

Universités de Grenoble Alpes & de Savoie Mont Blanc
Master 2ème année de physique
Parcours physique subatomique et cosmologie **PSC**
Septembre 2020 à Février 2021

Introduction à la théorie quantique des champs

Pierre Salati^{1,2}

¹ Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique LAPTh,
9 Chemin de Bellevue, B.P. 110, 74941 Annecy-le-Vieux Cedex

² Université Savoie Mont Blanc, B.P. 1104, 73011 Chambéry Cedex
salati@lapth.cnrs.fr & pierre.salati@univ-smb.fr
téléphone 04.50.09.16.69
site web <http://lapth.cnrs.fr/pg-nomin/salati/>



Plan du cours

- Lundi 7 Septembre 2020 – Nous commencerons par des révisions sur les équations d'Euler-Lagrange et le formalisme hamiltonien. L'étude de l'oscillateur harmonique sera l'occasion d'introduire les opérateurs d'annihilation et de création ainsi que les schémas de Schrödinger et Heisenberg. Principe de quantification canonique.
- Lundi 14 Septembre 2020 – Le chapitre **I** nous permettra de nous préparer à la quantification canonique du champ scalaire grâce à un rappel sur les phonons et à une étude classique puis quantique de la ligne continue parcourue par des ondes sonores.
- Lundi 21 Septembre 2020 – Suite et fin du chapitre **I**.

- Lundi 28 Septembre 2020 – Début du chapitre **II** avec l'étude du champ scalaire de Klein–Gordon ou champ neutre de spin 0. Nous nous intéresserons tout d'abord à la dérivation classique des équations que ce champ vérifie et nous construirons son tenseur impulsion–énergie grâce au théorème de Noether.
- Lundi 5 Octobre 2020 – Suite du chapitre **II** avec l'étude de la quantification canonique du champ scalaire neutre et la construction des opérateurs Hamiltonien et impulsion. Puis nous passerons au champ scalaire chargé susceptible de décrire les pions π^\pm .
- Lundi 12 Octobre 2020 – Suite du chapitre **II**. Nous insisterons sur le propagateur de Feynman associé au champ scalaire chargé ainsi que sur le T–produit.
- Lundi 19 Octobre 2020 – Suite du chapitre **II** avec la quantification du champ électromagnétique dont nous aurons au préalable rappelé les propriétés classiques. Equations de Maxwell et invariance de jauge. Formalisme Lagrangien et tenseur impulsion–énergie.
- Lundi 2 Novembre 2020 – Nous étudierons la quantification du champ électromagnétique via la méthode de Gupta–Bleuler.
- Lundi 9 Novembre 2020 – Suite du chapitre **II** avec le champ fermionique de spin demi–entier. Nous commencerons par des révisions sur l'équation de Dirac qui a été étudiée en cours de mécanique quantique relativiste en M1. Puis analyse Lagrangienne et tenseur impulsion–énergie.
- Lundi 16 Novembre 2020 – Suite de l'étude du champ fermionique. Seconde quantification et dérivation des relations d'anticommutation qui traduisent le fait qu'une particule de spin demi–entier est un fermion. Nous terminerons avec le propagateur de Feynman de l'électron qui a été dérivé en cours de mécanique quantique relativiste en M1.
- Lundi 23 Novembre 2020 – Jusqu'à présent, les champs quantiques étudiés étaient libres. Nous les mettons désormais en interaction dans le chapitre **III** avec tout d'abord des rappels sur la théorie des perturbations et la matrice S. Schémas de Schrödinger et de Heisenberg et Hamiltonien libre H_0 . Cas général et opérateur d'évolution U . Schéma d'interaction et matrice S .
- Lundi 30 Novembre 2020 – Suite du chapitre **III** consacrée à l'étude du théorème de Wick. Démonstration dans le cas purement bosonique, puis dans le cas purement fermionique et pour finir dans le cas général.

- Lundi 7 Décembre 2020 – Fin du chapitre **III**. Nous établirons les règles de Feynman grâce au calcul de la section efficace d'un processus simple. Ecriture de l'élément de matrice S . Réduction de S_{fi} et règles de Feynman de l'électrodynamique quantique. Section efficace différentielle.

- Lundi 14 Décembre 2020 – Début du chapitre **IV** avec tout d'abord la notion de dérivée covariante en électromagnétisme dont nous nous inspirerons pour introduire les théories de jauge non-abéliennes. Rotation de jauge sur un multiplet de champs ψ . Dérivée covariante D_μ et potentiel vecteur A_μ .

- Lundi 11 Janvier 2021 – Suite des théories de jauge non-abéliennes, également dénommées théories de **Yang–Mills**. Nous consacrerons la séance au champ de jauge $F_{\mu\nu}$ et à ses propriétés.

- Lundi 18 Janvier 2021 – Suite du chapitre **IV** consacrée à la notion de brisure spontanée de symétrie. Cas pédagogique du chapeau mexicain puis généralisation aux groupes $SO(n)$ et $SU(2)$.

- Lundi 25 Janvier 2021 – La démonstration du théorème de Goldstone sera donnée dans le cas général. Il s'agit d'une partie un peu ésotérique. Puis nous analyserons le miracle de Higgs. Illustration de ce mécanisme dans un cas simple et généralisation au groupe $SU(2)$.

- Lundi 01 Février 2021 – Nous serons fin prêts pour comprendre le modèle de Weinberg–Salam permettant d'unifier les interactions faibles et électromagnétiques. Après avoir construit le Lagrangien, nous analyserons la brisure spontanée du groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ et dériverons les masses des bosons vecteurs W^\pm et Z^0 en fonction de la valeur dans le vide du champ de Higgs. Calcul des couplages entre fermions et bosons de jauge. Etude du secteur de Higgs et des couplages de Yukawa.

- A priori, nous en aurons terminé. Suivant l'avancement du cours, nous serons peut-être amenés à rajouter une ou deux séances. Par exemple le lundi 4 Janvier 2021 qui est pour l'instant libre ou/et un autre créneau à définir.

Chapitre de révision

Mécanique Lagrangienne et Oscillateur Harmonique Quantique

1) Introduction à la mécanique Lagrangienne.

1.1) L'oscillateur harmonique en mécanique classique.

Nous considérerons le cas d'un point matériel astreint à se déplacer le long d'un axe Ox et soumis à la force de rappel $F = -kx$. Ce point de masse m effectue des oscillations harmoniques suivant la loi

$$x = a \cos \{\omega t + \varphi\} , \quad (\text{Ra.1})$$

où la pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$ s'exprime en fonction de la masse m et de la raideur k du ressort. L'énergie mécanique totale se conserve

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k a^2 . \quad (\text{Ra.2})$$

1.2) Les équations d'Euler–Lagrange et le principe variationnel.

L'équation dynamique de l'oscillateur harmonique précédent peut se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} , \quad (\text{Ra.3})$$

où le **Lagrangien** \mathcal{L} est défini comme

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 . \quad (\text{Ra.4})$$

Plus généralement, tout système dynamique est susceptible d'être décrit par la donnée de r variables q_i indépendantes spécifiant complètement son état et prenant en compte les liaisons mécaniques. Un point matériel se mouvant sur la surface d'une sphère de rayon R est ainsi localisé par sa colatitude θ et sa longitude φ et non par la donnée des coordonnées cartésiennes x, y et z qui vérifient par ailleurs l'égalité

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 , \quad (\text{Ra.5})$$

alors que

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \varphi , \\ y &= R \sin \theta \sin \varphi , \\ z &= R \cos \theta . \end{aligned} \quad (\text{Ra.6})$$

Les équations d'**Euler–Lagrange** s'écrivent alors

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} , \quad (\text{Ra.7})$$

pour chacune des variables indépendantes q_i . Il est possible de dériver les relations (Ra.7) à partir d'un principe variationnel en imposant que l'action

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \{q_i, \dot{q}_i, t\} dt , \quad (\text{Ra.8})$$

soit extrémale pour toute variation du chemin joignant le point initial $A \{q_i(t_1)\}$ au point final $B \{q_i(t_2)\}$ dans l'espace des $\{q_i\}$. Nous montrerons que la variation de l'action \mathcal{S} s'écrit au premier ordre de la perturbation $\delta q_i(t)$ comme

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^r \delta q_i(t) dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right\} \right\} . \quad (\text{Ra.9})$$

Les équations d'Euler–Lagrange se mettent alors sous la forme

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta q_i} \equiv 0 . \quad (\text{Ra.10})$$

Problème n° Ra-1 – Niveau [1] : Deux points matériels A_1 et A_2 sont astreints à se déplacer sur l'axe horizontal Ox . À l'équilibre, ils sont respectivement en O_1 et O_2 . Lorsque le système est excité, x_i désigne l'abscisse de A_i par rapport à la position d'équilibre O_i . Le point A_1 de masse m_1 est relié à la paroi de gauche par un ressort de raideur k_1 alors que A_2 – de masse m_2 – est relié à la paroi de droite par un ressort de raideur k_2 . Les deux points sont également fixés l'un à l'autre par un ressort de raideur k_0 .

Ecrire le Lagrangien de ce système en prenant x_1 et x_2 comme variables indépendantes et dériver les équations du mouvement

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_0 \{x_2 - x_1\} , \quad (\text{Ra.11})$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_0 \{x_2 - x_1\} . \quad (\text{Ra.12})$$

1.3) Les équations de Hamilton et le formalisme Hamiltonien.

Le moment conjugué p_i de la variable canonique q_i est défini par la relation

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \{q_j, \dot{q}_j, t\} \quad . \quad (\text{Ra.13})$$

Nous supposons qu'il est possible de résoudre les r équations précédentes et d'exprimer les \dot{q}_i en fonction des quantités q_i et p_i ainsi que du temps t en sorte que le Lagrangien \mathcal{L} est maintenant une nouvelle fonction de ces variables. Le **Hamiltonien** s'obtient grâce à la transformation de Legendre

$$\mathcal{H} \{q_i, p_i, t\} = \sum_{i=1}^r p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \{q_i, \dot{q}_i, t\} \quad . \quad (\text{Ra.14})$$

Problème n° Ra-2 – Niveau [1] : Exprimer la différentielle $d\mathcal{H}$ du Hamiltonien en fonction des différentielles dq_i , dp_i et dt et montrer que

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad , \quad (\text{Ra.15})$$

alors que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad . \quad (\text{Ra.16})$$

Le théorème de Liouville : Les relations (Ra.15) traduisent l'évolution déterministe d'un système placé initialement au point $A \{q_i(t_1), p_i(t_1)\}$ de l'espace des phases. Ces relations donnent la 2r-vitesse en tout point de la trajectoire. Nous montrerons qu'elles traduisent de surcroît l'incompressibilité du fluide constitué de la constellation des points représentatifs du système au cours de son mouvement au sein de l'espace des phases. La divergence de sa 2r-vitesse s'annule en effet

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0 \quad . \quad (\text{Ra.17})$$

Il est possible de dériver les relations (Ra.15) à partir d'un principe variationnel exigeant que la trajectoire physique partant du point $A \{q_i(t_1), p_i(t_1)\}$ de l'espace des phases à l'instant t_1 et arrivant au point $B \{q_i(t_2), p_i(t_2)\}$ à l'instant t_2 rende l'action

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \{ \mathcal{L} \equiv \sum_{i=1}^r p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \} dt \quad (\text{Ra.18})$$

extrême pour toute perturbation $\{\delta q_i(t), \delta p_i(t)\}$ du chemin telle que

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 . \quad (\text{Ra.19})$$

Problème n° Ra-3 – Niveau [2] : Montrer alors que la variation de l'action (Ra.18) s'écrit

$$\delta \mathcal{S} = \sum_{i=1}^r \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q_i(t) \left\{ -\dot{p}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right\} + \int_{t_1}^{t_2} dt \delta p_i(t) \left\{ \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right\} . \quad (\text{Ra.20})$$

Les crochets de Poisson : Nous terminerons cette partie en calculant l'évolution dans le temps d'une quantité $\mathcal{A}\{q_i, p_i, t\}$ et montrerons que sa dérivée temporelle est donnée par

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \{\mathcal{H}, \mathcal{A}\} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} . \quad (\text{Ra.21})$$

Les crochets de Poisson $\{\mathcal{H}, \mathcal{A}\}$ précédents traduisent la dépendance implicite de \mathcal{A} par rapport au temps via les coordonnées q_i et p_i de l'espace des phases et sont définis par

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{A}\} \equiv \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right\} . \quad (\text{Ra.22})$$

Ils constituent un pont naturel entre mécanique Lagrangienne classique et physique quantique. Nous montrerons en effet que l'évolution temporelle d'un opérateur quantique A est régie par la relation

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A] + \frac{\partial A}{\partial t} , \quad (\text{Ra.23})$$

très similaire à l'équation classique (Ra.21). Le crochet de Poisson $\{\mathcal{H}, \mathcal{A}\}$ a cédé la place au commutateur quantique $[H, A]$ avec comme règle de correspondance

$$[H, A] = -i\hbar \{\mathcal{H}, \mathcal{A}\} . \quad (\text{Ra.24})$$

Cette règle permet de déduire immédiatement le commutateur entre l'opérateur position Q_i et l'opérateur impulsion P_j

$$[Q_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij} . \quad (\text{Ra.25})$$

2) Lagrangien d'une particule relativiste.

2.1) Le cas de la particule libre.

