaissance des générateurs de cette algèbre permet de construire à partir d'une relation d'entrelacement les solutions scalaires de l'équation de réflexion. Pour le cas $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$, il existe un isomorphisme avec $\mathfrak{D}(R)$ et il est raisonnable de conjecturer le même isomorphisme pour les autres $\mathcal{O}_q(\widehat{g})$ et $\mathfrak{D}(R)$. Il est donc d'un grand intérêt de connaître plus précisément ses propriétés afin d'étudier les modèles intégrables avec bords. La limite $q \rightarrow 1$ étant reliée, pour $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$, à l'algèbre d'Onsager et aux relations de DG et pour $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(n)})$, $n > 2$, leurs généralisations. Il est important de trouver l'analogue q-déformé de la hiérarchie de DG, de l'algèbre d'Onsager et leurs généralisations. Cette question a été résolue pour le cas $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$ mais reste encore un problème ouvert pour les autres $\mathcal{O}_q(\widehat{g})$.

5.3.1 Considérations algébriques et base PBW

En considérant la déformation des relations de DG, nous pouvons introduire une famille d'Hamiltonien de la forme :

$$H = A + kA^* \quad (5.3.1)$$

avec les opérateurs $\{A, A^*\}$ satisfaisant les relations :

$$\begin{aligned} [A, [A, [A, A^*]_q]_{q^{-1}}] &= \rho [A, A^*], \\ [A^*, [A^*, [A^*, A]_q]_{q^{-1}}] &= \rho^* [A^*, A]. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Ces relations sont appelées relations q-Dolan-Grady (q-DG) et forment une algèbre $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$. En prenant la limite $q \rightarrow 1$ et $\rho = \rho^* = 16$, elles redonnent les relations de DG. Par analogie avec le cas $q \rightarrow 1$, il est possible de construire la version q-deformée de l'algèbre d'Onsager $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre de réflexion $\mathfrak{D}(R)$ pour la matrice R symétrique du modèle XXZ spin 1/2 [151]. Les éléments de la matrice K et l'algèbre $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$ sont reliés par les relations :

$$\begin{aligned} K_{11}(u) &= uq\mathcal{W}_+(u) - u^{-1}q^{-1}\mathcal{W}_-(u) , \quad K_{22}(u) = uq\mathcal{W}_-(u) - u^{-1}q^{-1}\mathcal{W}_+(u) , \\ K_{12}(u) &= \frac{1}{k_-(q+q^{-1})}\mathcal{G}_+(u) + \frac{k_+(q+q^{-1})}{(q-q^{-1})} , \quad K_{21}(u) = \frac{1}{k_+(q+q^{-1})}\mathcal{G}_-(u) + \frac{k_-(q+q^{-1})}{(q-q^{-1})} . \end{aligned}$$

et le développement des générateurs $\{\mathcal{W}_\pm(u), \mathcal{G}_\pm(u)\}$:

$$\mathcal{W}_+(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{W}_{-k} U^{-k-1} , \quad \mathcal{W}_-(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{W}_{k+1} U^{-k-1} , \quad (5.3.3)$$

$$\mathcal{G}_+(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{G}_{k+1} U^{-k-1} , \quad \mathcal{G}_-(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} U^{-k-1} . \quad (5.3.4)$$

avec $U = (qu^2 + q^{-1}u^{-2})/(q + q^{-1})$. La définition de $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$ est donnée par :

Définition 5.3.1 ([158]). $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$ est une algèbre associative avec un paramètre $\rho \in \mathbb{C}^*$, unité 1 engendrée par $\{\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} | k, l \in \mathbb{Z}_+\}$ satisfaisant les relations suivantes :

$$[\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_{k+1}] = [\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_1] = \frac{1}{(q + q^{-1})} (\tilde{\mathcal{G}}_{k+1} - \mathcal{G}_{k+1}) , \quad (5.3.5)$$

$$[\mathcal{W}_0, \mathcal{G}_{k+1}]_q = [\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \mathcal{W}_0]_q = \rho \mathcal{W}_{-k-1} - \rho \mathcal{W}_{k+1} , \quad (5.3.6)$$

$$[\mathcal{G}_{k+1}, \mathcal{W}_1]_q = [\mathcal{W}_1, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}]_q = \rho \mathcal{W}_{k+2} - \rho \mathcal{W}_{-k} , \quad (5.3.7)$$

$$[\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{-l}] = 0 , \quad [\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}_{l+1}] = 0 , \quad (5.3.8)$$

$$[\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{l+1}] + [\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}_{-l}] = 0 , \quad (5.3.9)$$

$$[\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{G}_{l+1}] + [\mathcal{G}_{k+1}, \mathcal{W}_{-l}] = 0 , \quad (5.3.10)$$

$$[\mathcal{W}_{-k}, \tilde{\mathcal{G}}_{l+1}] + [\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \mathcal{W}_{-l}] = 0 , \quad (5.3.11)$$

$$[\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{G}_{l+1}] + [\mathcal{G}_{k+1}, \mathcal{W}_{l+1}] = 0 , \quad (5.3.12)$$

$$[\mathcal{W}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{l+1}] + [\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \mathcal{W}_{l+1}] = 0 , \quad (5.3.13)$$

$$[\mathcal{G}_{k+1}, \mathcal{G}_{l+1}] = 0 , \quad [\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{l+1}] = 0 , \quad (5.3.14)$$

$$[\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \mathcal{G}_{l+1}] + [\mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{l+1}] = 0 . \quad (5.3.15)$$

Cette algèbre possède les automorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &: \mathcal{W}_{k+1} \rightarrow \mathcal{W}_{-k}, \quad \mathcal{W}_{-k} \rightarrow \mathcal{W}_{k+1}, \quad \mathcal{G}_{k+1} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} \rightarrow \mathcal{G}_{k+1} \\ \sigma_2 &: \mathcal{W}_{k+1} \rightarrow \mathcal{W}_{-k}, \quad \mathcal{W}_{-k} \rightarrow \mathcal{W}_{k+1}, \quad q \rightarrow -q^{-1} \\ \sigma_3 &: \mathcal{G}_{k+1} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} \rightarrow \mathcal{G}_{k+1}, \quad q \rightarrow -q^{-1} \end{aligned}$$

Ces automorphismes involutifs ne sont pas indépendants $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ \sigma_2$. Cette algèbre possède une sous-algèbre abélienne :

$$[\mathcal{I}_{2k+1}, \mathcal{I}_{2l+1}] = 0, \quad \mathcal{I}_{2k+1} = \kappa_0 \mathcal{W}_{-k} + \kappa_1 \mathcal{W}_{k+1} + \kappa_2 \mathcal{G}_{k+1} + \kappa_3 \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} \quad (5.3.16)$$

L'algèbre d'Onsager est obtenue pour $q \rightarrow 1$ et l'identification :

$$\mathcal{W}_{-k} \rightarrow \frac{1}{2}(A_k + A_{-k}), \quad \mathcal{W}_{k+1} \rightarrow \frac{1}{2}(A_{k+1} + A_{-k+1}), \quad \mathcal{G}_{k+1} \rightarrow 4G_{k+1}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} \rightarrow -4G_{k+1}.$$

Il est possible de réaliser les opérateurs $\{A, A^*\}$ satisfaisant q-DG à partir des générateurs de $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$:

$$A \rightarrow \mathcal{W}_0, \quad \rightarrow A^* \rightarrow \mathcal{W}_1, \quad [A, A^*]_q \rightarrow \mathcal{G}_1, \quad [A^*, A]_q \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_1.$$

L'isomorphisme entre les deux algèbres, qu'il est raisonnable de conjecturer au vu du cas $q \rightarrow 1$, n'est pas aussi direct que ce dernier. Pour l'algèbre d'Onsager, toutes les relations (5.2.1) peuvent être obtenues par récurrence à partir des éléments A_0 et A_1 :

$$G_1 = \frac{1}{4}[A_1, A_0], \quad A_{k+1} - A_{k-1} = \frac{1}{4}[G_1, A_k], \quad G_k = \frac{1}{4}[A_k, A_0] \quad (5.3.17)$$

Pour le cas q-deformé, la relation 5.3.5 ne permet pas d'écrire de façon équivalente une récurrence pour les générateurs de \mathcal{A}_q . Cependant, au vu des relations (5.3.5, 5.3.6, 5.3.7) nous pouvons penser que les éléments de \mathcal{A}_q sont engendrés par des monômes $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1$ de degré :

$$d[\mathcal{W}_{-k}] = d[\mathcal{W}_{k+1}] \leq 2k + 1 \quad \text{et} \quad d[\mathcal{G}_{k+1}] = d[\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}] \leq 2k + 2, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.3.18)$$

Se pose alors la question de définir la base PBW pour ces monômes. Pour le cas $\rho = \rho^* = 0$, il est montré dans [177] que les monômes sont de la forme :

$$X^{a_1} Y^{a_2} \dots X^{a_{n-1}} Y^{a_n} \quad \text{ou} \quad X^{a_1} Y^{a_2} \dots Y^{a_{n-1}} X^{a_n} \quad (5.3.19)$$

avec $(X, Y) = (W_1, W_0)$ ou $(X, Y) = (W_0, W_1)$ sont des monômes irréductibles de degré $d = \sum_{i=1}^n a_i$ si pour les entiers a_i il existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{i-1} < a_i \geq a_{i+1} \geq \dots \geq a_n. \quad (5.3.20)$$

Dans le cas où ρ et ρ^* sont différents de zéro, les monômes de degré d réductibles s'expriment dans la base des monômes irréductibles comme une combinaison linéaire de monômes irréductibles d'ordres $d, d-2, d-4, \dots$. En utilisant cette base, il est possible de chercher la forme des \mathcal{G}_{k+1} et des $\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}$ comme une combinaison linéaire des monômes irréductibles d'ordres $2k+2, 2k, 2k-2, \dots$. Les coefficients des monômes sont contraints par les relations de commutation de $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$. Afin de comprendre la structure de la récurrence, nous avons utilisé cette procédure pour les petites valeurs de k (i.e. $k = 0, 1, 2, 3$). Le nombre de monômes augmentent rapidement avec k :

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad 4 \quad \text{monômes} : \{W_0 W_1, W_1 W_0, W_1^2, W_0^2\} \\ k = 1 : & \quad 12 + 4 = 16 \quad \text{monômes} \\ k = 2 : & \quad 32 + 12 + 4 = 48 \quad \text{monômes} \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Cette procédure ne peut pas être utilisée pour obtenir une formule générale pour tous les k . Il faut noter que tous les monômes ne sont pas utiles pour trouver la solution, les monômes de plus haut degré doivent contenir le même nombre de W_0 et de W_1 . Les résultats pour $k = 0$ et $k = 1$ sont :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= q\mathcal{W}_0\mathcal{W}_1 - q^{-1}\mathcal{W}_1\mathcal{W}_0 + a_1 \\ \mathcal{G}_2 &= \frac{q + q^{-1}}{q^2\rho(q^2 + q^{-2})}\mathcal{W}_0^2\mathcal{W}_1^2 - \frac{(q + q^{-1})^2}{q\rho(q^2 + q^{-2})}\mathcal{W}_0\mathcal{W}_1\mathcal{W}_0\mathcal{W}_1 + \frac{q^3 - q^{-3}}{\rho(q^2 + q^{-2})}\mathcal{W}_0\mathcal{W}_1^2\mathcal{W}_0 \\ &\quad - \frac{q^2(q + q^{-1})}{\rho(q^2 + q^{-2})}\mathcal{W}_1^2\mathcal{W}_0^2 + \frac{q(q + q^{-1})^2}{\rho(q^2 + q^{-2})}\mathcal{W}_1\mathcal{W}_0\mathcal{W}_1\mathcal{W}_0 + \frac{q^3 - q^{-3}}{\rho(q^2 + q^{-2})}\mathcal{W}_1\mathcal{W}_0^2\mathcal{W}_1 \\ &\quad + \frac{q - q^{-1}}{(q^2 + q^{-2})}(\mathcal{W}_0^2 + \mathcal{W}_1^2) + \frac{a_1(q - q^{-1})}{\rho}(q\mathcal{W}_1\mathcal{W}_0 - q^{-1}\mathcal{W}_0\mathcal{W}_1) + a_2\end{aligned}$$

La forme pour $\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}$ est obtenue par l'action de l'automorphisme involutif a_1 . Ces résultats peuvent être formulés à partir des générateurs de $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= [\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_0]_q \\ \mathcal{G}_2 &= \frac{1}{(q^2 + q^{-2})} \left(q[\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_0]_{q^2} + q^{-1}[\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_{-1}]_{q^2} - (q - q^{-1}) \left(q^{-2}(\mathcal{W}_1)^2 + q^2(\mathcal{W}_0)^2 + \frac{\mathcal{G}_1 \tilde{\mathcal{G}}_1}{\rho} \right) \right) \\ \mathcal{G}_3 &= \frac{1}{(q^2 + q^{-2} - 1)} \left((q - q^{-1}) (q^2 \mathcal{W}_3 \mathcal{W}_0 + q^{-2} \mathcal{W}_{-2} \mathcal{W}_1) \right. \\ &\quad \left. + [\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_{-1}]_q - (q - q^{-1}) \left(q^{-2} \mathcal{W}_1 \mathcal{W}_2 + q^2 \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_{-1} + \frac{\mathcal{G}_2 \tilde{\mathcal{G}}_1}{\rho} \right) \right) \\ \mathcal{G}_4 &= \frac{1}{(q^4 + q^{-4})} \left((q^2 - q^{-2}) (q^3 \mathcal{W}_4 \mathcal{W}_0 + q^{-3} \mathcal{W}_{-3} \mathcal{W}_1) \right. \\ &\quad \left. - (q - q^{-1}) (q^2 + q^{-2}) \left(q^{-2} \mathcal{W}_1 \mathcal{W}_3 + q^2 \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_{-2} + \frac{\mathcal{G}_3 \tilde{\mathcal{G}}_1}{\rho} \right) \right. \\ &\quad \left. + q[\mathcal{W}_3, \mathcal{W}_{-1}]_{q^2} + q^{-1}[\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_{-2}]_{q^2} - (q - q^{-1}) \left(q^{-2}(\mathcal{W}_2)^2 + q^2(\mathcal{W}_{-1})^2 + \frac{\mathcal{G}_2 \tilde{\mathcal{G}}_2}{\rho} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q - q^{-1})^2}{(q^2 + q^{-2})} \left(q\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_{-1}\} - q^{-1}\{\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_2\} - (q - q^{-1}) \left(q^{-2}(\mathcal{W}_1)^2 + q^2(\mathcal{W}_0)^2 + \frac{\mathcal{G}_1 \tilde{\mathcal{G}}_1}{\rho} \right) \right) \right)\end{aligned}$$

