

# Table des matières

<b>1 Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz</b>	<b>3</b>
1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger . . . . .	4
1.1.1 Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel et Hamiltonien du modèle . . . . .	4
1.1.2 Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à N corps . . . . .	5
1.1.3 Opérateurs conservés (intégrales du mouvement) . . . . .	12
1.2 Équation de Bethe et distribution de rapidité . . . . .	13
1.2.1 Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz . . . . .	13
1.2.2 Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle . . . . .	13
1.2.3 Excitations élémentaires à température nulle . . . . .	14
<b>2 Relaxation et Équilibre dans les Systèmes Quantiques Intégrables : Une Approche par la Thermodynamique de Bethe</b>	<b>15</b>
2.1 Dynamique hors équilibre et notions d'équilibre . . . . .	15
2.1.1 Limit Thermodynamique . . . . .	15
2.1.2 Notion d'état d'équilibre généralisé (GGE) . . . . .	16
2.1.3 Rôle des charges conservées extensives et quasi-locales . . . . .	18
2.2 Thermodynamique de Bethe et relaxation . . . . .	20
2.2.1 Statistique des macro-états : entropie de Yang-Yang et moyennes dans le GGE . . . . .	20
2.2.2 Équations intégrales de la TBA . . . . .	22
<b>3 Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée</b>	<b>25</b>
3.1 Hydrodynamique et régimes asymptotiques . . . . .	25
3.1.1 Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques . . . . .	25
3.1.2 Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité . . . . .	25
3.1.3 Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD) . . . . .	25
<b>4 Fluctuation de la distribution de rapidité dans des état d'équilibre</b>	<b>27</b>
4.1 Développement autour du point selle . . . . .	28
4.2 Définition de la fonction de corrélation . . . . .	28
4.3 Fluctuations autour de la distribution moyenne et rôle de la Hessienne . . . . .	29
4.4 Fluctuations autour de la distribution moyenne . . . . .	30
4.5 Fonction correlation du nombre d'atomes et de l'énergie . . . . .	31
<b>5 Protocoles experimentale</b>	<b>35</b>
5.1 Présentation de l'expérience . . . . .	35
5.1.1 Piégeage transverses et longitudinale . . . . .	35
5.2 Outil de sélection spatial . . . . .	35
<b>6 Étude du protocol de bi-partition : Mesure de distribution de rapidités locales <math>\rho(x, \theta)</math> pour des systèmes hors équilibre</b>	<b>37</b>
6.1 Dispositif expérimental . . . . .	39
6.1.1 Préparation et Confinement du Gaz Ultra-Froid de $^{87}\text{Rb}$ . . . . .	39

6.1.2	Confinement Longitudinal et Stabilisation du Piège Quartique . . . . .	39
6.1.3	Sélection Spatiale et Réalisation de la Coupure Bipartite . . . . .	40
6.1.4	Dynamique Après Coupure . . . . .	40
6.2	Prédictions de la GHD . . . . .	41
6.3	Données expérimentales . . . . .	41
6.4	Sondre la distribution locale des rapidités . . . . .	43
6.5	Détails sur les calculs . . . . .	46
6.5.1	Facteur d'occupation et distribution de rapidité à l'équilibre thermique . . . . .	46
6.5.2	Dynamique du contour dans l'espace des phases $(x, \theta)$ . . . . .	47
6.5.3	Simulation de la déformation du bord . . . . .	47
6.5.4	Simulation de l'expansion . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Mise en place d'un confinement longitudinal dipolaire</b>	<b>49</b>
7.1	calculs . . . . .	49
7.2	laser , MOPA, etc .. Données . . . . .	49
<b>A</b>	<b>Calculs Hamiltonien à N fixés</b>	<b>51</b>
A.1	deux particules . . . . .	51
A.2	N particules . . . . .	52
<b>B</b>	<b>Exemple : action de <math>\hat{P}</math> sur l'état <math> \psi_N\rangle</math></b>	<b>55</b>
<b>C</b>	<b>Action de <math>\hat{H}</math> sur l'état <math> \psi_N\rangle</math></b>	<b>57</b>
<b>D</b>	<b>Vérification explicite de la condition aux limites</b>	<b>59</b>
<b>E</b>	<b>Lien avec les équations de Bethe</b>	<b>63</b>
<b>Index</b>		<b>65</b>
<b>Index des noms propres</b>		<b>67</b>

# Chapitre 1

## Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz

### Contents

---

<b>1.1</b>	<b>Description du modèle de Lieb-Liniger</b>	<b>4</b>
1.1.1	Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel et Hamiltonien du modèle	4
1.1.2	Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à N corps	5
1.1.3	Opérateurs conservés (intégrales du mouvement)	12
<b>1.2</b>	<b>Équation de Bethe et distribution de rapidité</b>	<b>13</b>
1.2.1	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz	13
1.2.2	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	13
1.2.3	Excitations élémentaires à température nulle	14

---

### Introduction

#### Pourquoi en 1D ?

*Explication classique à l'aide d'un modèle chaotique : la thermalisation en 2D, illustrée par l'exemple de l'eau en ébullition, avec comme paramètres  $T$ ,  $E$ ,  $N$ . Modélisation par des sphères dures et introduction du modèle ergodique : en 1D, l'intégrabilité du modèle de sphères dures dans un espace réduit entraîne un simple échange de vitesses, sans modifier la distribution des vitesses.*

#### Pourquoi en 1D quantique ?

*Le gaz de Bose unidimensionnel avec interactions ponctuelles (la version quantique de l'équation de Schrödinger non linéaire) est l'un des modèles intégrables les plus fondamentaux, pouvant être résolu par la méthode de l'Ansatz de Bethe (ref). Ce modèle a fait l'objet d'études approfondies (ref).*

*Après avoir décrit le modèle de Lieb-Liniger et analysé ses asymptotiques ainsi que les théories linéarisées (Gross-Pitaevskii et Bogoliubov) dans le chapitre 1, nous poursuivons par la construction des fonctions propres de l'Hamiltonien dans un volume fini.*

*Cette construction, détaillée dans le chapitre 2, met en évidence la forme explicite des fonctions propres et leur réductibilité au cas à deux particules, une caractéristique commune des modèles résolubles par l'Ansatz de Bethe. Enfin, dans la dernière section, nous imposons des conditions aux limites périodiques à*

Dans ce chapitre, nous introduisons progressivement le modèle de Lieb-Liniger et l'Ansatz de Bethe, outils fondamentaux pour décrire un gaz de bosons unidimensionnel avec interactions delta. L'objectif est d'accompagner pas à pas le lecteur depuis la formulation du problème quantique en champ de bosons jusqu'aux solutions exactes obtenues par l'Ansatz de Bethe.

Nous commençons par écrire l'équation du champ de bosons, exprimée à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation en représentation de position. Pour des raisons pédagogiques, nous abordons d'abord le cas d'une seule particule, sans interaction. Cela permet d'introduire naturellement les états de position et leur évolution sous l'action du Hamiltonien libre.

Ensuite, nous étudions le cas de deux particules, cette fois en tenant compte de l'interaction locale. Cela nous amène à considérer les états de position dans le cas général, y compris lorsque les deux particules peuvent occuper la même position. Cette situation, bien plus subtile qu'il n'y paraît, met en évidence la complexité introduite par l'interaction, et justifie que l'on commence par analyser les configurations où les particules sont à des positions distinctes.

En passant au référentiel du centre de masse, le problème à deux corps avec interaction devient équivalent à un problème à une seule particule en interaction avec une barrière delta au centre. Cette reformulation permet d'interpréter l'effet de l'interaction comme une condition de raccord sur la fonction d'onde, tout en respectant la symétrie bosonique.

Nous revenons ensuite aux coordonnées du laboratoire afin d'introduire naturellement la forme des solutions imposée par l'Ansatz de Bethe. Cela nous conduit aux équations dites de Bethe, qui relient les quasimoments des particules à travers des conditions de périodicité modifiées par l'interaction.

Une fois les notations bien établies, nous généralisons le raisonnement au cas de  $N$  particules, pour obtenir l'Hamiltonien de Lieb-Liniger complet ainsi que la forme générale de l'Ansatz de Bethe. Les solutions ainsi construites permettent non seulement de déterminer le spectre de l'Hamiltonien, mais aussi de calculer des observables physiques importantes, telles que l'impulsion totale ou le nombre de particules.

Enfin, nous introduisons la notion de distribution de rapidité, outil essentiel dans l'étude des états d'énergie minimale (états fondamentaux) et dans la description thermodynamique du système. Ce cadre servira de base aux développements ultérieurs sur les gaz intégrables à température finie et les états stationnaires après quench quantique.

## 1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger

### 1.1.1 Introduction au modèle de gaz de Bose unidimensionnel et Hamiltonien du modèle

#### Champs de Bose

Le gaz de Bose unidimensionnel est décrit dans le cadre de la théorie quantique des champs par un champ bosonique canonique  $\hat{\Psi}(x)$ , qui agit sur l'espace de Fock des états du système. Ce champ quantique encode l'annihilation d'une particule en  $x$ , et son adjoint  $\hat{\Psi}^\dagger(x)$  correspond à la création d'une particule en ce point.

#### Expression de l'Hamiltonien

Le Hamiltonien du modèle est donné par

$$\hat{H} = \int dx \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x) + c \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \right] \quad (1.1)$$

$$\hat{H} = \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \left[ -\frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 + \frac{c}{2} \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \right] \hat{\Psi}(x) \quad (1.2)$$

où  $c$  est la constante de couplage. Dans ce chapitre, nous considérons uniquement les propriétés du système à un instant donné, de sorte que la dépendance temporelle des champs est omise pour alléger l'écriture.

#### Commutation canonique

Ces champs satisfont les relations de commutation canoniques à temps égal :

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(y)] &= \hat{\delta}(x-y) \\ [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}(y)] &= [\hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(y)] = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ces relations traduisent la nature bosonique des excitations du champ.

## Équation du mouvement associée

L'équation du mouvement du champ  $\Psi(x)$  est obtenue à partir de l'équation de Heisenberg :

$$i\hat{\partial}_t \hat{\Psi} = [\hat{\Psi}, \hat{H}] \quad (1.4)$$

ce qui, après évaluation explicite du commutateur (1.3), conduit à :

$$i\hat{\partial}_t \hat{\Psi} = -\hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi} + 2c\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \quad (1.5)$$

$$i\hat{\partial}_t \hat{\Psi} = -\frac{1}{2}\hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi} + c\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \quad (1.6)$$

est appelée l'équation de .

Pour  $c > 0$ , l'état fondamental à température nulle est une sphère de Fermi. Seul ce cas sera considéré par la suite.

### 1.1.2 Fonction d'onde et Hamiltonien et moment à N corps

#### Cas d'une particule libre dans une boîte périodique : base des états propres à une particule

**Contexte physique du système.** Le système considéré est constitué d'une seule particule quantique confinée dans une boîte unidimensionnelle de taille finie  $L$ , avec des conditions aux limites périodiques. Ce cadre sert de base pour l'étude ultérieure de systèmes à plusieurs corps. En absence d'interactions (i.e.,  $c = 0$ ), l'Hamiltonien se réduit à sa composante cinétique, et le problème devient celui d'une particule libre sur un cercle.

**Détermination des états propres.** Nous cherchons à déterminer les états propres  $|\theta\rangle$  de l'Hamiltonien  $\hat{H}$ , associés au quasi-moment/mode  $\theta$ , qui satisfont l'équation de Schrödinger stationnaire.

$$\hat{H}|\theta\rangle = \varepsilon(\theta)|\theta\rangle. \quad (1.7)$$

**État à une particule dans la base de Fock.** L'état à une particule peut être exprimé dans la base positionnelle de Fock :

$$|\theta\rangle = \int dz |z\rangle \langle z|\theta\rangle = \int dz \varphi_{\{\theta\}}(z) \hat{\Psi}^\dagger(z) |0\rangle, \quad (1.8)$$

où l'opérateur  $\hat{\Psi}^\dagger(z)$  crée une particule à la position  $z$ , la base spatial

$$|z\rangle = \hat{\Psi}^\dagger(z) |0\rangle, \quad (1.9)$$

et  $|0\rangle$  est le vide de Fock défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{\Psi}(x) |0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (1.10)$$

**Orthonormalité de la base.** La base  $|z\rangle$  est orthonormale car avec en utilisant les relations de commutation (1.3) et et la définition du vide de Fock (1.10) , il vient que

$$\langle z|z'\rangle = \delta_{z,z'}. \quad (1.11)$$

**Fonction d'onde à une particule.** La fonction d'onde associée  $\varphi_{\{\theta\}}(z)$  est définie comme la projection :

$$\varphi_{\{\theta\}}(z) = \langle 0 | \hat{\Psi}(z) | \theta \rangle, \quad (1.12)$$

et normalisée selon :

$$\langle \theta' | \theta \rangle = \int dz \varphi_{\{\theta'\}}^*(z) \varphi_{\{\theta\}}(z) = \delta_{\theta, \theta'}. \quad (1.13)$$

**Hamiltonien dans le cas à une particule.** L'Hamiltonien (1.2) peut être réécrit en effectuant une intégration par parties. Dans le cas d'un seul boson, seul le terme cinétique contribue, car le terme d'interaction s'annule (ce dernier étant nul pour une seule particule) :

$$\hat{H} = - \int dx \left[ \frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x). \quad (1.14)$$

**Hamiltonien dans le cas à une particule et Action de l'Hamiltonien.** Lorsque l'on agit avec l'Hamiltonien (1.14) sur  $|1\rangle$ , et en utilisant les relations de commutation (1.3) et la définition du vide de Fock (1.10), on obtient :

$$\hat{H}|\theta\rangle = \int dz \left[ \hat{H}_1 \varphi_{\{\theta\}}(z) \right] \hat{\Psi}^\dagger(z) |0\rangle, \quad (1.15)$$

avec

$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{2} \hat{\partial}_z^2$$

**Équation de Schrödinger différentielle.** En reportant cela dans l'équation de Schrödinger, on obtient une équation différentielle linéaire :

$$-\frac{1}{2} \hat{\partial}_z^2 \varphi_{\{\theta\}}(z) = \varepsilon(\theta) \varphi_{\{\theta\}}(z). \quad (1.16)$$

**Résolution avec conditions périodiques.** Il s'agit de l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule libre en une dimension. Dans notre cas, la particule est confinée dans une boîte unidimensionnelle de longueur  $L$ , avec des conditions aux limites périodiques. Ce problème est donc équivalent à celui d'une particule libre sur un cercle de périmètre  $L$ .

La fonction d'onde  $\varphi_{\{\theta\}}(z)$  doit alors satisfaire :

$$\varphi_{\{\theta\}}(z + L) = \varphi_{\{\theta\}}(z), \quad (1.17)$$

ce qui impose une \*\*périodicité\*\* stricte. Les solutions admissibles de (1.16) sont alors des ondes planes :

$$\varphi_{\{\theta\}}(z) = a e^{i\theta z} + b e^{-i\theta z}, \quad (1.18)$$

avec  $\theta \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}$ , imposé par la condition :

$$e^{i\theta(z+L)} = e^{i\theta z} \Rightarrow e^{i\theta L} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.19)$$

..... Ce choix se justifie rigoureusement car l'espace de Hilbert pertinent,  $L^2([0, L])$  avec conditions aux limites périodiques, est engendré par les exponentielles complexes  $e^{i\theta z}$ . Celles-ci forment une base orthonormée complète de cet espace (c'est l'objet du théorème de Fourier). Toute fonction périodique de carré intégrable peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire (ou série de Fourier) de ces fonctions.

Autrement dit, les seules fonctions propres  $\varphi_{\{\theta\}}(z)$  compatibles avec la structure mathématique imposée par les conditions périodiques sont de la forme :  $\varphi_{\{\theta\}}(z) \propto e^{i\theta z}$ . Il suffit donc d'étudier ces modes pour capturer l'ensemble des solutions admissibles.

**Énergies quantifiées.** L'énergie associée à une onde plane est donnée par :

$$\varepsilon(\theta) = \frac{\theta^2}{2}, \quad (1.20)$$

ce qui exprime l'énergie cinétique d'une particule libre de masse  $m = 1$ , en fonction de son quasi-moment  $\theta$ .

**Notation adoptée et interprétation.** Dans le cas à une particule, l'état propre de l'Hamiltonien s'écrit naturellement dans la base des quasi-moments comme un état  $|\theta\rangle$ , où  $\theta$  désigne la quantité de mouvement de la particule.

Ces solutions correspondent à des \*\*états non liés\*\* (ou états de diffusion) : la particule est délocalisée sur tout l'espace (le cercle), sans structure particulière.

## Deux particules

**Introduction au système à deux bosons avec interaction de contact.** Nous considérons à présent le cas de deux bosons quantiques dans la même boîte unidimensionnelle de longueur  $L$ , avec des conditions aux limites périodiques. Contrairement au cas à une particule, le terme d'interaction à contact intervient dans la dynamique.

**Forme générale de l'état à deux particules dans la base de Fock** On cherche à déterminer les états propres  $|\{\theta_1, \theta_2\}\rangle$ , où  $\theta_1$  est le quasi-moment d'une particule et  $\theta_2$  celui de l'autre, associés à l'Hamiltonien  $\hat{H}$ , satisfaisant l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\hat{H}|\{\theta_1, \theta_2\}\rangle = \varepsilon(\theta_1, \theta_2)|\{\theta_1, \theta_2\}\rangle. \quad (1.21)$$

**Définition et orthonormalisation de la base positionnelle bosonique.** L'état à deux particules peut être écrit dans la base positionnelle de Fock sous la forme :

$$|\{\theta_1, \theta_2\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint dz_1 dz_2 |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2| |\{\theta_1, \theta_2\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint dz_1 dz_2 \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) |z_1, z_2\rangle, \quad (1.22)$$

où l'état  $|z_1, z_2\rangle$  représente **un état à deux particules bosoniques localisées en  $z_1$  et  $z_2$** . En base Fock, cela correspond à l'action de deux opérateurs de création :

$$|z_1, z_2\rangle = \prod_z \frac{(\hat{\Psi}^\dagger(z))^{n_z}}{\sqrt{n_z!}} |0\rangle, \quad (1.23)$$

où  $\prod_z$  est **un produit formelle sur les positions**  $z$  possibles et  $n_z \in \mathbb{N}$  est le nombre de particule à la position  $z$  tel que  $\int n_z = 2$ , et orthonormalisée car avec en utilisant les relations de commutation (1.3) et la définition du vide de Fock (1.10) il vient que

$$\langle z_1, z_2 | z'_1, z'_2 \rangle = \prod_z \delta_{n_z, n'_z}. \quad (1.24)$$

**Symétrie et normalisation de la fonction d'onde à deux particules.**  $\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2)$  tel que

$$\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) = \langle 0 | \prod_z \frac{(\hat{\Psi}(z))^{n_z}}{\sqrt{n_z!}} | \{\theta_1, \theta_2\} \rangle \quad (1.25)$$

est la fonction d'onde symétrique :

$$\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) = \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_2, z_1), \quad (1.26)$$

et normalisée selon :

$$\langle \{\theta'_1, \theta'_2\} | \{\theta_1, \theta_2\} \rangle = \int dz_1 dz_2 \varphi_{\{\theta'_1, \theta'_2\}}^*(z_1, z_2) \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) = \prod_{\theta} \delta_{n_{\theta}, n'_{\theta}}. \quad (1.27)$$

où  $\prod_{\theta}$  est un produit formelle sur le modes  $\theta$  possibles et  $n_{\theta} \in \mathbb{N}$  est le nombre de particule au mode  $\theta$  tel que  $\int n_{\theta} = 2$ .

**Réécriture de l'Hamiltonien à N particules.** L'Hamiltonien (1.2) peut être réécrit en effectuant une intégration par parties.

$$\hat{H} = \int dx \left\{ - \left[ \frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) + \frac{c}{2} \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \right\}. \quad (1.28)$$

**Action de l'Hamiltonien sur l'état à deux particules et Forme explicite de l'Hamiltonien effectif à deux corps** L'action de  $\hat{H}$  sur  $|\{\theta_1, \theta_2\}\rangle$  fournit une équation de Schrödinger pour la fonction d'onde à deux particules. Les règles de commutations (1.3) et la définition d'état de Fock (1.10) impliquent que (cf Annex A.1)

$$\hat{H} |\{\theta_1, \theta_2\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint dz_1 dz_2 \left[ \hat{\mathcal{H}}_2 \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) \right] |z_1, z_2\rangle \quad (1.29)$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = -\frac{1}{2} \hat{\partial}_{z_1}^2 - \frac{1}{2} \hat{\partial}_{z_2}^2 + c \hat{\delta}(z_1 - z_2). \quad (1.30)$$

Après développement en utilisant les relations de commutation bosoniques et les propriétés du vide de Fock, on obtient l'équation suivante :

$$\hat{\mathcal{H}}_2 \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) = \varepsilon(\theta_1, \theta_2) \varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2). \quad (1.31)$$

**Changement de variables : coordonnées du centre de masse et relatives.** En première quantification, en utilisant les coordonnées du centre de masse et relatives  $Z = (z_1 + z_2)/2$  et  $Y = z_1 - z_2$ ,

$$\frac{1}{2} \hat{\partial}_Z^2 + 2 \hat{\partial}_Y^2 = \hat{\partial}_{z_1}^2 + \hat{\partial}_{z_2}^2$$

l'hamiltonien (1.30) se divise en une somme de deux problèmes indépendants à une seule particule.