Nous aimerions maintenant dériver les équations du mouvement d'une particule libre de masse m dans un cadre relativiste. Le bon élément de longueur en relativité est le temps propre

$$ds^2 = d\tau^2 = dt^2 - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (\text{Ra.26})$$

où la métrique de **Minkowski** est diagonale

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag} \{+1, -1, -1, -1\} . \quad (\text{Ra.27})$$

Nous adopterons les conventions d'**Einstein** selon lesquelles tout indice μ répété deux fois est implicitement sommé de 0 à 3. En mécanique classique, le Lagrangien s'écrivait

$$\mathcal{L}_{\text{classique}} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{m}{2} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j , \quad (\text{Ra.28})$$

en sorte que sa généralisation quadri-dimensionnelle devient

$$\mathcal{L}_{\text{relativiste}} = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu , \quad (\text{Ra.29})$$

où \dot{x}^μ désigne la dérivée de la coordonnée x^μ par rapport au temps propre τ – ou par rapport à tout paramètre p proportionnel au temps propre. L'action \mathcal{S} devient alors proportionnelle à la longueur quadri-dimensionnelle joignant l'événement de départ A à l'événement d'arrivée B . Les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \quad (\text{Ra.30})$$

correspondant à la forme (Ra.29) conduisent à la relation

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = 0 , \quad (\text{Ra.31})$$

qui traduit la conservation de l'impulsion $P^\mu = m U^\mu = m \dot{x}^\mu$ de la particule libre. La quadri-vitesse est notée U^μ .

2.2) Couplage avec un champ électromagnétique.

Afin de prendre en compte désormais les interactions de la particule précédente avec un champ électromagnétique de potentiel vecteur $A^\mu \equiv \{A^0 = V, A^i = \mathbf{A}\}$, nous modifions le Lagrangien (Ra.29) en lui ajoutant un terme de couplage en $J_\mu A^\mu$

$$\mathcal{L}_{\text{interaction}} = \frac{m}{2} U_\mu U^\mu + q U_\mu A^\mu , \quad (\text{Ra.32})$$

où le courant électromagnétique $J^\mu = q U^\mu$ associé à la particule fait intervenir sa charge électrique q . La variable conjuguée à x^μ est l'impulsion généralisée

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = m U_\mu + q A_\mu . \quad (\text{Ra.33})$$

Nous avons une première illustration du fait qu'en présence d'un champ électromagnétique, l'impulsion P^μ devient

$$P^\mu \implies P^\mu + q A^\mu . \quad (\text{Ra.34})$$

Cette propriété est liée à la symétrie de jauge $U(1)$ associée à l'électromagnétisme comme nous le verrons dans les chapitres suivants. Les équations d'Euler–Lagrange associées au Lagrangien (Ra.32) se mettent alors sous la forme

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right\} = P_\mu + q A_\mu = q U^\alpha \partial_\mu A_\alpha = J^\alpha \partial_\mu A_\alpha . \quad (\text{Ra.35})$$

Problème n⁰ Ra–4 – Niveau [3] : Montrer que la relation (Ra.35) conduit à l'équation fondamentale de la dynamique

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} = q \mathbf{E} + q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} , \quad (\text{Ra.36})$$

où la force \mathbf{F} s'exprime en fonction de la vitesse \mathbf{v} de la particule ainsi que des champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} auxquels elle est soumise. Nous reconnaissons la force magnétique de **Laplace** $q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. La composante temporelle de (Ra.35) exprime la variation de l'énergie \mathcal{E} de la particule sous l'effet du travail électrique de la force \mathbf{F}

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} . \quad (\text{Ra.37})$$

2.3) Une approche encore plus relativiste.

La relation (Ra.35) peut également s'écrire

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = q U^\alpha F_{\mu\alpha} = J^\alpha F_{\mu\alpha} , \quad (\text{Ra.38})$$

où le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est défini par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (\text{Ra.39})$$

Problème n° Ra-5 – Niveau [3] : Redériver les équations du mouvement (Ra.36) et (Ra.37) en prenant successivement la composante $\mu \equiv i$ puis $\mu \equiv 0$ de la relation (Ra.38).

3) L'oscillateur harmonique en mécanique quantique.

Cette partie est instructive. Nous verrons en effet apparaître les excitations quantiques de l'oscillateur harmonique étudié précédemment. Elles sont les embryons des particules qui – en théorie des champs – se manifestent comme des ondes se propageant dans le vide et susceptibles d'abriter des excitations élémentaires. Le vide quantique serait alors l'état fondamental d'une entité réagissant comme un ensemble infiniment continu de ressorts couplés les uns aux autres *.

3.1) Hamiltonien quantique et opérateurs a et a^\dagger .

Le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2 , \quad (\text{Ra.40})$$

devient en mécanique quantique l'opérateur

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2} X^2 . \quad (\text{Ra.41})$$

En représentation spatiale, l'opérateur X revient à multiplier par la variable x alors que l'opérateur P est équivalent à $-i\hbar\partial_x$ en sorte que

$$[X, P] = i\hbar\partial_x x = i\hbar . \quad (\text{Ra.42})$$

* Cette vision mécaniste pourra ensuite être abandonnée car elle n'est guère utile en définitive.

Le spectre des états propres du Hamiltonien est discret et l'état fondamental a une énergie ϵ_0 positive. En introduisant les opérateurs

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}} , \quad (\text{Ra.43})$$

où la pulsation ω vaut $\sqrt{k/m}$, nous pouvons écrire le Hamiltonien sous la forme

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \{ \hat{P}^2 + \hat{X}^2 \} . \quad (\text{Ra.44})$$

Définissons alors les opérateurs a et a^\dagger conjugués l'un de l'autre

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \hat{X} + i\hat{P} \} \quad \text{et} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \hat{X} - i\hat{P} \} . \quad (\text{Ra.45})$$

Le Hamiltonien s'exprime alors en fonction des opérateurs a et a^\dagger

$$H = \hbar\omega \left\{ \left(N = a^\dagger a \right) + \frac{1}{2} \right\} , \quad (\text{Ra.46})$$

en sorte que les états propres d'énergie sont également vecteurs propres de l'opérateur hermitien $N = a^\dagger a$.

Problème n° Ra-6 – Niveau [1] : *Montrer que les opérateurs a et a^\dagger vérifient entre eux la relation de commutation*

$$[a, a^\dagger] = 1 , \quad (\text{Ra.47})$$

alors que vis à vis de N , les commutateurs s'écrivent

$$[N, a] = -a \quad \text{et} \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger . \quad (\text{Ra.48})$$

3.2) Spectre en énergie de l'oscillateur quantique.

Nous montrerons que les états propres de l'opérateur N n'ont que des valeurs propres n entières avec $n \geq 0$. Chaque valeur propre n est associée à un seul état noté $|n\rangle$. L'état de plus basse excitation $|0\rangle$ a la propriété d'être annulé par l'opérateur a

$$a|0\rangle = 0 . \quad (\text{Ra.49})$$

L'état $|0\rangle$ est caractérisé par l'absence d'excitation de l'oscillateur. Il jouera ultérieurement le rôle de **vide quantique**. Chaque état $|n\rangle$ est associé à l'énergie propre

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left\{ n + \frac{1}{2} \right\} . \quad (\text{Ra.50})$$

3.3) L'espace de Fock des états excités de l'oscillateur quantique.

A partir du vide $|0\rangle$, nous pouvons construire tous les états de la théorie en appliquant l'opérateur de **création** a^\dagger qui permet de passer de l'état $|n\rangle$ à l'état $|n+1\rangle$. Réciproquement, l'application de l'opérateur **d'annihilation** a permet de redescendre à partir de $|n+1\rangle$ et d'obtenir l'état $|n\rangle$. Si de surcroît nous exigeons que l'ensemble des états de l'oscillateur soient de norme unité, nous obtenons les vecteurs $|n\rangle$ par application successive de l'opérateur de création a^\dagger sur le vide en sorte que

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \{a^\dagger\}^n |0\rangle . \quad (\text{Ra.51})$$

L'ensemble des vecteurs $|n\rangle$ où $n \geq 0$ est dénommé **l'espace de Fock**. Il s'agit de l'ensemble des états excités de l'oscillateur quantique.

3.4) Schémas de Schrödinger et de Heisenberg.

Soyons plus précis : dans la présentation précédente, nous avons implicitement supposé que les opérateurs X et P ne dépendaient pas du temps mais étaient donnés spatialement par la multiplication par x ou par la dérivation $^\dagger - i \partial_x$. Les opérateurs de création a^\dagger et d'annihilation a sont donc indépendants du temps. Seuls les vecteurs propres du système évoluent au cours du temps selon

$$|n, t\rangle = e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle , \quad (\text{Ra.52})$$

où $|n\rangle$ a été défini dans la relation (Ra.51). Les fonctions d'onde décrivant l'amplitude de probabilité de trouver l'oscillateur à la position x au temps t s'écrivent donc

$$\varphi_n(x, t) = e^{-i\epsilon_n t} \{ \varphi_n(x) \equiv \langle x | n \rangle \} . \quad (\text{Ra.53})$$

Contrairement au schéma de **Schrödinger** précédent, une autre approche – le schéma de **Heisenberg** – consiste à prendre une base de vecteurs propres indépendants du temps et à faire porter l'évolution temporelle par les opérateurs quantiques eux-mêmes. L'élément de matrice de l'opérateur A s'écrit donc

$$\langle m | A_H | n \rangle = \langle m, t | A_S | n, t \rangle = \left\{ \langle m | e^{i\epsilon_m t} \right\} A_S \left\{ e^{-i\epsilon_n t} | n \rangle \right\} . \quad (\text{Ra.54})$$

Dans la mesure où l'on passe du schéma de Schrödinger à celui de Heisenberg grâce à

$$A_H = e^{iHt} A_S e^{-iHt} , \quad (\text{Ra.55})$$

[†]A partir de maintenant – sauf mention du contraire – je vais prendre $\hbar = 1$ de manière à simplifier les relations.

la relation (Ra.23) s'interprète alors comme

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A_H] + \left\{ e^{iHt} \frac{dA_S}{dt} e^{-iHt} \equiv \frac{\partial A_H}{\partial t} \right\} . \quad (\text{Ra.56})$$

Problème n° Ra-7 – Niveau [1] : Dans le cas de l'oscillateur harmonique quantique, les opérateurs X_H et P_H dépendent du temps dans le schéma de Heisenberg. Montrer alors en utilisant la relation (Ra.56) que leurs dérivées sont données par

$$\dot{X}_H = \frac{P_H}{m} \quad \text{et} \quad \dot{P}_H = -k X_H . \quad (\text{Ra.57})$$

Montrer également que les opérateurs d'annihilation et de création vérifient

$$\dot{a}_H = -i\omega a_H \quad \text{et} \quad \dot{a}_H^\dagger = i\omega a_H^\dagger \quad (\text{Ra.58})$$

et que leur évolution temporelle suit la relation

$$a_H(t) = e^{-i\omega t} a_H(0) \quad \text{et} \quad a_H^\dagger(t) = e^{i\omega t} a_H^\dagger(0) . \quad (\text{Ra.59})$$

Les états propres de l'énergie sont construits à partir du vide $|0\rangle$ en appliquant l'opérateur de création $a_H^\dagger(0) \equiv a_S^\dagger(0) \equiv a^\dagger$. Ils sont ainsi indépendants du temps.

Chapitre I

Des Phonons aux Pions : le Champ Scalaire

Dans ce chapitre, la notion de champ quantique est introduite de manière intuitive à partir d'un réseau continu d'oscillateurs harmoniques. Ces derniers sont susceptibles d'être quantifiés ainsi que nous l'avons vu précédemment. Nous commencerons par un rappel sur les phonons suivi de l'étude classique puis quantique de la propagation d'ondes sonores le long d'une ligne fermée.

1) Rappels sur les phonons.

Des atomes de masse m sont alignés le long de l'axe Ox et sont placés sur les sites $x_n = na$ où a est le pas du réseau. Chaque atome n est relié à ses plus proches voisins par un ressort de raideur K . Il peut alors vibrer autour de sa position d'équilibre x_n dont il s'écarte de la distance φ_n le long de l'axe Ox .

Problème n° I-1 – Niveau [1] : Montrer que le Lagrangien de ce système est donné par la somme sur tous les atomes

$$L = T - V = \sum_n \frac{1}{2} m \dot{\varphi}_n^2 - \sum_n \frac{1}{2} K \{\varphi_{n+1} - \varphi_n\}^2 , \quad (\text{I.1})$$

où l'entier n varie de $-\infty$ à $+\infty$. Dériver alors les équations d'Euler-Lagrange et montrer que l'élongation longitudinale de l'atome n vérifie la relation

$$\ddot{\varphi}_n = -\omega_0^2 \{2\varphi_n - \varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}\} , \quad (\text{I.2})$$

où $\omega_0 = \sqrt{K/m}$.

Les modes de Fourier sont définis par

$$\varphi_n(t) = \varphi_k(t) e^{i k n a} . \quad (\text{I.3})$$

Ils obéissent à une équation d'oscillateur harmonique

$$\ddot{\varphi}_k + 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \varphi_k = 0 . \quad (\text{I.4})$$

Les atomes vibrent selon des modes collectifs qui s'interprètent comme des ondes sonores de déformation longitudinale se propageant le long de la file atomique dans les deux sens avec la relation de dispersion

$$\omega(k) = 2\omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right|. \quad (\text{I.5})$$

La quantification de ce système est possible à condition de se placer en schéma de Heisenberg et de prendre comme opérateurs quantiques l'élongation φ_i de l'atome i et son moment conjugué $P_i = m \dot{\varphi}_i$. Les relations de commutation non-triviales sont prises à temps égal et s'écrivent

$$[\varphi_i(t), P_j(t)] = i \delta_{ij}. \quad (\text{I.6})$$

2) La ligne continue et sa quantification.

2.1) Approche classique : Lagrangien et équation du mouvement.

La file précédente est prise de longueur L_0 finie. Le nombre N de ses atomes tend vers l'infini et le pas a tend vers 0 en sorte que le produit $N \times a = L_0$ reste constant. De surcroît, la ligne se reboucle sur elle-même. Le dernier atome situé en L_0 est alors identifié avec l'atome placé en $x = 0$.