Pour vérifier les relations de commutation de $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$, il est utile de considérer les relations suivantes [151] :

$$[\mathcal{W}_{-k-1}, \mathcal{W}_{l+1}] - [\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{l+2}] = \frac{q - q^{-1}}{\rho(q + q^{-1})} (\mathcal{G}_{k+1} \tilde{\mathcal{G}}_{l+1} - \mathcal{G}_{l+1} \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}) , \quad (5.3.22)$$

$$-\mathcal{W}_{-k}\mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_{k+1}\mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_{-k-1}\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_0\mathcal{W}_{k+2} = \frac{1}{\rho(q^2 - q^{-2})} [\mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_1] , \quad (5.3.23)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{-k-1}\mathcal{W}_{-l} - \mathcal{W}_{k+2}\mathcal{W}_{l+1} - \mathcal{W}_{-k}\mathcal{W}_{-l-1} + \mathcal{W}_{k+1}\mathcal{W}_{l+2} + \mathcal{W}_{-k}\mathcal{W}_{l+1} - \mathcal{W}_{-l}\mathcal{W}_{k+1} \\ - \mathcal{W}_{-k-1}\mathcal{W}_{l+2} + \mathcal{W}_{-l-1}\mathcal{W}_{k+2} = \frac{1}{\rho(q^2 - q^{-2})} ([\mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{l+2}] - [\mathcal{G}_{k+2}, \tilde{\mathcal{G}}_{l+1}]) .\end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Pour finir cette section, nous donnerons une conjecture sur la formule de \mathcal{G}_{k+1} pour un k arbitraire :

Conjecture 5.3.2.

$$\mathcal{G}_{k+1} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{i+j=\mathbf{a}_k(l)} \mathcal{A}_{ij} + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \delta_{k \bmod 2, 0}} \sum_{i+j=\mathbf{a}_{k+1}(l)} \mathcal{F}_{ij} \quad (5.3.25)$$

$$\mathcal{A}_{ij} = a_{ij}^{(k)} \mathcal{W}_{-i} \mathcal{W}_{j+1} + b_{ij}^{(k)} \mathcal{W}_{i+1} \mathcal{W}_{-j}, \quad \mathcal{F}_{ij} = e_{ij}^{(k)} (q^2 \mathcal{W}_{-i} \mathcal{W}_{-j} + q^{-2} \mathcal{W}_{i+1} \mathcal{W}_{j+1} + \frac{1}{\rho} \mathcal{G}_{i+1} \tilde{\mathcal{G}}_{j+1})$$

$$\mathbf{a}_i(j) = \begin{cases} 2j & \text{pour } i \text{ pair} \\ 2j+1 & \text{pour } i \text{ impair} \end{cases}, \quad a_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)} \text{ et } e_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C}(q, q^{-1}).$$

La preuve de cette conjecture et la détermination des constantes $\{a_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)}, e_{ij}^{(k)}\}$ feront l'objet d'une publication en collaboration avec P. Baseilhac.

L'ensemble de ces travaux étant relié à $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$, il est naturel de se poser les mêmes questions dans le cas des autres \widehat{g} . Ces questions restent des problèmes ouverts dont la résolution pourrait permettre l'étude d'autres chaînes de spins avec bords ne permettant pas l'utilisation de l'ABA.

5.3.2 Représentation de l'algèbre q-DG

Dans les systèmes physiques possédant une symétrie cachée, l'idée est d'utiliser la théorie des représentations de l'algèbre associée à cette symétrie afin de résoudre par exemple, divers problèmes spectraux. Différents systèmes, par exemple la chaîne de spins XXZ avec bords, possèdent $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$ comme symétrie. L'algèbre $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$ est un cas spécial d'une famille d'algèbres appelées algèbres tridiagonales [153, 154, 152] :

Définition 5.3.3. *Il existe des scalaires $\beta, \gamma, \gamma^*, \rho, \rho^*$ dans \mathbb{C} tel que :*

$$\begin{aligned} [A, A^2 A^* - \beta A A^* A + A^* A^2] &= \gamma [A, A A^* + A^* A] + \rho [A, A^*], \\ [A^*, A^{*2} A - \beta A^* A A^* + A A^{*2}] &= \gamma^* [A^*, A^* A + A A^*] + \rho^* [A^*, A], \end{aligned}$$

Ces relations sont appelées relations tridiagonales et l'algèbre engendrée par A, A^* algèbre tridiagonale.

Le cas $\beta = q + q^{-1}, \gamma = \gamma^* = 0$ correspond à $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$ et le cas $\beta = 2, \gamma = \gamma^* = 0, \rho = \rho^* = 16$ correspond aux relations de DG. L'objectif est alors d'utiliser la connaissance de la théorie des représentations de cette algèbre afin de réduire la complexité du problème spectral initial. Cette démarche est similaire à l'approche d'Onsager, Davies, [30, 172, 189, 175]... pour le cas le plus simple de l'algèbre Onsager. Les éléments de ces algèbres tridigonales admettent des réalisations matricielles appelées paires tridiagonales [153, 154, 152] :

Définition 5.3.4. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} . Une paire tridiagonale (TD-paire) sur V correspond à deux opérateurs A, A^* de $\text{End}(V)$ satisfaisant :*

1. A et A^* sont diagonalisables.
2. Il existe une séquence V_0, V_1, \dots, V_d des espaces propres de A tel que :

$$A^* V_i \subseteq V_{i-1} + V_i + V_{i+1} \quad (0 \leq i \leq d),$$

où $V_{-1} = 0, V_{d+1} = 0$.

3. Il existe une séquence $V_0^*, V_1^*, \dots, V_{d^*}^*$ des espaces propres de A^* tel que :

$$AV_i^* \subseteq V_{i-1}^* + V_i^* + V_{i+1}^* \quad (0 \leq i \leq d^*),$$

où $V_{-1}^* = 0, V_{d^*+1}^* = 0$.

4. Il n'y a pas de sous-espace W de V tel que $AW \subseteq W$ ou $A^*W \subseteq W$, autre que $W = 0$ et $W = V$.

Dans le cas où chaque espace V_i et V_i^* est de dimension 1, les paires tridiagonales sont appelées paires de Leonard.

Il s'ensuit donc que toute quantité qui serait une combinaison linéaire de A, A^* prend systématiquement une forme bloc tridiagonale dans la base ci-dessus. Sans rentrer dans les détails, il sera suffisant pour illustrer la procédure de décrire le cas le plus simple non dégénéré. Pour l'approche générale, le lecteur pourra se référer aux articles [178, 179]. Dans le cas des paires de Leonard, $\{A, A^*\}$ satisfont des relations plus restrictives appelées *relations de Askey Wilson* :

$$\begin{aligned} A^2 A^* - \beta A A^* A + A^* A^2 &= \gamma (A A^* + A^* A) + \rho A^* + \gamma^* A^2 + \omega A + \eta I \\ A^* A^2 - \beta A^* A A^* + A A^* A^2 &= \gamma^* (A^* A + A A^*) + \rho^* A + \gamma (A^*)^2 + \omega^* A^* + \eta^* I \end{aligned}$$

Les exemples connus de paires de Léonard sont reliés aux polynômes orthogonaux de la classification de Askey [180]. Etant donnée une base $\{\Psi_n\}$ diagonalisant A et pour laquelle A^* soit triangulaire tel que :

$$A\psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad A^*\psi_n = a_n^* \psi_{n+1} + b_n^* \psi_n + c_n^* \psi_{n-1}, \quad (5.3.26)$$

et la base "duale" ψ_n^* :

$$A^*\psi_n^* = \lambda_n^* \psi_n^*, \quad A\psi_n^* = a_n \psi_{n+1}^* + b_n \psi_n^* + c_n \psi_{n-1}^*. \quad (5.3.27)$$

Les polynômes orthogonaux $F_{n,l}$ de la classification de Askey apparaissent en considérant la transformation d'une base à l'autre :

$$(\psi_n, \psi_l) = (\psi_n^*, \psi_l^*) = \delta_{ln}, \quad (\psi_n, \psi_l^*) = (\psi_n^*, \psi_l) = F_{n,l}, \quad \psi_n = \sum_l F_{n,l} \psi_l^*, \quad (5.3.28)$$

où $(,)$ est le produit scalaire associé. Ils sont sujets aux relations de récurrence suivantes (A et A^* sont ici considérés Hermitien) :

$$\begin{aligned} (\psi_n, A\psi_l^*) &= (A\psi_n, \psi_l^*), \quad \lambda_n F_{n,l} = a_l F_{n,l-1} + b_l F_{n,l} + c_l F_{n,l+1}, \\ (\psi_n, A^*\psi_l^*) &= (A^*\psi_n, \psi_l^*), \quad \lambda_l^* F_{n,l} = a_n^* F_{n-1,l} + b_n^* F_{n,l} + c_n^* F_{n+1,l}, \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Ces relations peuvent être écrites comme des équations aux différences :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}F_n &= \lambda_n F_n, \quad \mathbb{D}^*F_n^* = \lambda_n^* F_n^* \\ F_n &= (F_{n,1}, F_{n,2}, \dots)^t, \quad F_n^* = (F_{1,n}, F_{2,n}, \dots)^t, \\ \mathbb{D} &= A\eta + B + C\eta^{-1}, \quad \mathbb{D}^* = A^*\bar{\eta} + B^* + C^*\bar{\eta}^{-1} \\ \{X\}_{ij} &= x_i \delta_{ij} \quad X, x_i \in \{A, a_i; B, b_i; C, c_i; A^*, a_i^*; B^*, b_i^*; C^*, c_i^*\} \\ \eta^{\pm 1} F_{n,l} &= F_{n,l \pm 1}, \quad \bar{\eta}^{\pm 1} F_{n,l} = F_{n \pm 1, l} \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

Les solutions de ces équations aux différences sont des polynômes orthogonaux de la classification de Askey, voir [179, 180] pour plus de détails et des exemples.

Considérons le problème spectral d'un Hamiltonien dans ce cas (non dégénéré) en utilisant les représentations décrites ci-dessus, il faut alors résoudre :

$$H\Psi = \Lambda\Psi \quad (5.3.31)$$

En considérant les vecteurs propres dans la base des ψ_n , et $H = A + kA^*$, il vient :

$$\Lambda \sum_i f_i \psi_i = \sum_i f_i \lambda_i \psi_i + k \sum_i f_i (a_i^* \psi_{i+1} + b_i^* \psi_i + c_i^* \psi_{i+1}). \quad (5.3.32)$$

Les f_i sont obtenus à partir de l'équation de récurrence :

$$(\lambda_i - \Lambda + kb_i^*)f_i + a_{i-1}^* f_{i-1} + c_{i+1}^* f_{i+1} = 0, \quad f_1 = 1. \quad (5.3.33)$$

Ce problème spectral est alors simple à résoudre, les vecteurs propres ayant pour éléments des fonctions de Lambda. La contrainte de taille finie spécifie alors les valeurs de Lambda comme les racines du polynôme caractéristique d'une matrice tridiagonale.

Dans le cas plus général des paires tridiagonales, les espaces propres de A ou de A^* sont dégénérés. Cela amène à ajouter un indice supplémentaire dans les équations précédentes. Le cas relié à la réalisation en termes des opérateurs de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$:

$$\begin{aligned} A &= c_0 e_0 q^{h_0/2} + \bar{c}_0 f_0 q^{h_0/2} + \epsilon_0 q^{h_0}, \\ A^* &= c_1 e_1 q^{h_1/2} + \bar{c}_1 f_1 q^{h_1/2} + \epsilon_1 q^{h_1} \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

avec $c_i, \bar{c}_i, \epsilon_0 \in \mathbb{C}$, pour la représentation $\rho_{v_N}^{\frac{1}{2}} \otimes \cdots \otimes \rho_{v_N}^{\frac{1}{2}} \circ \Delta^N$, est traité en détail dans [178]. Cette analyse permet de construire le spectre de la chaîne de N spins XXZ avec des bords génériques [132]. Cette procédure, pour obtenir le spectre des Hamiltoniens possédant la symétrie $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$, doit encore être étudiée pour les cas où la représentation est de spin s et pour le produit tensoriel de représentation de dimensions différentes. Dans chaque cas, seront obtenus de nouveaux polynômes généralisant ceux de Askey-Wilson. La construction des représentations de dimension infinie de l'algèbre tridiagonale est aussi d'un grand intérêt car elle permettrait l'étude de la chaîne XXZ semi-infinie avec bord non diagonal. Une approche similaire à celle de la formulation par opérateur de vertex [181] de l'algèbre $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$, utilisée par Jimbo, Miwa et leurs collaborateurs pour la chaîne XXZ infinie et semi-infinie avec bord diagonal [182], serait souhaitable pour obtenir une telle représentation. La première réponse à apporter, dans cette direction, serait l'obtention, si elle existe, de l'extension centrale de $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$. D'un autre côté, la construction des représentations des algèbres $\mathcal{O}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ est aussi un problème à résoudre. Pour le cas $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(n)})$, les représentations de l'algèbre $\mathcal{U}'_q(so(n))$ étudiées par Klimyk et ses collaborateurs [183] constituent un point de départ pertinent.

5.4 Troisième article.

Dans cet article réalisé en collaboration avec P. Baseilhac, la généralisation de l'algèbre de q -Dolan-Grady est introduite et étudiée. Pour le cas le plus simple et $q = 1$, cette algèbre redonne celle proposée par Uglov-Ivanov. Pour les autres cas $q \neq 1$, un homomorphisme d'algèbre explicite avec une sous algèbre coidéale de $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ est présenté. Les théories de champs quantiques de Toda avec bords sont ensuite considérées. Pour la première fois, des relations algébriques pour la symétrie non-Abélienne sont obtenues explicitement. Comme conséquence, à partir de considérations purement algébriques, les contraintes suffisantes pour toutes les conditions aux bords intégrables (fixe ou dynamique) sont classifiées.

Il est nécessaire de donner quelques précisions sur les notations de ce papier. Le premier point correspond à l'appellation " q -Onsager" plutôt que " q -Dolan-Grady" de l'algèbre. Afin de clarifier la compréhension le nom " q -Dolan-Grady" a été utilisé dans cette thèse pour bien insister sur le lien avec le cas $q = 1$. Cependant, lors de l'introduction de $\mathcal{O}_q(\widehat{sl_2})$ par Terwilliger, ce dernier a choisi le nom " q -Onsager". Cet article suit donc cette convention. Le second point est l'utilisation de minuscule à la place de majuscule pour désigner les algèbres affines.