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = -\frac{1}{4} \hat{\partial}_Z^2 - \hat{\partial}_Y^2 + c \hat{\delta}(Y) \quad (1.32)$$

**Résolution du problème de centre de masse et de coordonnée relative.** Les états propres de l'hamiltonien du centre de masse de masse 2,  $-\frac{1}{4} \hat{\partial}_Z^2$ , sont des ondes planes, et l'hamiltonien pour la coordonnée relative  $Y$  correspond à celui d'une particule de masse réduite 1/2 en présence d'un potentiel delta en  $Y = 0$ .

$$-\hat{\partial}_Y^2 \tilde{\varphi}(Y) + c \hat{\delta}(Y) \tilde{\varphi}(Y) = \tilde{\varepsilon} \tilde{\varphi}(Y) \quad (1.33)$$

**Forme symétrique de la fonction d'onde pour bosons.** Dans le référentiel du centre de masse. Le système est le même que ceux d'un particules de masse 1/2. Le système étant composé de particules bosoniques, on cherche une solution symétrique que l'on écrit sous la forme :

$$\tilde{\varphi}(Y) = a e^{i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} + b e^{-i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} \propto \sin\left(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}|Y| + \Phi)\right), \quad (1.34)$$

avec

$$\Phi(\tilde{\theta}) = 2 \arctan\left(\frac{1}{i} \frac{a+b}{a-b}\right), \quad (1.35)$$

car  $a \exp(ix) + b \exp(-ix) = 2\sqrt{ab} \sin(x + \arctan(-i(a+b)/(a-b)))$ . Pour  $\tilde{\theta} < 0$ , les termes exponentiels  $\exp(i\tilde{\theta}|Y|/2)$  et  $\exp(-i\tilde{\theta}|Y|/2)$  correspondent aux paires de particules entrantes et sortantes d'un processus de diffusion à deux corps.

En réinjectant l'équation (1.34) dans l'équation (1.33), on obtient l'énergie réduite propre de l'état lié  
Et l'énergie réduite propre de l'état lié s'écrit

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}^2}{2}, \quad (1.36)$$

la masse réduite étant 1/2.

**Condition de discontinuité à cause du potentiel delta.** En raison de la présence du potentiel delta centré en  $Y = 0$ , la dérivée première de la fonction d'onde  $\tilde{\varphi}(Y)$  présente une discontinuité en ce point. En effet, le potentiel étant infini en  $Y = 0$ , la phase  $\Phi$  du régime symétrique est déterminée en intégrant l'équation du mouvement autour de la singularité. En intégrant entre  $-\epsilon$  et  $+\epsilon$  et en faisant tendre  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient la condition de saut de la dérivée :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} -\hat{\partial}_Y^2 \tilde{\varphi}(Y) + c\hat{\delta}(Y)\tilde{\varphi}(Y) dY = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}) dY,$$

$$\tilde{\varphi}'(0^+) - \tilde{\varphi}'(0^-) - c\tilde{\varphi}(0) = 0.$$

**Détermination de la phase  $\Phi$ .** Et en évaluant la discontinuité de sa dérivée au point  $Y = 0$ , on trouve que la phase  $\Phi$  satisfait la condition :

$$\Phi(\tilde{\theta}) = 2 \arctan(\tilde{\theta}/c) \in [-\pi, \pi].$$

(à revoir) Cette relation exprime l'impact de l'interaction delta sur le déphasage de la solution liée. On en déduit que plus le couplage  $c$  est fort, plus la phase  $\Phi$  tend vers  $\pi$ , ce qui correspond à une fonction d'onde présentant un maximum en  $Y = 0$ . En revanche, dans la limite d'interaction faible ( $c \rightarrow 0$ ), la phase  $\Phi$  tend vers zéro et la fonction d'onde devient nulle en  $Y = 0$ .

**Phase de diffusion à un corp. (à revoir)** Les équations (1.35) et (1.37) donne rapport entre leurs amplitudes définit la phase de diffusion :

$$e^{i\Phi(\tilde{\theta})} = -\frac{a}{b} = \frac{1 + i\tilde{\theta}/c}{1 - i\tilde{\theta}/c}, \quad (1.37)$$

car  $\exp(2i \arctan(x)) = (1 + ix)/(1 - ix)$ .

**Lien entre phase de diffusion et décalage temporel : interprétation semi-classique.** ([à revoir](#)) Il a été souligné par [Eisenbud \(1948\)](#) et [Wigner \(1955\)](#) que la phase de diffusion peut être interprétée, de manière semi-classique, comme un \*décalage temporel\*. Esquissons brièvement l'argument de [Wigner \(1955\)](#).

Tout d'abord, notons que, pour une particule unique, une approximation simple d'un paquet d'ondes peut être obtenue en superposant deux ondes planes avec des moments  $\tilde{\theta}/2$  et  $\tilde{\theta}/2 + \delta\tilde{\theta}$ , respectivement :

$$\tilde{\psi}_{\text{inc}}(Y) \propto e^{i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} + e^{i\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|}. \quad (1.38)$$

Cette superposition évolue dans le temps comme :

$$\tilde{\psi}_{\text{inc}}(Y, t) \propto e^{i\left(\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|-t\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta})\right)} + e^{i\left(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|-t\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})\right)}. \quad (1.39)$$

Le centre de ce 'paquet d'ondes' se situe à la position où les phases des deux termes coïncident, c'est-à-dire au point où  $|Y|\delta\tilde{\theta} - t[\tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta}) - \tilde{\varepsilon}(\tilde{\theta})] = 0$ , ce qui donne  $|Y| \simeq \tilde{\theta}t$  avec la vitesse réduite  $\tilde{\theta} = 1/2\varepsilon'(\tilde{\theta})$ .

Selon les équations (1.34) et (1.49), l'état sortant de la diffusion correspondant serait :

$$\tilde{\psi}_{\text{outc}}(Y, t) \propto -e^{i\Phi(\tilde{\theta})}e^{-i\frac{1}{2}\tilde{\theta}|Y|} - e^{i\Phi(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})}e^{-i\frac{1}{2}(\tilde{\theta}+2\delta\tilde{\theta})|Y|}. \quad (1.40)$$

En répétant l'argument précédent de la stationnarité de phase, on trouve que la coordonnée relative est à la position  $|Y| \simeq \tilde{\theta}t - 2\Phi'(\tilde{\theta})$  au moment  $t$ .

$$|Y| \simeq \tilde{\theta}t - 2\Delta(\tilde{\theta}) \quad (1.41)$$

où le déplacement de diffusion  $\Delta(\theta)$  est donné par la dérivée de la phase de diffusion,

$$\Delta(\theta) \doteq \frac{d\Phi}{d\theta}(\theta) = \frac{2c}{c^2 + \theta^2}. \quad (1.42)$$

**Retour aux coordonnées du laboratoire.** En revenant aux coordonnées d'origine (celles du laboratoire), on constate que la fonction d'onde à deux corps

$$\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) = \langle 0 | \hat{\Psi}(z_1) \hat{\Psi}(z_2) | \{\theta_1, \theta_2\} \rangle, \quad (1.43)$$

avec  $z_1 < z_2$ , (ie  $Y > 0$ ). Et le centre de masse sur le mouvement

$$Z = \bar{\theta}t, \quad (1.44)$$

avec  $\bar{\theta}$  la vitesse de groupe dans le référentiel de laboratoire.

Nous constatons que la position des deux particules semiclassiques après la collision sera

$$z_1 = Z + \frac{Y}{2} \simeq \theta_1 t - \Delta(\theta_1 - \theta_2), \quad z_2 = Z - \frac{Y}{2} \simeq \theta_2 t + \Delta(\theta_1 - \theta_2), \quad (1.45)$$

avec les vitesses  $\theta_1$  et  $\theta_2$  définies tel que

$$\tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_2, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}. \quad (1.46)$$

En remarquant que

$$z_1\theta_1 + z_2\theta_2 = 2Z\bar{\theta} + \frac{1}{2}Y\tilde{\theta}, \quad z_1\theta_2 + z_2\theta_1 = 2Z\bar{\theta} - \frac{1}{2}Y\tilde{\theta}.$$

Ce qui nous rassure car rappelons nous que la masse un centre de masse est 2 et la masse réduite est 1/2.  
Ce qui nous motive à multiplier la fonction d'onde dans le référentiel du centre de masse (1.34) par  $\exp(2iZ\bar{\theta})$  pour obtenir

$$\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(z_1, z_2) \propto \begin{cases} (\theta_2 - \theta_1 - ic)e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2} - (\theta_1 - \theta_2 - ic)e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1} & \text{si } z_1 < z_2 \\ (z_1 \leftrightarrow z_2) & \text{si } z_1 > z_2 \end{cases} \quad (1.47)$$

correspondant aux valeurs propres

$$\varepsilon(\theta_1, \theta_2) = \overbrace{\frac{\bar{\varepsilon}(\bar{\theta})}{\bar{\theta}^2}} + \overbrace{\frac{1}{4}\tilde{\theta}^2} = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2}. \quad (1.48)$$

Pour  $\theta_1 > \theta_2$ , les deux termes  $e^{iz_1\theta_1 + iz_2\theta_2}$  et  $e^{iz_1\theta_2 + iz_2\theta_1}$  correspondent aux paires de particules entrantes et sortantes dans un processus de diffusion à deux corps. Le rapport de leurs amplitudes est la phase de diffusion à deux corps (1.49) reste inchangé

$$e^{i\Phi(\theta_1 - \theta_2)} = -\frac{a}{b} = \frac{\theta_1 - \theta_2 - ic}{\theta_2 - \theta_1 - ic}. \quad (1.49)$$

### Cas général à $N$ particules : l'Ansatz de Bethe

Pour un plus grand nombre de particules, les états propres de l'Hamiltonien  $\hat{\mathbf{H}}$  (1.3) sur la ligne infinie sont des états de Bethe  $|\{\theta_a\}\rangle$  étiquetés par un ensemble de  $N$  nombres  $\{\theta_a\}_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ , appelés les rapidités.

$$\hat{\mathbf{H}}|\{\theta_a\}\rangle = \varepsilon(\{\theta_a\})|\{\theta_a\}\rangle \quad (1.50)$$

L'état à deux particules peut être écrit dans la base positionnelle de Fock sous la forme :

$$|\{\theta_a\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z |z_1, \dots, z_N\rangle \langle z_1, \dots, z_N| \{\theta_a\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) |z_1, \dots, z_N\rangle, \quad (1.51)$$

où la base spatiale à deux particule bosomique  $|z_1, \dots, z_N\rangle$  s'écrit

$$|z_1, \dots, z_N\rangle = \prod_z \frac{(\hat{\Psi}^\dagger(z))^{n_z}}{\sqrt{n_z!}} |0\rangle, \quad (1.52)$$

où  $\prod_z$  est un produit formelle sur les position  $z$  possibles et  $n_z \int \mathbb{N}$  est le nombre de particule à la position  $z$  tel que  $\int n_z = 2$ , et orthonormalisée car avec en utilisant les relations de commutation (1.3) et la définition du vide de Fock (1.10) il vient que

$$\langle z_1, \dots, z_N | z'_1, \dots, z'_N \rangle = \prod_z \delta_{n_z, n'_z}. \quad (1.53)$$

$\varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N)$  tel que

$$\varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) = \langle 0 | \prod_z \frac{(\hat{\Psi}(z))^{n_z}}{\sqrt{n_z!}} |\{\theta_a\}\rangle \quad (1.54)$$

est la fonction d'onde symétrique :

$$\varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_N) = \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_N), \quad (1.55)$$

et normalisée selon :

$$\langle \{\theta'_a\} | \{\theta_a\} \rangle = \int d^N z \varphi_{\{\theta'_a\}}(z_1, \dots, z_N) \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) = \prod_z \delta_{n_\theta, n'_\theta}. \quad (1.56)$$

L'action de  $\hat{\mathbf{H}}$  (1.28) sur  $|\{\theta_a\}\rangle$  fournit une équation de Schrödinger pour la fonction d'onde à deux particules. Les règles de commutations (1.3) et la définition d'état de Fock (1.10) impliquent que (cf Annex A.2)

$$\hat{\mathbf{H}} |\psi(\theta_1, \dots, \theta_N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \left[ \hat{\mathcal{H}}_N \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) \right] \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (1.57)$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}}_N = - \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i}^2 + c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \quad (1.58)$$

Dans le domaine  $x_1 < z_2 < \dots < z_N$ , la fonction d'onde est (Gaudin 2014, Korepin et al. 1997, Lieb anz Liniger 1963) :

$$\begin{aligned} \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) &= \langle 0 | \Psi(z_1) \dots \Psi(z_N) | \{\theta_a\} \rangle \\ &\propto \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \left( \prod_{1 \leq a < b \leq N} (\theta_{\sigma(b)} - \theta_{\sigma(a)} - ic) \right) e^{i \sum_j z_j \theta_{\sigma(j)}}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

et elle est étendue à d'autres domaines par symétrie  $z_i \leftrightarrow z_j$ . Ici, la somme s'étend à toutes les permutations  $\sigma$  des  $N$  éléments (donc il y a  $N!$  termes) et  $(-1)^{|\sigma|}$  est la signature de la permutation.

### 1.1.3 Opérateurs conservés (intégrales du mouvement)

#### Opérateurs nombre de particules $\hat{Q}$ et moment $\hat{P}$

L'opérateur du nombre de particules  $\hat{Q}$  et l'opérateur de moment  $\hat{P}$  sont définis comme

$$\hat{Q} = \int \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) dx \quad (1.60)$$

$$\hat{P} = -\frac{i}{2} \int \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x) - \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \right\} dx \quad (1.61)$$

#### Propriétés

Ce sont des opérateurs hermitiens et ils constituent des intégrales du mouvement

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = [\hat{H}, \hat{P}] = O. \quad (1.62)$$

Il convient de noter que dans le chapitre 2, nous allons construire un nombre infini d'intégrales du mouvement.

**L'état propre**

Les fonctions propres  $|\{\theta_a\}\rangle$  de l'Hamiltonien  $\hat{H}$ , le sont aussi pour  $\hat{Q}$  et  $\hat{P}$  :  
L'équation aux valeurs propres

$$\hat{H}|\{\theta_a\}\rangle = \varepsilon(\{\theta_a\})|\{\theta_a\}\rangle, \quad \hat{P}|\{\theta_a\}\rangle = p(\{\theta_a\})|\{\theta_a\}\rangle, \quad \hat{Q}|\{\theta_a\}\rangle = N|\{\theta_a\}\rangle, \quad (1.63)$$

conduit au fait que  $|\{\theta_a\}\rangle$  est une fonction propre à la fois de l'Hamiltonien mécanique quantique  $\hat{\mathcal{H}}_N$ , de l'opérateur du nombre de particule  $\hat{\mathcal{N}}$  et de l'opérateur du moment mécanique quantique  $\hat{\mathcal{P}}_N$  :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{k=1}^N 1, \quad \hat{\mathcal{P}}_N = -i \sum_{k=1}^N \hat{\partial}_{z_k} \quad (1.64)$$

associés valeurs propres

$$N = \sum_{a=1}^N \theta_a^0, \quad p(\{\theta_a\}) = \sum_{a=1}^N \theta_a^1, \quad \varepsilon(\{\theta_a\}) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \theta_a^2. \quad (1.65)$$

## 1.2 Équation de Bethe et distribution de rapidité

### 1.2.1 Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz

Dans les deux sous-sections précédentes, nous avons étudié un nombre fini de bosons sur la droite réelle infinie, ce qui correspond à une densité de particules nulle. Cependant, pour accéder aux propriétés thermodynamiques du modèle, il est nécessaire de considérer une densité finie  $N/L$ . Cela peut être réalisé en imposant des conditions aux bords périodiques, en identifiant les points  $x = 0$  et  $x = L$  du système.

Imposer des conditions périodiques sur la fonction d'onde de Bethe (1.51), c'est-à-dire

$$\varphi_{\{\theta_a\}}(x_1, \dots, x_{N-1}, L) = \varphi_{\{\theta_a\}}(0, x_1, \dots, x_{N-1}),$$

mène aux équations de Bethe suivantes :

$$e^{i\theta_a L} \prod_{b \neq a} e^{i\Phi(\theta_a - \theta_b)} = (-1)^{N-1}, \quad a = 1, \dots, N, \quad (1.66)$$

où  $\Phi(\theta_a - \theta_b)$  désigne la phase de diffusion à deux corps, définie à l'équation (??).

En prenant le logarithme de chaque côté, on obtient un système de  $N$  équations couplées non linéaires :

$$L\theta_a + \sum_{b=1}^N \Phi(\theta_a - \theta_b) = 2\pi I_a, \quad (1.67)$$

où les nombres fermionique  $I_a = a - (N+1)/2$  et  $a \in [\![1, N]\!]$  (ref ??).

### 1.2.2 Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle

Dans la limite thermodynamique, le nombre de particules  $N$  et le volume (la longueur de la boîte)  $L$  tendent vers l'infini de sorte que leur rapport  $D = \frac{N}{L}$  reste fini :

$$\lim_{N,L \rightarrow \infty} \frac{N}{L} = D = \text{const} < \infty$$

Considérons le système à température nulle. Rappelons que l'état d'énergie minimale dans le secteur avec un nombre fixe de particules correspond aux solutions  $j$  des équations de Bethe ((1.67)) suivantes :

$$L\theta_a + \sum_{b=1}^N \Phi(\theta_a - \theta_b) = 2\pi I_a,$$

Dans la limite thermodynamique, les valeurs de  $\theta_a$  se condensent ( $\theta_{a+1} - \theta_a = \mathcal{O}(1/L)$ ), et remplissent l'intervalle symétrique , la mer de Dirac/sphère de Fermi  $\llbracket -K, K \rrbracket$  où  $K = \theta_N$  (ici  $I_a \geq I_b \Rightarrow \theta_a \geq \theta_b$ )

La quantité  $\rho_s$  tel que (manque une intro avant )

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = \frac{2\pi}{L} \lim_{\text{therm}} \frac{|I_{a+1} - I_a|}{|\theta_{a+1} - \theta_a|} = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta_a) = 1 + \frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b)$$

représente la densité de vacances que l'on appellera densité d'état avec  $I(\theta_a) = I_a$  et  $\Delta(\theta) = \Phi'(\theta) = \frac{2c}{c^2 + \theta^2}$

Maintenant intéressons nous à la densité de particules dans l'espace des moments  $\rho(\theta)$  , définie de la manière suivante :

$$\rho(\theta_a) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \frac{1}{\theta_{a+1} - \theta_a} > 0.$$

À l'états fondamentale tous les vacances dans  $[-K, +K]$  sont occupés donc

$$\rho = \rho_s.$$

La quantité  $L\rho(\theta)d\theta$  est le nombre de rapidité dans la celule  $[\theta, \theta + d\theta]$  . La quantité  $L \int_{-K}^{+K} \rho(\theta) d\theta$  est le nombre de particule  $N$ .On remplace la somme par une intégrale :

$$\frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b) = \int_{-K}^{+K} \Delta(\theta_a - \theta) \rho(\theta) d\theta$$

Donc

$$2\pi\rho_s(\theta) = 1 + \int_{-K}^{+K} \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') d\theta',$$

cela conduit à l'équation linéaire pour  $\rho$  :

$$\rho(\theta) - \int_{-K}^{+K} \frac{\Delta(\theta - \theta')}{2\pi} \rho(\theta') d\theta' = \frac{1}{2\pi}.$$

### 1.2.3 Excitations élémentaires à température nulle

# Chapitre 2

# Relaxation et Équilibre dans les Systèmes Quantiques Intégrables : Une Approche par la Thermodynamique de Bethe

## Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Dynamique hors équilibre et notions d'équilibre</b>	<b>15</b>
2.1.1	Limit Thermodynamique	15
2.1.2	Notion d'état d'équilibre généralisé (GGE)	16
2.1.3	Rôle des charges conservées extensives et quasi-locales	18
<b>2.2</b>	<b>Thermodynamique de Bethe et relaxation</b>	<b>20</b>
2.2.1	Statistique des macro-états : entropie de Yang-Yang et moyennes dans le GGE	20
2.2.2	Équations intégrales de la TBA	22

---

## 2.1 Dynamique hors équilibre et notions d'équilibre

### 2.1.1 Limit Thermodynamique

Limite

$$2\pi\rho_s = 1 + \Delta \star \rho$$

#### The dressing

Dans les manipulations thermodynamiques, il s'avère que l'opération suivante est omniprésente : à une fonction  $f(\theta)$ , on associe sa contrepartie « habillée »  $f^{dr}(\theta)$ , définie par l'équation intégrale :

$$f^{dr}(\theta) = f(\theta) + \int \frac{1}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') \nu(\theta') f^{dr}(\theta') d\theta' \quad (2.1)$$

$$= f(\theta) + \left\{ \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu * f^{dr}) \right\}(\theta) \quad (2.2)$$

où  $\Delta(\theta - \theta')/2\pi$  est un noyau de convolution spécifique qui dépend du problème considéré. Cette équation permet de capturer les effets de l'interaction entre les particules et de rendre compte des corrections « habillées » à la fonction initiale  $f(\theta)$ . En résolvant

Bien que cela ne soit pas explicite dans la notation,  $f^{\text{dr}}(\theta)$  est toujours fonctionnelle de la distribution de rapidité, à travers sa dépendance vis-à-vis du rapport d'occupation de Fermi. Par exemple, avec cette définition, l'équation constitutive (??) est reformulée comme suit :

$$2\pi\rho_s(\theta) = 1^{\text{dr}}(\theta) \quad (2.3)$$

où  $1(\theta) = 1$  est la fonction constante.