Problème n° I-2 – Niveau [1] : Les fonctions spatiales sont donc périodiques de période L_0 et se développent en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i k_n x}, \quad (\text{I.7})$$

où $k_n = n k_0$ et $k_0 = (2\pi/L_0)$. Montrer que les coefficients f_n sont donnés par

$$f_n = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} e^{-i k_n x} f(x) dx. \quad (\text{I.8})$$

Problème n° I-3 – Niveau [1] : Montrer que lorsque le pas a tend vers 0 lors du passage de la file d'atomes à la ligne continue, le symbole de Kronecker δ_{ij} se transforme en

$$\frac{\delta_{ij}}{a} \longrightarrow \delta(x - y) \quad , \quad (\text{I.9})$$

où $x \equiv a \times i$ et $y \equiv a \times j$ repéraient auparavant les positions des atomes i et j .

Ces propriétés relatives à l'agencement de la boucle continue ayant été démontrées, nous sommes prêts désormais à entamer l'analyse classique puis quantique du système. Dans la limite continue, le Lagrangien (I.1) devient la somme de Riemann

$$L(t) = \int_0^{L_0} dx \left\{ \mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2(x, t) - \frac{1}{2} \alpha \varphi'^2(x, t) \right\} \quad , \quad (\text{I.10})$$

où $\mu \equiv m/a$ désigne la masse linéique et $\alpha \equiv Ka$ est le module d'Young. Les dérivées partielles par rapport au temps et par rapport à la variable spatiale x sont respectivement notées $\dot{\varphi}$ et φ' . L'élongation $\varphi(x, t)$ de l'atome placé en $x \equiv a \times i$ joue le rôle de l'élongation X de l'oscillateur harmonique étudié précédemment. Le Hamiltonien du système s'obtient comme la limite de

$$H(t) = \sum_n a \left\{ \frac{P_n}{a} \dot{\varphi}_n \right\} - L(t) \quad , \quad (\text{I.11})$$

lorsque le pas a tend vers 0 en sorte que

$$H(t) = \int_0^{L_0} dx \Pi(x, t) \dot{\varphi}(x, t) - L(t) = \int_0^{L_0} dx \mathcal{H}(x, t) \quad . \quad (\text{I.12})$$

Le moment conjugué de la variable $\varphi(x, t)$ est notée $\Pi(x, t) \equiv \mu \dot{\varphi}(x, t)$. La densité spatiale de Hamiltonien s'écrit donc

$$\mathcal{H}(x, t) = \frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \alpha \varphi'^2 \quad . \quad (\text{I.13})$$

Problème n° I-4 – Niveau [1] : Montrer que la limite continue des équations d'Euler-Lagrange (I.2) est donnée par l'équation de d'Alembert

$$\mu \ddot{\varphi} - \alpha \varphi'' = 0 \quad . \quad (\text{I.14})$$

En conclure que des ondes sonores peuvent se propager le long de la ligne avec une vitesse $c_s = \sqrt{\alpha/\mu}$.

Nous retrouvons la vitesse du son $c_s = \omega_0 a$ avec laquelle les phonons de grande longueur d'onde se propagaient dans le cas de la file d'atomes précédente.

Nous aimerions maintenant dériver l'équation (I.14) en appliquant le principe variationnel selon lequel l'action

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{L_0} dx \mathcal{L} \{ \dot{\varphi}, \varphi' \} \quad (\text{I.15})$$

ne varie qu'au second ordre de la perturbation $\delta\varphi(x, t)$ imposée à l'évolution classique du champ $\varphi(x, t)$ entre les instants t_1 et t_2 . Comme à l'habitude, les points de départ et d'arrivée ne sont pas perturbés en sorte que $\forall x$ entre 0 et L_0

$$\delta\varphi(x, t_1) = \delta\varphi(x, t_2) = 0 \quad . \quad (\text{I.16})$$

Nous montrerons que la variation de l'action au premier ordre [‡] s'écrit

$$\delta\mathcal{S} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{L_0} dx \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right\} \right\} \times \delta\varphi(x, t) \quad . \quad (\text{I.17})$$

L'équation du mouvement (I.14) se met donc sous la forme compacte

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \right\} = 0 \quad , \quad (\text{I.18})$$

où l'indice μ peut prendre les valeurs 0 – variable temporelle – ou 1 – variable spatiale.

2.2) Développement de l'élongation φ en modes de Fourier.

Dans la mesure où la file continue se reboucle sur elle-même, l'élongation $\varphi(x, t)$ est à tout instant t une fonction périodique de l'espace susceptible d'être développée en série de Fourier

$$\varphi(x, t) = \sum_{\text{modes } n} \varphi_n(t) e^{i k_n x} \quad , \quad (\text{I.19})$$

où l'entier n varie de $-\infty$ à $+\infty$. Le mode n est caractérisé par $k_n = n \times k_0$ et est donc un multiple du vecteur d'onde $k_0 \equiv 2\pi/L_0$ du mode fondamental. Le coefficient de Fourier correspondant vérifie l'équation différentielle harmonique

$$\ddot{\varphi}_n + \{\omega_n = c_s |k_n|\}^2 \varphi_n = 0 \quad , \quad (\text{I.20})$$

et se développe donc en

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \left\{ A_n e^{-i\omega_n t} + A_{-n}^* e^{i\omega_n t} \right\} \quad , \quad (\text{I.21})$$

[‡]Dans le cas d'une ligne ne se rebouclant pas sur elle-même, nous devons imposer la condition aux limites supplémentaire $\delta\varphi(x=0, t) = \delta\varphi(x=L_0, t) = 0$ à tout instant t .

si l'on tient compte du fait que l'élongation $\varphi(x, t)$ est une quantité réelle et non complexe. Celle-ci peut désormais s'écrire

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \sum_{\text{modes } k} \left\{ A_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + A_k^* e^{i(\omega_k t - kx)} \right\} . \quad (\text{I.22})$$

Problème n° I-5 – Niveau [2] : Inverser la relation (I.22) afin d'établir que

$$A_k = \frac{1}{2\sqrt{L_0}} \int_0^{L_0} dx e^{-ikx} \left\{ \varphi(x, 0) + i \frac{\Pi(x, 0)}{\mu \omega_k} \right\} . \quad (\text{I.23})$$

L'élongation $\varphi(x, t)$ et son moment conjugué $\Pi(x, t)$ sont évalués à l'instant $t = 0$. Le vecteur d'onde k est un multiple de k_0 en sorte que $k \equiv n \times k_0$ avec l'entier $n \in \mathbb{Z}$.

2.3) Quantification de la boucle continue et espace de Fock.

Cette étude classique nous a préparés à la quantification des modes de Fourier précédents. Le champ $\varphi(x, t)$ et son moment conjugué $\Pi(x, t)$ sont maintenant des opérateurs quantiques agissant dans l'espace des états accessibles au système. Il convient de préciser leurs relations de commutation exactement comme pour les opérateurs X et P de l'oscillateur harmonique.

Problème n° I-6 – Niveau [1] : En partant des relations de commutation (I.6) et du résultat (I.9), établir que

$$[\varphi(x, t), \Pi(y, t)] = i \delta(x - y) , \quad (\text{I.24})$$

alors que

$$[\varphi(x, t), \varphi(y, t)] = 0 \quad \text{et} \quad [\Pi(x, t), \Pi(y, t)] = 0 . \quad (\text{I.25})$$

Expliquer la raison pour laquelle les opérateurs φ et Π sont pris au même instant t dans les commutateurs précédents.

A l'aide du développement de Fourier (I.23), les relations de commutation (I.24) et (I.25) se traduisent en

$$[A_k, A_p^\dagger] = \frac{\delta_{kp}}{2\mu \omega_k} , \quad (\text{I.26})$$

alors que les opérateurs quantiques A_k et A_p commutent entre eux ainsi que leurs hermitiens conjugués A_k^\dagger et A_p^\dagger . Dans l'expression (I.26) précédente, le terme δ_{kp} s'entend comme le symbole de Kronecker δ_{ij} où les modes k et p sont respectivement caractérisés par les vecteurs d'ondes $k \equiv i \times k_0$ et $p \equiv j \times k_0$. En redéfinissant l'opérateur A_k par $a_k = \sqrt{2\mu\omega_k} A_k$ où la pulsation $\omega_k = c_s |k|$, le développement de l'opérateur quantique d'élongation devient

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \sum_{\text{modes } k} \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega_k}} \left\{ a_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - kx)} \right\} . \quad (\text{I.27})$$

L'opérateur a_k s'obtient en inversant la relation précédente en sorte que

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \int_0^{L_0} dx e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\mu\omega_k} \varphi(x, 0) + i \frac{\Pi(x, 0)}{\sqrt{\mu\omega_k}} \right\} . \quad (\text{I.28})$$

La construction de a_k est similaire à celle de l'opérateur d'annihilation a de l'oscillateur harmonique pour lequel la définition (Ra.45) se traduit en

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{m\omega} X + i \frac{P}{\sqrt{m\omega}} \right\} . \quad (\text{I.29})$$

Les nouvelles relations de commutation non-triviales sont désormais

$$[a_k, a_p^\dagger] = \delta_{kp} . \quad (\text{I.30})$$

Problème n° I-7 – Niveau [1] : Afin de développer l'opérateur Hamiltonien H en fonction de opérateurs de création a_k^\dagger et d'annihilation a_k , il est souhaitable de démontrer rapidement le théorème de Parseval. Considérons à cet effet deux fonctions f et g complexes et périodiques de la variable d'espace x . La période L_0 se traduit par l'existence du mode fondamental $k_0 = 2\pi/L_0$ dont dérivent les autres modes $k = n \times k_0$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Les fonctions se développent suivant ces modes de Fourier

$$f(x) = \sum_{\text{modes } k} f_k e^{ikx} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{\text{modes } k} g_k e^{ikx} . \quad (\text{I.31})$$

Montrer alors que

$$\frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} g^*(x) f(x) dx = \sum_{\text{modes } k} g_k^* f_k . \quad (\text{I.32})$$

Problème n° I-8 – Niveau [3] : A partir du développement (I.27), montrer que l'élongation $\varphi(x, t)$ peut s'écrire

$$\varphi(x, t) = \sum_{\text{modes } k} \{2 \mu L_0 \omega_k\}^{-1/2} \left\{ a_k e^{-i\omega_k t} + a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t} \right\} e^{ikx} , \quad (\text{I.33})$$

alors que ses dérivées temporelle et spatiale sont respectivement données par

$$\dot{\varphi}(x, t) = -i \sum_{\text{modes } k} \sqrt{\frac{\omega_k}{2 \mu L_0}} \left\{ a_k e^{-i\omega_k t} - a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t} \right\} e^{ikx} , \quad (\text{I.34})$$

et par

$$\varphi'(x, t) = i \sum_{\text{modes } k} \frac{k}{\sqrt{2 \mu L_0 \omega_k}} \left\{ a_k e^{-i\omega_k t} + a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t} \right\} e^{ikx} . \quad (\text{I.35})$$

Le Hamiltonien (I.12) de la ligne continue est une intégrale spatiale de la densité (I.13). En utilisant le théorème de Parseval, on dérivera l'expression de H en fonction des opérateurs a_k et a_k^\dagger

$$H = \sum_{\text{modes } k} \frac{\omega_k}{2} \{ a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \} . \quad (\text{I.36})$$

En s'aidant des relations de commutations (I.30) et en rétablissant les dimensions, le Hamiltonien peut finalement s'écrire

$$H = \sum_{\text{modes } k} \hbar \omega_k \left\{ a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right\} . \quad (\text{I.37})$$

L'opérateur a_k^\dagger crée un quantum d'excitation supplémentaire sur le mode de vecteur d'onde k et fait croître l'énergie du système de $\hbar \omega_k$. L'opérateur a_k a l'effet opposé. Le vide de la théorie correspond à l'absence de toute excitation et est par définition détruit par tous les opérateurs d'annihilation

$$a_k |0\rangle = 0 . \quad (\text{I.38})$$

L'état $|n_1 n_2 \dots n_p\rangle$ correspond à l'existence de n_1 excitations sur le mode k_1 , de n_2 excitations sur le mode k_2 , etc..., et de n_p excitations sur le mode k_p . Il est obtenu en appliquant les opérateurs de création correspondant sur le vide en sorte que

$$|n_1 n_2 \dots n_p\rangle = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \{ a(k_i)^\dagger \}^{n_i} |0\rangle . \quad (\text{I.39})$$

Le vide de la théorie est associé à la somme des énergies de point zéro de tous les modes oscillants

$$E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle = \sum_{\text{modes } k} \frac{1}{2} \hbar \omega_k . \quad (\text{I.40})$$

et diverge donc. Comme nous ne mesurons que des différences d'énergie entre l'état fondamental du système et un de ses états excités, il convient de redéfinir le zéro des énergies en soustrayant purement et simplement E_0 . Cette procédure conduit à considérer le produit **normal**

$$: a_k a_k^\dagger : \equiv a_k^\dagger a_k , \quad (\text{I.41})$$

en lieu et place de la quantité divergente $a_k a_k^\dagger$. Le Hamiltonien renormalisé s'écrit finalement

$$H = \sum_{\text{modes } k} \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k , \quad (\text{I.42})$$

et l'énergie du vide est bien nulle.

Chapitre II

Pions, Photons et Electrons – Champs Libres

Nous commencerons par le champ de **Klein–Gordon** dont nous dériverons l'équation du mouvement ainsi que le tenseur impulsion–énergie avant de nous intéresser à sa quantification. Nous passerons ensuite à son avatar chargé. Puis nous étudierons le champ électromagnétique dont l'invariance de jauge constitue un problème. Finalement, le champ chargé de spin demi–entier nous donnera l'occasion d'utiliser la théorie de **Dirac** afin de quantifier les électrons–positrons.

1) Le champ scalaire neutre – analyse classique.

1.1) Le Lagrangien du champ scalaire neutre.