L'article est actuellement soumis à "Letters in Mathematical Physics".

Generalized q –Onsager algebras and boundary affine Toda field theories

P. Baseilhac* and S. Belliard**

*Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique CNRS/UMR 6083, Fédération Denis Poisson, Université de Tours, Parc de Grammont, 37200 Tours, FRANCE,
baseilha@lmpt.univ-tours.fr

**Laboratoire de Physique Théorique LAPTH CNRS/UMR 5814, BP 110, F-74941 Annecy-le-Vieux Cedex, FRANCE, samuel.belliard@lapp.in2p3.fr

Generalizations of the q –Onsager algebra are introduced and studied. In one of the simplest case and $q = 1$, the algebra reduces to the one proposed by Uglov-Ivanov. For other cases and $q \neq 1$, an explicit algebra homomorphism associated with coideal subalgebras of quantum affine Lie algebras (simply and non-simply laced) is exhibited. Boundary integrable quantum Toda field theories are then considered in light of these results. For the first time, all defining relations for the underlying non-Abelian symmetry algebra are explicitly obtained. As a consequence, based on purely algebraic arguments all integrable (fixed or dynamical) boundary conditions are classified.

5.4.1 Introduction

In recent years, a new algebraic structure called the q –Onsager algebra (or equivalently the tridiagonal algebra) has emerged in different problems of mathematical physics.

On one side, it appears in the mathematical literature of P – and Q –polynomial association schemes and their relationship with the Askey scheme of orthogonal polynomials [179, 184, 185, 186, 187], related Jacobi matrices and, more generally, certain families of symmetric functions of one variable and related block tridiagonal matrices (see e.g. [188, 178]).

On the other side, this algebra appears in several quantum integrable systems. Playing a crucial role at $q = 1$ in the exact solution of the planar Ising [30] and superintegrable Potts model [189], it also finds applications in solving the XXZ open spin chain with non-diagonal boundary parameters and generic deformation parameter q . Indeed, the transfer matrix of this model has been shown to admit an expansion in terms of the elements of the q –Onsager algebra [158] acting on some finite dimensional representation. As a consequence, the solution of the model i.e. the complete spectrum and eigenstates can be derived using solely its representation theory, bypassing the Bethe ansatz approach which does not apply in the generic regime of parameters [132]. Apart from lattice models, in quantum field theory the q –Onsager algebra is known to be the hidden non-Abelian symmetry of the boundary sine-Gordon model [156, 157].

By definition, the q –Onsager algebra is an associative algebra with unity generated by two elements (called the standard generators), say A_0, A_1 . Introducing the q –commutator¹ $[X, Y]_q = XY - qYX$, the fundamental (sometimes called q –Dolan-Grady) relations take the form

$$[A_0, [A_0, [A_0, A_1]_{q^2}]_{q^{-2}}] = \rho_0[A_0, A_1], \quad [A_1, [A_1, [A_1, A_0]_{q^2}]_{q^{-2}}] = \rho_1[A_1, A_0] \quad (5.4.1)$$

¹For further convenience, definitions for the parameter q and the q –commutator chosen here differ compared to [178, 158, 132].

where q is a deformation parameter (assumed to be not a root of unity) and ρ_0, ρ_1 are fixed scalars. Note that for $\rho_0 = \rho_1 = 0$ this algebra reduces to the q -Serre relations of $U_q(\widehat{sl_2})$, and for $q = 1$, $\rho_0 = \rho_1 = 16$ it leads to the Onsager algebra [30, 171] defined by the Dolan-Grady relations [159].

Similarly to the well-established relationship between the Onsager algebra and the affine Lie algebra $\widehat{sl_2}$ [172, 170, 173, 174], the q -Onsager algebra (5.4.1) is actually closely related with the $U_q(\widehat{sl_2})$ algebra, a fact that may be also expected from the structure of the l.h.s. of (5.4.1) compared with the q -Serre relations of $U_q(\widehat{sl_2})$. Indeed, examples of algebra homomorphisms for the standard generators A_0, A_1 have been proposed for $\rho_0 \neq 0, \rho_1 \neq 0$, and related finite dimensional representations studied in details. We refer the reader to [153, 157, 190, 154] for details. In particular, the following realization immediately follows from [157] :

$$\begin{aligned} A_0 &= c_0 e_0 q^{h_0/2} + \bar{c}_0 f_0 q^{h_0/2} + \epsilon_0 q^{h_0} , \\ A_1 &= c_1 e_1 q^{h_1/2} + \bar{c}_1 f_1 q^{h_1/2} + \epsilon_1 q^{h_1} , \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

where $^2 \{h_i, e_i, f_i\}$ denote the generators of $U_q(\widehat{sl_2})$ and one identifies $\rho_i = c_i \bar{c}_i (q + q^{-1})^2$ for $i = 0, 1$. Thanks to the Hopf algebra structure of $U_q(\widehat{sl_2})$, finite dimensional representations have been studied in details (see for instance [178, 154]). In addition, a new type of current algebra has been recently derived [151] which rigorously establishes the isomorphism between the reflection equation algebra associated with $U_q(\widehat{sl_2})$ R -matrices and the q -Onsager algebra (5.4.1).

In the context of quantum integrable systems, the elements A_0, A_1 take the form of non local operators on the lattice or continuum. According to the model and objective considered, they are used either to eventually derive second order difference equations fixing the spectrum of the model [132], or the complete set of scattering amplitudes of the fundamental particles [121, 155].

In view of all these results, finding an analogue of the deformed relations (5.4.1) that may be related to *higher rank* affine Lie algebras in a similar manner, as well as considering potential implications for quantum integrable systems with extended symmetries seems to be a rather interesting problem. In the undeformed case $q = 1$, a step towards this direction has been made by Uglov and Ivanov who introduced the so-called sl_n -Onsager's algebra for $n \geq 2$. However, to our knowledge since these results no further progress in this direction were ever published.

In the present letter, we remedy this situation. Namely, to each affine Lie algebra (of classical or exceptional type) \widehat{g} we associate a q -Onsager algebra denoted $O_q(\widehat{g})$. Then, by analogy with the $\widehat{sl_2}$ case, we propose an algebra homomorphism from $O_q(\widehat{g})$ to the coideal subalgebra³ of $U_q(\widehat{g})$ generalizing (5.4.2). Applications to boundary quantum affine Toda field theories are then considered. Despite of the fact that defining relations of the underlying hidden symmetry in these models were *not* known up to now (except for the sine-Gordon model [156, 157]), the explicit knowledge of non-local conserved charges have provided a powerful tool to construct boundary reflection matrices at least for $\widehat{g} \equiv a_n^{(1)}, d_n^{(1)}$ cases [168, 121, 169]. Here and for the first time, we show that each boundary affine Toda field theory associated with \widehat{g} enjoys a

²Defining relations of $U_q(\widehat{sl_2})$ are given in the next section.

³For definitions, see e.g. [191, 192]

hidden non-Abelian symmetry of type $O_q(\widehat{g})$. As a consequence, all known scalar integrable boundary conditions [166] simply follow from the algebraic structure, with no reference to its representation theory⁴. More generally, all possible integrable dynamical boundary conditions (additional degrees of freedom are located at the boundary) are also classified according to this new framework, generalizing the results of the boundary sine-Gordon model with dynamical boundary conditions [193, 155].

5.4.2 Generalizations of the q -Onsager algebra

As mentionned in the introduction, generalized q -Onsager algebras can be introduced by analogy with (5.4.1). Having in mind the structure of q -Serre relations for higher rank affine Lie algebras and their potential relations with coideal subalgebras of quantum affine algebras, a general formulation can be proposed.

Définition 5.4.1. *Let $\{a_{ij}\}$ be the extended Cartan matrix of the affine Lie algebra \widehat{g} with Dynkin diagram reported in Appendix A. Fix coprime integers d_i such that $d_i a_{ij}$ is symmetric. Define $\bar{a}_{ij} = \max(a_{ij}, a_{ji})$ and $\bar{q}_{ij} = q^{\min(d_i, d_j)}$. The generalized q -Onsager algebra $O_q(\widehat{g})$ is an associative algebra with unit 1, elements A_i and scalars $\rho_{ij}^k, \gamma_{ij}^{kl} \in \mathbb{C}$ with $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $k \in \{0, 1, \dots, [-\frac{\bar{a}_{ij}}{2}] - 1\}$ ⁵ and $l \in \{0, 1, \dots, -\bar{a}_{ij} - 1 - 2k\}$ (k and l are positive integer). The defining relations are :*

$$\sum_{r=0}^{1-\bar{a}_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-\bar{a}_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{\bar{q}_{ij}} A_i^{1-\bar{a}_{ij}-r} A_j A_i^r = \sum_{k=0}^{[-\frac{\bar{a}_{ij}}{2}]-1} \rho_{ij}^k \sum_{l=0}^{-2k-\bar{a}_{ij}-1} (-1)^l \gamma_{ij}^{kl} A_i^{-2k-\bar{a}_{ij}-1-l} A_j A_i^l, \quad (5.4.3)$$

where the constants γ_{ij}^{kl} are such that :

For $a_{ij} = a_{ji} = -1$: $\gamma_{ij}^{00} = \gamma_{ji}^{00} = 1$;

For $a_{ij} = -1$ and $a_{ji} = -2$: $\gamma_{ij}^{00} = \gamma_{ji}^{00} = \gamma_{ij}^{01} = \gamma_{ji}^{01} = 1$;

For $a_{ij} = -1$ and $a_{ji} = -3$: $\gamma_{ij}^{0l} = \begin{bmatrix} 2 \\ l \end{bmatrix}_q$, $\gamma_{ij}^{10} = 0$, $\gamma_{ji}^{00} = \gamma_{ji}^{02} = \gamma_{ji}^{10} = 1$,

$$\gamma_{ji}^{01} = \frac{(q + q^{-1})(q^2 + q^{-2})(q^2 + 3 + q^{-2})}{(q^4 + 2q^2 + 4 + 2q^{-2} + q^{-4})} ;$$

For $a_{ij} = -1$ and $a_{ji} = -4$: $\gamma_{ij}^{0l} = \begin{bmatrix} 3 \\ l \end{bmatrix}_q$, $\gamma_{ij}^{1l} = 0$, $\gamma_{ji}^{00} = \gamma_{ji}^{03} = \gamma_{ji}^{1l} = 1$,

$$\gamma_{ji}^{01} = \gamma_{ji}^{02} = \frac{(q + q^{-1} - 1)(q + q^{-1} + 1)(q^2 - q + 1 - q^{-1} + q^{-2})(q^2 + q + 1 + q^{-1} + q^{-2})}{(q^4 + 3 + q^{-4})}.$$

Remark 5.4.1. For $\widehat{g} \equiv a_n^{(1)}$, $q = 1$ and $\rho_{ij}^0 = 1$, the relations reduce to the ones of Uglov-Ivanov's sl_n -Onsager's algebra [176]. For $\widehat{g} \equiv a_n^{(1)}$ and $q \neq 1$, the relations already appeared in

⁴Contrary to previous works, which are representation's dependent.

⁵ $[a]$ means the nearest higher integer of a

[156] without detailed explanations. For simply laced cases, note the close relationship with the defining relations of coideal subalgebras or the non-standard deformation of finite dimensional Lie algebras [192, 194, 183].

For $q \neq 1$, an explicit relationship with coideal subalgebras of $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ can be easily exhibited. To this end, let us first recall some definitions that will be useful below. Define for $q \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q = \frac{[a]_q!}{[b]_q! [a-b]_q!}, \quad [a]_q! = [a]_q [a-1]_q \cdots [1]_q, \quad [a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}.$$

Définition 5.4.2. Let $\{a_{ij}\}$ be the extended Cartan matrix of the affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ with Dynkin diagram given in Appendix A. Fix coprime integers d_i such that $d_i a_{ij}$ is symmetric. $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ is an associative algebra over \mathbb{C} with unit 1 generated by the elements $\{e_i, f_i, q_i^{\pm \frac{h_i}{2}}\}$, $i \in 0 \dots n$ subject to the relations :

$$\begin{aligned} q_i^{\pm \frac{h_i}{2}} q_i^{\mp \frac{h_i}{2}} &= 1, & q_i^{\frac{h_i}{2}} q_j^{\frac{h_j}{2}} &= q_j^{\frac{h_j}{2}} q_i^{\frac{h_i}{2}}, \\ q_i^{\frac{h_i}{2}} e_j q_i^{-\frac{h_i}{2}} &= q_i^{\frac{a_{ij}}{2}} e_j, & q_i^{\frac{h_i}{2}} f_j q_i^{-\frac{h_i}{2}} &= q_i^{-\frac{a_{ij}}{2}} f_j, & [e_i, f_j] &= \delta_{ij} \frac{q_i^{h_i} - q_i^{-h_i}}{q_i - q_i^{-1}}, \\ e_i e_j &= e_j e_i, & f_i f_j &= f_j f_i, & \text{for } |i-j| > 1, \\ \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} e_i^{1-a_{ij}-r} e_j e_i^r &= 0, \\ \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} f_i^{1-a_{ij}-r} f_j f_i^r &= 0. \end{aligned}$$

The Hopf algebra structure is ensured by the existence of a comultiplication $\Delta : U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \mapsto U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$, antipode $\mathcal{S} : U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \mapsto U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ and a counit $\mathcal{E} : U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \mapsto \mathbb{C}$ with

$$\begin{aligned} \Delta(e_i) &= e_i \otimes q_i^{-h_i/2} + q_i^{h_i/2} \otimes e_i, \\ \Delta(f_i) &= f_i \otimes q_i^{-h_i/2} + q_i^{h_i/2} \otimes f_i, \\ \Delta(h_i) &= h_i \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes h_i, \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

$$\mathcal{S}(e_i) = -e_i q_i^{-h_i}, \quad \mathcal{S}(f_i) = -q_i^{h_i} f_i, \quad \mathcal{S}(h_i) = -h_i, \quad \mathcal{S}(\mathbb{I}) = 1$$

and

$$\mathcal{E}(e_i) = \mathcal{E}(f_i) = \mathcal{E}(h_i) = 0, \quad \mathcal{E}(\mathbb{I}) = 1.$$

Based on the realization (5.4.2) of the algebra (5.4.1) for the simplest case $\widehat{sl}_2 \equiv a_1^{(1)}$, and the results in [121, 169] it looks rather natural to consider the following realizations for the generalized q -Onsager algebras.