### 2.1.2 Notion d'état d'équilibre généralisé (GGE)

**Configuration des états à N particules.** On introduit la configuration  $\theta_{a \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  des rapidités pour un nombre fixe  $N$  de particules, et les états propres associés.

**Observables diagonales dans la base des états propres.** Dans le chapitre précédent (??), on a vu que l'état  $|\theta_a\rangle$  associé à cette configuration est une fonction propre des observables nombre et énergie (??). Ces observables sont diagonales dans la base des états propres :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_N = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (2.5)$$

avec  $\sum_{\{\theta_a\}}$  une somme sur tous les configurations.

**Définition générale d'observables conservées.** On introduit une famille d'observables  $\hat{\mathcal{O}}_i$  telles que les états  $|\theta_a\rangle$  soient aussi fonctions propres de chacune de ces observables, avec pour valeurs propres  $\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}}_i | \{\theta_a\} \rangle$  :

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|., \quad (2.6)$$

**Principe de maximisation de l'entropie.** On cherche à maximiser l'entropie de Shannon/ von Neuman de l'état statistique :

$$\mathcal{S} = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}), \quad (2.7)$$

sous la contrainte que les moyennes des observables soient fixées :

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\mathcal{O}}_i), \quad (2.8)$$

où  $\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle$  est la moyenne de l'observable  $\hat{\mathcal{O}}_i$ .

**Définition de la matrice densité et de la fonction de partition.** Pour résoudre ce problème, on introduit les multiplicateurs de Lagrange  $\beta_i$  pour chaque contrainte. Cela conduit à une matrice densité de la forme :

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp \left( - \sum_i \beta_i \hat{\mathcal{O}}_i \right), \quad (2.9)$$

avec la fonction de partition

$$Z = \text{Tr} \left[ \exp \left( - \sum_i \beta_i \hat{\mathcal{O}}_i \right) \right]. \quad (2.10)$$

**Interprétation physique des multiplicateurs de Lagrange.** Les multiplicateurs de Lagranges  $\beta_i$  apparaissent naturellement lors de l'optimisation sous contraintes, par exemple dans le formalisme de l'ensemble de Gibbs généralisé (GGE), où il imposent la conservation des valeurs moyennes des charges  $\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle$ .

**Probabilité d'un état à rapidités fixées.** On peut alors définir la probabilité d'occurrence d'un état  $|\theta_a\rangle$  :

$$\mathbb{P}(\{\theta_a\}) = \text{Tr} [\hat{\rho} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|] = \langle \{\theta_a\} | \hat{\rho} | \{\theta_a\} \rangle = Z^{-1} \exp \left( - \sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} \right). \quad (2.11)$$

**Moyenne d'un observable et dérivées de  $Z$ .** On peut écrire la moyenne d'une observable comme une somme pondérée par cette probabilité, ou encore comme une dérivée de la fonction de partition :

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} \mathbb{P}(\{\theta_a\}) = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \quad (2.12)$$

Par le même raisonnement la moyenne de  $\hat{\mathcal{O}}_i^n$  s'écrit :

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i^n \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}^n \mathbb{P}(\{\theta_a\}) = (-1)^n \frac{1}{Z} \frac{\partial^n Z}{(\partial \beta_i)^n} \Big|_{\beta_j \neq i}. \quad (2.13)$$

**Moments d'ordre supérieur et fluctuations.** Le premier et second moments permettent d'accéder à la variance de l'observable :

$$\Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 = \left\langle (\hat{\mathcal{O}}_i - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle)^2 \right\rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i} - \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \right)^2 \quad (2.14)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \right)_{\beta_j \neq i} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i}. \quad (2.15)$$

**Cas particulier de l'équilibre thermique.** – Si  $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{N}}$  alors  $\beta_i = -\beta\mu$  et si  $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{H}}_N - \mu\hat{\mathcal{N}}$  alors  $\beta_i = \beta = T^{-1}$ . Avec  $\mu$  le potentiel chimique et  $T$  la température pour un équilibre thermique–.

Dans le cas d'un équilibre thermique, on identifie certains multiplicateurs à des grandeurs thermodynamiques classiques comme l'inverse de la température et le potentiel chimique :

$$\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \Big|_{T, \dots}, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \mu^2} \Big|_{T, \dots} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \Big|_{T, \dots} \quad (2.16)$$

$$\langle \hat{\mathcal{H}}_N - \mu\hat{\mathcal{N}} \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Big|_{\mu, \dots}, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{H}}_N - \mu\hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \Big|_{\mu, \dots} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{H}}_N - \mu\hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \Big|_{\mu, \dots} \quad (2.17)$$

$$\langle \hat{\mathcal{H}}_N \rangle = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \right]_{T,\dots} - \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \right]_\mu \ln Z, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{H}}_N}^2 = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \right]_{T,\dots} - \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \right]_\mu \dots \right]^2 \ln Z \quad (2.18)$$

### 2.1.3 Rôle des charges conservées extensives et quasi-locales

Dans les systèmes intégrables, l'état stationnaire atteint après une évolution hors d'équilibre n'est généralement pas décrit par un état de Gibbs classique, mais par un ensemble généralisé de Gibbs (GGE). Celui-ci est construit à partir de toutes les charges conservées du système

**Écriture des observables thermodynamiques comme sommes sur les rapidités.** Pour des systèmes à  $N$  particules caractérisées par des rapidités  $\{\theta_a\}_{a=1}^N$ , les charges locales classiques — comme le nombre de particules ou l'énergie — s'expriment comme des sommes de puissances des rapidités :

$$\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^0 \quad \text{et} \quad \langle \hat{\mathcal{H}}_N \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^2.$$

Par analogie, la combinaison pondérée des valeurs moyennes d'un ensemble d'observables  $\hat{\mathcal{O}}_i$   $i \in \mathbb{N}$ , associée aux multiplicateurs de Lagrange  $\beta_i$ , peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{a=1}^N \theta_a^i \quad (2.19)$$

où les coefficients  $\alpha_i$  résultent d'une recombinaison des  $\beta_i$ .

**Interprétation fonctionnelle et échange des sommes.** Pour chaque  $a \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , la série  $\sum_i \alpha_i \theta_a^i$  converge pour des  $\theta_a$  dans un domaine convenable, ce qui autorise l'échange de l'ordre des deux sommes :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^N w(\theta_a) \quad (2.20)$$

avec

$$w(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i. \quad (2.21)$$

La fonction  $w(\theta)$  agit comme une fonction génératrice de poids associée aux charges conservées du système.

**Expression de la matrice densité généralisée.** La matrice densité peut alors être formulée sous la forme :

$$\hat{\rho}[w] = \frac{e^{-\hat{\mathcal{Q}}[w]}}{Z[w]}, \quad (2.22)$$

$$e^{-\hat{\mathcal{Q}}[w]} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (2.23)$$

où l'opérateur de charge associé à  $w$  s'écrit :

$$\hat{\mathcal{Q}}[w] = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N w(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (2.24)$$

et la fonction de partition  $Z[w]$  est donnée par :

$$Z[w] = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}. \quad (2.25)$$

**Probabilité associée à une configuration de rapidités.** La probabilité d'occuper un état à  $N$  particules caractérisé par les rapidités  $\theta_a$  est alors :

$$\mathbb{P}_{\{\theta_a\}} = \text{Tr}[\hat{\rho}[w]|\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|] = \langle\{\theta_a\}|\hat{\rho}[w]|\{\theta_a\}\rangle = Z[w]^{-1}e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}. \quad (2.26)$$

Cela montre que le poids statistique d'une configuration factorise naturellement sur les pseudo-moments, avec un poids local  $w(\theta)$  attribué à chaque particule.

**Moyennes d'observables dans le GGE.** La valeur moyenne d'un observable  $\hat{\mathcal{O}}$  dans l'ensemble généralisé s'écrit :

$$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle_{GGE} \doteq \text{Tr}(\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}[w]) = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}}e^{-\hat{\mathcal{Q}}[w]})}{\text{Tr}(e^{-\hat{\mathcal{Q}}[w]})} = \frac{\sum_{\{\theta_a\}}\langle\{\theta_a\}|\hat{\mathcal{O}}|\{\theta_a\}\rangle e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}}{\sum_{\{\theta_a\}}e^{-\sum_{a=1}^N w(\theta_a)}} \quad (2.27)$$

Cette expression formelle montre que la connaissance de  $w(\theta)$  suffit à déterminer les propriétés statistiques de toutes les observables diagonales dans cette base, incluant les charges conservées elles-mêmes.

**Interpretation.** Dans les systèmes intégrables, l'abondance de quantités conservées impose des contraintes fortes sur la dynamique et les états d'équilibre atteints à long temps. Contrairement aux systèmes non intégrables, dont l'état d'équilibre est entièrement caractérisé par les quelques charges globales (comme l'énergie ou le nombre de particules), les systèmes intégrables nécessitent la prise en compte d'une **famille infinie de charges conservées**, notées  $(\hat{\mathcal{O}}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , afin de décrire correctement leur relaxation vers un état stationnaire.

On distingue principalement deux types de charges conservées :

- Les **charges locales extensives**, dont la densité est strictement localisée dans l'espace (ou sur le réseau) et dont l'intégrale donne une quantité extensive ;
- Les **charges quasi-locales**, dont la densité n'est pas strictement locale mais reste suffisamment bien localisée pour que l'intégrale sur l'espace soit bien définie et extensive. Ces charges sont typiquement associées à des opérateurs dont le support s'étale sur une longueur finie, mais non nulle, et dont la décroissance spatiale rapide (souvent exponentielle) garantit une bonne intégrabilité.

D'un point de vue formel, les charges quasi-locales peuvent être vues comme des fonctionnelles analytiques  $\hat{\mathcal{Q}}[w]$ , définies par une densité dépendant d'une fonction test  $w(\theta)$ , à travers l'expression :

$$\hat{\mathcal{Q}}[w] = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N w(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle\langle\{\theta_a\}|.$$

L'introduction de ces charges quasi-locales dans la construction de la matrice densité d'équilibre permet de décrire plus finement les propriétés thermodynamiques et dynamiques des états stationnaires, notamment après des quenches quantiques. C'est ce qui motive leur inclusion dans la formulation du **GGE (Generalized Gibbs Ensemble)**, au-delà des seules charges strictement locales.

**Rôle dans le formalisme GGE.** Dans un état d'équilibre généralisé (GGE), on maximise l'entropie sous contrainte de toutes les charges conservées. La forme générale de la matrice densité est :

$$\hat{\rho}_{GGE} \propto \exp\left(-\sum_i \beta_i \hat{\mathcal{O}}_i\right)$$

Si l'on se limite aux charges locales, cela peut suffire pour certains systèmes. Mais **dans les systèmes intégrables, cela n'est pas toujours suffisant** pour capturer l'état stationnaire post-quench. Il faut alors inclure les **charges quasi-locales**, qui jouent un rôle crucial dans la relaxation vers le GGE.

$$w(\theta) = \sum_i \alpha_i \theta^i$$

correspond à une densité de charge extensible mais non strictement locale. Cela permet de construire une famille de matrices densité  $\hat{\rho}[w]$  qui incorporent correctement l'effet des charges quasi-locales.

## 2.2 Thermodynamique de Bethe et relaxation

### 2.2.1 Statistique des macro-états : entropie de Yang-Yang et moyennes dans le GGE

**I. Macro-états et entropie dans la TBA.** Dans la sous-section précédente, nous avons vu que, dans la limite thermodynamique, les observables physiques deviennent des fonctionnelles de la distribution de rapidité  $\rho(\theta)$ . Cette description est efficace car elle permet d'échapper au détail de chaque état propre. Toutefois, cette simplification laisse en suspens une question cruciale : **quelle est la distribution de rapidité d'un système à l'équilibre thermique à température finie ?** Pour répondre à cette question, nous devons comprendre la **structure statistique des états propres** associés à une même distribution  $\rho(\theta)$ .

**Distribution de rapidité comme macro-état.** Chaque distribution de rapidité  $\rho(\theta)$  ne correspond pas à un état propre unique, mais à un grand **ensemble de micro-états** : différents choix des ensembles de quasi-moments  $\theta_a$  peuvent conduire à la même densité de distribution à l'échelle macroscopique. Ainsi,  $\rho(\theta)$  doit être interprétée comme un **macro-état**, qui agrège un très grand nombre d'états propres microscopiques.

La question thermodynamique devient alors : **Combien de micro-états microscopiquement distincts sont compatibles avec un même macro-état  $\rho(\theta)$  ?**

**Dénombrement local des configurations microcanoniques.** Pour répondre à cette question, on subdivise l'axe des rapidités en petites tranches ou cellules de largeur  $\delta\theta$ , chacune centrée en un point  $\theta_a$ . Dans une tranche  $[\theta_a, \theta_a + \delta\theta]$ , on suppose que la densité  $\rho(\theta)$  est à peu près constante. Le nombre de quasi-particules dans cette tranche est alors approximativement :

$$N_a = L\rho(\theta_a)\delta\theta,$$

et le nombre total d'états disponibles (i.e., le nombre d'états possibles si toutes les positions en moment étaient disponibles) est donné par la densité totale de niveaux

$$M_a = L\rho_s(\theta_a)\delta\theta,$$

La densité de niveaux  $\rho_s(\theta)$  tient compte du fait que les moments sont quantifiés de manière discrète, en raison des équations de Bethe (voir équation (??)).

Sous l'hypothèse que les particules occupent ces niveaux de manière analogue à des fermions libres (principe d'exclusion de Pauli), le nombre de manières différentes de choisir  $N_a$  niveaux parmi  $M_a$  est donné par :

$$\#\text{conf.}(\theta_a) \approx \binom{M_a}{N_a} = \frac{[L\rho_s(\theta)\delta\theta]!}{[L\rho(\theta)\delta\theta]![[(L\rho_s(\theta)-L\rho(\theta))\delta\theta]!]}. \quad (2.28)$$

**Estimation asymptotique à l'aide de Stirling.** En utilisant la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad (2.29)$$

composé du fonction logarithmique, il vient cette équivalence :

$$\ln n! \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} n \ln n - \underbrace{n + \ln \sqrt{2\pi n}}_{o(n \ln n)}, \quad (2.30)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n \quad (2.31)$$

$\#\text{conf.}$  est jamais null donc on peut approximer, pour de grandes valeurs de  $L$  et de  $\delta\theta$  :

$$\ln \#\text{conf.}(\theta) \underset{\substack{\rho\delta\theta \rightarrow \infty \\ \rho(\theta) \leq \rho_s(\theta)}}{\sim} L[\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho)](\theta) \delta\theta. \quad (2.32)$$

Cette expression donne la contribution à l'**entropie locale** (par unité de  $\theta$ ) associée à la cellule autour de  $\theta_a$ .

**Entropie de Yang-Yang : définition .** Le nombre total de micro-états compatibles avec une distribution macroscopique  $\rho(\theta)$  est donné par le produit des nombres de configurations pour chaque cellule de rapidité  $[\theta, \theta + \delta\theta]$ .

En prenant le logarithme et en remplaçant la somme par une intégrale, on obtient l'entropie totale de Yang-Yang. Pour alléger la notation, cette somme sur les tranches est notée :

$$\sum_a^{\theta-\text{tranches}} \quad (2.33)$$

où chaque  $a$  indexe une cellule de rapidité  $[\theta_a, \theta_a + \delta\theta]$ . On obtient :

$$\ln \#\text{micro-états.} = \sum_a^{\theta-\text{tranches}} \ln \#\text{conf.}(\theta_a), \quad (2.34)$$

$$\approx L\mathcal{S}_{YY}[\rho], \quad (2.35)$$

avec

$$\mathcal{S}_{YY}[\rho] \doteq \sum_a^{\theta-\text{tranches}} [\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho)](\theta_a) \delta\theta. \quad (2.36)$$

RELAXATION ET ÉQUILIBRE DANS LES SYSTÈMES QUANTIQUES INTÉGRABLES : UNE APPROCHE PAR LA THERMODYNAMIQUE DE **l'Énergie généralisée**. Les variations de  $w(\theta)$  étant négligeables sur chaque tranche de largeur  $\delta\theta$ , on peut approximer l'<sup>BETHE</sup> énergie généralisée comme :

$$\mathcal{W} = \sum_{a=1}^N w(\theta_a) \sim L\mathcal{W}[\rho] = L \sum_a^{\theta-\text{tranches}} w(\theta_a)\rho(\theta_a)\delta\theta. \quad (2.37)$$

**Observables locales dans la limite thermodynamique.** Si l'observable  $\mathcal{O}$  est suffisamment locale, sa valeur d'attente dans un état propre ne dépend pas des détails microscopiques, mais seulement de la distribution de rapidité. On écrit donc :

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle = \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\rho]}, \quad (2.38)$$

où  $\lim_{\text{therm.}}$  est la limite thermodynamique ( $N, L \rightarrow \infty$  avec  $N/L \rightarrow \text{const.}$ ).

Dans un ensemble général (GGE), la valeur moyenne de l'observable devient :

$$\lim_{\text{therm.}} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\text{GGE}} = \frac{\sum_{\rho}^{\rho} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\rho]} \# \text{micro-états.} e^{-L\mathcal{W}[\rho]}}{\sum_{\rho}^{\rho} \# \text{micro-états.} e^{-L\mathcal{W}[\rho]}} \approx \frac{\sum_{\rho}^{\rho} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{[\rho]} e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}}{\sum_{\rho}^{\rho} e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}}, \quad (2.39)$$

où la somme  $\sum \rho$  porte sur toutes les distributions possibles de rapidité  $\rho$

**Passage à la limite continue.** En faisant tendre  $\delta\theta \rightarrow 0$ , les sommes deviennent des intégrales :

$$\sum_a^{\theta-\text{tranches}} \delta\theta \xrightarrow{\delta\theta \rightarrow 0} \int d\theta, \quad (2.40)$$

et l'entropie de Yang-Yang ainsi que l'énergie généralisée prennent la forme :

$$S_{YY}[\rho] = \int d\theta [\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho)](\theta), \quad (2.41)$$

$$\mathcal{W}[\rho] = \int w(\theta)\rho(\theta) d\theta \quad (2.42)$$

**Formule fonctionnelle pour les moyennes.** Finalement, la moyenne d'une observable dans le GGE s'écrit comme une intégrale fonctionnelle/ de chemin :

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\rho e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])} \mathcal{O}[\rho]}{\int \mathcal{D}\rho e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}}, \quad (2.43)$$

où  $\mathcal{O}[\rho]$  est la valeur de l'observable dans un état propre caractérisé par la distribution  $\rho$ .

## 2.2.2 Équations intégrales de la TBA

**Moyenne des observables dans l'ensemble généralisé de Gibbs.**

**Approximation au point selle.** Dans la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ , cette intégrale est dominée par la configuration  $\langle \rho \rangle$  qui maximise le poids exponentiel. Il s'agit de la densité de rapidité la plus probable, solution d'un problème de maximisation :

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle \approx \mathcal{O}[\langle \rho \rangle]. \quad (2.44)$$

Cette approximation correspond à une méthode de *selle statique*, où l'on développe l'action effective au voisinage de la distribution dominante.

**Développement fonctionnel au premier ordre.** On effectue un développement de Taylor fonctionnel de l'action à l'ordre linéaire :

$$\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho] \approx \mathcal{S}_{YY}[\langle \rho \rangle] - \mathcal{W}[\langle \rho \rangle] + \frac{\delta(\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}{\delta \rho} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} (\delta \rho),$$

La condition de stationnarité au point selle impose :

$$\delta(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = 0$$

soit

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{YY}}{\delta \rho} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} = \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \rho} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle}. \quad (2.45)$$

**Équation intégrale de la TBA.** Cette égalité donne naissance à une équation intégrale pour le poids effectif  $w$ , défini comme la dérivée fonctionnelle de l'énergie généralisée :

$$w = \frac{\delta \mathcal{W}[\rho]}{\delta \rho} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} = \frac{\delta \mathcal{S}_{YY}[\rho]}{\delta \rho} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} = \ln(\langle \nu \rangle^{-1} - 1) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln(1 - \langle \nu \rangle)$$

où  $\star$  désigne la *convolution* sur l'espace des rapidités. La densité de rapidité moyenne et la fonction d'occupation vérifient :

$$\langle \rho \rangle = \langle \nu \rangle \cdot \langle \rho_s \rangle \quad (2.46)$$

et

$$\langle \nu \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta \epsilon(\theta)}} \quad (2.47)$$

Cette dernière équation relie la fonction d'occupation  $\langle \nu \rangle$  à une pseudo-énergie  $\epsilon(\theta)$ , caractéristique de la théorie thermodynamique de Bethe (TBA).