En s'inspirant de la boucle continue, il est possible de justifier l'expression

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) , \quad (\text{II.1})$$

pour la densité de Lagrangien du champ scalaire φ qui désormais dépend des coordonnées spatio–temporelles $x^\mu \equiv \{t, \mathbf{x}\}$. Le tenseur de Minkowski est noté $\eta_{\mu\nu}$. Le potentiel scalaire V est une fonction de φ qui – dans ce paragraphe – est quelconque. Dans le cas du champ libre de masse m auquel nous nous restreindrons lors de la quantification canonique, le potentiel scalaire est donné par

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 . \quad (\text{II.2})$$

Le Lagrangien du champ à l'instant t s'obtient en intégrant la densité (II.1) sur tous les oscillateurs $\varphi(\mathbf{x}, t)$ et donc sur tout l'espace

$$L(t) = \int_{\text{espace physique}} d^3\mathbf{x} \mathcal{L} \{ \partial_\mu \varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}, t) \} . \quad (\text{II.3})$$

1.2) L'équation de Klein–Gordon.

L'action du champ scalaire est définie par l'intégrale sur tout l'espace–temps de la densité de Lagrangien (II.1)

$$\mathcal{S} = \int dt L(t) = \int d^4x \mathcal{L} \{ \partial_\mu \varphi, \varphi \} . \quad (\text{II.4})$$

Les équations d'Euler–Lagrange se dérivent par l'application du principe de moindre action qui stipule que la variation $\delta\mathcal{S}$ de l'action (II.4) doit être nulle au premier ordre

de la perturbation $\delta\varphi$ du chemin classique. Nous demanderons que cette perturbation s'annule d'une part dans l'état initial $t \rightarrow -\infty$ et dans l'état final $t \rightarrow +\infty$ et d'autre part à l'infini de l'espace physique à tout instant t . Nous montrerons que cette variation s'exprime comme l'intégrale sur tout l'espace-temps

$$\delta\mathcal{S} = - \int d^4x \delta\varphi \times \left\{ \partial_\mu \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi} \right\} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \right\} . \quad (\text{II.5})$$

Les équations d'Euler–Lagrange

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi} \right\} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \quad (\text{II.6})$$

prennent la forme particulière

$$\square\varphi + \frac{dV}{d\varphi} = 0 , \quad (\text{II.7})$$

connue sous le nom d'équation de **Klein–Gordon** dans laquelle l'opérateur d'Alembertien est défini par

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_t^2 - \Delta . \quad (\text{II.8})$$

Dans le cas du champ libre de masse m , l'équation de Klein–Gordon prend la forme usuelle

$$\{\square + m^2\} \varphi = 0 . \quad (\text{II.9})$$

1.3) Tenseur impulsion–énergie et théorème de Noether.

Par analogie avec la boucle continue et ses ondes sonores, le Hamiltonien s'écrit

$$H(t) = \int_{\text{espace physique}} d^3\mathbf{x} \Pi(\mathbf{x}, t) \times \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) - L(t) , \quad (\text{II.10})$$

où le moment conjugué $\Pi(\mathbf{x}, t)$ de la variable canonique $\varphi(\mathbf{x}, t)$ est défini par

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\varphi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \equiv \dot{\varphi} . \quad (\text{II.11})$$

Le Hamiltonien apparaît alors comme une intégrale sur tout l'espace de la densité \mathcal{H} .

Problème n° II–1 – Niveau [1] : Montrer que la densité de Hamiltonien est donnée par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + V(\varphi) . \quad (\text{II.12})$$

Nous allons redériver l'expression (II.12) grâce au théorème de **Noether**. Considérons donc le changement de coordonnées

$$x^\mu \rightarrow y^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad (\text{II.13})$$

au cours duquel le même point M – initialement repéré par x^μ – est maintenant associé à y^μ . Nous prendrons un vecteur ϵ^μ constant dans l'espace-temps et petit. Le champ scalaire reste le même au point M puisque rien n'a changé. La fonction associant aux coordonnées x^μ ou y^μ la valeur correspondante de φ subit par contre une modification puisque

$$\varphi(x^\mu) = \varphi'(y^\mu) \equiv \varphi(M) \quad . \quad (\text{II.14})$$

Le champ a donc changé en x d'une quantité

$$\delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \varphi \quad . \quad (\text{II.15})$$

La densité de Lagrangien varie également. En remarquant qu'elle dépend des coordonnées x^μ à travers le champ scalaire φ et ses dérivées $\partial_\mu \varphi$, nous construirons le tenseur **impulsion-énergie**

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad , \quad (\text{II.16})$$

et établirons que sa quadri-divergence est nulle

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (\text{II.17})$$

Ce résultat permet alors d'établir que l'intégrale spatiale

$$P^\mu(t) = \int_{\text{espace physique}} \{d\Sigma_0 = d^3\mathbf{x}\} T^{0\mu} \quad (\text{II.18})$$

ne varie pas au cours du temps et donc que l'impulsion P^μ se conserve. Il convient toutefois que le champ scalaire $\varphi(\mathbf{x}, t)$ s'annule rapidement à l'infini de l'espace physique afin que les éventuelles pertes d'impulsion ou d'énergie y soient supprimées.

Problème n° II-2 – Niveau [1] : *Montrer que la densité de Hamiltonien s'identifie avec la composante T^{00} du tenseur impulsion-énergie*

$$T^{00} = \Pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H} \quad , \quad (\text{II.19})$$

et retrouver directement l'expression (II.12).

Problème n° II-3 – Niveau [1] : Montrer que le tenseur impulsion-énergie s'écrit également

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (\text{II.20})$$

En déduire que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial^\nu \varphi \times \left\{ \square \varphi + \frac{dV}{d\varphi} \right\} . \quad (\text{II.21})$$

Si le champ scalaire satisfait à l'équation du mouvement – en l'occurrence à l'équation de Klein–Gordon dans notre cas – son tenseur impulsion-énergie se conserve.

2) Quantification canonique du champ scalaire neutre.

Nous ne considérerons ici que le champ scalaire neutre **libre** de masse m en sorte que le potentiel scalaire est donné par la relation (II.2).

2.1) Décomposition de Fourier et relations de commutation.

Nous nous inspirerons de nouveau du traitement quantique de la boucle atomique continue parcourue par des ondes sonores. Le passage à la limite $L_0 \rightarrow +\infty$ et la prise en compte de trois dimensions spatiales au lieu d'une seule nous permettra de justifier le développement de Fourier du champ scalaire $\varphi(x)$ sous la forme

$$\varphi(x^\mu \equiv \{\mathbf{x}, t\}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right\} . \quad (\text{II.22})$$

Dans l'argument des exponentielles imaginaires, le terme kx s'entend comme le produit scalaire de Minkowski

$$kx = \omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} , \quad (\text{II.23})$$

où la composante temporelle du quadri-vecteur k^μ est

$$k^0 = \omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2} . \quad (\text{II.24})$$

Problème n° II-4 – Niveau [1] : Montrer à partir du développement (II.22) que le champ scalaire φ satisfait bien à l'équation de Klein–Gordon

$$\{\square + m^2\} \varphi = 0 . \quad (\text{II.25})$$

A partir de maintenant, on notera

$$\tilde{d}k = \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} . \quad (\text{II.26})$$

Le développement de Fourier du champ scalaire $\varphi(x)$ s'écrit alors plus simplement

$$\varphi(x) = \int \tilde{d}k \left\{ a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right\} . \quad (\text{II.27})$$

Problème n° II-5 – Niveau [2] : Montrer que la mesure $\tilde{d}k$ se met sous la forme

$$\tilde{d}k = \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) , \quad (\text{II.28})$$

et qu'elle est invariante de Lorentz.

Les relations de commutation entre les opérateurs d'annihilation $a(\mathbf{k})$ et les opérateurs de création $a^\dagger(\mathbf{p})$ sont données par

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p})] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) . \quad (\text{II.29})$$

Problème n° II-6 – Niveau [2] : A partir des relations de commutation (II.29), établir que le commutateur entre l'opérateur $\varphi(\mathbf{x}, t)$ et son moment conjugué $\Pi(\mathbf{y}, t)$ obéit bien à la relation canonique

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{y}, t)] = i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (\text{II.30})$$

2.2) L'opérateur impulsion.

Le Hamiltonien du champ scalaire a été dérivé précédemment

$$H(t) = \int d^3\mathbf{x} \left\{ \mathcal{H} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right\} . \quad (\text{II.31})$$

Problème n° II-7 – Niveau [1] : Considérons deux fonctions complexes f et g de la variable spatiale \mathbf{x} . Leurs développements de Fourier s'écrivent

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} G(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} . \quad (\text{II.32})$$

Démontrer le théorème de Parseval selon lequel

$$\int d^3\mathbf{x} g^*(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} G^*(\mathbf{k}) F(\mathbf{k}) . \quad (\text{II.33})$$

Problème n° II-8 – Niveau [3] : Exprimer le Hamiltonien H en fonction des opérateurs de création $a^\dagger(\mathbf{k})$ et d'annihilation $a(\mathbf{k})$. En vous aidant du résultat précédent (II.33), aboutir à

$$H = \int d\tilde{k} \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2} \{ a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) \} . \quad (\text{II.34})$$

Que vaut l'énergie du vide ? Comment se modifie l'expression précédente quand on en prend le produit normal ?

Problème n° II-9 – Niveau [2] : Montrer que l'opérateur impulsion est donné par

$$\mathbf{P} = - \int d^3\mathbf{x} \, \dot{\varphi} \nabla \varphi , \quad (\text{II.35})$$

et le développer en fonction des opérateurs $a(\mathbf{k})$ et $a^\dagger(\mathbf{k})$ afin de montrer que

$$\mathbf{P} = \int \tilde{d}\mathbf{k} \, \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \{ a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) \} . \quad (\text{II.36})$$

Montrer que par raison de symétrie, le vide est dépourvu de toute impulsion et en déduire que

$$\mathbf{P} = - \int d^3\mathbf{x} : \dot{\varphi} \nabla \varphi : \equiv \int \tilde{d}\mathbf{k} \, \hbar \mathbf{k} \, a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) . \quad (\text{II.37})$$

Les résultats précédents peuvent se synthétiser sous la forme

$$P^\mu = \int d^3\mathbf{x} : \{ T^{0\mu} = \dot{\varphi} \partial^\mu \varphi - \eta^{0\mu} \mathcal{L} \} : \equiv \int \tilde{d}\mathbf{k} \, \hbar k^\mu \, a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) . \quad (\text{II.38})$$

L'opérateur $a^\dagger(\mathbf{k})$ crée un quantum d'excitation associé à l'onde plane – qui maintenant joue le rôle de véritable mode de propagation – dont le vecteur est \mathbf{k} . Ce quantum est interprété comme la présence d'une particule de masse m se propageant avec l'impulsion $\hbar \mathbf{k}$. Comme chaque onde plane peut être excitée autant de fois que l'on veut, les particules correspondantes peuvent occuper le même état quantique de propagation : nous sommes en présence de **bosons**. Une rotation spatiale ou un changement de référentiel n'affecte pas la structure interne du champ car celui-ci est un scalaire. La théorie introduite dans ce chapitre est donc susceptible de décrire des particules neutres de spin 0 à l'instar des pions π^0 .

Problème n° II-10 – Niveau [1] : Montrer que les opérateurs de création $a^\dagger(\mathbf{k})$ entretiennent avec l'opérateur impulsion P^μ les relations de commutation

$$[P^\mu, a^\dagger(\mathbf{k})] = \hbar k^\mu a^\dagger(\mathbf{k}) . \quad (\text{II.39})$$

Le vide de la théorie est détruit par tous les opérateurs d'annihilation $a(\mathbf{k})$. L'application de $a^\dagger(\mathbf{k})$ sur le vide engendre la création d'une particule de quadri-impulsion k^μ et l'excitation de l'onde plane associée.

3) Le champ scalaire chargé.

Pour décrire une particule scalaire chargée comme le pion π^\pm , il suffit d'introduire deux champs neutres φ_1 et φ_2 et de les associer en un champ scalaire complexe défini par

$$\varphi \equiv \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} . \quad (\text{II.40})$$

3.1) Lagrangien et tenseur impulsion–énergie.

Le Lagrangien [§] du champ complexe φ est une somme directe des expressions correspondant aux composantes φ_1 et φ_2 en sorte que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_2 \partial_\mu \varphi_2 - V \left(\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \right) , \quad (\text{II.41})$$

où le potentiel est invariant par rotation dans le plan complexe φ . Le Lagrangien se met sous la forme

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - V \{ \varphi^* \varphi \} . \quad (\text{II.42})$$

Les champs φ_1 et φ_2 étant indépendants l'un de l'autre, nous choisirons dorénavant comme bonnes variables canoniques le champ chargé φ et son complexe conjugué φ^* . L'équation d'Euler–Lagrange qui les régit s'écrit alors

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^*} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = \square \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi^*} = 0 . \quad (\text{II.43})$$

Dans le cas du champ libre de masse m où $V \equiv m^2 \varphi^* \varphi$, l'équation précédente se réduit à la relation (II.9). Le conjugué complexe de la relation (II.43) s'obtient également en dérivant directement le Lagrangien (II.42) par rapport à φ et $\partial_\mu \varphi$.

[§]On devrait plus rigoureusement parler de densité de Lagrangien et non de Lagrangien tout court.