Proposition 5.4.3. *Let $\{c_i, \bar{c}_i\} \in \mathbb{C}$ and $\{w_i\} \in \mathbb{C}^*$. There is an algebra homomorphism $O_q(\widehat{g}) \rightarrow U_q(\widehat{g})$ such that*

$$A_i = c_i e_i q_i^{\frac{h_i}{2}} + \bar{c}_i f_i q_i^{\frac{h_i}{2}} + w_i q_i^{h_i} \quad (5.4.5)$$

iff the parameters w_i are subject to the following constraints :

$$\text{For } \widehat{g} = a_n^{(1)}(n > 1), d_n^{(1)}, e_6^{(1)}, e_7^{(1)}, e_8^{(1)} : \quad \begin{cases} w_i \left(w_j^2 + \frac{c_j \bar{c}_j}{q + q^{-1} - 2} \right) = 0 \\ w_j \left(w_i^2 + \frac{c_i \bar{c}_i}{q + q^{-1} - 2} \right) = 0 \end{cases} \text{ where } i, j \text{ are simply linked .}$$

$$\begin{aligned} \text{For } \widehat{g} = b_n^{(1)}, c_n^{(1)}, a_{2n}^{(2)}, a_{2n-1}^{(2)}, d_{n+1}^{(2)}, e_6^{(2)}, f_4^{(1)} : \\ w_j \left(w_i^2 + \frac{c_i \bar{c}_i}{q_i + q_i^{-1} - 2} \right) = 0 \quad \text{if } i, j \text{ are doubly linked with } i \text{ the longest root ;} \\ \begin{cases} w_i \left(w_j^2 + \frac{c_j \bar{c}_j}{q_j + q_j^{-1} - 2} \right) = 0 \\ w_j \left(w_i^2 + \frac{c_i \bar{c}_i}{q_i + q_i^{-1} - 2} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{if } i, j \text{ are simply linked .} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{For } \widehat{g} = g_2^{(1)}, d_4^{(3)} : \\ \begin{cases} w_j \left(w_i^2 + \frac{c_i \bar{c}_i}{(q_i + q_i^{-1} - 2)} \right) = 0 \\ w_i \left(w_j^2 + \frac{c_j \bar{c}_j}{(q_j + q_j^{-1} - 2)} \right) \left(w_j^2 + \frac{c_j \bar{c}_j (q_j + q_j^{-1} - 1)^2}{(q_j + q_j^{-1} - 2)} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{if } i, j \text{ are triply linked with } i \text{ the longest root .} \\ \begin{cases} w_i \left(w_j^2 + \frac{c_j \bar{c}_j}{q_j + q_j^{-1} - 2} \right) = 0 \\ w_j \left(w_i^2 + \frac{c_i \bar{c}_i}{q_i + q_i^{-1} - 2} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{if } i, j \text{ are simply linked .} \end{aligned}$$

$$\text{For } \widehat{g} = a_2^{(2)} : \quad w_j \left(w_i^2 + \frac{c_i \bar{c}_i}{(q_i + q_i^{-1} - 2)} \right) = 0 \quad \text{with } i \text{ the longest root .}$$

Proof: Plugging (5.4.5) into the relations of Definition 2.1, straightforward calculations leave few unwanted terms that cancel provided the above constraints on parameters w_i are satisfied. The structure constants ρ_{ij}^k - with respect to the indices i, j - are identified as follows :

$$\text{For } \widehat{g} = a_n^{(1)}(n > 1), d_n^{(1)}, e_6^{(1)}, e_7^{(1)}, e_8^{(1)} : \quad \rho_{ij}^0 = c_i \bar{c}_i \quad \text{and} \quad \rho_{ji}^0 = c_j \bar{c}_j .$$

$$\begin{aligned} \text{For } \widehat{g} = b_n^{(1)}, c_n^{(1)}, a_{2n}^{(2)}, a_{2n-1}^{(2)}, d_{n+1}^{(2)}, f_4^{(1)} : \\ \rho_{ij}^0 = c_i \bar{c}_i \quad \text{and} \quad \rho_{ji}^0 = c_j \bar{c}_j (q + q^{-1})^2 \quad \text{if } i, j \text{ are doubly linked with } i \text{ the longest root ;} \\ \rho_{ij}^0 = c_i \bar{c}_i \quad \text{and} \quad \rho_{ji}^0 = c_j \bar{c}_j \quad \text{if } i, j \text{ are simply linked .} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{For } \widehat{g} = g_2^{(1)}, d_4^{(3)} : \\
\left\{ \begin{array}{ll} \rho_{ij}^0 = c_i \bar{c}_i & \text{and } \rho_{ji}^0 = c_j \bar{c}_j (q^4 + 2q^2 + 4 + 2q^{-2} + q^{-4}) , \\ \rho_{ij}^1 = 0 & \text{and } \rho_{ji}^1 = -c_j^2 \bar{c}_j^2 (q + 1 + q^{-1})^2 (q - 1 + q^{-1})^2 \end{array} \right. \\
\text{if } i, j \text{ are triply linked with } i \text{ the longest root ;} \\
\rho_{ij}^0 = c_i \bar{c}_i \quad \text{and} \quad \rho_{ji}^0 = c_j \bar{c}_j \quad \text{if } i, j \text{ are simply linked .}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{For } \widehat{g} = a_2^{(2)} : \quad & \rho_{ij}^0 = c_i \bar{c}_i \quad \text{and} \quad \rho_{ji}^0 = c_j \bar{c}_j (q + q^{-1})^2 (q^4 + 3 + q^{-4}) , \\
& \rho_{ij}^1 = 0 \quad \text{and} \quad \rho_{ji}^1 = -c_j^2 \bar{c}_j^2 (q + q^{-1})^4 (q^2 + q^{-2})^4 , \\
& \text{with } i \text{ the longest root .}
\end{aligned}$$

Remark 5.4.2. *All the structure constants are invariant by the change $q \rightarrow q^{-1}$, which yields to the obvious realization $A_i = c_i e_i q_i^{-\frac{h_i}{2}} + \bar{c}_i f_i q_i^{-\frac{h_i}{2}} + w_i q_i^{-h_i}$.*

Quantum affine algebras $U_q(\widehat{g})$ are known to be Hopf algebras, thanks to the existence of a coproduct, counit and antipode actions. For generalized q -Onsager algebras $O_q(\widehat{g})$, a coaction map [56] can be introduced :

Proposition 5.4.4. *Let $c_i, \bar{c}_i \in \mathbb{C}$. The generalized q -Onsager algebra $O_q(\widehat{g})$ is a left $U_q(\widehat{g})$ -comodule algebra with coaction map $\delta : O_q(\widehat{g}) \rightarrow U_q(\widehat{g}) \otimes O_q(\widehat{g})$ such that*

$$\delta(A_i) = (c_i e_i q_i^{\frac{h_i}{2}} + \bar{c}_i f_i q_i^{\frac{h_i}{2}}) \otimes \mathbb{I} + q_i^{h_i} \otimes A_i . \quad (5.4.6)$$

Proof: The verification of the comodule algebra axioms (see [56]) is immediate using (5.4.4). Also, the Hopf algebra structure of $U_q(\widehat{g})$ ensures that δ is an algebra homomorphism.

Remark 5.4.3. *If one embeds $O_q(\widehat{g})$ into $U_q(\widehat{g})$ according to Prop. 2.1, the coaction δ reduces to the comultiplication Δ of $U_q(\widehat{g})$.*

5.4.3 Boundary affine Toda field theories revisited

Among integrable quantum field theories, the sine-Gordon model is known to enjoy a hidden non-Abelian $U_q(\widehat{sl_2})$ symmetry, a fact that relies on the existence of *non-local* conserved charges generating the algebra [160]. Restricted to the half-line and perturbed at the boundary by certain local vertex operators, the boundary sine-Gordon model remains integrable [116]. Corresponding scattering amplitudes of the fundamental solitons and breathers reflecting on the boundary have been derived either solving directly the so-called boundary Yang-Baxter equation (i.e. the reflection equation) [116, 195], or using the existence of non-local conserved charges [168, 121] that generate a remnant of the bulk $U_q(\widehat{sl_2})$ quantum group symmetry. However, the explicit defining relations of this remnant hidden non-Abelian symmetry algebra were only identified later on : for both integrable fixed or dynamical boundary conditions, the

symmetry algebra is the q -Onsager algebra⁶ (5.4.1) [156, 157]. In particular, in agreement with previous results fixed integrable boundary conditions are not restricted by the algebraic structure whereas dynamical ones [193, 155] are associated with boundary operators acting on finite or infinite dimensional representations of the q -Onsager algebra.

Affine Toda field theories are natural generalizations of the sine-Gordon field theory, each being associated with an affine Lie algebra \widehat{g} . Similarly to the sine-Gordon case, in the bulk they enjoy a $U_q(\widehat{g})$ quantum group symmetry which determines completely all scattering amplitudes. Restricted on the half-line, the Euclidean action reads :

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_{x<0} d^2z \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{j=0}^n n_j \exp \left(-i\hat{\beta} \frac{1}{|\alpha_j|^2} \alpha_j \cdot \phi \right) \right) + \frac{\lambda_b}{2\pi} \int dt \sum_{j=0}^n \epsilon_j \exp \left(-i\frac{\hat{\beta}}{2} \alpha_j \cdot \phi(0, t) \right) , \quad (5.4.7)$$

where $\phi(x, t)$ is an n -component bosonic field in two dimensions, $\{\alpha_j\}$ and n_j are the simple roots and Kac labels, respectively, of \widehat{g} , λ, λ_b are related with the mass scale, $\hat{\beta}$ is the coupling constant and $\{\epsilon_j\}$ are the boundary parameters or operators. This action remains however integrable for certain scalar boundary conditions ϵ_j that have been identified either at the classical [166] or quantum [167] level based on the existence of *local* higher spin conserved charges⁷. For the simply laced cases $\widehat{g} = a_n^{(1)}, d_n^{(1)}$, *non-local* conserved charges that generate a (coideal) subalgebra of $U_q(\widehat{g})$ have also been derived [121, 159]. They read :

$$\hat{Q}_j = Q_j + \overline{Q}_j + \hat{\epsilon}_j q^{T_j} , \quad j = 0, 1, \dots, n \quad \text{with} \quad \hat{\epsilon}_j = \frac{\lambda_b}{2\pi c} \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2} \epsilon_j \quad (5.4.8)$$

where $c = \sqrt{\lambda(\hat{\beta}^2/(2 - \hat{\beta}^2))^2(q^2 - 1)/2i\pi}$, the charges Q_j, \overline{Q}_j are realized in terms of vertex operators of holomorphic/antiholomorphic fields and T_j has a form analog to the bulk topological charge but restricted to the half-line. For more details, explicit expressions can be found in [121]. Generalizations of the expressions (5.4.8) to the non-simply laced cases are straightforward. Although in [121] only scalar boundary conditions were considered, calculations leading to (5.4.8) also hold assuming instead boundary operators ϵ_j provided

$$[x, \hat{\epsilon}_j] = 0 \quad \forall x \in \{Q_j, \overline{Q}_j, T_j\} . \quad (5.4.9)$$

Despite of the results in [121, 169] that provide a powerful tool to derive efficiently all scattering amplitudes of the solitons reflecting on the boundary⁸, the explicit defining relations of the $U_q(\widehat{g})$'s coideal subalgebra generalizing (5.4.1) to higher rank \widehat{g} were still unknown up to now. Beyond the interest of having a proper mathematical frame, this problem is relevant in the study of (5.4.7) as boundary states should be classified according to the representation theory of the algebra generated by (5.4.8).

⁶For the XXZ open spin chain with generic integrable boundary conditions, the symmetry is associated with an (Abelian) q -Onsager's subalgebra. But in the thermodynamic limit, it is possible to show that the Hamiltonian becomes invariant under the action of the elements of the q -Onsager algebra [196].

⁷At classical level, an extended Lax pair formalism has also been proposed [166]. Given few assumptions, it gives further support for the boundary conditions previously derived.

⁸Deriving all scattering amplitudes solely using the reflection equation is more difficult.

The answer to this problem is actually encoded in the results of the previous Section. Presented in terms of $U_q(\widehat{g})$ generators, up to an overall scalar factor the non-local conserved charges (5.4.8) turn out to be of the form (5.4.5). Indeed, two situations can be considered :

Fixed boundary conditions

Assume $\widehat{\epsilon}_j$ (or equivalently ϵ_j) are scalars. According to Proposition 2.1, given any simply or non-simply laced affine Lie algebra the corresponding non-local conserved charges (5.4.8) with $q \rightarrow q_j$ close over the relations (5.4.3) provided the boundary conditions are constrained by the relations below (5.4.5) setting $c_j = \bar{c}_j \equiv 1$, $\widehat{\epsilon}_j \equiv w_j$. Appart from the simple solutions $w_j \equiv 0 \forall j$, solving all constraints case by case yields to the following families of integrable boundary conditions :

$$\text{For } \widehat{g} = a_n^{(1)} (n > 1), d_n^{(1)}, e_6^{(1)}, e_7^{(1)}, e_8^{(1)} : \quad \widehat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \quad \forall j ;$$

$$\text{For } \widehat{g} = b_n^{(1)} : \quad \widehat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q - q^{-1}} \quad \text{for } j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad , \quad \widehat{\epsilon}_n \text{ arbitrary ;}$$

$$\text{For } \widehat{g} = a_{2n-1}^{(2)} : \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{either} & \widehat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q_j^{1/2} - q_j^{-1/2}} \quad \text{for } j \in \{0, 1, \dots, n\} \\ \text{or} & \widehat{\epsilon}_j = 0 \quad \text{for } j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{array} \right. , \quad \widehat{\epsilon}_n \text{ arbitrary ;}$$

$$\text{For } \widehat{g} = c_n^{(1)} : \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{either} & \widehat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q_j^{1/2} - q_j^{-1/2}} \quad \text{for } j \in \{1, \dots, n-1\} \quad , \\ \text{or} & \widehat{\epsilon}_j = 0 \quad \text{for } j \in \{1, \dots, n-1\} \end{array} \right. , \quad \widehat{\epsilon}_0, \widehat{\epsilon}_n \text{ arbitrary ;}$$

$$\text{For } \widehat{g} = d_{n+1}^{(2)} : \quad \widehat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q - q^{-1}} \quad \text{for } j \in \{1, \dots, n-1\} \quad , \quad \widehat{\epsilon}_0, \widehat{\epsilon}_n \text{ arbitrary ;}$$