# Chapitre 3

# Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée

## Contents

---

<b>3.1 Hydrodynamique et régimes asymptotiques</b> . . . . .	<b>25</b>
3.1.1 Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques . . . . .	25
3.1.2 Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité . . . . .	25
3.1.3 Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD) . . . . .	25

---

## 3.1 Hydrodynamique et régimes asymptotiques

- 3.1.1 Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques
- 3.1.2 Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité
- 3.1.3 Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)



## Chapitre 4

# Fluctuation de la distribution de rapidité dans des état d'équilibre

## Contents

4.1 Développement autour du point selle . . . . .	28
4.2 Définition de la fonction de corrélation . . . . .	28
4.3 Fluctuations autour de la distribution moyenne et rôle de la Hessienne . . . . .	29
4.4 Fluctuations autour de la distribution moyenne . . . . .	30
4.5 Fonction correlation du nombre d'atomes et de l'énergie . . . . .	31

## Introduction

Considérons un système homogène de taille  $L$ . Faisons l'hypothèse qu'après relaxation, le système est décrite par un ensemble généralisé de Gibbs (GGE). On a vus dans le chapire d'avant que la valeur moyenne des observables  $\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle$  dans un ensemble statistique s'écrit comme une intégrale formelle

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\rho e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])} \mathcal{O}[\rho]}{\int \mathcal{D}\rho e^{L(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}}, \quad (4.1)$$

avec  $\mathcal{O}[\rho]$  la valeur de l'observable dans un état propre caractérisé par la distribution de rapidité  $\rho$ ,  $S_{YY}$  l'entropie de Yang-Yang et  $\mathcal{W}$  l'énergie généralisé. Cette moyenne fonctionnelle sur tous les profils de rapidité  $\rho$ , avec un poids  $\propto e^{(S_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}$ . Dans la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ , cette intégrale est dominée par la configuration  $\langle \rho \rangle$  qui maximise le poids exponentiel, c'est-à-dire la distribution de rapidité la plus probable. Ainsi, la moyenne de l'observable s'écrit à première approximation :

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle \approx \mathcal{O}[\langle \rho \rangle] \quad (4.2)$$

L'hypothèse selon laquelle, après relaxation, le système est décrit par un ensemble généralisé de Gibbs (GGE) constitue un fondement majeur de notre compréhension des dynamiques hors équilibre dans les systèmes intégrables. Cette hypothèse a des implications théoriques profondes et mérite d'être testée expérimentalement. Toutefois, la seule connaissance de la distribution de rapidité moyenne  $\langle \rho \rangle$  ne permet pas de confirmer l'adéquation du GGE. En effet, plusieurs ensembles statistiques peuvent mener à une même valeur moyenne de  $\rho$ . Pour lever cette ambiguïté, il est nécessaire d'étudier les fluctuations autour de la distribution typique, notées  $\delta\rho$ , définies par

$$\rho = \langle \rho \rangle + \delta\rho.$$

alors voilà pourquoi on est motivé pour pousser les calculs à l'ordre 2

## 4.1 Développement autour du point selle

Cette configuration vérifie donc l'**équation de point selle** :

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{YY}[\rho]}{\delta \rho} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} = \frac{\delta \mathcal{W}[\rho]}{\delta \rho} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle}.$$

On développe de Taylor-Young à l'ordre quadratique :

$$\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho] \approx \mathcal{S}_{YY}[\langle \rho \rangle] - \mathcal{W}[\langle \rho \rangle] + \frac{1}{2} \frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}{(\delta \rho)^2} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} (\delta \rho)^2,$$

CCC avec  $\frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}{(\delta \rho)^2} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle}$  désigne la forme bilinéaire symétrique définie positive.

Cette approximation fait de l'intégrale une **intégrale gaussienne**.

## 4.2 Définition de la fonction de corrélation

Soient deux observables macroscopiques  $\hat{\mathcal{A}}$  et  $\hat{\mathcal{B}}$ . On s'intéresse à leur corrélation connectée (ou fonction de corrélation à deux points), définie par :

$$C_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}} = \langle (\hat{\mathcal{A}} - \langle \hat{\mathcal{A}} \rangle)(\hat{\mathcal{B}} - \langle \hat{\mathcal{B}} \rangle) \rangle = \langle \hat{\mathcal{A}} \cdot \hat{\mathcal{B}} \rangle - \langle \hat{\mathcal{A}} \rangle \langle \hat{\mathcal{B}} \rangle. \quad (4.3)$$

Considérons à présent le développement à l'ordre linéaire de la valeur propre d'une observable fonctionnelle  $\hat{\mathcal{A}}$  autour de la densité moyenne  $\langle \rho \rangle$  :

$$\mathcal{A}[\rho] = \int d\theta \mathbf{a}(\theta) \rho(\theta),$$

où  $\mathbf{a}(\theta)$  désigne la densité spectrale associée à l'observable  $\mathcal{A}$ .

Une variation linéaire de  $\rho$  induit alors une fluctuation de l'observable donnée par :

$$\mathcal{A}[\rho] - \mathcal{A}[\langle \rho \rangle] \approx \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \rho} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} \delta \rho = \delta \mathcal{A}[\rho] = \int d\theta \mathbf{a}(\theta) \delta \rho(\theta),$$

En s'appuyant sur les équations (4.1), (4.2) et (4.3), et en remarquant que l'intégrale fonctionnelle est dominée par la contribution gaussienne autour du point selle, on obtient que la corrélation (4.3) est donnée par la formule des **fluctuations gaussiennes** :

$$C_{\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}} = \iint d\theta d\theta' \mathbf{a}(\theta) \mathbf{b}(\theta') \langle \delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta') \rangle. \quad (4.4)$$

Sous l'approximation gaussienne autour du point col, la covariance des fluctuations est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle \delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta') \rangle &= \frac{\int \mathcal{D} \delta \rho \delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta') \exp \left[ \frac{L}{2} \iint \delta \rho(\theta_1) \frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}{\delta \rho(\theta_1) \delta \rho(\theta_2)} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} \delta \rho(\theta_2) \right]}{\int \mathcal{D} \delta \rho \exp \left[ \frac{L}{2} \iint \delta \rho(\theta_1) \frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}{\delta \rho(\theta_1) \delta \rho(\theta_2)} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} \delta \rho(\theta_2) \right]}, \\ &= -\frac{1}{L} \left( \frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho])}{\delta \rho(\cdot) \delta \rho(\cdot)} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle} \right)^{-1}(\theta, \theta'), \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ces relations posent les bases d'une description quantifiée des fluctuations de densité de rapidité, essentielles pour tester expérimentalement la validité du GGE, comprendre les corrélations à longue distance, et accéder aux propriétés dynamiques fines des systèmes intégrables en une dimension.

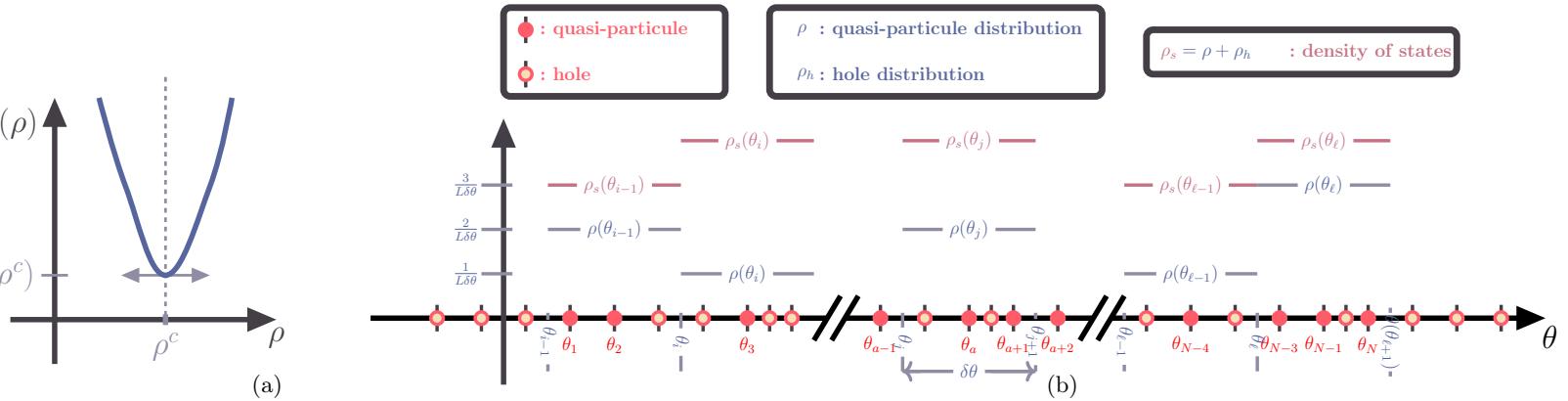


FIGURE 4.1

### 4.3 Fluctuations autour de la distribution moyenne et rôle de la Hessienne

On note  $\mathcal{H}(\theta, \theta')$  la Hessienne fonctionnelle de  $\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho]$

$$\mathcal{H}(\theta, \theta') = -\frac{\delta^2}{\delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta')} (\mathcal{S}_{YY}[\rho] - \mathcal{W}[\rho]) \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle}. \quad (4.6)$$

La fonction de corrélation à deux points des fluctuations  $\delta\rho$  est alors donnée par l'inverse de la Hessienne :

$$\langle \delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta') \rangle = \frac{1}{L} \mathcal{H}^{-1}(\theta, \theta'), \quad (4.7)$$

où  $\mathcal{H}^{-1}$  est défini comme le noyau de l'opérateur inverse au sens fonctionnel :

$$(\mathcal{H}^{-1} \cdot \mathcal{H})(\theta, \theta') = (\mathcal{H} \cdot \mathcal{H}^{-1})(\theta, \theta') = \int d\theta'' \mathcal{H}(\theta, \theta'') \mathcal{H}^{-1}(\theta'', \theta') = \delta(\theta - \theta') \quad (4.8)$$

où le dernier  $\delta$  désigne la fonction delta de Dirac, et non une différentielle.

Dans un premier temps calculons  $\mathcal{H}(\theta, \theta')$ . Puisque l'énergie généralisé s'écrit

$$\mathcal{W}[\rho] = \int w(\theta) \rho(\theta) d\theta, \quad (4.9)$$

alors sa différentielle seconde est nulle et la Hessienne se réécrit alors

$$\mathcal{H}(\theta, \theta') = -\frac{\delta^2 \mathcal{S}_{YY}[\rho]}{\delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta')} \Big|_{\rho=\langle \rho \rangle}, \quad (4.10)$$

alors en injectant l'entropie de Yang-Yang que je rappelle

$$\mathcal{S}_{YY}[\rho] = \int d\theta (\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho))(\theta) \quad (4.11)$$

la Hessienne se décompose alors

$$\mathcal{H}(\theta, \theta') = \mathcal{D}(\theta, \theta') + \mathcal{V}(\theta, \theta') \quad (4.12)$$

avec une partie diagonale irrégulière

$$\mathcal{D}(\theta, \theta') = \left( \frac{1}{\langle \rho_s(\theta) \rangle \langle \nu(\theta) \rangle (1 - \langle \nu(\theta) \rangle)} \right) \delta(\theta, \theta') \quad (4.13)$$

avec une partie symétrique régulière

$$\mathcal{V}(\theta, \theta') = - \left( \frac{1}{\langle \rho_s(\theta) \rangle (1 - \langle \nu(\theta) \rangle)} + \frac{1}{\langle \rho_s(\theta') \rangle (1 - \langle \nu(\theta') \rangle)} \right) \frac{\Delta(\theta - \theta')}{2\pi} + \int d\theta'' \frac{\langle \nu(\theta'') \rangle}{\langle \rho_s(\theta'') \rangle (1 - \langle \nu(\theta'') \rangle)} \frac{\Delta(\theta - \theta'')}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi} \quad (4.14)$$

en notant  $\langle \rho \rangle = \langle \rho_s \rangle \langle \rho \rangle$ .

## 4.4 Fluctuations autour de la distribution moyenne

On cherche alors  $\mathcal{H}^{-1}$  aussi sous la forme

$$\mathcal{H}^{-1}(\theta, \theta') = \mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta') + \mathcal{B}(\theta, \theta') \quad (4.15)$$

avec une partie diagonale irrégulière

$$\mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta') = (\langle \rho_s(\theta) \rangle \langle \nu(\theta) \rangle (1 - \langle \nu(\theta) \rangle)) \delta(\theta, \theta') \quad (4.16)$$

tel que

$$(\mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{D})(\theta, \theta') = (\mathcal{D} \cdot \mathcal{D}^{-1})(\theta, \theta') = \int d\theta'' \mathcal{D}(\theta, \theta'') \mathcal{D}^{-1}(\theta'', \theta') = \delta(\theta - \theta'), \quad (4.17)$$

avec une partie symétrique régulière  $\mathcal{B}$ .

Les équations (4.12), (4.15), (4.8) et (4.17), il vient que

$$\begin{cases} \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}^{-1} = \delta \\ \mathcal{H}^{-1} \cdot \mathcal{H} = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{H} \cdot \mathcal{B} = -\mathcal{V} \cdot \mathcal{D}^{-1} \\ \mathcal{B} \cdot \mathcal{H} = -\mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{B} = -\mathcal{H}^{-1} \cdot \mathcal{V} \cdot \mathcal{D}^{-1} \\ \mathcal{B} = -\mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{V} \cdot \mathcal{H}^{-1} \end{cases} \quad (4.18)$$

Du fait que tous ces fonctions ( $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{V}$  et inverse) soit symétriques alors l'équation ci-dessus ne forme qu'une et  $\mathcal{B}$  étant donc symétrique. Donc en utilisant (4.14) et (4.16)

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\theta, \theta') &= -(\mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{V} \cdot \mathcal{H}^{-1})(\theta, \theta'), \\ &= (\langle \rho_s(\theta) \rangle \langle \nu(\theta) \rangle (1 - \langle \nu(\theta) \rangle)) \left\{ \frac{\Delta}{2\pi} \star \left[ \left( \frac{1}{\langle \rho_s(\theta) \rangle (1 - \langle \nu(\theta) \rangle)} + \frac{1}{\langle \rho_s(\cdot) \rangle (1 - \langle \nu(\cdot) \rangle)} \right) \mathcal{H}^{-1}(\cdot, \theta') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\langle \nu(\cdot) \rangle}{\langle \rho_s(\cdot) \rangle (1 - \langle \nu(\cdot) \rangle)} \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \mathcal{H}^{-1}(\cdot, \theta') \right) \right] \right\} (\theta),\end{aligned}$$

où  $(f \star g)(x)$  désigne la convolution  $\int f(x-t) g(t) dt$ . En injectant cette dernière équation et 4.15, dans (4.7), il vient que une équation implicite :

$$\langle \delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta') \rangle = \frac{1}{L} \mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta') + \quad (4.19)$$

$$(\langle \rho_s(\theta) \rangle \langle \nu(\theta) \rangle (1 - \langle \nu(\theta) \rangle)) \left\{ \frac{\Delta}{2\pi} \star \left[ \left( \frac{1}{\langle \rho_s(\theta) \rangle (1 - \langle \nu(\theta) \rangle)} + \frac{1}{\langle \rho_s(\cdot) \rangle (1 - \langle \nu(\cdot) \rangle)} \right) \langle \delta\rho(\cdot) \delta\rho(\theta') \rangle \right. \right. \quad (4.20)$$

$$\left. \left. - \frac{\langle \nu(\cdot) \rangle}{\langle \rho_s(\cdot) \rangle (1 - \langle \nu(\cdot) \rangle)} \left( \frac{\Delta}{2\pi} \star \langle \delta\rho(\cdot) \delta\rho(\theta') \rangle \right) \right] \right\} (\theta). \quad (4.21)$$

Cette expression explicite des corrélations permet d'évaluer les fluctuations des grandeurs macroscopiques comme le nombre total de particules ou l'énergie, en les exprimant comme des observables linéaires de la densité  $\rho(\theta)$ .

## 4.5 Fonction correlation du nombre d'atomes et de l'énergie

Il est maintenant pertinent de tester notre expression des fluctuations. On fait l'hypothèse que le système est en équilibre thermique caractérisé par la température  $T$  et le potentiel chimique  $\mu$ .

La valeur propre  $\mathcal{N}[\rho]$  (resp  $\mathcal{E}[\rho]$ ) de l'opérateur nombre d'atomes  $\hat{\mathcal{N}}$  (resp énergie  $\hat{\mathcal{E}}$ ) et associés aux configurations liées à la distribution de rapidité  $\rho$  s'écrit (avec comme convention la masse des atomes  $k_B = \hbar = m = 1$ )

$$\mathcal{N}[\rho] = L \int d\theta \rho(\theta),$$

$$\mathcal{E}[\rho] = \frac{L}{2} \int d\theta \theta^2 \rho(\theta).$$

Les corrélations associées s'est

$$\begin{aligned}C_{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{N}}} &= L^2 \int d\theta_a \int d\theta_b \langle \delta\rho(\theta_a) \delta\rho(\theta_b) \rangle, \\ C_{\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{E}}} &= \left( \frac{L}{2} \right)^2 \int d\theta_a \int d\theta_b \theta_a^2 \theta_b^2 \langle \delta\rho(\theta_a) \delta\rho(\theta_b) \rangle,\end{aligned}$$

Dans la section {??}, nous avons vu que la variance d'une observable  $\hat{\mathcal{O}}_i$ , autrement dit ses fluctuations, peut également s'exprimer comme une dérivée thermodynamique de sa moyenne :

$$C_{\hat{\mathcal{O}}_i, \hat{\mathcal{O}}_i} = \Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 = - \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_j \neq i},$$

où  $\beta_i$  est la variable conjuguée à  $\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle$ . En particulier, les fluctuations du nombre d'atomes et de l'énergie peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 &= \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \right|_T, \\ \Delta_{\hat{\mathcal{E}}}^2 &= \Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2 + \mu \Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 = - \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \right|_\mu - \left. \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \right|_T,\end{aligned}$$

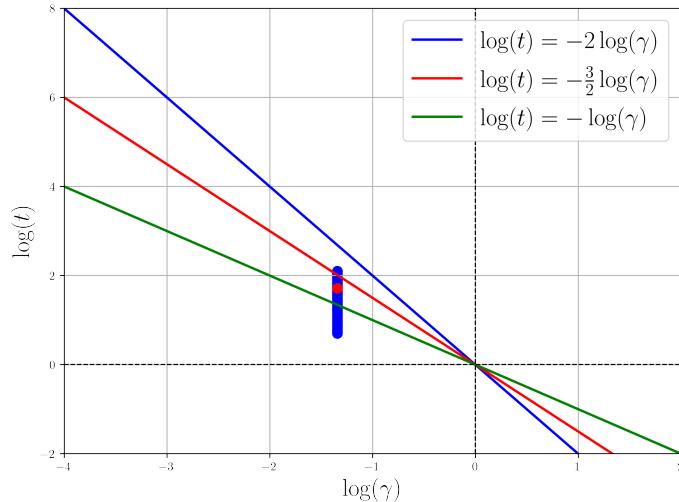
avec  $\beta = T^{-1}$ .

Les quantités  $C_{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{N}}}$  et  $\Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2$  sont analytiquement équivalentes, de même que  $C_{\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{E}}}$  et  $\Delta_{\hat{\mathcal{E}}}^2$ .

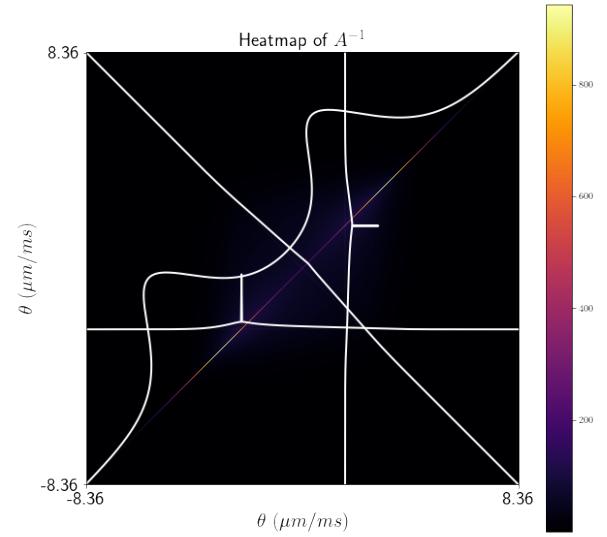
Nous souhaitons maintenant effectuer une comparaison numérique entre ces deux approches. Pour ce faire, nous avons d'abord résolu numériquement l'équation {??} avec  $f(\theta) = \beta\epsilon(\theta) - \beta\mu$ , ce qui nous a permis d'obtenir  $\rho(\theta)$  et  $\rho_s(\theta)$  (Il y aura plus de détail dans le chapitre ??).

On fait les calculs des corrélations pour  $\gamma = g/n$  fixé à ?? et  $t = 1/(\beta g^2)$  entre ?? et ??. Les points correspondants sont représentés en bleu sur un diagramme de phase du modèle de Lieb-Liniger (voir Fig. 4.2a).

Ce même diagramme contient également un point rouge correspondant à  $t = ??$ . Les fluctuations associées à ce point sont représentées en niveaux de couleur sur un graphique 2D (voir Fig. 4.2b)



(a)



(b) Fluctuations mesurées

FIGURE 4.2 – (a) Diagramme de phase du modèle de Lieb-Liniger à l'équilibre thermique. Différents régimes asymptotiques sont séparés par des transitions progressives. Les points bleus représentent les fluctuations calculées numériquement pour différentes températures. Les coordonnées sont données par  $\gamma = \frac{mg}{\hbar^2 n}$  et  $t = \frac{k_B T}{mg^2/\hbar^2}$ . (b) Représentation en niveaux de couleur des fluctuations  $\delta\rho$  pour  $T = 60$  nK et  $\mu = 27$  nK (point rouge dans (a)).