Problème n° II-11 – Niveau [2] : Le Lagrangien $\mathcal{L} \{\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i\}$ est une fonction des r champs scalaires φ_i – se comportant comme des variables canoniques indépendantes – et de leurs dérivées $\partial_\mu \varphi_i$. S'ils sont réels, ces champs décrivent des degrés de liberté neutres. Dans le cas d'une particule chargée, nous associerons à φ son complexe conjugué φ^* et les considérerons comme deux variables canoniques indépendantes φ_i et φ_k . En remarquant que ce Lagrangien ne dépend des coordonnées spatio-temporelles x^μ qu'au travers des champs φ_i et de leurs dérivées $\partial_\mu \varphi_i$, construire le tenseur impulsion-énergie en vous inspirant du théorème de Noether et montrer que

$$T^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \cdot \partial^\nu \varphi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (\text{II.44})$$

En déduire que dans le cas du champ scalaire chargé et de son Lagrangien (II.42), l'expression précédente prend la forme

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (\text{II.45})$$

Problème n° II-12 – Niveau [1] : Le Hamiltonien de la théorie est l'intégrale sur tout l'espace de la composante temps-temps du tenseur impulsion-énergie. En déduire qu'il se met sous la forme

$$H(t) = \int d^3 \mathbf{x} \{ \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} + \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + V(\varphi) \} . \quad (\text{II.46})$$

Montrer ensuite que l'impulsion spatiale associée à la configuration classique $\varphi(x)$ s'écrit

$$\mathbf{P}(t) = - \int d^3 \mathbf{x} \{ \nabla \varphi^* \dot{\varphi} + \dot{\varphi}^* \nabla \varphi \} . \quad (\text{II.47})$$

Dans le formalisme de la seconde quantification, nous avons décomposé le champ scalaire neutre en modes de Fourier grâce au développement (II.22) dans lequel apparaissaient les opérateurs d'annihilation $a(\mathbf{k})$ et de création $a^\dagger(\mathbf{k})$. Nous supposons également ici que le champ scalaire chargé est libre et de masse m . Chacune des composantes réelles φ_1 et φ_2 est susceptible de s'exprimer en fonction de ses opérateurs a_1 et a_2 et de leurs hermitien conjugués a_1^\dagger et a_2^\dagger grâce à une relation analogue et nous aboutissons immédiatement à

l'expression

$$\varphi(x) = \int \tilde{d}k \left\{ a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right\} , \quad (\text{II.48})$$

où les opérateurs a et b sont définis par

$$a(\mathbf{k}) \equiv \frac{a_1(\mathbf{k}) + i a_2(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad b(\mathbf{k}) \equiv \frac{a_1(\mathbf{k}) - i a_2(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} . \quad (\text{II.49})$$

Problème n° II-13 – Niveau [1] : A partir des relations de commutation (II.29) qu'entretiennent entre eux les opérateurs a_1 et a_1^\dagger ainsi que a_2 et a_2^\dagger , montrer que

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p})] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{p})] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) , \quad (\text{II.50})$$

et

$$[a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{p})] = [b(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p})] = 0 . \quad (\text{II.51})$$

Nous pouvons dès lors exprimer l'impulsion quantique P^μ en fonction des opérateurs d'annihilation et de création. A partir de l'expression (II.46) – nous sommes dans le cas d'un champ libre avec $V \equiv m^2 \varphi^\dagger \varphi$ – et du développement de Fourier (II.48), un calcul fastidieux conduit à la relation simple

$$H = \int \tilde{d}k \omega_{\mathbf{k}} \left\{ a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k}) b^\dagger(\mathbf{k}) \right\} . \quad (\text{II.52})$$

Problème n° II-14 – Niveau [3] : Etablir la relation (II.52). Que vaut l'énergie du vide ? Prendre le produit normal de l'expression (II.46)

$$H(t) = \int d^3\mathbf{x} : \left\{ \dot{\varphi}^\dagger \dot{\varphi} + \nabla \varphi^\dagger \cdot \nabla \varphi + V(\varphi) \right\} : , \quad (\text{II.53})$$

et montrer que le Hamiltonien se met désormais sous la forme

$$H = \int \tilde{d}k \omega_{\mathbf{k}} \left\{ a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \right\} . \quad (\text{II.54})$$

Montrer de manière similaire que l'opérateur impulsion spatiale s'écrit

$$\mathbf{P} = \int \tilde{d}k \mathbf{k} \left\{ a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \right\} . \quad (\text{II.55})$$

3.2) Invariance de jauge et charge électrique.

L'analyse précédente permet de conclure que les opérateurs $a^\dagger(\mathbf{k})$ et $b^\dagger(\mathbf{k})$ créent tous deux un quantum d'excitation associé à une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k} et donc une particule dont la quadri-impulsion est

$$k^\mu \equiv \left\{ \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}, \mathbf{k} \right\} . \quad (\text{II.56})$$

Cependant, en quoi la particule engendrée par l'opérateur b^\dagger diffère-t-elle de celle créée par a^\dagger . C'est là qu'intervient l'invariance de jauge ! Le Lagrangien (II.42) possède en effet la propriété remarquable d'être invariant sous la rotation complexe

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = e^{iq\theta} \times \varphi . \quad (\text{II.57})$$

Cette transformation dite de **jauge** est un élément du groupe $U(1)$ – voir le chapitre de révision sur les groupes. L'angle de rotation θ est multiplié par la charge q . S'il ne dépend pas de la position, la rotation complexe ressentie par le champ φ est la même en chaque point de l'espace-temps et la transformation de jauge est de **première espèce** ou **globale**.

Problème n° II-15 – Niveau [1] : Montrer que le Lagrangien (II.42) est bien invariant sous la transformation globale (II.57). Si maintenant l'angle θ est une fonction de x , la transformation de jauge est dite de **seconde espèce** ou **locale**. Le Lagrangien est-il toujours invariant sous une telle transformation ? Justifier votre réponse et commenter.

Une rotation d'angle $\theta \rightarrow 0$ engendre la modification infinitésimale $\delta\varphi = iq\theta\varphi$. En constatant que cette perturbation du champ – et également de sa dérivée spatio-temporelle $\partial_\mu\varphi$ – n'est suivie d'aucun effet sur le Lagrangien (II.42), il est immédiat de montrer que le vecteur

$$J_\mu = iq \{ \varphi^* \cdot \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^* \cdot \varphi \} = iq \left\{ \varphi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi \right\} , \quad (\text{II.58})$$

se conserve dans la mesure où sa quadri-divergence $\partial_\mu J^\mu$ est nulle. Cette propriété remarquable permet d'interpréter J^μ comme un courant électrique dont la charge volumique n'est autre que la composante temporelle J^0 et d'établir que l'intégrale spatiale

$$Q(t) = \int_{\text{espace physique}} \{ d\Sigma_0 = d^3\mathbf{x} \} J^0 , \quad (\text{II.59})$$

ne varie pas au cours du temps. La quantité $Q(t)$ apparaît donc comme la charge électrique totale associée à la configuration classique $\varphi(t, \mathbf{x})$.

Problème n° II-16 – Niveau [1] : Calculer directement la quadri-divergence du courant (II.58). En vous aidant de l'équation de Klein–Gordon, montrer que le courant J^μ se conserve.

Si maintenant nous quantifions de manière canonique le champ libre, nous pouvons définir l'opérateur charge électrique comme

$$Q = i \int d^3\mathbf{x} \, q : \left\{ \varphi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^0 \varphi \right\} : . \quad (\text{II.60})$$

Problème n° II-17 – Niveau [2] : Développer l'expression précédente en fonction des opérateurs d'annihilation a et b et de création a^\dagger et b^\dagger afin d'établir que

$$Q = \int d\tilde{k} \, q \{ a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \} . \quad (\text{II.61})$$

L'expression précédente peut s'écrire

$$Q = \int d\tilde{k} \{ (+q) \times a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + (-q) \times b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \} . \quad (\text{II.62})$$

L'application de l'opérateur $a^\dagger(\mathbf{k})$ sur le vide quantique $|0\rangle$ engendre une **particule** d'impulsion \mathbf{k} , d'énergie $\omega_{\mathbf{k}}$ et de charge électrique $+q$ alors que l'opérateur $b^\dagger(\mathbf{k})$ donne naissance à une **antiparticule** de même quadri-impulsion k^μ mais de charge $-q$ opposée. Notre théorie permet donc de prendre en compte simultanément particules et antiparticules. Elle est tout à fait adaptée par exemple à la description du champ chargé de spin nul associé au pion π^\pm .

3.3) Propagateur de Feynman et T-produit.

En présence d'une source $S(\mathbf{x}, t)$, notre champ scalaire libre φ obéit à l'équation de Klein–Gordon modifiée

$$\{\square + m^2\} \varphi = S(x) , \quad (\text{II.63})$$

dont la solution fait intervenir la fonction de Green $G(x - y)$ qui exprime la manière dont la source située en y contribue à l'onde φ rayonnée en x

$$\varphi(x) = \int G(x - y) S(y) d^4y . \quad (\text{II.64})$$

La fonction $G(x - y)$ décrit donc la propagation de l'onde scalaire φ depuis y où elle est produite jusqu'en x . Elle vérifie l'équation de Klein–Gordon

$$\{\square + m^2\} G(x) = \delta^4(x) . \quad (\text{II.65})$$

Une décomposition de Fourier permet de définir $G(k)$ grâce à

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G(k) e^{-ikx} . \quad (\text{II.66})$$

L'équation (II.65) se traduit par

$$G(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2} , \quad (\text{II.67})$$

si bien que le propagateur est donné par la suite d'intégrales

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int dk^0 e^{-ik^0 t} \frac{-1}{k^{02} - \omega_{\mathbf{k}}^2} . \quad (\text{II.68})$$

Vous avez déjà étudié par ailleurs la manière dont le calcul de l'intégrale sur k^0 est mené dans le plan complexe. Pour t négatif, on reboucle le contour par le haut et pour t positif par le bas. Les pôles sont situés sur l'axe réel en $\pm\omega_{\mathbf{k}}$. Si on les déplace tous deux vers le bas, on obtient la fonction de Green retardée de Lienard et Wiechert. Si le pôle $+\omega_{\mathbf{k}}$ est déplacé vers le bas mais que le pôle $-\omega_{\mathbf{k}}$ se retrouve haut-dessus de l'axe réel k^0 , on obtient le propagateur de Feynman. Dans ce cas, les solutions à énergie positive se propagent vers le futur alors que les solutions à énergie négative se propagent vers le passé.

Problème n° II-18 – Niveau [2] : *Montrer que le propagateur de Feynman s'écrit*

$$G_F(x - y) = i \int \tilde{dk} \left\{ \theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x - y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x - y)} \right\} . \quad (\text{II.69})$$

En théorie quantique des champs, nous allons retrouver le propagateur de Feynman grâce au T-produit – ou produit chronologiquement ordonné – du champ $\varphi(x)$ et de son hermitien conjugué $\varphi^\dagger(y)$

$$T \{ \varphi(x) \varphi^\dagger(y) \} \equiv \theta(x^0 - y^0) \varphi(x) \varphi^\dagger(y) + \theta(y^0 - x^0) \varphi^\dagger(y) \varphi(x) . \quad (\text{II.70})$$

On note également la valeur dans le vide de l'expression précédente par

$$\overline{\varphi(x) \varphi^\dagger(y)} \equiv \langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi^\dagger(y) \} | 0 \rangle . \quad (\text{II.71})$$

Problème n° II-19 – Niveau [2] : Etablir l'identité

$$G_F(x - y) = i \langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi^\dagger(y) \} | 0 \rangle . \quad (\text{II.72})$$

Interpréter le résultat précédent et montrer notamment qu'une particule se propage de y vers x lorsque $x^0 > y^0$ alors que, dans le cas contraire, une antiparticule produite en x se propage jusqu'en y .

4) Le champ électromagnétique.

4.1) Equations de Maxwell et invariance de jauge.

Les équations de Maxwell se mettent sous une forme covariante de Lorentz remarquablement compacte puisque si l'on définit le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ à partir du potentiel vecteur A^μ par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu , \quad (\text{II.73})$$

les deux relations constitutives

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{II.74})$$

tombent sous le sens alors que les équations reliant champ et source

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left\{ \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\} \quad (\text{II.75})$$

s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu . \quad (\text{II.76})$$

Le champ électromagnétique est invariant sous les transformations locales de jauge qui affectent le potentiel vecteur

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta , \quad (\text{II.77})$$

où $\theta(x)$ est une fonction scalaire du point x . Il existe une infinité de choix de jauge – donc de potentiels vecteurs différents – redonnant exactement la même configuration du champ électromagnétique. En particulier, une classe de choix possibles correspond à la condition de **jauge de Lorentz** pour laquelle

$$\partial \cdot A = \partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (\text{II.78})$$

En ce cas, les équations de Maxwell (II.76) se simplifie plus avant en

$$\square A^\mu = J^\mu . \quad (\text{II.79})$$

Cette relation est identique à l'équation de Klein–Gordon avec source (II.63) à condition de prendre un champ de masse nulle.

Problème n° II–20 – Niveau [3] : Dans le cas classique où nous nous plaçons ici, la solution de l'équation (II.79)

$$A^\mu(x) = \int G_{\text{ret}}(x-y) J^\mu(y) d^4y \quad (\text{II.80})$$

fait intervenir le propagateur retardé G_{ret} de Lienard et Wiechert. Montrer tout d'abord que la transformée de Fourier de la fonction $G_{\text{ret}}(x)$ est donnée par

$$G_{\text{ret}}(k) = \frac{-1}{k^2} . \quad (\text{II.81})$$

En l'intégrant de manière convenable – attention à la prescription sur le déplacement des pôles dans le cas retardé – en déduire que

$$G_{\text{ret}}(x-y) = \frac{1}{4\pi r} \delta \{r - (x^0 - y^0)\} , \quad (\text{II.82})$$

où la distance r est la norme $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. En déduire la solution des potentiels retardés de Lienard et Wiechert

$$A_{\text{ret}}^\mu(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathcal{V}_S \frac{J^\mu(S, t' = t - r/c)}{r} . \quad (\text{II.83})$$

La contribution en M à l'instant t qui provient du point source S a été rayonnée à l'instant $t' = t - r/c$ antérieur car elle a dû se propager à la vitesse de la lumière sur la distance $r = SM$.