$$\text{For } \widehat{g} = a_{2n}^{(2)} (n > 2) : \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{either} & \widehat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q_j^{1/2} - q_j^{-1/2}} \quad \text{for } j \in \{1, \dots, n\} \quad \widehat{\epsilon}_0 \text{ arbitrary} \\ \text{or} & \widehat{\epsilon}_j = 0 \quad \text{for } j \in \{0, \dots, n-1\} \quad , \quad \widehat{\epsilon}_n \text{ arbitrary ;} \end{array} \right.$$

$$\text{For } \widehat{g} = a_2^{(2)} : \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{either} & \widehat{\epsilon}_0 = \pm \frac{i}{q^2 - q^{-2}} \quad , \quad \widehat{\epsilon}_1 \text{ arbitrary} \\ \text{or} & \widehat{\epsilon}_1 = 0 \quad , \quad \widehat{\epsilon}_0 \text{ arbitrary ;} \end{array} \right.$$

$$\text{For } \widehat{g} = a_4^{(2)} : \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{either} & \widehat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q_j^{1/2} - q_j^{-1/2}} \quad \text{for } j = 1, 2, \widehat{\epsilon}_0 \text{ arbitrary} \\ \text{or} & \widehat{\epsilon}_2 = \pm \frac{i}{q^2 - q^{-2}} \quad , \widehat{\epsilon}_0 = 0 \quad , \quad \widehat{\epsilon}_1 \text{ arbitrary} \\ \text{or} & \widehat{\epsilon}_0 = \widehat{\epsilon}_1 = 0 \quad , \quad \widehat{\epsilon}_2 \text{ arbitrary ;} \end{array} \right.$$

$$\text{For } \widehat{g} = g_2^{(1)} : \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{either} & \widehat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q_j^{1/2} - q_j^{-1/2}} \\ \text{or} & \widehat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q_j^{1/2} - q_j^{-1/2}} \quad \text{for } j = 0, 1 \quad , \quad \widehat{\epsilon}_2 = \pm \frac{i(q + q^{-1} - 1)}{q^{1/2} - q^{-1/2}} ; \end{array} \right.$$

$$\text{For } \hat{g} = d_4^{(3)} : \quad \hat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q_j^{1/2} - q_j^{-1/2}} \quad \text{for } j \in \{0, 1, 2\} \quad ;$$

$$\text{For } \hat{g} = f_4^{(1)} : \quad \begin{cases} \text{either} & \hat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q_j^{1/2} - q_j^{-1/2}} & \text{for } j \in \{0, \dots, 4\} \\ \text{or} & \hat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q - q^{-1}} & \text{for } j \in \{0, 1, 2\} , \quad \hat{\epsilon}_j = 0 \quad \text{for } j \in \{3, 4\} ; \end{cases}$$

$$\text{For } \hat{g} = e_6^{(2)} : \quad \begin{cases} \text{either} & \hat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q_j^{1/2} - q_j^{-1/2}} & \text{for } j \in \{0, \dots, 4\} \\ \text{or} & \hat{\epsilon}_j = 0 & \text{for } j \in \{0, 1, 2\} , \quad \hat{\epsilon}_j = \pm \frac{i}{q - q^{-1}} \quad \text{for } j \in \{3, 4\} . \end{cases}$$

Note that for the cases $a_n^{(1)}, d_n^{(1)}$, above results are in perfect agreement with [121, 169]. In the classical limit $q \rightarrow 1$, except for the exceptional cases $g_2^{(1)}, d_4^{(3)}$ all above integrable boundary conditions agree with the results in [166].

Dynamical boundary conditions

By analogy with [155], instead of scalar boundary conditions an interesting problem is to consider additional operators $\hat{\epsilon}_j$ located at the boundary, and interacting with the bulk fields according to (5.4.7). As one can easily show, following the arguments of [121] non-local conserved charges of the form (5.4.8) with $q \rightarrow q_j$ can be constructed. These charges can be written :

$$\hat{Q}_j = (Q_j + \overline{Q}_j) \otimes \mathbb{I} + q_j^{T_j} \otimes \hat{\epsilon}_j , \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (5.4.10)$$

where the first and second representation spaces are associated with the particle/boundary space of states, respectively. In order to form an algebra, as shown in previous Section the elements (5.4.10) have to satisfy the relations (5.4.3). According to Proposition 2.2, this is only possible if the boundary operators *also* provide realizations of the generalized q -Onsager algebra i.e. $\mathbf{A}_j \rightarrow \hat{\epsilon}_j \forall j$ in (5.4.3). For $g = sl_2$, a simple solution has been proposed in [155]. For higher rank cases, an interesting problem would be to construct realizations in terms of q -deformed oscillators, generalizing the results for the massless case (see eq. (1.17) in [197]).

5.4.4 Discussion

In this letter, a new family of quantum algebras that we call the *generalized q -Onsager algebras* $O_q(\hat{g})$ associated with the affine Lie algebras \hat{g} has been introduced and studied. Some properties and the explicit relationship with coideal subalgebras of $U_q(\hat{g})$ have been clarified, and simple consequences for quantum integrable systems - namely boundary affine Toda field theories - have been explored. Clearly, extending all known results of the sl_2 -case (5.4.1) to the whole family $O_q(\hat{g})$ is rather interesting from different points of view.

From the mathematical side, it is now well understood thanks to Terwilliger *et al.*'s works (see some references below) that (5.4.1) provides an algebraic framework to classify all orthogonal polynomials of the Askey scheme. Whether the generalized q -Onsager algebras $O_q(\hat{g})$ provide an algebraic framework for multivariable orthogonal polynomials - known or new - is an interesting problem. Another interesting problem is to construct new current algebras associated with $O_q(\hat{g})$

by analogy with [151] and establish the isomorphism between $O_q(\widehat{g})$ and the reflection equation algebra for R -matrices associated with higher rank quantum affine Lie algebras.

From the physics side - beyond the explicit construction of boundary reflection matrices for boundary affine Toda field theories (see [121, 159] for the simply laced cases) - generalized q -Onsager algebras should provide a powerful tool in order to study quantum integrable systems with extended symmetries. In this direction, irreducible representations of $O_q(\widehat{g})$ will find applications to the spectrum of boundary states in boundary integrable quantum field theories. Also, studying the explicit construction of a hierarchy of commuting quantities that generalizes the Dolan-Grady hierarchy [159] or its q -deformed analogue [156] will find applications in studying the spectrum and eigenstates in related spin chains. The results in [122] might be a good starting point.

Some of these problems will be considered elsewhere.

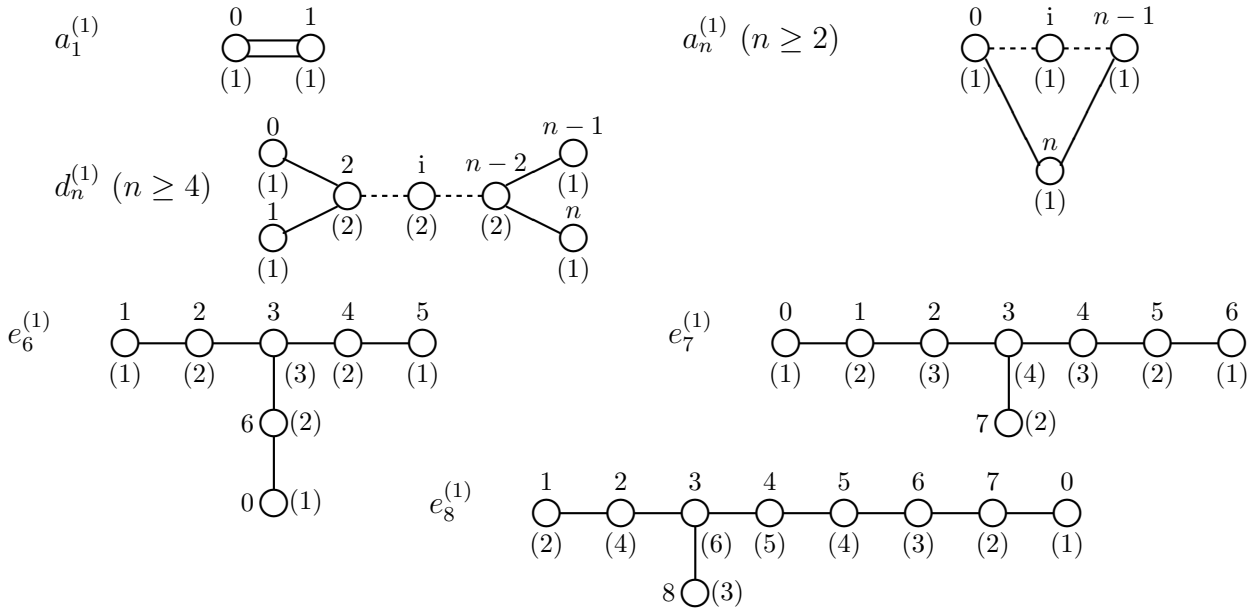
Acknowledgements : S.B thanks LMPT for hospitality where part of this work has been done.

Appendix A. Dynkin diagrams for affine Lie algebras

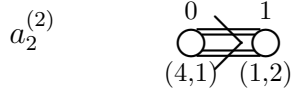
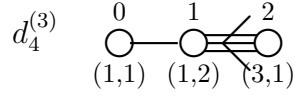
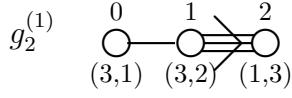
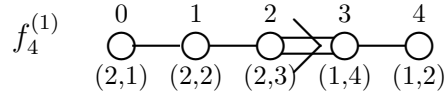
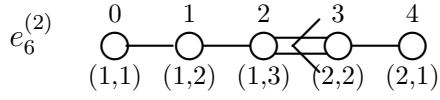
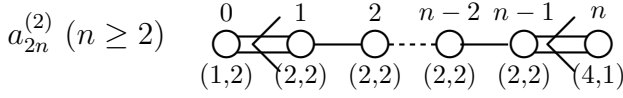
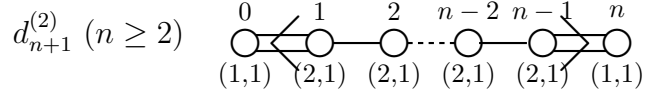
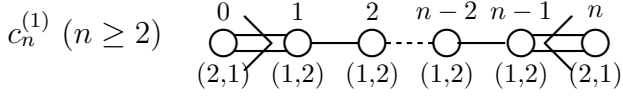
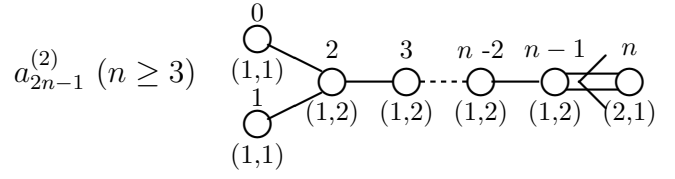
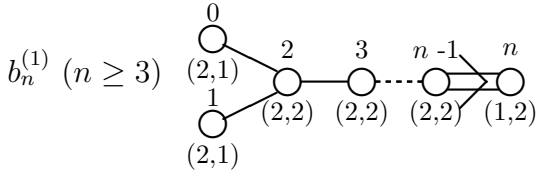
The upper (resp. lower) indices denote the number (resp. value of (d_i, n_i)) associated with each node. The explicit values of the coefficient of the extended Cartan matrix a_{ij} for each affine Lie algebra can be found using $a_{ii} = 2$ and the rules :

$$\begin{array}{llll}
 \begin{array}{c} i \\ \circ \end{array} & \begin{array}{c} j \\ \circ \end{array} & a_{ij} = a_{ji} = 0, & \begin{array}{c} i \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} j \\ \circ \end{array} & a_{ij} = a_{ji} = -2, & \begin{array}{c} i \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} j \\ \circ \end{array} & a_{ij} = a_{ji} = -1, \\
 \begin{array}{c} i \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} j \\ \circ \end{array} & a_{ij} = -1 & a_{ji} = -2, & \begin{array}{c} i \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} j \\ \circ \end{array} & a_{ij} = -1 & a_{ji} = -3, & \begin{array}{c} i \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} j \\ \circ \end{array} & a_{ij} = -1 \\
 \begin{array}{c} i \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} j \\ \circ \end{array} & a_{ji} = -4. & & & & & &
 \end{array}$$

- Simply laced Dynkin diagrams (all $d_i = 1$ and the lower indices correspond to (n_i)) :



- Non-simply laced Dynkin diagrams (the lower numbers correspond to (d_i, n_i)) :



Chapitre 6

Conclusion

Nous avons considéré, dans cette thèse, l'étude des chaînes de spins "universelles" et obtenu, par le biais de l'ABA, les valeurs et les vecteurs propres de la matrice de transfert fonctions de paramètres satisfaisant un système d'équations : les équations de Bethe. Cette solution a été obtenue pour les chaînes de spins associées aux groupes quantiques de $gl(\mathbf{n})$ et $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$, le Yangian et l'algèbre quantique. Ces groupes quantiques sont les symétries cachées des chaînes de spins et l'étude de leur théorie des représentations permet de construire la base diagonalisant la matrice de transfert. Cette méthode a été utilisée pour deux familles de chaînes de spins, les chaînes périodiques et les chaînes avec bords. Pour les chaînes de spins avec bords, la possibilité d'utiliser l'ABA est liée au choix de conditions diagonales aux bords. Ce choix permet de construire une théorie des représentations de plus haut poids en utilisant celle des groupes quantiques. Nous avons souligné que dans certains cas (pour une représentation fondamentale des groupes quantiques) il est possible de considérer une transformation permettant de ramener des conditions aux bords non diagonales à des conditions diagonales. Le coût de cette transformation correspond à l'introduction de contraintes reliant les paramètres de couplage de chacun des bords.

L'ABA dépendant des équations de Bethe, nous n'avons pas donc totalement résolu le problème spectral. Il reste à résoudre les équations de Bethe. Dans le cas des chaînes de spins universelles, cette résolution n'existe pas. Il existe cependant de nombreuses solutions au cas par cas dans la littérature (voir références dans [198]). Lorsque le groupe quantique est le Yangien de $gl(\mathbf{n})$, une solution pour les chaînes dites L_0 périodiques (la chaîne est définie par séquence de L_0 spins arbitraires se répétant) a été formulée et permet d'obtenir l'état fondamental ainsi que les petites excitations au-dessus du vide [198]. Le problème similaire pour l'algèbre quantique, les super-groupes quantiques et les cas avec bords reste ouvert.