Les résultats obtenus à l'aide de cette méthode thermodynamique sont comparés à ceux issus du calcul direct des fluctuations de  $\rho$ . Ces comparaisons sont représentées sur la Fig. 4.3, et montrent une excellente concordance entre les deux approches.

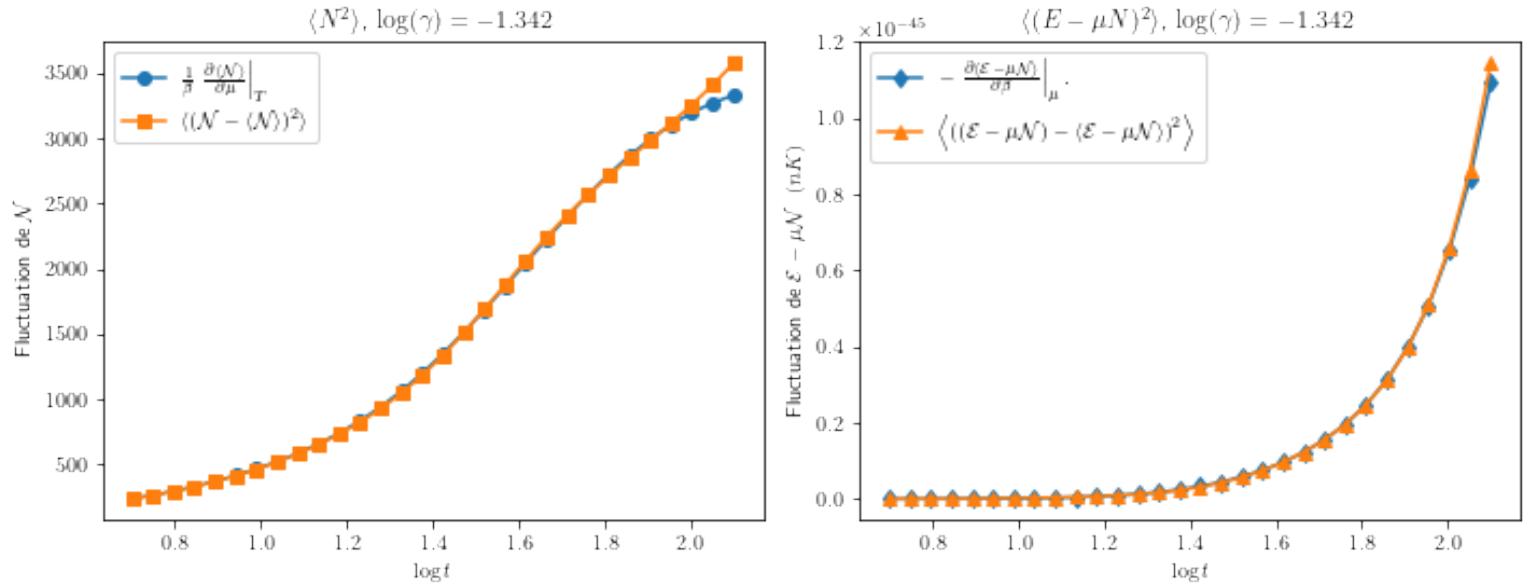


FIGURE 4.3 – Comparaison numérique entre les fluctuations calculées à partir de l'analyse quadratique de l'action (fluctuations de  $\rho$ ) et celles obtenues par dérivées thermodynamiques des observables moyennes.



# Chapitre 5

## Protocoles experimentale

### Contents

---

5.1	Présentation de l'expérience	35
5.1.1	Piégeage transverses et longitudinale	35
5.2	Outil de sélection spatial	35

---

### 5.1 Présentation de l'expérience

#### 5.1.1 Piégeage transverses et longitudinale

### 5.2 Outil de sélection spatial



# Chapitre 6

## Étude du protocole de bi-partition : Mesure de distribution de rapidités locales $\rho(x, \theta)$ pour des systèmes hors équilibre

### Contents

---

<b>6.1</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>39</b>
6.1.1	Préparation et Confinement du Gaz Ultra-Froid de $^{87}\text{Rb}$	39
6.1.2	Confinement Longitudinal et Stabilisation du Piège Quartique	39
6.1.3	Sélection Spatiale et Réalisation de la Coupure Bipartite	40
6.1.4	Dynamique Après Coupure	40
<b>6.2</b>	<b>Prédictions de la GHD</b>	<b>41</b>
<b>6.3</b>	<b>Données expérimentales</b>	<b>41</b>
<b>6.4</b>	<b>Sondre la distribution locale des rapidités</b>	<b>43</b>
<b>6.5</b>	<b>Détails sur les calculs</b>	<b>46</b>
6.5.1	Facteur d'occupation et distribution de rapidité à l'équilibre thermique	46
6.5.2	Dynamique du contour dans l'espace des phases $(x, \theta)$	47
6.5.3	Simulation de la déformation du bord	47
6.5.4	Simulation de l'expansion	48

---

### Introduction

Parmi les systèmes à N corps, les modèles intégrables occupent une place particulière, notamment dans le contexte des dynamiques hors d'équilibre et de la thermalisation généralisée. Contrairement aux systèmes génériques, ces modèles présentent une infinité de constantes du mouvement, empêchant la thermalisation au sens usuel. Cette contrainte conduit à l'émergence d'une thermalisation généralisée, décrite non par l'ensemble canonique, mais par un ensemble à entropie maximale sous contraintes, souvent formalisé par l'Ensemble de Gibbs Général (GGE) .

Un exemple classique pour illustrer la dynamique non diffusante typique des systèmes intégrables est celui du pendule de Newton, où des chocs élastiques entre sphères de masses égales propagent l'énergie cinétique sans dissipation. Bien que ce système soit classique, il incarne le comportement régulier que l'on retrouve dans les systèmes intégrables quantiques, où les excitations se déplacent sans diffusion.

Dans ce cadre, le problème de Riemann en hydrodynamique — c'est-à-dire l'évolution d'un système à partir de deux états homogènes juxtaposés —

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0,$$

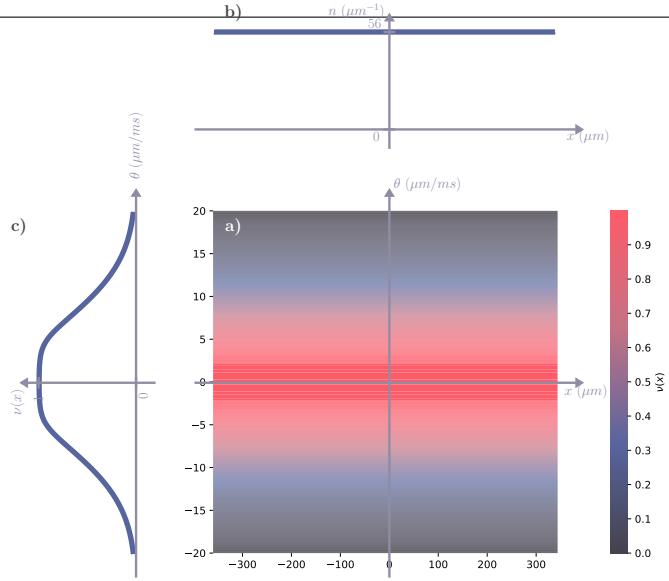


FIGURE 6.1 – a) Facteur d'occupation initial  $\nu(x, \theta) = \nu_0(\theta)$  correspondant à un état d'équilibre thermique à la température  $T = 560 \text{ nK}$ , pour une densité linéaire homogène  $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$ . Ces paramètres correspondent à une potentiel chimique  $\mu = 65 \text{ nK}$ . b) Densité spatiale linéaire  $n(x) = \int \rho_{[\nu]}(x, \theta) d\theta$ , constante et égale à  $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$ . c) Facteur d'occupation  $\nu_0(\theta)$  correspondant à la distribution thermique illustrée en a).

avec initialement  $u$  constante par morceau :

$$u(t=0, x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < x_0 \\ u_d & \text{si } x > x_0 \end{cases},$$

constitue un test fondamental de compréhension des équations d'évolution dans les systèmes intégrables. Sa résolution complète, longtemps restée partiellement ouverte, a été rendue possible par l'avènement de la Théorie Hydrodynamique Généralisée (GHD). Introduite dans le contexte des théories des champs intégrables (modèle de Sinh-Gordon, modèle de Lieb-Liniger) [??] et des chaînes quantiques (chaîne XXZ de Heisenberg) [??], la GHD a permis une avancée analytique majeure pour la description des dynamiques hors équilibre dans ces systèmes.

Depuis, plusieurs solutions analytiques du problème de Riemann ont été obtenues. En particulier, une solution exacte pour un état initial particulier dans la chaîne XXZ [??], ainsi qu'une solution plus générale pour un gaz 1D de sphères dures, ont confirmé l'efficacité de la GHD pour décrire les processus de propagation balistique et de relaxation généralisée.

Dans ce contexte, nous étudions la dynamique hors équilibre d'un gaz quantique unidimensionnel de bosons faiblement interactifs, confinés dans une géométrie 1D. Le système est décrit par le modèle intégrable de Lieb-Liniger, avec des interactions faibles et répulsives permettant l'émergence d'effets quantiques collectifs tout en restant dans un régime faiblement corrélé.

La préparation initiale consiste à créer un gaz homogène à profil de densité constant (Fig.6.1), à température contrôlée. Une opération de coupe abrupte est ensuite réalisée : la moitié gauche du système ( $x < 0$ ) est vidée, tandis que la moitié droite ( $x > 0$ ) reste occupée (Fig.6.4). Ce protocole, dit quench bipartite, engendre une discontinuité initiale dans la densité atomique, analogue au problème de Riemann pour un système doté d'un nombre infini de lois de conservation. Ce type de dynamique, qualifiée de domain wall dynamics, a été étudié dans la thèse de Léa Dubois [?], qui a permis une première analyse expérimentale de ce protocole.

Nous poursuivons et approfondissons cette étude, en analysant la dynamique unitaire du gaz à l'aide des outils de la GHD. Nous montrons que la propagation balistique de la discontinuité observée expérimentalement est bien capturée par la solution GHD du problème de Riemann, à température nulle comme finie. Le profil de densité mesuré à différents temps révèle une frontière qui se propage de manière linéaire, en bon accord avec les prédictions de la GHD (Fig. 6.4 (e)-(g)). Des écarts résiduels sont néanmoins observés, que nous attribuons à des effets thermiques et à des imperfections instrumentales.

Un aspect central de notre approche repose sur l'exploitation des solutions GHD pour reconstruire la distribution initiale de rapidités

à partir des profils de densité mesurés dans la région de transition. Cette démarche constitue une forme de thermométrie généralisée et fournit un outil puissant pour sonder les états locaux du gaz.

Enfin, nous développons une méthode expérimentale inédite permettant de mesurer localement le facteur d'occupation  $\nu(x, \theta)$  dans la région de déformation. Nous observons une forte asymétrie de cette distribution : large et lisse du côté initialement occupé, coupée et abrupte du côté initialement vide, révélant ainsi la nature fondamentalement hors équilibre du système. Cette observation est en bon accord avec les prédictions théoriques de la GHD, même si la résolution spatiale limite la finesse des détails observables.

## 6.1 Dispositif expérimental

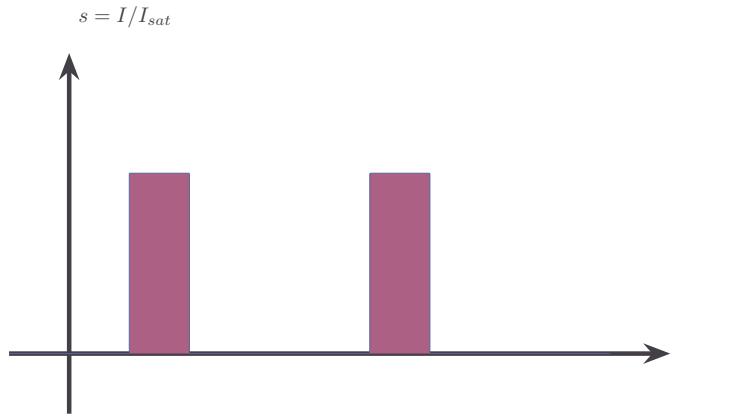


FIGURE 6.2 – Schéma à compléter, comprenant plusieurs parties : deux diagrammes temporels montrant l'intensité lumineuse du pulse DMD et de la sonde imageuse, l'intensité des courants de piégeage longitudinal et transverse, un schéma 3D du piège avec un schéma du nuage atomique, un diagramme du DMD similaire à celui de l'article sur la sélection spatiale, un schéma du DMD, ainsi que des schémas 2D représentant l'évolution du nuage à différentes étapes.

### 6.1.1 Préparation et Confinement du Gaz Ultra-Froid de $^{87}\text{Rb}$

Nous préparons un gaz ultra-froid d'atomes bosoniques de  $^{87}\text{Rb}$  dans l'état  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  à l'aide d'un piège magnétique combinant un confinement transverse intense et un confinement longitudinal contrôlé par des courants dans des fils situés à la surface d'une puce atomique. Le système de confinement transverse est réalisé par trois microfils parallèles déposés sur la puce (Fig.6.3(a)), parcourus par des courants alternatifs modulés à 400 MHz. Cette configuration permet de compenser les effets de rugosité des fils et de maintenir une indépendance entre les confinements longitudinal et transverse [?].

Les atomes sont piégés à une distance de  $7\ \mu\text{m}$  de la surface de la puce et à  $15\ \mu\text{m}$  des microfils, garantissant ainsi un confinement transverse très intense. Le potentiel transverse est bien décrit par un potentiel harmonique de fréquence  $\omega_\perp/2\pi = 2,56\ \text{kHz}$ . Un refroidissement par évaporation par radiofréquence permet d'obtenir un nuage atomique à une température d'environ  $T \approx 100\ \text{nK}$ , pour un potentiel chimique  $\mu/k_B = 45\ \text{nK}$ .

Les rapports  $\mu/(\hbar\omega_\perp) = 0,4$  et  $k_BT/(\hbar\omega_\perp) = 0,8$  placent le gaz dans un régime unidimensionnel. Le couplage effectif en 1D est donné par  $g = 2a_{3D}\hbar\omega_\perp$ , avec  $a_{3D} = 5,3\ \text{nm}$ , la longueur de diffusion tridimensionnelle du  $^{87}\text{Rb}$  [?]. Des détails supplémentaires sur l'expérience sont disponibles dans [?]. Le gaz se trouve profondément dans le régime de quasicondensat, avec un paramètre sans dimension de Lieb  $\gamma = mg/(\hbar^2n_0)$  dans l'intervalle  $[0,4, 0,7] \times 10^{-2}$ , tandis que la température satisfait l'inégalité  $T \ll n_0^{3/2} \sqrt{\hbar^2 g/m}/k_B$ . Ainsi, les gaz obtenus se trouvent profondément dans le régime de quasicondensat [?].

### 6.1.2 Confinement Longitudinal et Stabilisation du Piège Quartique

Le piégeage longitudinal est assuré par des courants continus circulant dans quatre fils placés de part et d'autre des trois microfils de confinement transverse, comme illustré sur la Fig.6.3(a). Étant donné que ces fils sont situés loin du centre du nuage atomique, le

ÉTUDE DU PROTOCAL DE BI-PARTITION : MESURE DE DISTRIBUTION DE RAPIDITÉS LOCALES  $\rho(x, \theta)$  POUR DES SYSTÈMES HORS ÉQUILIBRE

potentiel longitudinal peut être développé en série polynomiale :  $V(x) = \sum_{i=1}^4 a_i x^i$ . Les quatre premiers coefficients  $a_i$  peuvent être ajustés en modulant les courants dans ces fils. Il est ainsi possible d'annuler les termes linéaire, quadratique et cubique ( $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ), de sorte que le terme dominant du potentiel soit quartique :  $V(x) = a_4 x^4$ . Une telle forme de potentiel permet d'obtenir une densité atomique quasi homogène sur une région relativement étendue, condition essentielle à l'étude de dynamiques hors équilibre telles que le protocole de coupure bipartite, qui suppose un système semi-infini. Un exemple de profil de densité linéique obtenu dans ce potentiel quartique est représenté en gris sur la Fig.6.3(b). La densité linéique  $n_0$  y reste constante à 10% près sur une distance d'environ 250  $\mu\text{m}$ .

Les paramètres du piège longitudinal incluent un champ magnétique homogène  $B_0 = 3,36$  G et des courants dans les fils de confinement :  $I_D = 1.400$  A,  $I_{D'} = 1.100$  A,  $I_d = 1.090$  A, et  $I_{d'} = 0.875$  A. Cette configuration permet de garantir un confinement longitudinal très précis et stable, essentiel pour l'étude des dynamiques des gaz en régime unidimensionnel.

### 6.1.3 Sélection Spatiale et Réalisation de la Coupure Bipartite

Pour réaliser expérimentalement une bipartition initiale nette, nous utilisons la méthode de sélection spatiale introduite dans [?]. Une partie du nuage, initialement dans un état stationnaire global dans le piège quartique, est illuminée à son extrémité gauche par un faisceau lumineux quasi résonant avec la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  de la raie D2, se propageant perpendiculairement à l'axe  $x$ . Les atomes exposés subissent une pression de radiation : après 30  $\mu\text{s}$  d'illumination, correspondant à environ 15 cycles absorption/réémission, ces atomes acquièrent une énergie suffisante pour quitter le piège. Le faisceau est façonné spatialement à l'aide d'un dispositif à micromiroirs numériques (DMD) afin de ne cibler qu'un bord du gaz. Ce protocole produit une frontière nette entre une région vide et un gaz quasi homogène, rendue possible par l'utilisation du piège quartique. La résolution de cette coupure est limitée principalement par la résolution du système d'imagerie (quelques microns). L'éventuelle réabsorption des photons diffusés par les atomes non illuminés est réduite en désaccordant le faisceau pousseur de 15MHz par rapport à la transition D2. Un exemple de profil de densité après application de ce protocole est illustré en jaune sur la Fig.6.3(b).

### 6.1.4 Dynamique Après Coupure

Une fois la coupure réalisée, le confinement longitudinal est supprimé, mais le confinement transverse est maintenu. La frontière initialement abrupte s'élargit au cours du temps. Cette dynamique est étudiée en enregistrant les profils de densité longitudinale  $n(x; t)$  pour différentes durées d'évolution  $t$ .

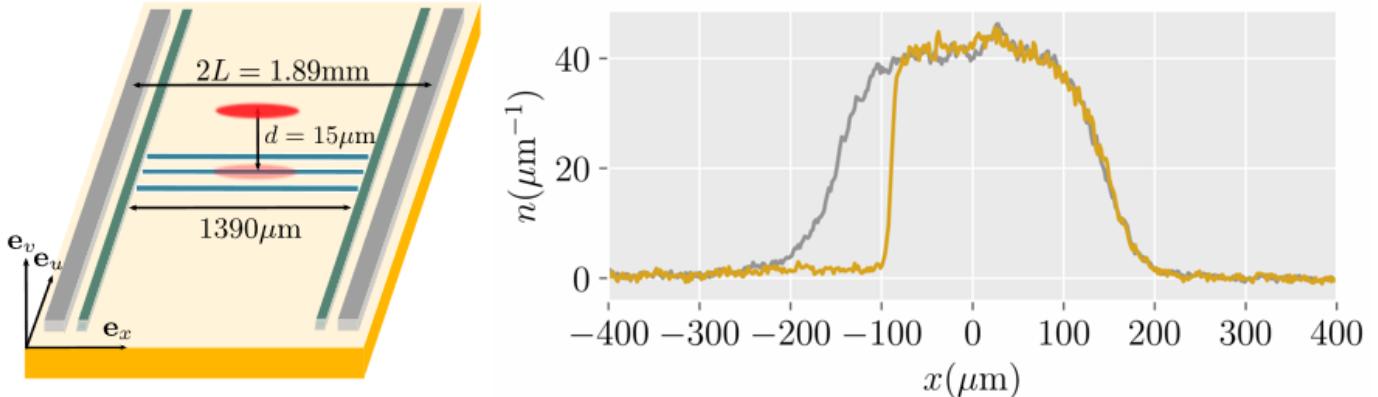


FIGURE 6.3 – (a) Schéma de la puce atomique. Les 3 fils bleus assurent le confinement transverse, les 4 autres fils (gris) génèrent le potentiel longitudinal. Le nuage atomique, représenté par une ellipse rouge, est piégé à 12  $\mu\text{m}$  au-dessus des fils. (b) Profils de densité linéique extraits par imagerie par absorption. En gris : gaz piégé dans un potentiel quartique. En jaune : après application du faisceau pousseur pendant 30  $\mu\text{s}$ , suivi d'un temps de vol de 1 ms.

## 6.2 Prédictions de la GHD

Le dispositif expérimental décrit ci-dessus peut être analysé théoriquement comme suit. Au cours de l'évolution temporelle, la frontière nette initiale du nuage devient plus lisse et les dérivées temporelles des quantités locales diminuent. Après un certain temps, après un lissage, on s'attend à ce que le gaz puisse être décrit localement par des états stationnaires.

Les états stationnaires du modèle de Lieb-Liniger sont complètement caractérisés par leur distribution de rapidité  $\rho(\theta)$ . Alternativement, ces états peuvent être caractérisés par le facteur d'occupation  $\nu(\theta)$ .