Ce rappel ne serait pas complet sans l'analyse rapide de la structure de l'onde plane électromagnétique se propageant dans le vide. En l'absence de source, le potentiel vecteur

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{-ikx} \quad (\text{II.84})$$

est solution de l'équation $\square A^\mu = 0$ à condition que d'une part $k^2 = 0$ – le photon est de masse nulle – et que d'autre part $k \cdot \epsilon = 0$. La condition de jauge de Lorentz impose en effet que dans le référentiel où le vecteur d'onde \mathbf{k} est dirigé suivant l'axe

des z , les composantes longitudinale $\epsilon_z \equiv \epsilon^3$ et temporelle ϵ^0 sont égales en sorte que le quadri-vecteur polarisation ϵ se réduit à la somme d'une composante purement spatiale perpendiculaire à \mathbf{k} et d'une composante proportionnelle au quadri-vecteur k

$$\epsilon^\mu = \epsilon_\perp^\mu + \alpha k^\mu . \quad (\text{II.85})$$

Une transformation de jauge permet de se débarrasser de cette dernière et nous obtenons une polarisation physique dirigée suivant les vecteurs unitaires \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y du plan perpendiculaire à la direction $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$. A chaque quadri-vecteur d'onde k^μ , nous pouvons dès lors associer la base constituée des quadri-vecteurs $e(\mathbf{k}, \lambda)$. Les vecteurs $e(\mathbf{k}, \lambda = 1, 2, 3)$ sont simplement les vecteurs spatiaux \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z . Le vecteur $e(\mathbf{k}, \lambda = 0)$ est purement temporel de composante égale à 1.

Problème n° II–21 – Niveau [3] : Montrer que les vecteurs de base $e(\mathbf{k}, \lambda)$ vérifient la relation d'orthonormalité

$$e(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e(\mathbf{k}, \sigma) = e^\mu(\mathbf{k}, \lambda) e_\mu(\mathbf{k}, \sigma) = \eta_{\lambda\sigma} , \quad (\text{II.86})$$

et la relation de fermeture

$$\sum_{\lambda=0}^3 \frac{e_\mu(\mathbf{k}, \lambda) e_\nu(\mathbf{k}, \lambda)}{e(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e(\mathbf{k}, \lambda)} = \eta_{\mu\nu} . \quad (\text{II.87})$$

4.2) Formalisme Lagrangien et tenseur impulsion–énergie.

Considérons le Lagrangien classique

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - J^\mu A_\mu . \quad (\text{II.88})$$

le terme $-J \cdot A$ prend en compte le couplage du potentiel vecteur A^μ avec le courant source J^μ . Afin de dériver les équations d'Euler–Lagrange associées au Lagrangien (II.88), il convient tout d'abord de montrer que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta A_\alpha} = F^{\alpha\beta} - \lambda \eta^{\alpha\beta} (\partial \cdot A) . \quad (\text{II.89})$$

Les champs A_α constituent les variables canoniques indépendantes φ_i discutées auparavant.

Problème n° II-22 – Niveau [1] : Montrer que les équations d'Euler-Lagrange se mettent sous la forme

$$\square A^\alpha + (\lambda - 1) \partial^\alpha (\partial \cdot A) = J^\alpha . \quad (\text{II.90})$$

Pour quelle valeur du paramètre λ retrouve-t-on les équations de Maxwell traditionnelles ?

Le tenseur impulsion-énergie a été dérivé de manière générale dans l'exercice II-11 et s'exprime dans notre cas en fonction des champs canoniques A_α comme

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\alpha} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (\text{II.91})$$

En considérant le Lagrangien (II.88) dans le cas où le paramètre $\lambda = 0$ et en l'absence de source J^μ , nous sommes ramenés au cas conventionnel du champ électromagnétique de Maxwell dans le vide dont le tenseur impulsion-énergie construit par la méthode de Noether s'écrit alors

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} (F \cdot F) . \quad (\text{II.92})$$

La quadri-divergence de cet objet est nulle même si cela n'est pas évident à priori ! Par contre, le tenseur (II.92) n'est pas invariant de jauge puisque la transformation du potentiel vecteur

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta \quad (\text{II.93})$$

se traduit par l'apparition du terme supplémentaire

$$\delta T^{\mu\nu} |_{\text{jauge}} = -F^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial_\alpha \theta . \quad (\text{II.94})$$

Nous aimerions construire un tenseur-impulsion énergie qui soit invariant de jauge et la transformation précédente suggère de modifier le tenseur impulsion-énergie (II.92) en

$$T_{\text{new}}^{\mu\nu} = T_{\text{old}}^{\mu\nu} + F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu \equiv -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} (F \cdot F) . \quad (\text{II.95})$$

Le terme additionnel se conserve bien puisque

$$\partial_\mu \{F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu\} = \partial_\mu \partial_\alpha \{F^{\mu\alpha} A^\nu\} . \quad (\text{II.96})$$

La contraction d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique est nulle et nous avons utilisé le fait que le champ $F^{\mu\alpha}$ vérifiait les équations de Maxwell dans le vide.

Problème n° II-23 – Niveau [2] : En partant de la définition (II.95), montrer que la composante temps-temps du tenseur impulsion-énergie est simplement la densité d'énergie électromagnétique bloquée par les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B}

$$T^{00} = \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} B^2 \equiv \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} , \quad (\text{II.97})$$

et que le vecteur de **Poynting** n'est autre que

$$T^{0i} = \epsilon_{ijk} E^j B^k = \left\{ \mathbf{\Pi} \equiv \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right\}^i . \quad (\text{II.98})$$

4.3) Quantification à la Gupta-Bleuler.

Si l'on s'en tient au Lagrangien de la théorie de Maxwell dans le vide

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \quad (\text{II.99})$$

chaque variable canonique A_α est associée au moment conjugué

$$\Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} = F^{\alpha 0} . \quad (\text{II.100})$$

Le moment conjugué du potentiel électrostatique A^0 est donc nul. Cette propriété remarquable ne nous a pas empêchés d'étudier l'électromagnétisme d'un point de vue classique et d'en dériver les équations du mouvement. Elle constitue cependant un obstacle majeur à la quantification puisque A^0 et Π^0 deviennent désormais des opérateurs agissant dans l'espace de Fock des états accessibles au système et ne peuvent s'annuler. Une possibilité consisterait à s'en passer et à procéder avec le seul potentiel vecteur \mathbf{A} en choisissant la condition de jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Cette procédure peut être utile à l'analyse de certains problèmes pourvu que l'on reste dans le référentiel du laboratoire. Mais nous nous soucions ici de l'invariance de Lorentz et toutes les composantes A^μ du potentiel vecteur doivent jouer le même rôle.

La méthode proposée par **Gupta** et **Bleuler** consiste à quantifier une théorie régie par le Lagrangien (II.88) et qui n'est donc plus strictement l'électromagnétisme. Certes, nous retrouvons les équations de Maxwell si nous choisissons de prendre $\lambda = 1$ mais l'espace de Fock de cette théorie quantique modifiée n'est pas celui de l'électromagnétisme. Il contient

en effet – outre les états conventionnels de polarisation transverse – des états de polarisation longitudinale $e(\mathbf{k}, \lambda = 3) \equiv \mathbf{e}_z$ et temporelle $e(\mathbf{k}, \lambda = 0)$. Chaque composante A_α du potentiel vecteur est maintenant un opérateur quantique associé au moment conjugué

$$\Pi^\alpha = F^{\alpha 0} - \lambda \eta^{\alpha 0} (\partial \cdot A) . \quad (\text{II.101})$$

Quantifier de manière canonique la théorie associée au Lagrangien (II.88) consiste à imposer les relations de commutation covariantes de Lorentz

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = i \eta^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (\text{II.102})$$

Problème n° II–24 – Niveau [2] : Nous choisissons à partir de maintenant de prendre $\lambda = 1$. Montrer que les relations (II.102) conduisent à

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}_\nu(\mathbf{y}, t)] = -i \eta_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (\text{II.103})$$

Le développement de Fourier du potentiel vecteur A_μ en une somme d'ondes planes se met sous la forme

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 \left\{ a(\mathbf{k}, \lambda) e_\mu(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e_\mu(\mathbf{k}, \lambda) e^{ikx} \right\} . \quad (\text{II.104})$$

On reconnaît l'élément $d\tilde{k}$ défini par (II.26). Chaque opérateur $a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ crée un quantum électromagnétique d'impulsion \mathbf{k} et de polarisation $e(\mathbf{k}, \lambda)$. Le potentiel vecteur vérifie l'équation (II.79) sans source si $k^2 = 0$ ou encore si l'énergie $\omega_{\mathbf{k}}$ est égale à la norme du vecteur d'onde \mathbf{k} .

Problème n° II–25 – Niveau [3] : Montrer que si les opérateurs d'annihilation et de création vérifient la condition

$$[a(\mathbf{k}, \alpha), a^\dagger(\mathbf{p}, \beta)] = -\eta^{\alpha\beta} (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) , \quad (\text{II.105})$$

alors la relation de commutation (II.103) est vraie.

La relation précédente conduit à l'existence d'états quantiques de **norme négative**. En effet, si l'on crée à partir du vide de la théorie – état du reste toujours annulé par tous les opérateurs $a(\mathbf{k}, \alpha)$ – un quantum de polarisation temporelle, nous aboutissons à la catastrophe

$$\{\langle 0| a(\mathbf{k}, 0)\} \{a^\dagger(\mathbf{k}, 0) |0\rangle\} = \langle 0| [a(\mathbf{k}, 0), a^\dagger(\mathbf{k}, 0)] |0\rangle = - (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{0}) < 0 \quad . \quad (\text{II.106})$$

L'espace de Fock ainsi obtenu ne correspond pas en fait à la théorie de Maxwell. Afin de restaurer celle-ci classiquement à partir du Lagrangien (II.88), il convenait déjà d'imposer que la divergence $\partial \cdot A$ soit nulle. Au niveau quantique, cette condition ne peut être remplie par des opérateurs mais peut servir à sélectionner le sous-espace de Fock correspondant à l'électromagnétisme de Maxwell en imposant que les bons états physiques $|\psi\rangle$ qui le constituent vérifient la condition

$$\langle \psi | \partial \cdot A | \psi \rangle = 0 \quad . \quad (\text{II.107})$$

Il suffit en fait qu'en tout point x de l'espace-temps

$$\partial_\mu \left\{ A_+^\mu(x) \equiv \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 \left\{ a(\mathbf{k}, \lambda) e^\mu(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ikx} \right\} \right\} |\psi\rangle = 0 \quad , \quad (\text{II.108})$$

ou encore plus simplement que

$$\{a(\mathbf{k}, 0) - a(\mathbf{k}, 3)\} |\psi\rangle = 0 \quad . \quad (\text{II.109})$$

Tout état physique est le produit tensoriel d'un vecteur $|\psi_T\rangle$ ne comportant que des quanta de polarisation transverse $e(\mathbf{k}, \lambda = 1, 2)$ et d'un vecteur $|\phi\rangle$ n'incluant que des excitations temporelles $e(\mathbf{k}, \lambda = 0)$ et longitudinales $e(\mathbf{k}, \lambda = 3)$

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle \otimes |\phi\rangle \quad . \quad (\text{II.110})$$

La condition (II.109) contraint fortement la structure de $|\phi\rangle$ qui comporte autant de quanta temporels que longitudinaux. Elle est l'équivalente quantique de l'égalité classique entre les polarisations ϵ_z et ϵ^0 de l'onde plane.

Le T-produit du potentiel vecteur est défini comme pour le champ scalaire par

$$T \{A_\mu(x) A_\nu(y)\} = \theta(x^0 - y^0) A_\mu(x) A_\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) A_\nu(y) A_\mu(x) \quad . \quad (\text{II.111})$$

Sa valeur dans le vide permet de définir le crochet temporel

$$A_\mu \overline{A_\nu}(y) \equiv \langle 0 | T \{A_\mu(x) A_\nu(y)\} | 0 \rangle \quad . \quad (\text{II.112})$$

Problème n° II–26 – Niveau [2] : La valeur du T -produit dans le vide est reliée au propagateur de Feynman du champ électromagnétique qui intervient dans la solution de l'équation (II.79). Il convient de déplacer les pôles du plan complexe selon la prescription habituelle qui traduit la propagation des solutions à énergie positive dans le futur et des solutions à énergie négative dans le passé. Démontrer rapidement que

$$G_F(x-y) = i \int \tilde{d}k \left\{ \theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \right\} . \quad (\text{II.113})$$

En utilisant le développement (II.104) du potentiel vecteur, établir que

$$A_\mu(x) \overline{A_\nu(y)} = i \eta_{\mu\nu} G_F(x-y) . \quad (\text{II.114})$$

5) Le champ fermionique de spin demi-entier.

L'équation de Dirac est du premier ordre et covariante de Lorentz. Elle fait naturellement apparaître un spineur ψ_α à quatre composantes ainsi que des solutions à énergie soit positive soit négative. Nous nous proposons de quantifier de manière canonique ce champ ψ qui obéit à la relation

$$\{i\gamma^\mu \partial_\mu - m\} \psi = \{i\rlap{\not{\partial}} - m\} \psi = 0 , \quad (\text{II.115})$$

où m désigne la masse du fermion – par exemple l'électron – et où γ^μ est une matrice 4×4 qui vérifie l'algèbre de Clifford

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \equiv \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 \eta_{\mu\nu} . \quad (\text{II.116})$$

5.1) Analyse Lagrangienne et tenseur impulsion-énergie.