L'étape suivante pour compléter l'étude des chaînes de spins "universelles" est le calcul de leurs fonctions de corrélation. Pour obtenir ces fonctions, en utilisant l'ABA, il est indispensable de connaître le produit scalaire entre deux vecteurs de Bethe. Comme nous l'avons discuté dans cette thèse, très peu d'informations existent dans le cas des algèbres de rang supérieur à 2. Les obstacles sont la complexité du problème combinatoire à résoudre et la difficulté de conjecturer une formulation compacte de ces produits scalaires. Le problème principal pour le calcul des ces produits scalaires, dans la formulation "RTT", vient de la formulation par récurrence des vecteurs de Bethe. Les relations de commutation entre les opérateurs de création et d'annihili-

lation pour le plus haut niveau de la récurrence font intervenir des éléments diagonaux dont le vecteur du niveau inférieur n'est pas vecteur propre. Cela sous-entend qu'il n'y a pas de formule de récurrence entre les produits scalaires de deux vecteurs de rang n et $n - 1$. L'approche par les courants de Drinfel'd présentée dans cette thèse pour la chaîne XXZ- $sl(2)$ périodique pourrait, nous l'espérons, simplifier ce calcul pour les algèbres de rangs supérieurs. Cette approche ne montrera cependant son efficacité que si nous obtenons dans un premier temps, le cas $sl(3)$. Cette étude reste ouverte pour l'instant et d'actualité dans notre travail de recherche. Pour le cas des modèles avec des conditions diagonales aux bords, le problème est résolu pour les cas de rang 2 mais le problème pour les rang supérieurs reste ouvert.

Enfin, nous avons considéré le problème des modèles intégrables quantiques avec bords. Nous avons vu que pour les chaînes de spins avec bords génériques, l'ABA n'était pas applicable par l'absence d'une théorie de plus haut poids pour l'algèbre de réflexion. Il est donc nécessaire de trouver une autre approche pour résoudre le problème spectral de ces modèles. La première étape que nous avons étudiée pendant cette thèse est de déterminer l'équivalent de la base de Serre-Chevalley des algèbres quantiques pour l'algèbre de réflexion $\mathfrak{D}(R_{trig})$ pour les matrices R trigonométriques (i.e la réalisation la plus simple de l'algèbre de réflexion). Au vu des résultats obtenus dans l'étude des théories de Toda affine avec bords, nous avons pu identifier cette réalisation en termes des algèbres $\mathcal{O}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ prenant la forme de relation de Serre-Chevalley "généralisée". L'isomorphisme entre ces algèbres et $\mathfrak{D}(R_{trig})$ n'a été prouvé que dans le cas de la matrice R symétrique de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl(2)})$. Cela fait intervenir une autre réalisation de $\mathfrak{D}(R_{trig})$ appelée algèbre de q-Onsager $\mathcal{A}_q(\widehat{sl(2)})$ de par son lien avec l'algèbre d'Onsager. Pour les autres cas, le problème reste ouvert et donnera lieu à de futures recherches. La théorie des représentations en termes des algèbres tridiagonales pour le cas $\mathcal{O}_q(\widehat{sl(2)})$ a été abordée et permet d'envisager le problème spectral des modèles possédant cette symétrie (par exemple la chaîne XXZ- $sl(2)$ spin 1/2 avec bords génériques). Comme nous l'avons discutée, cette théorie des représentations demande encore de nombreuses investigations : représentations de dimension arbitraire, produits tensoriels de ces représentations, représentations de dimension infinie... Pour les autres algèbres $\mathcal{O}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$, la théorie des représentations reste un problème ouvert.

Bibliographie

- [1] R. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press (1982) ;
Partition fonction of the Eight-Vertex Lattice Model Ann. Phys. **70** (1972) p. 193 ;
Eight-Vertex Model in Lattices Statistique and One-Dimensional Anisotropic Heisenberg Chain I, II, III, Ann. Phys **76** (1973) p. 1, 25, 48.
- [2] L. Faddeev, *How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model*, in *Symétries Quantiques*, Les Houches summerschool proceedings **64**, Eds A. Connes, K. Gawedzki and J. Zinn-Justin, North-Holland (1998) and arXiv : hep-th/9605187.
- [3] C.G.J. Jacobi, J. de Crelle **17** (1837).
- [4] J. Liouville, J. Math **18** (1853).
- [5] V.I. Arnold, *Mathematical Methodes of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Math. Springer (1978).
- [6] C.S. Garner, J. M. Greene, M. D.Kruskal, R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-deVries equation*, Phys. Rev. Let. **19** (1967) p. 1095.
- [7] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Method for solving the Sine-Gordon equation*, Phys. Rev. Let. **30** (1973) p. 1262 ;
Nonlinear-evolution equations of physical signifiacnce, Phys. Rev. Let. **31** (1973) p. 125 ;
The inverse scattering transform Fourier analysis for nonlinear problem, Stud. Appl. Math. **53** (1974) p. 249.
- [8] M.J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and Inverse Scattering Transform*, Studies in App. Math. SIAM (1981).
- [9] I.M. Gel'fand, B.M. Levitan, *On the determination of a differential equation from it's spectral function*, Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **1** (1955) p 253.
- [10] V. A. Marchenko, *On reconstruction of the potential energy from phases of the scattered waves*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **104** (1955) p. 695 (en russe).
- [11] P. D. Lax, *Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968) p. 467.
- [12] O. Babelon, C.M. Viallet, *Hamiltonian Structures and Lax Equation*, Phys. Lett. B **237** (1989) p. 411.
- [13] E. K. Sklyanin, *On the complete integrability of the Landau-Lifchitz equation*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968) p. 467.
- [14] A.A. Belavin and V.G. Drinfel'd, *Solution of the Classical Yang-Baxter Equation for Simple Lie Algebras*, Funct. Anal. Appl. **16** (1983) p. 159.

- [15] V.E. Zakharov, L.D.Faddeev, *Korteweg-de-Vries equation is completely integrable Hamiltonian system*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971) p. 280.
- [16] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette*, Zeitschrift für Physik **71** (1931) p. 205.
- [17] W. Heisenberg, *Zür Theorie der Ferromagnetismus*, Zeit. f. Phys **49** (1928) p. 619.
- [18] M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, Masson (1983).
- [19] C. N. Yang and C. P. Yang, *One dimensional chain of Anisotropic Spin-Spin interactions : I Proof of Bethe's hypothesis*, Phys. Rev. **150** (1966) p. 321 ;
One dimensional chain of Anisotropic Spin-Spin interactions : II Properties of the Ground State energy per lattice site for an infinite system, Phys. Rev. **150** (1966) p. 327 ;
One dimensional chain of Anisotropic Spin-Spin interactions : III Application, Phys. Rev. **151** (1966) p. 258.
- [20] L. Hulthen, *Über des Austauschproblem eines Kristalles*, Arkiv Mat. Astron. Fys. A **26** (1938) p. 1.
- [21] J. des Cloizeaux and J.J. Pearson, *Spin-Wave spectrum of the Antiferromagnetic Linear Chain*, Phys. Rev. **128** (1962) p. 2131.
- [22] R. Orbach, *Linear antiferromagnetic chain with anisotropic coupling*, Phys. Rev. **112** (1958) p. 309.
- [23] J. des Cloizeaux and M. Gaudin, *Antisotropic Linear Magnetic Chain*, J. Math. Phys. **7** (1966) p. 1384.
- [24] M. Takahashi, *One-Dimensional Heisenberg Model at Finite Temperature*, Prog. of Theo. Phys. **46** (1971) p. 401.
- [25] M. Takahashi and M. Suzuki, *One-Dimensional anisotropic Heisenberg Model at Finite Temperature*, Prog. of Theo. Phys. **48** (1972) p. 2187.
- [26] E.H. Lieb and F.Y. Wu, Phys. Rev. Lett. **20** (1968) p. 1445.
- [27] C.N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Rev. Lett. **19** (1967) p. 1312.
S Matrix for the One-Dimensional N-Body Problem with Repulsive or Attractive δ -Function, Phys. Rev. **168** (1968) p. 1920.
- [28] J. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) p. 1454.
- [29] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado, *Exactly soluble SOS Models II : Proof of the star-triangle relation and combinatorial identities*, Adv. Stu.Pur. Math. **16** (1988) p. 17.
- [30] L. Onsager, *Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition*, Phys. Rev. **65** (1944) p. 117.
- [31] G. H. Wannier, Rev. Mod. Phys. **17** (1945) p. 50.
- [32] E. Ising, Zeits. f. Physik **31** (1925) p. 253.
- [33] B. Kaufman, *Crystal Statistics. II. Partition Function Evaluated by Spinor Analysis*, Phys. Rev. **76** (1949) p. 1232.

- [34] E.H. Lieb, *Exact solution of the problem of the entropy of two-dimensional ice*, Phys. Rev. Lett. **18** (1967) p. 692;
Exact solution of the F model of an antiferroelectric, Phys. Rev. Lett. **18** (1967) p. 1046;
Exact solution of the two-dimensional slater KDP model of a ferroelectric, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) p. 108.
- [35] E. Sklyanin, L. Takhtajan and L. Faddeev, *The Quantum Inverse Problem Method*, Theor. Math. Phys. **40** (1980) p. 688.
- [36] P.P. Kulish and E.K. Sklyanin, *Solution of the Yang-Baxter equation*, J. Sov. Math. **19** (1982) p. 1596;
Quantum inverse scattering method and the Heisenberg ferromagnet, Phys. Lett. **A70** (1979) p. 461.
- [37] L.A. Takhtajan and L.D. Faddeev, *The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model*, Russ. Math. Surveys **34** (1979) p. 11;
What is spin wave ?, Phys. Lett. A **85** (1981) p. 375.
- [38] A. Izergin and V. Korepin, *The lattice quantum Sine-Gordon model*, Lett. Math. Phys. **5** (1981) p. 199;
The most general L operator for the R-matrix of the XXX model, Lett. Math. Phys. **8** (1984) p. 259.
- [39] A. Zamolodchicov and Al. Zamolodchikov, *Factorized S-Matrices in Two Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Theory Models*, Ann. Phys. **120** (1979) p. 253.
- [40] F. A. Smirnov, *Form Factors in Completely Integrable Models in Quantum Field Theory*, Singapore : World Scientific (1992)
- [41] V. G. Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Sov. Math. Doklady **32** (1985) p. 254.
- [42] V. G. Drinfeld, *A new realization of Yangians and quantum affine algebras*, Sov. Math. Doklady **36** (1988) p. 212.
- [43] V. G. Drinfeld, *Quantum Groups*, in Proc. Int. Congress Math., Berkeley AMS Providence RI (1987) p. 798.
- [44] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985) p. 63;
A q-analog of $U(gl(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. **11** (1986) p. 247.
- [45] E.K. Sklyanin, *Boundary conditions for integrable quantum systems*, J. Phys. **A21** (1988) p. 2375.
- [46] I. V. Cherednik, *Factorizing particules on a half line and root systems*, Theor. Math. Phys. **61** (1984) p. 977.
- [47] N.Yu. Reshetikhin, *The spectrum of the transfer matrices connected with Kac-Moody algebras*, Lett. Math. Phys. **14** (1987) p. 235.
- [48] E.K. Sklyanin, *Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics*, arXiv :hep-th/9211111.

- [49] L.D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin and L.A. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras, Yang-Baxter equation and quantum integrable systems*, Advanced Series in Mathematical Physics Vol. **10** Singapore World Scientific (1989) p. 299.
- [50] D. Arnaudon, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat and É. Ragoucy, *Analytical Bethe Ansatz for closed and open $gl(\mathfrak{n})$ -spin chains in any representation*, JSTAT **02** (2005) p. 02007 and arXiv :math-ph/0411021.
- [51] D. Arnaudon, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat and É. Ragoucy, *Spectrum and Bethe ansatz equations for the $U_q(gl(\mathfrak{n}))$ closed and open spin chains in any representation*, Annales H. Poincaré **7** (2006) p. 1217 and arXiv :math-ph/0512037.
- [52] É. Ragoucy and G. Satta, *Analytical Bethe ansatz for closed and open $gl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ super-spin chains in arbitrary representations*, JHEP **09** (2007) p. 001 and arXiv :hep-th/0706.3327.
- [53] D. Arnaudon, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat and É. Ragoucy, *Analytical Bethe Ansatz for closed and open $gl(\mathfrak{n})$ -spin chains in any representation*, JSTAT **02** (2005) p. 02007 and math-ph/0411021.
- [54] V.A.Fateev and A.B.Zamolodchikov, *Self-dual solutions of the star-triangle relations in Z models*, Phys. Lett. A **92** (1982) p. 37.
- [55] V. Tarasov, L. Takhtajan, L. Faddeev, *Local Hamiltonians for quantum integrable models on the lattice*, Theo. Math. Phys. **40** (1979) p. 194.
- [56] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press (1994).
- [57] M. Jimbo, *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*, World Scientific Singapore (1989).
- [58] L. Frappat, A. Sciarrino and P. Sorba, *Dictionary on Lie algebras and superalgebras*, San Diego Academic Press (2000).
- [59] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press (1985)
- [60] A.N. Kirillov and N. Reshetikhin, *Q-weyl group and multiplicative formula for the universal R-matrices*, Com. Math. Phys. **134** (1990) p. 421.
- [61] M. Rosso, *An analogue of PBW theorem and the universal R-matrix for $\mathcal{U}_\hbar(sl(n+1))$* , Com. Math. Phys. **124** (1989) p. 307.
- [62] S. M. Khoroshkin and V. N. Tolstoy, *Universal R-Matrix for Quantized (Super) Algebras*, Com. Math. Phys. **141** (1991) p. 599.
- [63] N.Yu. Reshetikhin and M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Central extensions of quantum current groups*, Lett. Math. Phys. **19** (1990) p. 133.
- [64] J. Ding and I.B. Frenkel, *Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra $U_q(\widehat{gl(n)})$* , Com. Math. Phys. **156** (1993) p. 277.
- [65] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Com. Math. Phys. **165** (1994) p. 555.
- [66] N. Jing, *On Drinfeld realization of quantum affine algebras*, Proceedings of Conf. on Lie Alg. at Ohio State Univ., May 1996 : in Monster and Lie Algebras, eds. J. Ferrar and K. Harada, OSU Math. Res. Inst. Publ. 7, de Gruyter, Berlin (1998) p.195.
- [67] N. Crampé, *Hopf structure of the Yangian $\mathcal{Y}(sl(n))$ in the Drinfel'd realisation* J. Math. Phys. **45** (2003) p. 434.