Puisque nous supposons une stationnarité locale, le système dans son ensemble est décrit par une distribution de rapidité dépendante du temps et de la position  $\rho(x, \theta; t)$ , ou équivalement par le facteur d'occupation dépendant du temps et de la position  $\nu(x, \theta; t)$ . Ce dernier conduit à des calculs plus simples, tandis que le premier est particulièrement utile pour extraire la densité linéaire, qui est donnée par

$$n(x; t) = \int d\theta \rho(x, \theta; t). \quad (6.1)$$

Les équations de GHD [?, ?] prédisent l'évolution temporelle de  $\rho(x, \theta; t)$ , ou équivalement de  $\nu(x, \theta; t)$ . Lorsqu'elles sont écrites en termes du facteur d'occupation  $\nu(x, \theta; t)$ , les équations de GHD prennent la forme d'une équation convective :

$$\partial_t \nu + v_{[\nu]}^{\text{eff}} \partial_x \nu = 0, \quad (6.2)$$

avec la vitesse effective  $v_{[\nu]}^{\text{eff}}$  comme une fonctionnelle de la fonction d'occupation (cf. ??). Cette équation est un cas particulier particulier du problème de Riemann (??) avec initialement un facteur d'occupation :

$$\nu(x, \theta; t=0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \nu_0(\theta) & \text{si } x > 0 \end{cases}. \quad (6.3)$$

Soit  $\nu(x, \theta; t)$  une solution de l'équation hydrodynamique (Eq. 6.2) vérifiant la condition initiale donnée en (Eq. 6.3). Considérons un changement d'échelle spatio-temporel :  $x \rightarrow x' = \alpha x$ ,  $t \rightarrow t' = \alpha t$ . Alors,  $\nu(x', \theta, t')$  est également solution des équations hydrodynamiques avec les mêmes conditions initiales. En supposant l'unicité de la solution [?], il en résulte que :

$$\forall \alpha > 0: \quad \nu(x, \theta; t) = \nu(\alpha x, \theta; \alpha t) = \nu\left(\frac{x}{\tau}, \theta; 1\right). \quad (6.4)$$

Cette propriété de similarité est universelle pour les systèmes décrits par une dynamique hydrodynamique à l'échelle d'Euler.

Autrement dit, pour une bipartition initiale dont la discontinuité est située à  $x = 0$ , la solution de (??) est invariante le long des rayons de vitesse constante  $x/t$  [?, ?]. En d'autres termes, l'équation (??) implique que, pour cette classe d'états initiaux, la distribution du facteur d'occupation local et donc toutes les propriétés locales du gaz, dépendent de  $x$  et  $t$  uniquement à travers la quantité  $v = x/t$ . La solution de l'équation (??) peut donc être écrite en utilisant le facteur d'occupation le long des rayons  $\nu^*(v, \theta)$  tel que

$$\nu(x, \theta; t) = \nu^*(x/t, \theta). \quad (6.5)$$

Pour la situation considérée dans cet article, où initialement un état de vide est situé pour  $x < 0$  et un état de distribution du facteur d'occupation  $\nu_0$  pour  $x > 0$ , la solution  $\nu^*(v, \theta)$  est paramétrée par une rapidité de bord  $\theta^*$  selon [?, ?]

$$\nu^*(v, \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } \theta < \theta^* \\ 0 & \text{si } \theta > \theta^* \end{cases} \quad \text{où } v_{[\nu^*(v, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta^*) = v. \quad (6.6)$$

Cette équation peut être résolue numériquement pour toute distribution initiale donnée  $\nu_0(\theta)$ , voir la Fig. 6.4 pour un exemple. Avec l'équation (6.5), elle décrit entièrement le système à l'échelle d'Euler. Notez que, pour calculer la densité linéaire  $n(x, t)$  afin de comparer avec les profils de densité expérimentaux, on utilise l'équation (6.1).

## 6.3 Données expérimentales

L'état initial est préparé selon le protocole décrit en section ???. Une fois cet état établi, le confinement longitudinal est supprimé, tandis que le confinement transverse est maintenu, permettant ainsi d'étudier l'expansion du gaz le long de l'axe longitudinal.

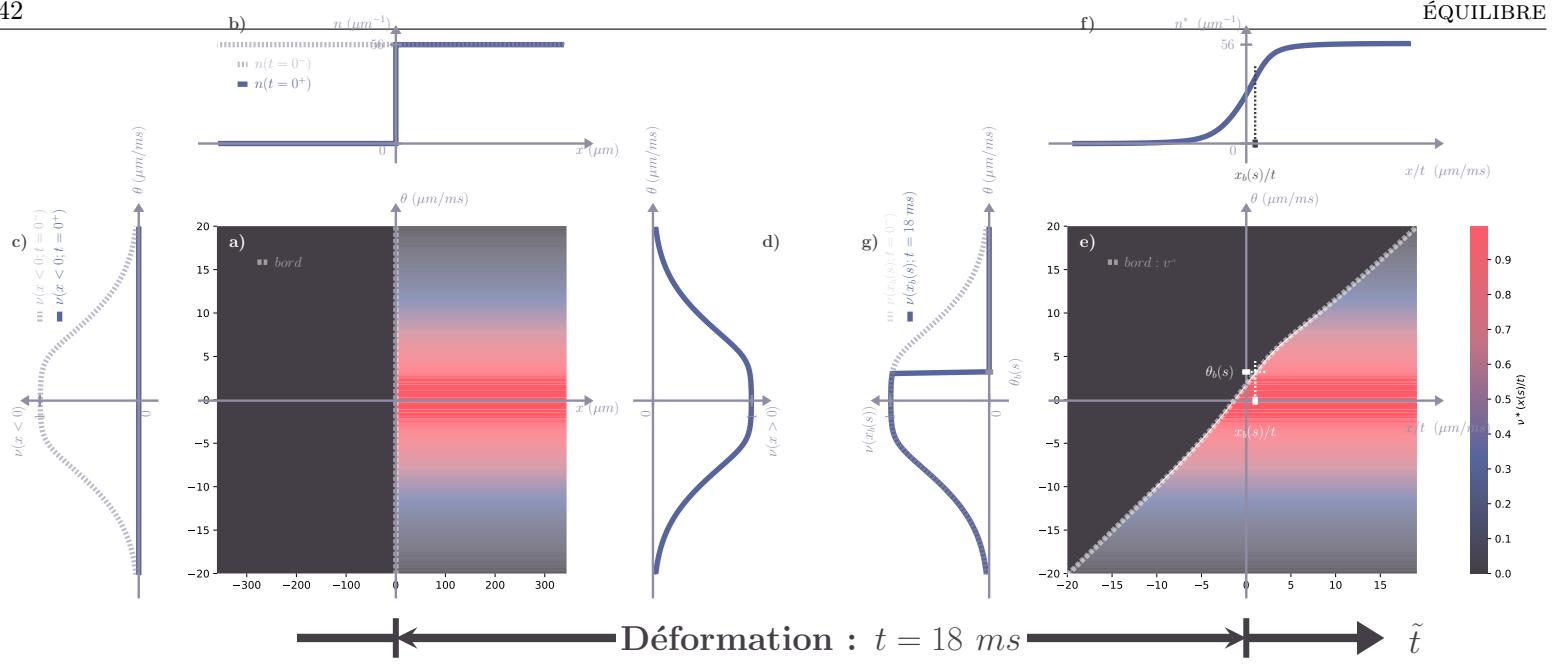


FIGURE 6.4 – (a) À l'instant  $t = 0^+$ , immédiatement après le « quench bipartite » en  $x = 0$ , le facteur d'occupation est donné par  $\nu(x, \theta; t = 0^+) = \nu_0(\theta)$  pour  $x > 0$  et est nul pour  $x < 0$ . Le bord initial représenté en tirets par l'ensemble des points  $(x_b(s; t = 0^+) = 0, \theta(s; t = 0^+))$ . (b) Densité spatiale linéaire  $n(x)$  : en pointillés,  $n(x; t = 0^-) = \int \rho(x, \theta; t = 0^-) d\theta = n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$  juste avant le quench ; en ligne pleine,  $n(x; t = 0^+) = n_0$  pour  $x > 0$  et 0 pour  $x < 0$ . (c) À gauche de la coupure ( $x < 0$ ) : en pointillés,  $\nu(x, \theta; t = 0^-) = \nu_0(\theta)$  ; en ligne pleine,  $\nu(x, \theta; t = 0^+) = 0$ . (d) À droite de la coupure ( $x > 0$ ), le facteur d'occupation reste inchangé :  $\nu(x, \theta; t = 0^+) = \nu_0(\theta)$ . (e) À l'instant  $t = 18 \text{ ms}$ , après l'évolution balistique post-quench, le facteur d'occupation est donné par  $\nu^*(x_b(s; t)/t, \theta) = \nu_0(\theta)$  pour  $\theta < \theta_b(s; t)$ , et nul pour  $\theta > \theta_b(s; t)$ , résolvant l'équation (6.6), pour  $t > 0$ .  $\nu(x(s; t), \theta(s; t)) = \nu^*(x(s; t)/t, \theta(s; t))$  est invariant de la déformation ie de  $t > 0$ . Le bord représenté en tirets par l'ensemble des points  $(x_b(s; t)/t, \theta(s; t))$ . Étant donné que la coupure initiale est en  $x = 0$  et que l'évolution du bord est balistique, cette courbe résoud  $v_{[\nu^*(x(s; t)/t, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s; t)) = x(s; t)/t = v(s)$  (6.2). (f) Densité spatiale  $n^*(x/t)$  en régime hydrodynamique (scaling). (g) Pour les atomes à droite de la coupure : en pointillés,  $\nu^*(x(s; t)/t, \theta) = \nu_0(\theta)$  ; en ligne pleine,  $\nu^*(x_b(s; t)/t, \theta) = \nu_0(\theta)$  pour  $\theta < \theta_b(s; t)$  et nul pour  $\theta > \theta_b(s; t)$ . Le raisonnement est similaire pour les atomes à gauche de la coupure.

Conformément aux prédictions hydrodynamiques à l'échelle d'Euler, la dynamique du système à long temps peut être caractérisée par une forme auto-similaire des profils de densité en bord, de la forme :

$$n(x; t) = n^* \left( \frac{x}{t} \right). \quad (6.7)$$

Cette propriété résulte de l'invariance d'échelle des équations de la GHD et se vérifie pour tout système régissant une dynamique eulérienne.

Cette prédiction a été testée expérimentalement en superposant les profils de densité en bord, obtenus à partir d'un même état initial, pour différents temps de déformation  $t$ , en les représentant en fonction de la variable réduite  $v = x/t$ . Les profils ainsi mis à l'échelle sont présentés en Fig. 6.5(a) pour des temps compris entre  $t = 10 \text{ ms}$  et  $t = 18 \text{ ms}$ . L'excellent recouvrement des courbes confirme que le régime balistique est atteint dans cet intervalle de temps.

En effet, cette description hydrodynamique à l'échelle d'Euler n'est valable que dans un domaine temporel restreint  $t \in [t_m, t_M]$ , qui dépend notamment des paramètres initiaux du système, tels que la taille du nuage ou la température. Pour des temps  $\tau > t_M$ , estimés autour de 18ms dans notre cas, la modélisation fondée sur une déformation d'un bord semi-infini devient inadaptée, la densité maximale du gaz ayant diminué de manière significative, ce qui rend les effets de taille finie non négligeables. Inversement, pour des temps  $t < t_m$ , l'accord avec la GHD se détériore également, ce qui peut s'expliquer par le caractère non parfaitement abrupt de la

coupure initiale — effective sur une échelle de l'ordre du micron —, par la résolution limitée du système d'imagerie (supérieure à  $1 \mu\text{m}$ ) qui empêche de distinguer les détails du bord à très court terme, et enfin par la nature même des équations de la GHD, qui ne sont rigoureusement valables que dans la limite des grandes échelles spatio-temporelles ; dans nos conditions expérimentales, on estime cette borne inférieure à  $t_m = 6 \pm 2 \text{ ms}$ .

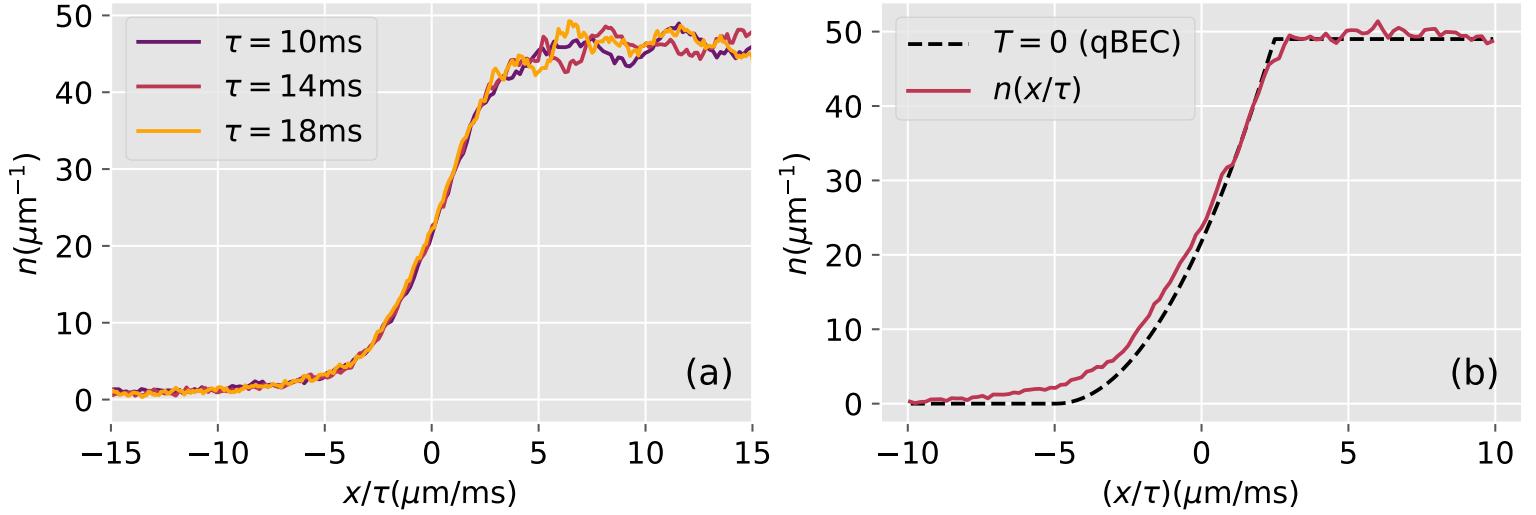


FIGURE 6.5 – (a) Profils de densité aux bords obtenus pour différents temps de déformation  $t$ , représentés en fonction de la variable réduite  $x/t$ . Le bon recouvrement des profils témoigne d'une dynamique balistique conforme à la GHD à l'échelle d'Euler. (b) Comparaison d'un profil mesuré à  $t = 10 \text{ ms}$  avec la prédition à température nulle de la GHD dans le régime de quasi-condensat (équation (??)), pour un paramètre de Lieb  $\gamma = 4,6 \times 10^{-3}$ .

## 6.4 Sonder la distribution locale des rapidités

Pour un état initial du gaz correspondant à un facteur d'occupation lisse  $\nu(\theta)$  (par exemple un état thermique), le facteur d'occupation  $\nu^*(x/t, \theta)$  à rapport  $x/t$  fixé est attendu comme étant fortement asymétrique en fonction de  $\theta$ , selon l'équation (6.6). En effet, du côté droit, il présente une discontinuité du type saut, similaire à celle du facteur d'occupation de l'état fondamental, tandis que du côté gauche, il reste lisse. Afin de révéler ces caractéristiques particulières de l'état local du gaz, nous utilisons le protocole introduit dans la Réf. [?] pour sonder la distribution locale des rapidités, comme expliqué ci-après.

Nous laissons d'abord le gaz se dilater pendant un temps  $t = 18 \text{ ms}$ , de sorte que le bord s'étale sur une large zone d'environ  $350 \mu\text{m}$ , comme illustré en Fig. 6.4 (e)-(f) et Fig. 6.7 (a). Nous sélectionnons ensuite une tranche du gaz comprise dans l'intervalle  $[x_0 - \ell/2, x_0 + \ell/2]$ , en éliminant tous les atomes situés hors de cette tranche à l'aide d'un faisceau de poussée [?](Fig 6.6 (a)-(c)).

En Fig. 6.7(a), nous présentons le profil de densité mesuré 1 ms après la sélection de la tranche. L'ajustement à une fonction rectangulaire lissée donne  $x_0 = 18 \mu\text{m}$ . Pour les calculs, la largeur  $\ell$  sera déterminée à partir du nombre d'atomes sélectionnés (voir ci-dessous). Enfin, nous laissons cette tranche se dilater en 1D pendant un temps d'expansion  $\tau$ , puis nous mesurons la densité longitudinale  $\tilde{n}(x, \tau)$ . Celle-ci reflète la distribution totale des rapidités dans la tranche  $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta; \tau > 0) dx = \int_{x_0 - \ell/2}^{x_0 + \ell/2} \rho(x, \theta; \tau = 0^+) dx$ , car pour  $\tau \rightarrow \infty$ , on s'attend à ce que  $\tau \tilde{n}(\tau * \theta - x_0; \tau) \simeq \Pi(\theta)$ . L'asymétrie attendue de  $\Pi$  devrait ainsi induire une asymétrie de la densité  $\tilde{n}(x, \tau)$  en fonction de  $x$ . Nous observons effectivement cette asymétrie dans nos profils d'expansion, comme illustré en Fig. 6.7(b) pour un temps d'expansion  $\tau = 30 \text{ ms}$ .

Pour aller au-delà de cette observation qualitative, nous effectuons un calcul GHD à l'échelle d'Euler du profil d'expansion, en supposant que l'état initial est thermique. La température est obtenue par ajustement du profil de bord avant la sélection de la tranche, comme indiqué en Fig. 6.7(a), ce qui donne  $T = 560 \text{ nK}$ . Le potentiel chimique est ajusté afin que la densité linéaire initiale corresponde à celle mesurée dans la région  $x > 0$ , avant l'élargissement du bord. À partir du profil initial, nous simulons à la fois l'élargissement du bord et l'expansion de la tranche en GHD, en supposant une découpe parfaite, c'est-à-dire  $\nu(x, \theta) = 0$  pour

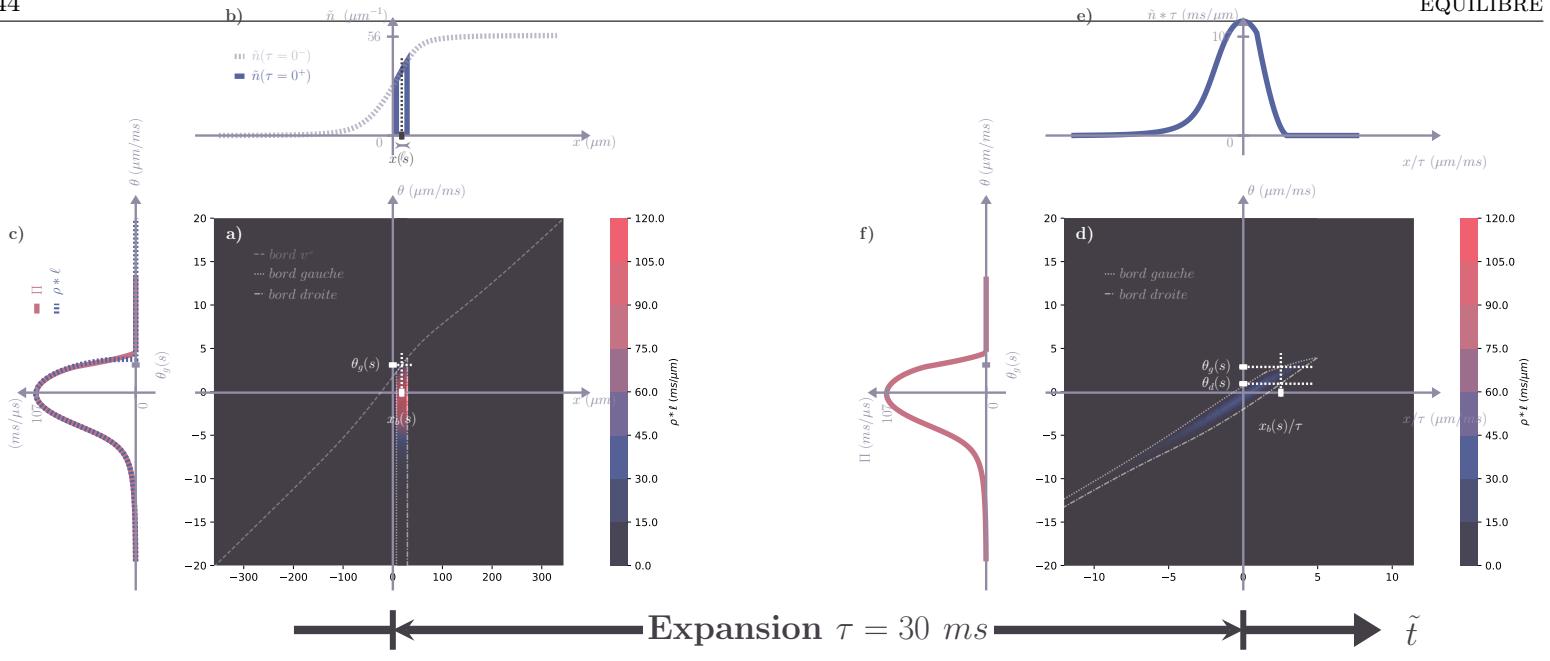


FIGURE 6.6 – (a) À l'instant  $\tau = 0^+$ , immédiatement après la sélection de la tranche centrée en  $x = x_0$  et de largeur  $\ell$ , la distribution de rapidité localement résolue est donnée par  $\rho(x, \theta; \tau = 0^+) = \nu(x, \theta; t = 18 \text{ ms}) \rho_s(x, \theta; t = 18 \text{ ms})$  pour  $|x - x_0| < \ell/2$ , et est nulle pour  $|x - x_0| > \ell/2$ . Le bord gauche immédiatement après la sélection est représenté en pointillés par l'ensemble des points  $(x_g(s; \tau = 0^+), \theta_g(s; \tau = 0^+))$ , et le bord droit en tiret-point par l'ensemble des points  $(x_d(s; \tau = 0^+), \theta_d(s; \tau = 0^+))$ . Le bord complet est donc la concaténation de ces deux ensembles. (b) Densité linéique spatiale  $\tilde{n}(x)$  : en pointillés,  $n(x; t = 18 \text{ ms})$  juste avant la sélection ; en ligne pleine,  $\tilde{n}(x; \tau = 0^+)$ , égal à  $n(x; t = 18 \text{ ms})$  pour  $|x - x_0| < \ell/2$  et nul ailleurs. (c) Distribution de rapidité après sélection,  $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta; \tau) dx$ , invariante sous l'évolution unidimensionnelle, représentée en rouge. La distribution localement résolue en  $x_b(s; \tau = 0^+)$ ,  $\rho(x_b(s; \tau = 0^+), \theta; \tau = 0^+)$ , est représentée en pointillés. Cette distribution est localement conservée, i.e.,  $\rho(x(s; \tau), \theta(s; \tau))$  reste inchangée au cours de l'évolution unidimensionnelle, indépendamment de  $\tau$ . (e) Distribution localement résolue  $\rho(x, \theta; \tau = 30 \text{ ms})$  après une évolution unidimensionnelle de 30 ms. Le bord gauche est représenté en pointillés par les points  $(x_g(s; \tau = 30 \text{ ms}), \theta(s; \tau = 30 \text{ ms}))$ , et le bord droit en tiret-point par  $(x_d(s; \tau = 30 \text{ ms}), \theta(s; \tau = 30 \text{ ms}))$ . (f) Densité spatiale  $\tilde{n}(x; \tau = 30 \text{ ms})$ . (g) Distribution de rapidité  $\Pi(\theta)$  après la sélection (identique à celle de (c)).