Un Lagrangien associé à l'équation de Dirac (II.115) est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right\} - m \bar{\psi} \psi . \quad (\text{II.117})$$

En considérant que les composantes ψ_α et $\bar{\psi}_\alpha$ sont les bonnes variables canoniques – donc indépendantes les unes des autres – de la théorie, les équations d'Euler-Lagrange prennent la forme

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} \right\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} , \quad (\text{II.118})$$

soit encore

$$\partial_\mu \left\{ \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu)_\alpha \right\} = -\frac{i}{2} \{ (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \}_\alpha - m \bar{\psi}_\alpha . \quad (\text{II.119})$$

Nous retrouvons alors le complexe conjugué de l'équation (II.115)

$$\bar{\psi} \left\{ i \overleftarrow{\not{D}} + m \right\} = 0 . \quad (\text{II.120})$$

Problème n° II-27 – Niveau [1] : Dériver l'équation de Dirac à partir des équations d'Euler-Lagrange en prenant cette fois comme variable canonique $\bar{\psi}_\alpha$

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}_\alpha} \right\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} . \quad (\text{II.121})$$

Problème n° II-28 – Niveau [1] : Montrer qu'à une quadri-divergence près, le Lagrangien (II.117) se met sous la forme simplifiée

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left\{ i \overrightarrow{\not{D}} - m \right\} \psi . \quad (\text{II.122})$$

Dériver alors les équations d'Euler-Lagrange correspondantes et conclure.

Le tenseur impulsion-énergie s'écrit de manière générale en fonction des variables canoniques ψ_α et $\bar{\psi}_\alpha$ sous la forme

$$T^{\mu\nu} = \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_\alpha} \cdot \partial^\nu \psi_\alpha + \partial^\nu \bar{\psi}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}_\alpha} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (\text{II.123})$$

La conservation de l'impulsion-énergie n'est assurée que lorsque les équations du mouvement sont satisfaites – ici l'équation de Dirac – et le Lagrangien (II.117) est alors nul dans l'expression précédente en sorte que

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial^\nu \psi) - (\partial^\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \} \equiv \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi \} . \quad (\text{II.124})$$

Le Lagrangien de Dirac est également invariant sous les transformations de jauge globale au cours desquelles

$$\psi_\alpha \longrightarrow \psi'_\alpha = e^{i q \theta} \times \psi_\alpha . \quad (\text{II.125})$$

Problème n° II-29 – Niveau [1] : En considérant une transformation de jauge infinitésimale, construire le courant correspondant

$$J^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi , \quad (\text{II.126})$$

et montrer qu'il se conserve. Justifier le signe du terme précédent.

5.2) Seconde quantification du champ de Dirac.

La quantification canonique du champ de Dirac libre commence tout d'abord par le développement de Fourier de ψ en ondes planes

$$\psi(x) = \int \tilde{d}k \sum_{\alpha=1,2} \left\{ b(\mathbf{k}, \alpha) u(\mathbf{k}, \alpha) e^{-ikx} + d^\dagger(\mathbf{k}, \alpha) v(\mathbf{k}, \alpha) e^{ikx} \right\} , \quad (\text{II.127})$$

où cette fois l'élément différentiel invariant de Lorentz est donné par

$$\tilde{d}k = \frac{m}{\omega_{\mathbf{k}}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{m}{E} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} . \quad (\text{II.128})$$

Les solutions $u(\mathbf{k}, \alpha)$ à énergie positive et $v(\mathbf{k}, \alpha)$ à énergie négative ont été étudiées en cours de mécanique quantique relativiste. Au repos, l'électron de masse m est décrit par

$$u(\mathbf{0}, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u(\mathbf{0}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v(\mathbf{0}, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v(\mathbf{0}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (\text{II.129})$$

Les solutions correspondant à une particule d'impulsion k s'obtiennent grâce à

$$u(\mathbf{k}, \alpha) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} u(\mathbf{0}, \alpha) \quad \text{et} \quad v(\mathbf{k}, \alpha) = \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} v(\mathbf{0}, \alpha) . \quad (\text{II.130})$$

L'opérateur quantique impulsion associé au champ de Dirac est donné par l'intégrale sur l'espace physique du tenseur impulsion-énergie correspondant

$$P^\mu(t) = \int d^3\mathbf{x} \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \right\} . \quad (\text{II.131})$$

Problème n° II-30 – Niveau [3] : En utilisant le développement (II.127) et les propriétés des fonctions u et v , établir la relation

$$P^\mu = \int \tilde{d}k \, k^\mu \sum_{\alpha=1,2} \{b^\dagger(\mathbf{k}, \alpha) b(\mathbf{k}, \alpha) - d(\mathbf{k}, \alpha) d^\dagger(\mathbf{k}, \alpha)\} . \quad (\text{II.132})$$

L'énergie du vide est donc négative et divergente. Elle semble résulter de la contribution de toutes les solutions à énergie négative. Nous retrouvons en fait de manière déguisée la mer de Dirac. Cependant, dans le cadre de la quantification canonique des champs, le vide doit avoir une énergie nulle. Il nous faut donc introduire le produit normal et placer les opérateurs de création à gauche et les opérateurs qui annulent le vide à droite. Afin d'obtenir l'expression cohérente

$$P^\mu = \int \tilde{d}k \, k^\mu \sum_{\alpha=1,2} \{b^\dagger(\mathbf{k}, \alpha) b(\mathbf{k}, \alpha) + d^\dagger(\mathbf{k}, \alpha) d(\mathbf{k}, \alpha)\} , \quad (\text{II.133})$$

il convient alors d'introduire des relations **d'anticommutation** pour les champs fermioniques à la place des relations habituelles de commutation en sorte que maintenant

$$\{b(\mathbf{k}, \alpha), b^\dagger(\mathbf{p}, \beta)\} = \{d(\mathbf{k}, \alpha), d^\dagger(\mathbf{p}, \beta)\} = (2\pi)^3 \frac{E}{m} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta_{\alpha\beta} . \quad (\text{II.134})$$

Tous les autres anticommutateurs sont nuls.

Problème n° II-31 – Niveau [3] : Montrer que les relations d'anticommutation précédentes impliquent que

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{\alpha\beta} . \quad (\text{II.135})$$

L'opérateur quantique de charge électrique s'écrit

$$Q = q \int d^3\mathbf{x} : \psi^\dagger \psi : . \quad (\text{II.136})$$

Problème n° II-32 – Niveau [3] : Montrer tout d'abord que les solutions u et v vérifient l'identité

$$u^\dagger(-\mathbf{k}, \beta) v(\mathbf{k}, \alpha) = v^\dagger(-\mathbf{k}, \beta) u(\mathbf{k}, \alpha) = 0 . \quad (\text{II.137})$$

En déduire que la charge électrique se développe en

$$Q = \int \tilde{d}\mathbf{k} \sum_{\alpha=1,2} \{ (+q) b^\dagger(\mathbf{k}, \alpha) b(\mathbf{k}, \alpha) + (-q) d^\dagger(\mathbf{k}, \alpha) d(\mathbf{k}, \alpha) \} . \quad (\text{II.138})$$

Commenter ce résultat et donner une interprétation aux opérateurs b^\dagger et d^\dagger .

Nous terminerons cette présentation par une discussion du propagateur de Feynman. En théorie classique, la fonction d'onde de Dirac de l'électron au point \mathbf{x} et à l'instant x^0 peut se concevoir comme résultant de l'interférence des ondelettes rayonnées par la même fonction d'onde à un instant y^0 différent. Si l'onde a une énergie positive, cette application du théorème de **Huygens** prend la forme

$$\theta(x^0 - y^0) \psi^+(x) = i \int d^3\mathbf{y} S_F(x - y) \gamma^0 \psi^+(y) , \quad (\text{II.139})$$

alors que pour une onde à énergie négative, la propagation a lieu vers le passé avec

$$\theta(y^0 - x^0) \psi^-(x) = -i \int d^3\mathbf{y} S_F(x - y) \gamma^0 \psi^-(y) . \quad (\text{II.140})$$

Le propagateur de Feynman vérifie l'équation

$$\{i \not{\partial} - m\} S_F(x - y) = \delta^4(x - y) , \quad (\text{II.141})$$

et sa transformée de Fourier est donnée par

$$S_F(k) = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (\text{II.142})$$

Problème n° II-33 – Niveau [2] : En rappel du cours sur l'équation de Dirac, montrer que

$$\{S_F(x-y)\}_{\eta\xi} = -i \int \tilde{d}k \left\{ \theta(x^0 - y^0) \{\Lambda_+(k)\}_{\eta\xi} e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \{\Lambda_-(k)\}_{\eta\xi} e^{ik(x-y)} \right\}, \quad (\text{II.143})$$

où

$$\Lambda_+(k) = \frac{\not{k} + m}{2m} \quad \text{et} \quad \Lambda_-(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}. \quad (\text{II.144})$$

Le T-produit du champ $\psi_\eta(x)$ avec $\bar{\psi}_\xi(y)$ est défini par

$$T \{ \psi_\eta(x) \bar{\psi}_\xi(y) \} = \theta(x^0 - y^0) \psi_\eta(x) \bar{\psi}_\xi(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\xi(y) \psi_\eta(x). \quad (\text{II.145})$$

Problème n° II-34 – Niveau [2] : Calculer la valeur moyenne dans le vide du T-produit précédent et montrer que

$$\psi_\eta(x) \overline{\bar{\psi}_\xi(y)} \equiv \langle 0 | T \{ \psi_\eta(x) \bar{\psi}_\xi(y) \} | 0 \rangle = i \{S_F(x-y)\}_{\eta\xi}. \quad (\text{II.146})$$

Interpréter le propagateur de Feynman de l'électron.

Chapitre III

Champs en interaction et diagrammes de Feynman

Les champs libres étudiés dans le chapitre précédent interagissent maintenant entre eux. L'électrodynamique quantique servira de cadre à cette introduction. Nous commencerons par l'effet d'une petite perturbation H_1 sur l'évolution d'un système quantique par ailleurs régi par le Hamiltonien libre H_0 . Nous définirons alors les états asymptotiquement libres ainsi que la matrice S qui les couple entre eux et essaierons de justifier cette approche. Nous démontrerons ensuite le théorème de **Wick** et l'appliquerons finalement au calcul des amplitudes de transition pour aboutir aux règles de **Feynman**.

1) Théorie des perturbations et matrice S .

1.1) Schéma de Schrödinger et Hamiltonien libre H_0 .

Considérons un système quantique régi par le Hamiltonien H_0 et plaçons-nous dans le schéma de Schrödinger. L'oscillateur harmonique quantique nous servira une nouvelle fois d'illustration avec

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2} X^2 . \quad (\text{III.1})$$

Les opérateurs position X et impulsion P ne dépendent pas du temps si nous adoptons le point de vue de Schrödinger. Ce sont les états quantiques du système – vecteurs propres du Hamiltonien H_0 par exemple – qui évoluent en suivant la loi

$$|n, t\rangle = e^{-i\epsilon_n(t-t_0)} |n, t_0\rangle . \quad (\text{III.2})$$

Dans la mesure où la base précédente des états $|n, t\rangle$ diagonalise le Hamiltonien H_0

$$H_0 |n, t\rangle = \epsilon_n |n, t\rangle \quad \text{avec} \quad \epsilon_n = \text{constante} , \quad (\text{III.3})$$

la relation (III.2) peut s'écrire sous la forme

$$|n, t\rangle = e^{-iH_0(t-t_0)} |n, t_0\rangle . \quad (\text{III.4})$$

L'opérateur d'évolution défini par

$$U_0\{t-t_0\} \equiv e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (\text{III.5})$$

permet donc de connecter le même état quantique $|n\rangle$ pris aux deux instants différents t_0 et t et de traiter ainsi l'évolution temporelle de tout le système puisque

$$|\psi, t\rangle = U_0\{t-t_0\} |\psi, t_0\rangle \quad (\text{III.6})$$

quel que soit l'état $|\psi\rangle$ considéré.

1.2) Schéma de Heisenberg et Hamiltonien libre H_0 .

Dans le schéma de Heisenberg, les états quantiques ne varient pas au cours du temps et sont fixés à la valeur qu'ils occupent à un instant convenu – par exemple t_0 . L'évolution du système se manifeste par l'intermédiaire des opérateurs quantiques qui dépendent maintenant implicitement du temps. L'opérateur A_H du schéma de Heisenberg est relié à son avatar A_S du schéma de Schrödinger par

$$A_H(t) = e^{iH_0(t-t_0)} A_S(t) e^{-iH_0(t-t_0)} , \quad (\text{III.7})$$

et sa dérivée temporelle est alors donnée par l'équation (Ra.56) étudiée dans le chapitre de révision sur la mécanique lagrangienne et l'oscillateur harmonique. Dans le cas où l'opérateur A_S n'a aucune dépendance temporelle, nous pouvons noter plus simplement

$$A(t) = e^{iH_0(t-t_0)} A e^{-iH_0(t-t_0)} . \quad (\text{III.8})$$

L'opérateur $A(t)$ du schéma de Heisenberg correspond à l'instant t_0 à l'opérateur constant $A \equiv A(t_0)$ du schéma de Schrödinger. Une première illustration de la relation (III.8) nous est donnée par les opérateurs position $X(t)$ et impulsion $P(t)$ de l'oscillateur harmonique. Le champ scalaire neutre $\varphi(\mathbf{x}, t)$ du chapitre II en est un autre exemple. En tout point \mathbf{x} et à tout instant t , il se décompose en fonction des opérateurs de création $a^\dagger(\mathbf{k})$ et d'annihilation $a(\mathbf{k})$

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \tilde{d}\mathbf{k} \left\{ a(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right\} . \quad (\text{III.9})$$

La dépendance spatio-temporelle du champ φ ne s'opère qu'à travers les exponentielles imaginaires $\exp(\pm i\mathbf{k}\mathbf{x})$. Le Hamiltonien du champ scalaire neutre libre ne dépend pas du temps puisqu'il s'écrit

$$H_0 = \int \tilde{d}\mathbf{k} \, \omega_{\mathbf{k}} \, a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) . \quad (\text{III.10})$$

Problème n° III-1 – Niveau [2] : Montrer rapidement que les opérateurs de création $a^\dagger(\mathbf{k})$ et d'annihilation $a(\mathbf{k})$ entretiennent avec le Hamiltonien H_0 les relations de commutation

$$[H_0, a^\dagger(\mathbf{k})] = \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) \quad \text{et} \quad [H_0, a(\mathbf{k})] = -\omega_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k}) . \quad (\text{III.11})$$

En déduire que la dérivée temporelle du champ φ au point spatial \mathbf{x} est donnée par

$$\left. \frac{d\varphi(\mathbf{x}, t)}{dt} \right|_{\mathbf{x}} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} = i [H_0, \varphi] . \quad (\text{III.12})$$

Problème n° III-2 – Niveau [2] : A partir de l'expression (Rb.50), montrer que la relation (III.12) conduit à

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0(t-t_0)} \varphi(\mathbf{x}, t_0) e^{-iH_0(t-t_0)} , \quad (\text{III.13})$$

et que l'évolution de l'opérateur champ scalaire $\varphi(\mathbf{x}, t)$ au point spatial \mathbf{x} suit l'équation (III.8). On pourra décomposer l'intervalle temporel $(t - t_0)$ en N segments identiques puis faire tendre N vers l'infini.