- [68] G. Felder, *Elliptic quantum groups*, Proc. ICMP Paris (1994) p. 211 and arXiv :hep-th/9412207.
- J.L. Gervais, A. Neveu, *Novel triangle relation and absence of tachyons in Liouville string field theory*, Nucl. Phys. B **238** (1984) p. 125.
- [69] M. Rosso, *Finite dimensional representations of the quantum analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Com. Math. Phys. **117** (1988) p. 581.
- [70] G. Lusztig, *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. Math. **70** (1988) p. 237.
- [71] P.P. Kulish, N.Yu. Reshetikhin, *Generalized Heisenberg ferromagnet and the Gross-Neveu model*, Sov. Phys. JETP **53** (1981) p. 108.
- [72] E. Ogievetsky and P. Wiegmann, *Factorized S-matrix and the Bethe Ansatz for simple Lie groups*, Phys. Lett. B **168** (1986) p. 360.
- [73] J. Abad and M. Rios, *Integrable spin chains associated to $\widehat{sl}_q(n)$ and $\widehat{sl}_{p,q}(n)$* , J. Phys. A **28** (1995) p. 3319 and arXiv :hep-th/9410193;
Excitations and S-matrix for an $su(3)$ spin chain combining 3 and 3^ representations*, J. Phys. A **30** (1997) p. 2269 and arXiv :cond-mat/9801129.
- [74] P.P. Kulish, N.Yu. Reshetikhin and E.K. Sklyanin, *Yang-Baxter equation and representation theory : I*, Lett. Math. Phys. **5** (1981) p. 393.
- [75] P. Kulish, *Integrable graded magnets*, J. Sov. Math. **35** (1986) p. 2648.
- [76] H. Saleur, *The continuum limit of $SL(N|K)$ integrable super spin chains*, Nucl. Phys. B **578** (2000) p. 552 and solv-int/9905007.
- [77] M.J. Martins, *Integrable mixed vertex models from braid-monoid algebra*, Stat. Phys. on the Eve of the 21st century, Ed. M. Batchelor and L. Wille, Series on Adv. in Stat. Mech. **14** World Sci. (1999) and solv-int/9903006.
- [78] Z. Tsuboi, *Analytical Bethe ansatz and functional equations associated with any simple root systems of $sl(r+1|s+1)$* , Physica A **252** (1998) p. 565.
- [79] Z. Tsuboi, *Analytical Bethe ansatz related to a one-parameter family of finite-dimensional representations of $sl(r+1|s+1)$* , J. Phys. A **31** (1998) p. 5485.
- [80] V. Kazakov, A. Sorin and A. Zabrodin, *Supersymmetric Bethe ansatz and Baxter equations from discrete Hirota dynamics*, arXiv :hep-th/0703147.
- [81] L. Mezincescu and R.I. Nepomechie, *Analytical Bethe Ansatz for quantum algebra invariant spin chains*, Nucl. Phys. B **372** (1992) p. 597 and hep-th/9110050.
- [82] P.P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin, *Diagonalisation of $gl(n)$ invariant transfer matrices and quantum N-wave system (Lee model)*, J. Phys. A **16** (1983) p. 591.
- [83] O. Castro-Alvaredo and J.M. Maillet, *Form factors of integrable Heisenberg (higher) spin chains*, J. Phys. A **40** (2007) p. 7451 and hep-th/0702186v1.
- [84] F. Göhmann, *Algebraic Bethe ansatz for the $gl(1|2)$ generalized model and Lieb-Wu equations*, Nucl. Phys. B **620** (2002) p. 501 and arXiv :cond-mat/0108486.
- [85] O. Babelon, H. J. de Vega and C-M. Viallet, *Exact solution of the $Z_{n+1} \times Z_{n+1}$ symmetric generalization of the XXZ model*, Nucl. Phys. B **200** (1982) p. 266.

- [86] G.A.P. Ribeiro and M.J. Martins, *Algebraic Bethe ansatz for an integrable $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(n|m))$ vertex model with mixed representations*, Nucl. Phys. B **738** (2006) p. 391 and [arXiv :nlin/0512035](#).
- [87] E. Mukhin, V. Tarasov and A. Varchenko, *Bethe eigenvectors of higher transfer matrices*, JSTAT **0608** (2006) p. 08002 and [arXiv :math.QA/0605015](#).
- [88] V. Tarasov and A. Varchenko, *Combinatorial formulae for nested Bethe vector*, [arXiv :math.QA/0702277](#).
- [89] S. Khoroshkin and S. Pakuliak, *Weight function for $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$* , Theor. Math. Phys. **145** (2005) p. 1373;
A computation of an universal weight function for the quantum affine algebra $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$, [arXiv :math.QA/0711.2819](#).
- [90] A. Oskin, S. Pakuliak and A. Silantyev, *On the universal weight function for the quantum affine algebra $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$* , [arXiv :math.QA/0711.2821](#).
- [91] L. Frappat, S. Khoroshkin, S. Pakuliak and E. Ragoucy, *Bethe ansatz for the universal weight function*, , Ann. H. Poin. **10** (2009) p. 513.
- [92] S. Khoroshkin, S. Pakuliak and V. Tarasov, *Off-shell Bethe vectors and Drinfeld currents*, J. Geom. Phys. **57** (2007) p. 1713 and [math.QA/0610517](#).
- [93] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991) p. 123.
- [94] J.H.H. Perk and C.L. Schultz, *New families of commuting transfer matrices in q -state vertex model*, Phys. Lett. A **84** (1981) p. 407.
- [95] V.V. Bazhanov and A.G. Shadrnikov, *Trigonometric solutions of the triangle equation and simple lie super algebras*, Theor. Math. Phys. **73** (1988) p. 1302.
- [96] R.B. Zhang, *Universal L operator and invariants of the quantum supergroup $U_q(\mathfrak{gl}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}))$* , J. Math. Phys. **33** (1992) p. 6.
- [97] R.B. Zhang, *The $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ super-Yangian and its finite dimensional representations*, Lett. Math. Phys. **37** (1996) p. 419 and [arXiv :q-alg/9507029](#).
- [98] R.B. Zhang, *Finite dimensional irreducible representations of the supergroup $U_q(\mathfrak{gl}(\mathfrak{m}|\mathfrak{n}))$* , J. Math. Phys. **34** (1993) p. 1236.
- [99] V.O. Tarasov, *Irreducible monodromy matrices for the R -matrix of the XXZ model and local lattice quantum Hamiltonians*, Theor. Math. Phys. **63** (1985) p. 440
- [100] V. Chari and A. Pressley, *Yangians and R -matrices*, L'Enseignement Mathématique **36** (1990) p. 267.
- [101] O. Babelon, *Representations of the Yang-Baxter algebras associated to Toda field theory*, Nucl. Phys. **B230** (1984) p. 241.
- [102] M. Jimbo, *A q -difference analogue of $U(\mathfrak{gl}(n+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986) p. 247.
- [103] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Prog. in Math. **110** Birkhauser Boston.
- [104] C. Briot and E. Ragoucy, *Twisted superYangians and their representations*, J. Math. Phys. **44** (2003) p.1252 and [math.QA/0111308](#).

- [105] M. Scheunert, W. Nahm and V. Rittenberg, *Irreducible representations of the $OSP(2|1)$ and $SPL(2|1)$ graded Lie algebras*, J. Math. Phys. **18** (1977) p. 155.
- [106] M. Marcu, *The tensor product of two irreducible representations of the $spl(2|1)$ superalgebra*, J. Math. Phys. **21** (1980) p. 1284.
- [107] V. Kac, *Contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras*, Lecture Notes in Physics **94** (1979) p. 441.
- [108] F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor, R. J. Baxter and G. R. W. Quispel, J. Phys A : Math. Gen. **20** p. 6397.
- [109] H. Schulz, J. Phys. C : Solid State Phys. **18** p. 581.
- [110] R. Bariev, Physica A **103** p. 363.
- [111] A. Molev and É. Ragoucy, *Representations of reflection algebras*, Rev. Math. Phys. **14** (2002) p. 317 and [arXiv :math-QA/0406021](#).
- [112] L. Mezincescu and R. I. Nepomechie, *Integrable open spin chains with non-symmetric R -matrices*, J. Phys. A : Math. Gen. **24** (1991) p. 17.
- [113] M. Mintchev, E. Ragoucy and P. Sorba, *Spontaneous symmetry breaking in the $gl(N)$ -NLS hierarchy on the half line*, J. Phys. A **34** (2001) p. 8345 and [arXiv :hep-th/0104079](#).
- [114] D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat and É. Ragoucy, *General boundary conditions for the $sl(\mathfrak{n})$ and $sl(\mathfrak{m}|\mathfrak{n})$ open spin chains*, JSTAT **0408** (2004) p. 005 and [arXiv :math-ph/0406021](#).
- [115] H. J. de Vega and A. González-Ruiz, *Boundary K -matrices for the XYZ, XXZ AND XXX spin chains*, J. Phys. A **27** (1994) p. 6129.
- [116] S. Ghoshal and A. Zamolodchikov, *Boundary S -Matrix and Boundary State in Two-Dimensional Integrable Quantum Field Theory*, Int. J. Mod. Phys. **A 9** (1994) p. 3841; Erratum-ibid. **A 9** (1994) p. 4353 and [arXiv :hep-th/9306002](#).
- [117] H.J. de Vega and A. González-Ruiz, *Boundary K -matrices for the six vertex and the $n(2n - 1)$ A_{n-1} vertex models*, J. Phys. A **26** (1993) p. 519 and [arXiv :hep-th/9211114](#); *Exact solution of the $SU_q(n)$ invariant quantum spin chains*, Nucl. Phys. B **417** (1994) p. 553 and [arXiv :hep-th/9309022](#); *Exact Bethe ansatz solution of A_{n-1} chains with non- $SU_q(\mathfrak{n})$ invariant open boundary conditions*, [arXiv :hep-th/9404141](#).
- [118] A. Lima-Santos, $A_{n-1}^{(1)}$ reflection K -matrices, Nucl. Phys. B **644** (2002) p. 568.
- [119] W.L. Yang and Y.Z. Zhang, *Exact solution of the $A_{n-1}^{(1)}$ trigonometric vertex model with non-diagonal open boundaries*, JHEP **0501** (2005) p. 021 and [arXiv :hep-th/0411190](#).
- [120] Junpeng Cao, Hai-Qing Lin, Kang-jie Shi, Yupeng Wang, *Exact solutions and elementary excitations in the XXZ spin chain with unparallel boundary fields*, Nucl. Phys. B **663** (2003) p. 487 and [arXiv :cond-mat/0212163](#).
- [121] G.W. Delius and N.J. MacKay, *Quantum group symmetry in sine-Gordon and affine Toda field theories on the half-line*, Commun. Math. Phys. **233** (2003) p. 173, [arXiv :hep-th/0112023](#).
- [122] A. Doikou, *From affine Hecke algebras to boundary symmetries*, Nucl. Phys. B **725** p. 493.

- [123] L. Mezincescu and R. I. Nepomechie, *Fusion procedure for open chains*, J. Phys. A **25** (1992) p 2533.
- [124] W. Galleas and M.J. Martins, *Solution of the $SU(n)$ vertex model with non-diagonal open boundaries*, Phys. Lett. A **335** (2005) p. 167 and [arXiv :nlin.SI/0407027](#).
- [125] G.A.P. Ribeiro and M.J. Martins, *Mixed integrable $SU(N)$ vertex model with arbitrary twists*, Nucl. Phys. B **705** 2005 p. 521 and [arXiv :nlin/0406021v1](#).
- [126] C.S. Melo, G.A.P. Ribeiro and M.J. Martins, *Bethe ansatz for the XXX-S chain with non-diagonal open boundaries*, Nucl. Phys B **711** p. 565 and [arXiv :nlin/0411038v1](#).
- [127] H. Frahm, A. Seel and T. Wirth, *Separation of Variables in the open XXX chain*, Nucl.Phys. B **802** (2008) p. 51 and [arXiv :0803.1776v2](#).
- [128] R.I. Nepomechie and F. Ravanini, *Completeness of the Bethe Ansatz solution of the open XXZ chain with nondiagonal boundary terms*, J. Phys. A **36** (2003) p. 1391; Ad- dendum, J. Phys. A **37** (2004) p. 1945 and [arXiv :hep-th/0307095](#).
- [129] Wen-Li Yang and Yao-Zhong Zhang, *On the second reference state and complete eigenstates of the open XXZ chain*, JHEP **4** (2007) p. 44 and [arXiv :hep-th/0703222v2](#).
- [130] A. Kuniba, K. Sakai, J. Suzuki, *Continued fraction TBA and functional relations in XXZ model at root of unity*, Nucl. Phys. B **525** (1998) p. 597 and [arXiv :math/9803056](#);
R. Nepomechie, *Solving the open XXZ spin chain with nondiagonal boundary terms at roots of unity*, Nucl. Phys. B **622** (2002) p. 615 and [arXiv :hep-th/0110116](#);
R. Nepomechie, *Bethe Ansatz solution of the open XXZ chain with nondiagonal boundary terms*, J. Phys. A **37** (2004) p. 433 and [arXiv :hep-th/0304092](#);
R. Murgan, R. Nepomechie, Chi Shi, *Exact solution of the open XXZ chain with general integrable boundary terms at roots of unity*, JSTAT **0608** (2006) p. 006 and [arXiv :hep-th/0605223](#);
L. Frappat, R. Nepomechie, E. Ragoucy, *Complete Bethe Ansatz solution of the open spin-s XXZ chain with general integrable boundary terms*, JSTAT **0709** (2007) p. 09008 and [arXiv :0707.0653](#).
- [131] W. Galleas, *Functional relations from the Yang-Baxter algebra : Eigenvalues of the XXZ model with non-diagonal twisted and open boundary conditions*, Nucl. Phys. B **790** (2008) p. 524 and [arXiv :0708.0009](#).
- [132] P. Baseilhac and K. Koizumi, *Exact spectrum of the XXZ open spin chain from the q -Onsager algebra representation theory*, J. Stat. Mech. (2007) p. 09006 and [arXiv :hep-th/0703106](#).
- [133] P. Baseilhac, *New results in the XXZ open spin chain*, proceedings of RAQIS07 (Annecy-le-Vieux, France) and [arXiv :0712.0452](#).
- [134] S. Belliard and É. Ragoucy, *The nested Bethe ansatz for 'all' closed spin chains*, J. Phys. A **41** (2008) p. 295202 and [arXiv :math-ph/0804.2822](#).
- [135] R.H. Yue, H. Fan, B. Hou, *Exact diagonalisation of the quantum supersymmetric $SU_q(n|m)$ model*, Nucl. Phys. B **462** (1996) p. 167 and [arXiv :cond-mat/9603022](#).
- [136] G.M. Gandenberger, *New non-diagonal solutions to the $A_n^{(1)}$ boundary Yang-Baxter equation*, [arXiv :hep-th/9911178](#).