$|x - x_0| > \ell/2$  et  $\nu(x, \theta)$  inchangé sinon. La largeur  $\ell$  est ajustée de sorte que le nombre d'atomes sélectionnés dans la simulation corresponde à celui mesuré expérimentalement après expansion, et on obtient  $\ell = 24 \mu\text{m}$ .

Le profil d'expansion simulé est montré en Fig. 6.8(a). Il présente une forte asymétrie, comme attendu, avec un bord droit abrupt et une densité nulle au-delà d'un certain point. Cependant, cette chute est moins marquée que celle prédicta pour la distribution locale des rapidités  $\rho(x_0, \theta)$  à  $x = x_0$ . Deux effets contribuent à cet élargissement : (i) la distribution en rapidité n'est pas homogène à l'intérieur de la tranche, si bien que  $\Pi(\theta)$  diffère de  $\ell \rho(x_0, \theta)$ , comme le montre la comparaison entre la ligne marron pleine et la ligne pointillée en Fig. 6.8(a) ; (ii) le temps d'expansion est fini, de sorte que le profil observé  $\tilde{n}(x, \tau)$  ne correspond pas exactement à  $\Pi((x - x_0)/\tau)/\tau$ , comme le montre la comparaison entre les courbes marron et rouge.

Nous comparons ensuite le profil d'expansion simulé par la GHD avec les données expérimentales. Comme montré en Fig. 6.8(b), le profil prédit reproduit les principales caractéristiques du profil d'expansion observé expérimentalement. Des écarts atteignant 25 % sont cependant visibles dans la partie centrale du profil. Afin d'obtenir un meilleur accord entre données et calculs, nous avons ajusté le profil d'expansion expérimental avec le calcul GHD en utilisant la température de l'état initial comme paramètre d'ajustement. Le résultat, représenté par la ligne magenta dans la Fig. 6.8(b), donne une température  $T = 1550 \text{ nK}$ , plus de deux fois supérieure à celle obtenue en ajustant le profil au bord. Le profil au bord calculé pour cette température n'est pas compatible avec le profil expérimental, comme le montre la Fig. 6.8(b).

Une des raisons de l'échec de nos tentatives de reproduction du profil de densité après l'expansion de la tranche réside dans la

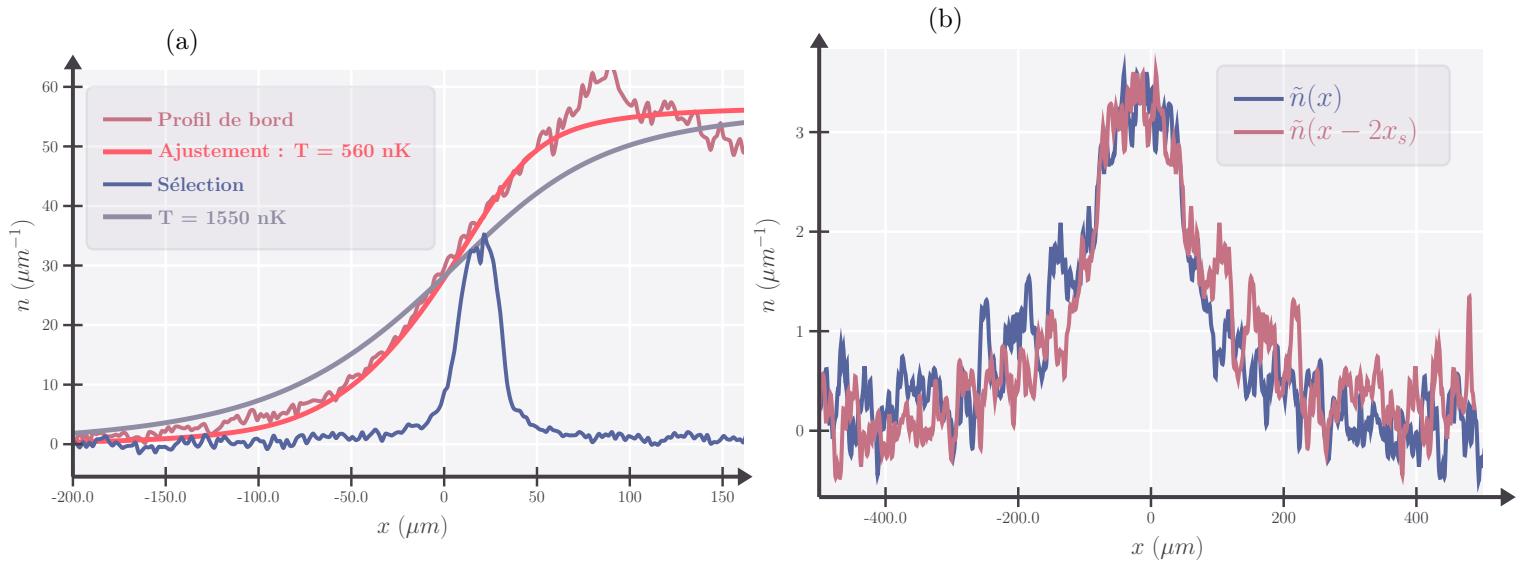


FIGURE 6.7 – (a) *Profil de bord et tranche sélectionnée.* Le profil de bord après 18 ms est montré en rouge. L’ajustement thermique donne une température  $T = 560 \text{ nK}$  (orange). Le profil de densité mesuré 1 ms après la sélection de la tranche est en bleu. (b) *Asymétrie du profil d’expansion de la tranche.* Le profil de densité après une expansion pendant  $\tau = 30 \text{ ms}$  est comparé à son image miroir. Le centre de symétrie  $x_s = -17 \mu\text{m}$  minimise la distance quadratique  $\delta^2 = \int dx (\tilde{n}(x) - \tilde{n}(2x_s - x))^2$ .

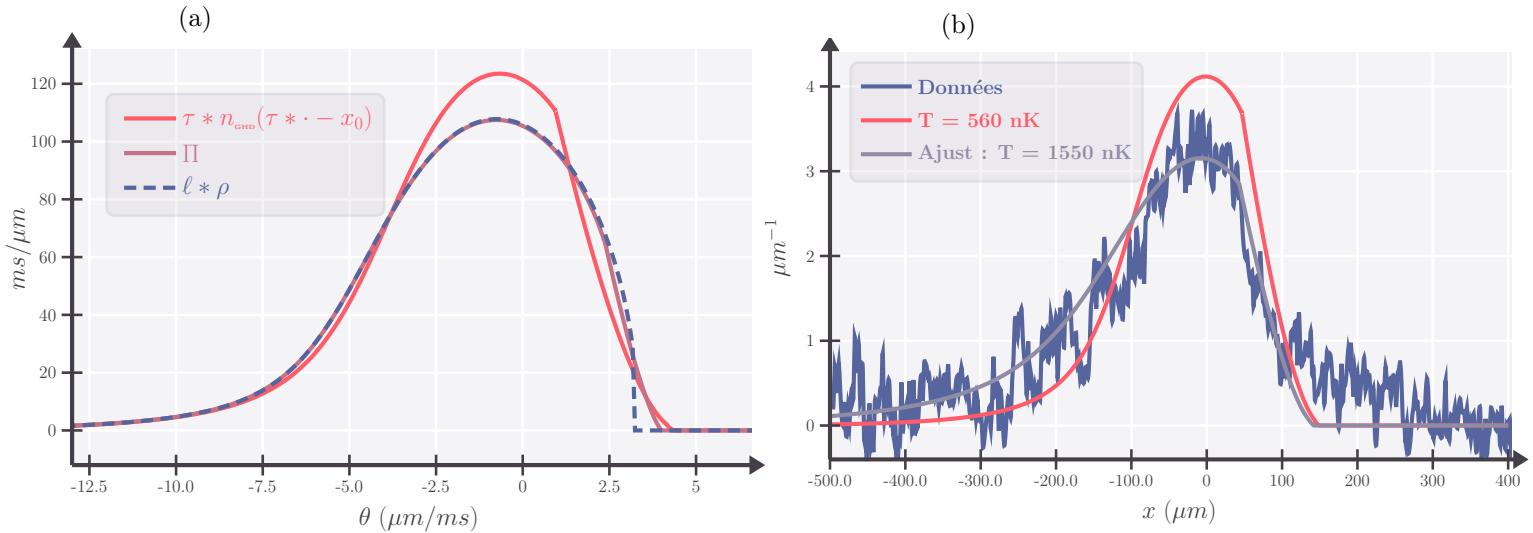


FIGURE 6.8 – (a) *Profil de densité après expansion de la tranche : effets de la largeur finie et du temps d’expansion fini.* Courbe orange : profil obtenu par simulation GHD après expansion pendant  $\tau = 30 \text{ ms}$ , avec  $T = 560 \text{ nK}$ . Courbe marron : distribution asymptotique  $\Pi((x - x_0)/\tau)/\tau$ . Courbe pointillée noire : approximation  $\ell\rho(x_0, (x - x_0)/\tau)/\tau$  dans le cas d’une tranche étroite. (b) *Comparaison aux données expérimentales.* En bleu : profil expérimental après expansion pendant  $\tau = 30 \text{ ms}$ . En orange : simulation GHD avec  $T = 560 \text{ nK}$ . En magenta : ajustement du profil expérimental donnant  $T = 1550 \text{ nK}$ .

présence de queues à droite du profil expérimental — voir le profil de densité dans la Fig. 6.8(b). Ces queues sont absentes des calculs GHD à l’échelle d’Euler car la fonction d’occupation dans la tranche s’annule strictement au-delà d’une certaine rapidité. L’origine de

ÉTUDE DU PROTOCOL DE BI-PARTITION : MESURE DE DISTRIBUTION DE RAPIDITÉS LOCALES  $\rho(x, \theta)$  POUR DES SYSTÈMES HORS 46  
ces queues reste incertaine. Elles pourraient être dues à des effets de bord associés à la procédure de sélection de tranche, les atomes  
en bordure étant chauffés par le faisceau de poussée. Il est également possible qu'un effet diffusif, non pris en compte dans la GHD à l'échelle d'Euler, intervienne au début de la déformation du bord, lorsque les gradients sont importants.

## 6.5 Détails sur les calculs

Cette section présente en détail les étapes nécessaires à la résolution numérique de l'équation de GHD dans le cadre des simulations effectuées. Dans un premier temps, nous explicitons le calcul du facteur d'occupation  $\nu(\theta)$  et de la densité de rapidité  $\rho(\theta)$  à l'équilibre thermique, obtenus à partir d'un couple  $(T, \mu)$  donné. Nous décrivons ensuite la procédure permettant d'ajuster le potentiel chimique afin de reproduire la densité atomique mesurée expérimentalement. Enfin, nous détaillons le calcul de la dynamique du contour délimitant la région occupée dans l'espace  $(x, \theta)$ , en exploitant la conservation lagrangienne du facteur d'occupation.

### 6.5.1 Facteur d'occupation et distribution de rapidité à l'équilibre thermique

On suppose ici que le système est à l'équilibre thermique, caractérisé par une température  $T$  et un potentiel chimique  $\mu$ . Dans ce cadre, la fonction  $w(\theta)$ , qui paramétrise l'opérateur de charge (cf. réf. ??), vérifie l'expression

$$w(\theta) = \beta(\varepsilon(\theta) - \mu), \quad (6.8)$$

avec  $\beta = (k_B T)^{-1}$  et  $\varepsilon(\theta) = \frac{m\theta^2}{2}$ . On peut réécrire cette relation en minimisant l'entropie de Yang-Yang (cf. ??) et en injectant la forme du facteur d'occupation

$$\nu_0 \doteq \rho/\rho_s = \frac{1}{1 + e^{\beta\epsilon}}, \quad (6.9)$$

et (6.8) dans (??), on obtient une équation intégrale de type point fixe :

$$\beta\epsilon = \beta\epsilon_0 - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln(1 + e^{-\beta\epsilon}),$$

avec  $\epsilon_0 = \varepsilon - \mu$ . Cette équation est bien définie et converge (cf. ??). Pour s'en convaincre, on peut calculer la norme du déterminant du jacobien de l'application. Si elle est inférieure à 1, on est assuré de la convergence.

L'équation étant non linéaire, pour garantir la convergence vers la bonne solution (éitant les cycles), on itère la suite suivante :

$$\beta\epsilon_{n+1} = \beta\epsilon_0 - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln(1 + e^{-\beta\epsilon_n}),$$

jusqu'à ce que la distance entre deux itérations successives soit suffisamment petite : ici  $\beta\|\epsilon_{n+1} - \epsilon_n\| < 10^{-12}$ .  
Ainsi, en fixant le couple  $(\mu, T)$ , on obtient  $\epsilon$ , puis  $\nu$  avec (6.9), puis enfin  $\rho_s$  via :

$$2\pi\rho_s = \frac{m}{\hbar} * 1_{[\nu_0]}^{\text{dr}},$$

où la fonction "habillée"  $f^{\text{dr}}$  est définie par :

$$f_{[\nu]}^{\text{dr}} = f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu * f^{\text{dr}}),$$

ce qui est une équation linéaire. Numériquement, on la résout sous la forme :

$$\left\{ \text{id} - \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu * \cdot) \right\} f_{[\nu]}^{\text{dr}} = f.$$

La densité physique est alors obtenue par  $\rho = \nu_0 * \rho_s$ .

Ainsi, à partir d'un couple  $(T, \mu)$ , on détermine entièrement les distributions  $\nu_0(\theta)$  et  $\rho(\theta)$  correspondant à l'équilibre thermique.

**Détermination de  $\mu$  à température fixée** Cependant, dans le cadre expérimental, la quantité accessible est la densité homogène  $n_0$ , par exemple  $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$  (voir Fig. 6.1). On veux donc passer du couple  $(T, n_0)$  au couple  $(T, \mu)$ . Pour cela on fixe la température  $T$ , on ajuste donc le potentiel chimique  $\mu$  pour satisfaire la contrainte :

$$n_0 = \int \rho(\theta) d\theta.$$

### 6.5.2 Dynamique du contour dans l'espace des phases $(x, \theta)$

Une fois le facteur d'occupation initial  $\nu_0(\theta)$  déterminé, on calcule l'évolution temporelle du contour délimitant la région occupée dans l'espace des phases  $(x, \theta)$ .

En effet, l'équation fondamentale de la GHD (cf. Eq. 6.6) implique que

$$\nu(x(s; t), \theta(s; t)) = \nu(x(s; 0), \theta(s; 0)),$$

ce qui signifie que  $\nu$  est constant au cours du temps si on suit le couple  $(x(s; t), \theta(s; t))$  — c'est la vision lagrangienne en hydrodynamique. La graduation fixe des axes donne la vision eulérienne. Cela implique également :

$$\partial_t \begin{pmatrix} x(s; t) \\ \theta(s; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta(s; t)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où  $\theta(s; t) = \theta(s; 0) \equiv \theta(s)$ .

On introduit alors le contour dynamique  $\Gamma_t \doteq \{(x(s; t), \theta(s)) \text{ délimitant, à l'instant } t, \text{ la région où le facteur d'occupation est non nul}\}$ . Par hypothèse initiale,  $\nu(x, \theta; 0) = \nu_0(\theta)$  à l'intérieur du contour initial  $\Gamma_0$  et nul à l'extérieur. Par conservation lagrangienne, cette propriété est préservée au cours du temps, et l'on a donc pour tout  $t$  :

$$\nu(x, \theta; t) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } (x, \theta) \text{ à l'intérieur de } \Gamma_t, \\ 0 & \text{si } (x, \theta) \text{ à l'extérieur de } \Gamma_t \end{cases} \quad (6.10)$$

La dynamique de  $\Gamma_t$  est ainsi entièrement déterminée par la vitesse efficace  $v_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta)$  associée au facteur d'occupation initial  $\nu_0$ . Cela permet de suivre l'évolution de la région occupée dans l'espace des phases  $(x, \theta)$  à partir des seules données initiales.

### 6.5.3 Simulation de la déformation du bord

Dans la partie "déformation du bord" (Fig. 6.4), initialement, l'intérieur du contour correspond à  $x > 0$ . Il est donc suffisant d'étudier l'évolution du bord initialement situé en  $(x_b(s, t=0) = 0, \theta_b(s))$ . La bijectivité du contour — c'est à dire de  $x_b(s; t) \mapsto \theta_b(s; t)$  avec  $(x_b(s; t), \theta_b(s; t))$  dans le bord, reste bijective au cours du temps — implique que la vitesse effective soit constante de  $\theta : v_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta) = v$ , d'où pour une particule quelconque de position  $(x(s; t), \theta(s))$

$$\frac{x(s; t)}{t} = v_{[\nu^*(v(s), \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s)) = v(s),$$

avec la mise à l'échelle  $x \rightarrow v = x/t$  :

$$\nu(x(s, t), \theta(s)) = \nu^*(v(s), \theta(s)),$$

$\nu^*$  est indépendante du temps. De plus (6.10) deviens

$$\nu^*(x_b(s; t)/t, \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } \theta < \theta_b(s) \\ 0 & \text{si } \theta > \theta_b(s) \end{cases}. \quad (6.11)$$

$$v_{[\nu^*]}^{\text{eff}}(\theta) = \frac{\text{id}_{[\nu^*]}^{\text{dr}}(\theta)}{1_{[\nu^*]}^{\text{dr}}(\theta)}.$$

Une fois cette vitesse effectif obtenue, on peut en déduire la position du bord après un temps  $t$  de déformation :

$$x(s; t) = v_{[\nu^*]}^{\text{eff}}(\theta(s)) \cdot t.$$

Connaissant le bord  $(x_b(s; t), \theta_b(s))$  au temps  $t$ , on en déduit le facteur d'occupation  $\nu$  avec (6.11) (Fig. 6.4(e)(g)), puis  $\rho_{s[\nu]} = \hbar/m 1_{[\nu]}^{\text{dr}}$  et  $\rho_{[\nu]} = \nu * \rho_{s[\nu]}$  et donc la densité linéique  $n_{[\nu]}(x; t) = \int \rho_{[\nu]}(x, \theta; t) d\theta$  (Fig. 6.4(e)(f)).

Sachant que  $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$  et que  $\mu$  dépend de  $T$  et de  $n_0$ , on ajuste la température des simulations GHD sur les données expérimentales de la déformation du bord (Fig. 6.7). Cet ajustement donne  $T = 560 \text{nK}$ .

#### 6.5.4 Simulation de l'expansion

Nous effectuons une sélection du système après la déformation du bord (Fig. 6.6(a)) et nous procédons à une expansion unidimensionnelle de cette tranche (Fig. 6.6(e)). Contrairement au cas de la déformation du bord, le contour n'est ici pas bijectif. La vitesse effective  $v_{[\nu(x(s; \tau), \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s))$  dépend donc du temps d'expansion  $\tau$ .