- [137] A.I. Molev, *Irreducibility criterion for tensor products of Yangian evaluation modules*, Duke Math. J. **112** (2002) p. 307 and [arXiv :math.QA/0009183](#).
- [138] R.B. Zhang, *The $gl(\mathbf{m}|\mathbf{n})$ super-Yangian and its finite dimensional representations*, Lett. Math. Phys. **37** (1996) p. 419 and [arXiv :q-alg/9507029](#);
Finite dimensional irreducible representations of the supergroup $U_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$, J. Math. Phys. **34** (1993) p. 1236.
- [139] A.I. Molev, *Yangians and their applications*, Handbook of Algebra **3** (M. Hazewinkel, Ed.) Elsevier (2003) 907 and [[arXiv :math.QA/021128](#)].
- [140] S. Belliard and É. Ragoucy, *Berezinian for $\widehat{U}_q(gl(\mathbf{m}|\mathbf{n}))$* , in preparation.
- [141] V. Tarasov and A. Varchenko, *Solutions to the quantized Knizhnik-Zamolodchikov equation and the Bethe ansatz*, [arXiv :hep-th/9411181](#).
- [142] N. Kitanine, J. M. Maillet and V. Terras, *Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field*, Nuclear Physics B **567** (2000) p. 554-582 and [arXiv :math-ph/9907019v1](#).
- [143] J. M. Maillet and V. Terras, *On the quantum inverse scattering problem*, Nucl. Phys. B **575** (2000) p. 627.
- [144] M. Gaudin, B. M. McCoy, and T. T. Wu, *Normalization sum for the bethe's hypothesis wave functions of the heisenberg-ising chain*, Phys. Rev. D **23** (1981) p. 417.
- [145] C. N. Yang and C.P. Yang, *Thermodynamics of a one-dimesional system of bosons with repulsive delta-function interaction*, J. Math. Phys. **10** (1969) p. 1115.
- [146] V. E. Korepin, *Calculation of norms of Bethe wave functions*, Commun. Math. Phys. **86** (1982), p. 391 ;
A. G. Izergin and V. E. Korepin. *The quantum inverse scattering method approach to correlation functions*. Commun. Math. Phys., **94** (1984) p. 67 ;
Correlation functions for the Heisenberg XXZ antiferromagnet. Commun. Math. Phys., **99** (1985) p. 271.
- [147] N. Yu. Reshetikhin, *Calculation of Bethe vector norms for models with $S U(3)$ symmetry*, Zap. nauch. semin. LOMI **150** (1986) p. 196. (in Russian)
- [148] S. Y. Zhao and Y. Z. Zhang, *Supersymmetric vertex models with domain wall boundary conditions*, J. Math. Phys. **48** (2007) p. 023504 and [arXiv :hep-th/0701042](#);
S. Y. Zhao, W. L. Yang and Y. Z. Zhang, *On the construction of correlation functions for the integrable supersymmetric fermion models*, Int. J. Mod. Phys. B **20** (2006) p. 505 and [arXiv :hep-th/0601065](#) ;
Determinant representation of correlation functions for the supersymmetric t-J model, Commun. Math. Phys. **268** (2006) p. 505 and [arXiv :hep-th/0511028](#).
- [149] V. Tarasov and A. Varchenko, *Asymptotic solutions to the quantized Knizhnik-Zamolodchikov equation and Bethe vectors*, [arXiv :hep-th/9406060](#).
- [150] N. A. Slavnov, *Calculation of scalar products of wave-functions and form-factors in the framework of the algebraic Bethe ansatz*, Theor. Math. Phys. **79** (1989) p. 502.
- [151] P. Baseilhac and K. Shigechi, *A new current algebra and the reflection equation*, submitted to Lett. Math. Phys. and [arXiv :0906.1482](#).

- [152] T. Ito, K. Tanabe and P. Terwilliger, *Some algebra related to P- and Q-polynomial association schemes*, Codes and association schemes (Piscataway, NJ, 1999), 167-192, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001) and [arXiv :math/0406556v1](#).
- [153] T. Ito and P. Terwilliger, *Tridiagonal pairs and the quantum affine algebra $U_q(\widehat{sl_2})$* . Ramanujan J. **13** (2007) p. 39 and [arXiv :math.QA/0310042](#).
- [154] T. Ito and P. Terwilliger, *Tridiagonal pairs of q-Racah type*, [arXiv :0807.0271v1](#).
- [155] P. Baseilhac and K. Koizumi, *Sine-Gordon quantum field theory on the half-line with quantum boundary degrees of freedom*, Nucl.Phys. B **649** (2003) p. 491 and [arXiv :hep-th/0208005](#).
- [156] P. Baseilhac, *Deformed Dolan-Grady relations in quantum integrable models*, Nucl. Phys. B **709** (2005) p. 491 and [arXiv :hep-th/0404149](#).
- [157] P. Baseilhac, *An integrable structure related with tridiagonal algebras*, Nucl. Phys. B **705** (2005) p. 605 and [arXiv :math-ph/0408025](#).
- [158] P. Baseilhac and K. Koizumi, *A deformed analogue of Onsager's symmetry in the XXZ open spin chain*, J. Stat. Mech. **0510** (2005) p. 005, [arXiv :hep-th/0507053](#).
- [159] L. Dolan and M. Grady, *Conserved charges from self-duality*, Phys. Rev. D **25** (1982) p. 1587.
- [160] D. Bernard and A. Leclair, *Quantum group symmetries and nonlocal currents in 2-D QFT*, Commun. Math. Phys. **142** (1991) p. 99.
- [161] A. Fring and R.Köberle, *Boundary Bound States in Affine Toda Field Theory*, Int. J. Mod. Phys. A **10** (1995) p. 739 and [arXiv :hep-th/9404188](#);
A. Fring and R. Köberle, *Affine Toda Field Theory in the Presence of Reflecting Boundaries*, Nucl. Phys. B **419** (1994) p. 647 and [arXiv :hep-th/9309142](#).
- [162] A. B. Zamolodchikov, *Integrable field theory from conformal field theory*, Adv. Studies Pure Math. **19** (1989) p. 641.
- [163] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory* Nucl. Phys. B **241** (1984) p. 333.
- [164] A.V. Mikhailov, M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, *Two-dimensional generalized Toda lattice*, Commun. Math. Phys. **79** (1981) p. 473.
- [165] M. Jimbo, *Quantum R matrix for the generalized Toda system*, Commun. Math. Phys. **102** (1986) p. 537.
- [166] E. Corrigan, P.E. Dorey, R.H. Rietdijk and R. Sasaki, *Affine Toda field theory on a half line*, Phys. Lett. B **333** (1994) p. 83 and [arXiv :hep-th/9404108](#);
P. Bowcock, E. Corrigan, P.E. Dorey and R.H. Rietdijk, *Classically integrable boundary conditions for affine Toda field theories*, Nucl. Phys. B **445** (1995) p. 469 and [hep-th/9501098](#).
- [167] S. Penati, A. Refolli and D. Zanon, *Classical Versus Quantum Symmetries for Toda Theories with a Nontrivial Boundary Perturbation*, Nucl. Phys. B **470** (1996) p. 396 and [arXiv :hep-th/9512174](#).
- [168] L. Mezincescu and R.I. Nepomechie, *Fractional-Spin Integrals of Motion for the Boundary Sine-Gordon Model at the Free Fermion Point*, Int. J. Mod. Phys. A **13** (1998) p. 2747.

- [169] G.W. Delius and A. George, *Quantum affine reflection algebras of type $d_n^{(1)}$ and reflection matrices*, Lett. Math. Phys. **62** (2002) p. 211 and [arXiv :math/0208043](#).
- [170] B. Davies, *Onsager's algebra and the Dolan-Grady condition in the non-self-dual case*, J. Math. Phys. **32** (11) (1991) p. 2945.
- [171] J.H.H. Perk, *Star-triangle equations, quantum Lax operators, and higher genus curves*, Proceedings 1987 Summer Research Institute on Theta functions, Proc. Symp. Pure. Math. **49** (1989) (Am. Math. Soc., Providence, R.I.) p. 341.
- [172] B. Davies, *Onsager's algebra and superintegrability*, J. Phys. A **23** (1990) p. 2245.
- [173] S.S. Roan, *Onsager's algebra, loop algebra and chiral Potts model*, Preprint Max Planck Inst. for Math., Bonn, MPI 91-70, (1991).
- [174] E. Date and S.S. Roan, *the structure of quotients of the Onsager algebra by closed ideals*, J. Phys. A **33** (2000) p. 3275-3296 and [arXiv :math/9911018v3](#)
- [175] R.J. Baxter, *The superintegrable chiral Potts model*, Phys. Lett. **A 133** (1988) p.185;
 G. Albertini, B.M.McCoy and J.H.H. Perk, *Eigenvalue spectrum of the superintegrable chiral Potts model*, Adv. Stud. Pure. Math. **19** (1989) p. 1;
 R.J. Baxter, V.V. Bazhanov and J.H.H. Perk, *Functional relations for transfer matrices of the chiral Potts model*, Int. J. Mod. Phys. **B 4** (1990) p. 803;
 V.V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov, *Chiral Potts model as a descendant of the six vertex model*, J. Stat. Phys. **59** (1990) p. 799.
- [176] D. Uglov and L. Ivanov, *$sl(N)$ Onsager's algebra and integrability*, J. Stat. Phys. **82** (1996) p. 87 and [arXiv :hep-th/9502068v1](#).
- [177] T. Ito and P. Terwilliger, *The shape of a tridiagonal pair*, [arXiv :math/0304244v1](#)
- [178] P. Baseilhac, *A family of tridiagonal pairs and related symmetric functions*, J. Phys. A **39** (2006) p. 11773 and [arXiv :math-ph/0604035v3](#).
- [179] A.S. Zhedanov, *Quantum $su_q(2)$ algebra : Cartesian version and overlaps* Mod. phys. Lett. **A 7** (1992) p. 1589;
 A.S. Zhedanov, Theor. Math. Phys. **89** (1992) p. 1146.
 A.S. Zhedanov, *Hidden symmetry of Askey-Wilson polynomials*, Theor. and Math. Phys. **89** (1991) p. 1146.
- [180] R. Koekoek and R. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analog*, [arXiv :math.CA/9602214](#).
- [181] I.B. Frenkel and N. Jing, *Vertex representations of quantum affine algebras* Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **85** (1998) p 9373.
- [182] B. Davis, O. Foda, M. Jimbo, T. Miwa and A. Nakayashiki, *Diagonalization of the XXZ Hamiltonian by Vertex*, Com. Math. Phys. **151** (1993) p 89;
 M. Jimbo, R. Kedem, T. Kojima, H. Konno and T. Miwa, *XXZ chain with a boundary*, Nucl.Phys. B **441** (1995) p 437 and [arXiv :hep-th/9411112v3](#).
- [183] A.U. Klimyk, *The nonstandard q -deformation of enveloping algebra $U(so_n)$: results and problems*, Czech. J. Phys, **51** (2001) p. 331;
Classification of irreducible representations of the q -deformed algebra $U'_q(so_n)$, [arXiv :math/0110038v1](#).

- [184] T. Ito, K. Tanabe and P. Terwilliger, *Some algebra related to P- and Q-polynomial association schemes*, Codes and association schemes (Piscataway, NJ, 1999), p. 167, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **56**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001), [arXiv :math/0406556v1](#).
- [185] F.A. Grünbaum and L. Haine, *The q-version of a theorem of Bochner*, J. Comput. Appl. Math. **68** (1996) p. 103.
- [186] P. Terwilliger, *The subconstituent algebra of an association scheme. III.*, J. Algebraic Combin. **2** (1993) p. 177.
- [187] P. Terwilliger, *Two relations that generalize the q-Serre relations and the Dolan-Grady relations*, Proceedings of the Nagoya 1999 International workshop on physics and combinatorics. Editors A. N. Kirillov, A. Tsuchiya, H. Umemura. p. 377 and [arXiv :math.QA/0307016](#).
- [188] P. Terwilliger, *Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other*, Linear Algebra Appl. **330** (2001) p. 149 and [arXiv :math.RA/0406555](#).
- [189] G. von Gehlen and V. Rittenberg, *Z n-symmetric quantum chains with an infinite set of conserved charges and Zn zero modes*, Nucl. Phys. B **257** (1985) p. 351.
- [190] H. Alnajjar and B. Curtin, *A family of tridiagonal pairs related to the quantum affine algebra $U_q(\widehat{sl_2})$* , Electron. J. Linear Algebra **13** (2005) p. 1.
- [191] A.I. Molev, E. Ragoucy and P. Sorba, *Coideal subalgebras in quantum affine algebras*, Rev. Math. Phys. **15** (2003) p. 789 and [arXiv :math/0208140](#).
- [192] G. Letzter, *Coideal Subalgebras and Quantum Symmetric Pairs*, MSRI volume 1999, Hopf Algebra Workshop and [arXiv :math/0103228](#).
- [193] P. Baseilhac and G.W. Delius, *Coupling integrable field theories to mechanical systems at the boundary*, J. Phys. A **34** (2001) p. 8259 and [arXiv :hep-th/0106275](#).
- [194] A.M. Gavrilik and N.Z. Iorgov, *q-deformed algebras $U_q(\mathfrak{so}_n)$ and their representations*, Methods Funct. Anal. Topology **3** (1997) p. 51.
- [195] S. Ghoshal, *Bound State Boundary S-matrix of the sine-Gordon Model*, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) p. 4801 and [arXiv :hep-th/9310188](#).
- [196] P. Baseilhac and K. Shigechi, *The semi-infinite XXZ spin chain I : hidden symmetry and ground state structure*, in preparation.
- [197] V.V. Bazhanov, A.N. Hibberd and S.M. Khoroshkin, *Integrable structure of W_3 Conformal Field Theory, Quantum Boussinesq Theory and Boundary Affine Toda Theory*, Nucl. Phys. B **622** (2002) p. 475 and [arXiv :hep-th/0105177v3](#).
- [198] N. Crampe, L. Frappat and E. Ragoucy, *Thermodynamical limit of general $gl(N)$ spin chains : vacuum state and densities*, J.Stat.Mech. **0703** (2007) p. 014 and [arXiv :cond-mat/0701207v2](#).
Thermodynamical limit of general $gl(N)$ spin chains II : Excited states and energies, J.Stat.Mech. **0801** (2008) p. 015 and [arXiv :0710.5904v2](#).