Pour contourner cela, nous découpons le contour en deux parties : le bord gauche  $(x_g(s; t), \theta_g(s))$  et le bord droit  $(x_d(s; t), \theta_d(s))$ , de sorte que ces deux bords soient bijectifs (Fig. 6.6(a) et (e)). Avec cette découpe, après une expansion unidimensionnelle d'une durée  $\tau$ , (6.10) devient :

$$\nu(x(s; \tau), \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } \theta \in [\theta_g(s), \theta_d(s)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ayant la connaissance de  $v_{[\nu(x(s; \tau), \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s))$ , on peut suivre l'évolution du contour, et donc de la densité spatiale  $n(x; t)$  (Fig. 6.6(f)).

Après avoir réalisé une simulation GHD avec  $T = 560 \text{nK}$ , valeur obtenue via l'ajustement sur la déformation du bord, on compare cette simulation aux données expérimentales après  $\tau = 30 \text{ ms}$  d'expansion. On compare alors la courbe orange aux données en bleu dans la Fig. 6.8(b).

La simulation ne reproduit pas bien les données, comme attendu : certains phénomènes physiques ne sont pas pris en compte dans les simulations GHD. Cela se manifeste notamment autour de  $\pm 350 \mu\text{m}$ .

Nous avons donc effectué un ajustement direct de  $T$  sur les données après expansion (courbe grise de la Fig. 6.8(b)).

## Chapitre 7

# Mise en place d'un confinement longitudinal dipolaire

### Contents

---

7.1 calculs .....	49
7.2 laser , MOPA, etc .. Données .....	49

---

[7.1 calculs](#)

[7.2 laser , MOPA, etc .. Données](#)



# Annexe A

## Calculs Hamiltonien à N fixés

### A.1 deux particules

Agir avec cet opérateur sur la fonction propre (1.22) donne

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \int dx \iint dz_1 dz_2 \varphi_2(z_1, z_2) \left[ \frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2) |0\rangle \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}|2\rangle &= \\ &+ \frac{c}{2\sqrt{2}} \int dx \iint dz_1 dz_2 \varphi_2(z_1, z_2) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2) |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Les règles de commutations (1.3) impliquent que

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2)] &= \hat{\Psi}^\dagger(z_2) \hat{\delta}(x - z_1) + \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\delta}(x - z_2) \\ [\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(z)] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

En utilisant ces dernières règles de commutations et la définition d'état de Fock (1.10), la première partie de l'application de l'hamiltonien sur l'état  $|2\rangle$ , (A.1) se simplifie en

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \iint dz_1 dz_2 \varphi_2(z_1, z_2) \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \left[ \frac{1}{2} \hat{\partial}_{z_2}^2 \hat{\Psi}^\dagger(z_2) \right] + \hat{\Psi}^\dagger(z_2) \left[ \frac{1}{2} \hat{\partial}_{z_1}^2 \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \right] \right\} |0\rangle \quad (\text{A.4})$$

Et en faisant deux intégrations par parties selon la variable  $z_{1,2}$ , cette première partie devient

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \iint dz_1 dz_2 \frac{1}{2} \left\{ \hat{\partial}_{z_1}^2 + \hat{\partial}_{z_2}^2 \right\} \varphi_2(z_1, z_2) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2) |0\rangle \quad (\text{A.5})$$

Pour la seconde partie, en remarquant que Les règles de commutations (1.3) impliquent que

$$[\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z)] = 2\hat{\Psi}(x) \hat{\delta}(x - z) \quad (\text{A.6})$$

et en remplaçant  $\hat{\Psi}(x)$  par  $\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x)$  dans (A.3) il vient que

$$[\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2)] = 2 \left\{ \hat{\delta}(x - z_1) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_2) + \hat{\delta}(x - z_2) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}(x) \right\} \quad (\text{A.7})$$

et en injectant (A.3), (A.7) devient

$$[\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1)\hat{\Psi}^\dagger(z_2)] = 2 \left\{ \hat{\delta}(x-z_1)\hat{\delta}(x-z_2) + \hat{\delta}(x-z_1)\hat{\Psi}^\dagger(z_2)\hat{\Psi}(x) + \hat{\delta}(x-z_2)\hat{\Psi}^\dagger(z_1)\hat{\Psi}(x) \right\}. \quad (\text{A.8})$$

En utilisant la règle de commutation (A.8) et la définition de l'état de Fock (1.10) , la seconde partie de (A.2) devient

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \iint dz_1 dz_2 c \hat{\delta}(z_1 - z_2) \varphi_2(z_1, z_2) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2) |0\rangle \quad (\text{A.9})$$

en utilisant (A.5) et (A.9)

$$\hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint dz_1 dz_2 [\hat{\mathcal{H}}_2 \varphi_2(z_1, z_2)] \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2) |0\rangle \quad (\text{A.10})$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = -\frac{1}{2} \hat{\partial}_{z_1}^2 - \frac{1}{2} \hat{\partial}_{z_2}^2 + c \hat{\delta}(z_1 - z_2). \quad (\text{A.11})$$

## A.2 N particules

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) \left[ \frac{1}{2} \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}|\psi(\theta_1, \dots, \theta_N)\rangle &= \\ &+ \frac{c}{2\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Les règles de commutations (1.3) impliquent que

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] &= \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\delta}(x-z_i) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \\ [\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(z)] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En utilisant ces dernier règles de commutations et la définition d'état de Fock (1.10) , la premiers partie de l'application de l'hamiltonien sur l'état  $|\psi\rangle$  , (C.3) de simplifie en

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) \sum_{i=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots [\hat{\partial}_{z_i}^2 \hat{\Psi}^\dagger(z_i)] \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.15})$$

Et en faisant deux intégration par partie selon la variable  $z_i$  , cette premier partie devient

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i}^2 \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.16})$$

Pour la seconde partie , en remarquant que Les règles de commutations (1.3) impliquent que

$$[\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z)] = 2\hat{\Psi}(x)\hat{\delta}(x-z) \quad (\text{A.17})$$

et en remplaçant  $\hat{\Psi}(x)$  par  $\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x)$  dans (C.4) il vient que

$$[\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1)\cdots\hat{\Psi}^\dagger(z_N)] = 2\sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1)\cdots\hat{\Psi}(x)\hat{\delta}(x-z_i)\cdots\hat{\Psi}^\dagger(z_N) \quad (\text{A.18})$$

et en injectant (C.4), (C.8) devient

$$[\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1)\cdots\hat{\Psi}^\dagger(z_N)] = \begin{cases} 2\sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1)\cdots\hat{\delta}(x-z_i)\cdots\hat{\Psi}^\dagger(z_N)\hat{\Psi}(x) \\ + 2\sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1)\cdots\hat{\delta}(x-z_i)\hat{\Psi}^\dagger(z_{i+1})\cdots\hat{\delta}(x-z_j)\cdots\hat{\Psi}^\dagger(z_N) \end{cases}. \quad (\text{A.19})$$

En utilisant la règle de comutation (C.9) et la définition de l'état de Fock (??), la seconde partie de (C.3) devient

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \ 2c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.20})$$

en utilisant (C.6) et (C.10), (C.6) devient

$$\hat{\mathbf{H}}|\psi(\theta_1, \dots, \theta_N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \left[ \hat{\mathcal{H}}_N \varphi_{\{\theta_a\}}(z_1, \dots, z_N) \right] \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.21})$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}}_N = -\sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i}^2 + c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \quad (\text{A.22})$$



## Annexe B

# Exemple : action de $\hat{P}$ sur l'état $|\psi_N\rangle$

### Utilisation de la définition de $\hat{P}$ intégrée par parties

Cela peut être expliqué en utilisant l'opérateur du moment  $\hat{P}$  (1.61) comme exemple. Tout d'abord, nous intégrons (1.61) par parties pour représenter  $\hat{P}$  sous la forme :

$$\hat{P} = i \int \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) dx$$

### Application à l'état à N particules

Agir avec cet opérateur sur la fonction propre (??) donne

$$\begin{aligned} \hat{P}|\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle &= \frac{i}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \\ &\quad \times \sum_{k=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_k)] \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \end{aligned}$$

où l'équation (??) a été utilisée. La formule (??) donne une fonction delta pour le commutateur, qui peut ensuite être intégrée pour donner

$$\begin{aligned} \hat{P}|\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle &= \frac{i}{\sqrt{N!}} \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \\ &\quad \times \sum_{k=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \left[ \hat{\partial}_{z_k} \hat{\Psi}^\dagger(z_k) \right] \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle. \end{aligned}$$

Nous intégrons maintenant par parties par rapport à  $z_k$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \hat{P}|\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \left\{ -i \sum_{k=1}^N \hat{\partial}_{z_k} \chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \right\} \\ &\quad \times \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons prouvé que l'action de l'équation (1.61) sur l'équation (??) est équivalente à l'action de  $\hat{\mathcal{P}}_N$  sur  $\chi_N$ . La construction de l'Hamiltonien mécanique quantique est assez similaire.



## Annexe C

# Action de $\hat{H}$ sur l'état $|\psi_N\rangle$

L'hamiltonien (??) s'écrit aussi en faisant une intégration par partie :

$$\hat{H} = \int dx \left[ -\left[ \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) + c \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \right]. \quad (\text{C.1})$$

Agir avec cet opérateur sur la fonction propre (??) donne

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N | \theta_1, \dots, \theta_N) \left[ \hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \hat{H} |\psi(\theta_1, \dots, \theta_N)\rangle &= \\ &+ \frac{c}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N | \theta_1, \dots, \theta_N) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Les règles de commutations (??) impliquent que

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] &= \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\delta}(x - z_i) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \\ \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(z) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

En utilisant ces dernières règles de commutations et la définition d'état de Fock (??), la première partie de l'application de l'hamiltonien sur l'état  $|\psi\rangle$ , (C.3) se simplifie en

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N | \theta_1, \dots, \theta_N) \sum_{i=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \left[ \hat{\partial}_{z_i}^2 \hat{\Psi}^\dagger(z_i) \right] \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{C.5})$$

Et en faisant deux intégrations par partie selon la variable  $z_i$ , cette première partie devient

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i}^2 \chi_N(z_1, \dots, z_N | \theta_1, \dots, \theta_N) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{C.6})$$

Pour la seconde partie, en remarquant que les règles de commutations (??) impliquent que

$$[\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z)] = 2 \hat{\Psi}(x) \hat{\delta}(x - z) \quad (\text{C.7})$$

et en remplaçant  $\hat{\Psi}(x)$  par  $\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x)$  dans (C.4) il vient que

$$[\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] = 2 \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}(x) \hat{\delta}(x - z_i) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \quad (\text{C.8})$$

et en injectant (C.4), (C.8) devient

$$[\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] = \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\delta}(x - z_i) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \hat{\Psi}(x) \\ + \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\delta}(x - z_i) \hat{\Psi}^\dagger(z_{i+1}) \cdots \hat{\delta}(x - z_j) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \end{cases}. \quad (\text{C.9})$$

En utilisant la règle de comutation (C.9) et la définition de l'état de Fock (??), la seconde partie de (C.3) devient

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \ 2c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \chi_N(z_1, \dots, z_N | \theta_1, \dots, \theta_N) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{C.10})$$

en utilisant (C.6) et (C.10), (C.6) devient

$$\hat{\mathbf{H}} |\psi(\theta_1, \dots, \theta_N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \left[ \hat{\mathcal{H}}_N \chi_N(z_1, \dots, z_N | \theta_1, \dots, \theta_N) \right] \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{C.11})$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}}_N = - \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i}^2 + 2c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \quad (\text{C.12})$$

## Annexe D

# Vérification explicite de la condition aux limites

Le problème de la théorie quantique des champs est donc réduit à un problème de mécanique quantique. L'Hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}_N$  décrivant  $N$  particules bosoniques est répulsif pour  $c > 0$ . En raison de la symétrie de  $\chi$  par rapport à toutes les  $z_i$ , il est suffisant de considérer le domaine suivant  $T$  dans l'espace des coordonnées :

$$T : z_1 < z_2 < \cdots < z_N. \quad (\text{D.1})$$

Dans ce domaine, la fonction  $\chi_N$  est une fonction propre de l'Hamiltonien libre.

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{H}}_N^0 = -\sum_{j=1}^N \hat{\partial}_{z_j}^2 \\ \hat{\mathcal{H}}_N^0 \chi_N = E_N \chi_N \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Les conditions aux limites suivantes doivent être satisfaites :

$$(\hat{\partial}_{z_{j+1}} - \hat{\partial}_{z_j} - c)\chi_N = 0, \quad z_{j+1} = z_j + 0. \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{P_{x \rightarrow X}} \begin{pmatrix} z_j \\ z_{j+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_j \\ z_{j+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{X \rightarrow x} = P_{x \rightarrow X}^{-1}} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}, \\ \hat{\partial} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{\hat{\theta}_x \rightarrow \hat{\theta}_X} = t(P_{x \rightarrow X}^{-1})} \hat{\partial} \begin{pmatrix} z_j \\ z_{j+1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\partial} \begin{pmatrix} z_j \\ z_{j+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}}_{P_{\hat{\theta}_X \rightarrow \hat{\theta}_x} = P_{\hat{\theta}_x \rightarrow \hat{\theta}_X}^{-1}} \hat{\partial} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

L'équation (D.2) et la condition aux limites (D.3) sont équivalentes à l'équation (??). En effet, le potentiel dans (??) est égal à zéro dans le domaine  $T$ . En intégrant l'équation (1.12) sur la variable  $(z_{j+1} - z_j)$  dans la petite région  $|z_{j+1} - z_j| < \epsilon$ , en considérant tous les autres  $z_k$  ( $k \neq j, j+1$ ) comme fixes dans  $T$ , on obtient exactement la condition (D.3).

Une fonction satisfaisant (D.2) et (D.3) peut être construite comme suit. Considérons la fonction propre de l'Hamiltonien (D.2) dans le domaine  $T$  donnée comme le déterminant de la matrice  $N \times N \exp\{i\lambda_j z_k\}$

$$\det[\exp\{i\lambda_j z_k\}] \quad (\text{D.4})$$

avec des nombres arbitraires  $\lambda_j$ . Cette fonction est égale à zéro sur la frontière du domaine  $T$  en raison de son antisymétrie par rapport à  $z_k$ . Il est alors facile de voir que la fonction  $\chi_N$  donnée par

$$\chi_N \propto \left[ \prod_{1 \leq k < j \leq N} (\partial_{z_j} - \partial_{z_k} + c) \right] \det[\exp\{i\lambda_j z_k\}] \quad (\text{D.5})$$

satisfait les équations (D.2) et (D.3). Pour vérifier, par exemple, l'égalité

$$(\partial_{z_2} - \partial_{z_1} + c) \chi_N = 0, \quad z_2 = z_1 + 0. \quad (\text{D.6})$$

réécrivons  $\chi_N$  comme

$$\chi_N = (\partial_{z_2} - \partial_{z_1} + c) \tilde{\chi}_N \quad (\text{D.7})$$

où

$$\tilde{\chi}_N \propto \prod_{j=3}^N (\partial_{z_j} - \partial_{z_1} + c) (\partial_{z_j} - \partial_{z_2} + c) \times \left[ \prod_{3 \leq k < j \leq N} (\partial_{z_j} - \partial_{z_k} + c) \right] \det[\exp\{i\lambda_j z_k\}]. \quad (\text{D.8})$$

Cette fonction est antisymétrique par rapport à  $z_1 \leftrightarrow z_2$ ,

$$\tilde{\chi}_N(z_1, z_2) = -\tilde{\chi}_N(z_2, z_1) \quad (\text{D.9})$$

et elle est égale à zéro lorsque  $z_1 = z_2$ . En revenant à l'équation (D.6),

$$[(\partial_{z_2} - \partial_{z_1})^2 - c^2] \tilde{\chi}_N = 0, \quad z_2 = z_1 \quad (\text{D.10})$$

nous voyons que le membre de gauche change de signe lorsque  $z_1 \leftrightarrow z_2$ , et donc l'égalité (D.10) est correcte. Nous pouvons de la même manière vérifier les autres conditions aux limites. Ainsi,  $\chi_n$  dans (D.5) est la fonction propre souhaitée de l'Hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}_N$  (??). Le déterminant dans (D.5) peut être écrit comme une somme sur toutes les permutations  $\mathcal{P}$  des nombres  $1, 2, \dots, N$  :

$$\det[\exp\{i\lambda_j z_k\}] = \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{\mathcal{P}(n)} \right\} \quad (\text{D.11})$$

où  $[\mathcal{P}]$  désigne la parité de la permutation. On obtient, dans le domaine  $T$  (D.1) :

$$\begin{aligned} \chi_N &= \left\{ N! \prod_{k < j} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2] \right\}^{-1} \\ &\times \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{\mathcal{P}(n)} \right\} \prod_{k < j} [\lambda_{\mathcal{P}(j)} - \lambda_{\mathcal{P}(k)} - ic] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

avec la constante spécifiée. Continuons maintenant  $\chi_N$  par symétrie à l'ensemble de  $\mathbb{R}^N$  :

$$\begin{aligned}\chi_N &= \left\{ N! \prod_{k < j} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2] \right\}^{-1} \\ &\times \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{\mathcal{P}(n)} \right\} \prod_{k < j} [\lambda_{\mathcal{P}(j)} - \lambda_{\mathcal{P}(k)} - ic\epsilon(z_j - z_k)]\end{aligned}\quad (\text{D.13})$$

où  $\epsilon(x)$  est la fonction signe. La méthode décrite ci-dessus a apparemment été suggérée par M. Gaudin [9]. Une autre manière utile d'écrire  $\chi_N$  est la suivante :

$$\begin{aligned}\chi_N &= \frac{(-i) \frac{N(N-1)}{2}}{\sqrt{N!}} \left\{ \prod_{1 \leq k < j \leq N} \epsilon(z_j - z_k) \right\} \\ &\times \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^N z_k \lambda_{\mathcal{P}(k)} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{1 \leq k < j \leq N} \epsilon(z_j - z_k) \theta(\lambda_{\mathcal{P}(j)} - \lambda_{\mathcal{P}(k)}) \right\}\end{aligned}\quad (\text{D.14})$$

où

$$\theta(x) = i \ln \left( \frac{ic+x}{ic-x} \right).$$



## Annexe E

# Lien avec les équations de Bethe

La formule (D.14) détermine la fonction d'onde de Bethe ; cette fonction est réductible à deux particules. Il convient de mentionner que les fonctions d'onde de tous les modèles résolubles par l'Ansatz de Bethe ont une forme similaire à (D.14). Discutons maintenant des propriétés de la fonction d'onde  $\chi_N$ . La fonction  $\chi_N$  est une fonction symétrique des variables  $z_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) et une fonction continue de chacune d'elles. Ces propriétés deviennent évidentes si l'on réécrit la représentation (D.14) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \chi_N &= \frac{\prod_{k < j} (\lambda_j - \lambda_k)}{\sqrt{N! \prod_{k < j} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2]}} \sum_{\mathcal{P}} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{\mathcal{P}(n)} \right\} \\ &\quad \times \prod_{k < j} \left[ 1 - \frac{ic\epsilon(z_j - z_k)}{(\lambda_{\mathcal{P}(j)} - \lambda_{\mathcal{P}(k)})} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

On peut également voir à partir de cette formule que  $\chi_N$  est une fonction antisymétrique des  $\lambda_j$  :

$$\chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_N) = -\chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N). \quad (\text{E.2})$$

Ainsi,  $\chi_N = 0$  si  $\lambda_j = \lambda_k$ ,  $j \neq k$ . C'est la base du **principe d'exclusion de Pauli** pour les bosons en interaction en une dimension, qui joue un rôle fondamental dans la construction de l'état fondamental, appelé **mer de Dirac**. La démonstration complète du principe de Pauli est donnée dans la section VII.4.

Il est connu que le théorème reliant le spin et les statistiques ne s'applique pas dans des dimensions  $1 + 1$  de l'espace-temps. Par conséquent, certains modèles de bosons sont équivalents à des modèles de fermions. Par exemple, le **modèle de sine-Gordon** est équivalent au **modèle de Thirring massif**, tandis que le gaz de bosons unidimensionnel pour  $c = \infty$  est équivalent au modèle de fermions libres.

Nous avons déjà construit les fonctions propres communes  $\chi_N$  (équations (D.14), (??)) des opérateurs  $\hat{H}$ ,  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$ , les valeurs propres correspondantes étant données par

$$E_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2; \quad P_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j^1; \quad Q_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j^0 = N \quad (\text{E.3})$$

Considérons maintenant les fonctions propres dans tout l'espace des coordonnées  $\mathbb{R}^N$  :  $-\infty < z_j < \infty$  (avec  $j = 1, \dots, N$ ). La normalisation dans ce cas a été calculée dans [?] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^N z \chi_N^*(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \chi_N(z_1, \dots, z_N | \mu_1, \dots, \mu_N) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^N \delta(\lambda_j - \mu_j). \quad (\text{E.4})$$

Les moments  $\{\lambda\}$  et  $\{\mu\}$  sont supposés être ordonnés :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N, \quad \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_N \quad (\text{E.5})$$

Dans le même livre [?], la complétude du système  $\chi_N$  est également prouvée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^N \lambda \chi_N^*(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \chi_N(y_1, \dots, y_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^N \delta(z_j - y_j). \quad (\text{E.6})$$

$$z_1 < z_2 < \cdots < z_N, \quad y_1 < y_2 < \cdots < y_N. \quad (\text{E.7})$$

# Index

Ensemble Thermodynamique Général (GGE), 37

Schrödinger non linéaire (NS), 5



# Index des noms propres

Ensemble Thermodynamique Général (GGE), Ensemble de

Gibbs Général (GGE), 37