Le champ scalaire neutre $\varphi(\mathbf{x}, t)$ assujetti à la relation (III.13) évolue sous l'action du Hamiltonien libre H_0 indépendant du temps. Ce champ sera noté ultérieurement φ_{free} car il correspond au cas libre.

1.3) Cas général et opérateur d'évolution U .

Cette partie généralise la discussion précédente dans le cas où le Hamiltonien H_S du schéma de Schrödinger dépend explicitement du temps ¶ et qu'il n'est plus possible de le diagonaliser dans une seule et même base de vecteurs propres au cours du temps. Les opérateurs $H_S(t')$ et $H_S(t'')$ pris aux deux instants différents t' et t'' ne commutent plus nécessairement entre eux de sorte que la relation d'exponentiation (Rb.50) ne peut pas être utilisée. En toute généralité, il convient donc de raisonner directement sur l'opérateur d'évolution $U\{t \leftarrow t_0\}$ qui cesse ici d'être égal à $\exp\{-iH_S(t - t_0)\}$ mais qui obéit toujours à l'équation différentielle

$$i \frac{dU}{dt} = H_S \times U . \quad (\text{III.14})$$

Cet opérateur unitaire suit également certaines règles évidentes comme

$$U\{t_0 \leftarrow t\} = U^{-1}\{t \leftarrow t_0\} = U^\dagger\{t \leftarrow t_0\} , \quad (\text{III.15})$$

ou encore

$$U\{t_3 \leftarrow t_1\} = U\{t_3 \leftarrow t_2\} \times U\{t_2 \leftarrow t_1\} . \quad (\text{III.16})$$

En schéma de Heisenberg, l'espace vectoriel des états quantiques est fixé – par exemple à l'instant t_0 – et ce sont les opérateurs qui supportent complètement l'évolution du système avec

$$A_H(t) = U^{-1}\{t \leftarrow t_0\} \times A_S(t) \times U\{t \leftarrow t_0\} . \quad (\text{III.17})$$

¶ Ce qui encore une fois n'est pas le cas de l'oscillateur harmonique, ni fort heureusement des champs libres de la seconde quantification.

Les opérateurs $A_H(t)$ – schéma de Heisenberg – et $A_S(t)$ – schéma de Schrödinger – coïncident à l’instant t_0 puisque $U\{t_0 \leftarrow t_0\} \equiv 1$ mais leur évolution est différente.

Problème n° III-3 – Niveau [2] : Montrer que l’opérateur A_H obéit à l’équation différentielle

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{\partial A_H}{\partial t} + i [H_H, A_H] , \quad (\text{III.18})$$

où sa dérivée partielle est définie par

$$\frac{\partial A_H}{\partial t} \equiv U^{-1}\{t \leftarrow t_0\} \times \frac{dA_S}{dt} \times U\{t \leftarrow t_0\} , \quad (\text{III.19})$$

et où le Hamiltonien H_H est exprimé dans le schéma de Heisenberg grâce à la relation (III.17). Pourquoi dans le cas libre H_H et H_S sont-ils égaux ?

1.4) Schéma d’interaction et matrice S .

En règle générale, il n’est pas possible de calculer l’opérateur d’évolution $U\{t \leftarrow t_0\}$. Prédire le comportement d’un système quantique quelconque est donc hors de notre portée. Cependant, il est possible de dériver de manière approchée l’opérateur d’évolution U dans le cas où le Hamiltonien complet H qui régit le système est peu différent du Hamiltonien H_0 libre pour lequel une base de vecteurs propres a été trouvée

$$H = H_0 + H_1 . \quad (\text{III.20})$$

Il s’agit dès lors de développer de manière perturbative U en fonction de l’opérateur libre U_0 dans le cas où le terme d’interaction H_1 est petit devant H_0 . Nous cherchons une solution sous la forme

$$U\{t_2 \leftarrow t_1\} = U_0\{t_2 \leftarrow t_1\} \times U_i\{t_2 \leftarrow t_1\} . \quad (\text{III.21})$$

Nous supposons de surcroît – sans nuire à la généralité de la discussion – que la perturbation H_1 est nulle avant l’instant t_0 en sorte que

$$U\{t_0 \leftarrow t\} = U_0\{t_0 \leftarrow t\} \quad \forall t \leq t_0 . \quad (\text{III.22})$$

Jusqu’à l’instant t_0 , le Hamiltonien libre H_0 gouverne le comportement du système et l’opérateur U_i est égal à l’identité. A partir de t_0 , l’opérateur U_i commence à évoluer d’autant plus lentement que la perturbation H_1 est faible.

Problème n° III-4 – Niveau [1] : Les opérateurs d'évolution U_0 et U obéissent respectivement aux équations différentielles

$$i \frac{dU_0}{dt} = H_{0,S} \times U_0 = H_0 \times U_0 , \quad (\text{III.23})$$

et

$$i \frac{dU}{dt} = H_S(t) \times U , \quad (\text{III.24})$$

où les Hamiltoniens $H_{0,S} \equiv H_0$ et H_S sont exprimés en schéma de Schrödinger. Montrer que l'opérateur d'interaction U_i suit la relation

$$i \frac{dU_i}{dt} = \{U_0^{-1}\{t \leftarrow t_0\} \times H_{1,S}(t) \times U_0\{t \leftarrow t_0\}\} \times U_i = H_I(t) \times U_i . \quad (\text{III.25})$$

On remarquera que l'opérateur H_I n'est autre que le Hamiltonien d'interaction $H_{1,S}$ du schéma de Schrödinger que l'on fait évoluer en schéma de Heisenberg sous l'effet de U_0 seul – et donc de son Hamiltonien libre associé H_0 – comme si l'effet de la perturbation avait disparu. L'opérateur H_I s'exprime donc en fonction des opérateurs A_{free} du schéma de Heisenberg libre

$$A_{\text{free}}(t) = e^{iH_0(t-t_0)} A_S(t) e^{-iH_0(t-t_0)} . \quad (\text{III.26})$$

En seconde quantification, le Hamiltonien d'interaction H_I s'exprime dès lors en fonction des champs libres φ_{free} dont nous connaissons le développement en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.

Problème n° III-5 – Niveau [1] : Revenons un instant au cas de l'oscillateur harmonique que nous perturbons à l'aide du potentiel quartique ϵX^4 très petit devant le Hamiltonien libre H_0

$$H_S = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2} X^2 + \epsilon(t) X^4 . \quad (\text{III.27})$$

Montrer que le Hamiltonien d'interaction se met sous la forme

$$H_I(t) = \epsilon(t) X_{\text{free}}^4 . \quad (\text{III.28})$$

Les opérateurs position X_{free} et impulsion P_{free} dépendent désormais du temps – puisqu'ils sont dérivés en schéma de Heisenberg libre – et obéissent aux équations différentielles (Ra.57)

$$\dot{X}_{\text{free}} = \frac{P_{\text{free}}}{m} \quad \text{et} \quad \dot{P}_{\text{free}} = -k X_{\text{free}} . \quad (\text{III.29})$$

La factorisation (III.21) n'est pas anodine ! En nous plaçant en schéma de Heisenberg libre, nous allons en effet continuer à faire évoluer tous les opérateurs quantiques sous l'effet de H_0 seul et ne considérerons que les entités $A_{\text{free}}(t)$ du cas sans interaction dont nous connaissons le comportement. Par contre, l'interaction H_1 engendre une évolution supplémentaire U_i qui – **par convention** – affecte les vecteurs $|n, t\rangle$ de l'espace des états quantiques accessibles au système. En l'absence de toute interaction, ces vecteurs resteraient gelés dans leur état à l'instant t_0 . Nous sommes dans **le schéma d'interaction** qui est un moyen terme entre les schémas de Schrödinger et de Heisenberg puisque les opérateurs quantiques supportent d'une part l'évolution due à H_0 seul – comme dans le cas libre – alors que l'interaction entraîne d'autre part une lente dérive des vecteurs $|n, t\rangle$ de l'espace des états. La solution intégrale de l'équation (III.25) s'écrit

$$U_i\{t \leftarrow t_0\} = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t') \times U_i\{t' \leftarrow t_0\} dt' , \quad (\text{III.30})$$

et se développe de manière perturbative en puissance de l'interaction H_I sous la forme

$$\begin{aligned} U_i\{t \leftarrow t_0\} &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + \\ &+ (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t') \times H_I(t'') + \\ &+ (-i)^3 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' H_I(t') \times H_I(t'') \times H_I(t''') + \text{etc} . \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Problème n° III-6 – Niveau [3] : En considérant le second ordre du développement précédent, démontrer rapidement que

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) \times H_I(t_2) &= \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) \times H_I(t_1) \quad (\text{III.32}) \\
 &= \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 T \{H_I(t_1) \times H_I(t_2)\} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{H_I(t_1) \times H_I(t_2)\} ,
 \end{aligned}$$

où les termes du T -produit sont ordonnés chronologiquement par temps croissant de la droite vers la gauche. D'une manière générale, nous aimerions également établir que

$$\begin{aligned}
 \text{ordre } n &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \times H_I(t_2) \dots \times H_I(t_n) \quad (\text{III.33}) \\
 &= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n T \{H_I(t_1) \times H_I(t_2) \dots \times H_I(t_n)\} .
 \end{aligned}$$

Montrer que lorsque l'on intègre sur l'hypercube à n dimensions s'étendant dans chaque direction t_i de t_0 à t – l'indice i varie de 1 à n – la suite $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ peut être ordonnée chronologiquement de $n!$ manières différentes correspondant chacune à une permutation différente σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en l'ensemble $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$. On remarquera alors avec profit que

$$H_I(t_{\sigma(1)}) \times H_I(t_{\sigma(2)}) \dots \times H_I(t_{\sigma(n)}) = T \{H_I(t_1) \times H_I(t_2) \dots \times H_I(t_n)\} \quad (\text{III.34})$$

Nous venons d'établir que l'opérateur d'interaction U_i peut se développer de manière formelle sous la forme

$$U_i\{t \leftarrow t_0\} = T \left\{ e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \right\} . \quad (\text{III.35})$$

Ce schéma d'interaction est approprié pour décrire une collision entre particules au sein d'un accélérateur puisque celles-ci ne se voient finalement que dans les zones d'interaction où les faisceaux se croisent. En dehors du moment où les paquets d'onde se mélangent et entrent en collision, les particules se propagent de manière libre. L'instant t_0 correspond au début de l'interaction et t à la fin. Puisque nous utiliserons essentiellement des ondes planes, nous ferons tendre formellement t_0 vers $-\infty$ et t vers $+\infty$ en considérant que la

région d'interaction occupe tout l'espace. En raison du terme d'interaction H_I , un état initial $|i, t_0\rangle$ se transforme à l'instant t en

$$|i, t\rangle = U_i\{t \leftarrow t_0\} |i, t_0\rangle \quad , \quad (\text{III.36})$$

et peut avoir une composante non-nulle suivant le vecteur $|f, t_0\rangle$ ouvrant par là-même la possibilité à une transition entre l'état i et l'état f . On définit alors la matrice d'interaction S par

$$S \equiv U_i\{+\infty \leftarrow -\infty\} \quad . \quad (\text{III.37})$$

Cet opérateur décrit la rotation interne de l'espace des états libres $|n, t_0\rangle$ sous l'effet de l'interaction H_I .

Problème n° III-7 – Niveau [1] : Dans le cadre de la théorie des champs, montrer que

$$S = T \left\{ \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t) \right\} \right\} \quad , \quad (\text{III.38})$$

où le Hamiltonien d'interaction s'écrit en fonction des champs libres φ_{free} par l'intermédiaire de la densité \mathcal{H}_I

$$H_I(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}_I(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (\text{III.39})$$

En déduire que

$$S = T \left\{ \exp \left\{ -i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right\} \right\} \quad . \quad (\text{III.40})$$

En physique des particules, le Lagrangien de l'électrodynamique quantique associant électrons et photons prend la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\text{photons}) + \mathcal{L}_0(\text{electrons} - \text{positrons}) + \mathcal{L}_I(\text{interaction}) \quad . \quad (\text{III.41})$$

La contribution correspondant au champ électromagnétique libre est donnée par

$$\mathcal{L}_0(\text{photons}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad , \quad (\text{III.42})$$

alors que le terme associé au champ libre fermionique d'électrons et de positrons s'écrit

$$\mathcal{L}_0(\text{electrons} - \text{positrons}) = \bar{\psi} \left\{ i \vec{\partial} - m \right\} \psi \quad . \quad (\text{III.43})$$

L'interaction entre les électrons et les photons est décrite par le couplage entre le potentiel vecteur A_μ du champ électromagnétique et le courant fermionique J^μ

$$\mathcal{L}_I(\text{interaction}) = - \{J^\mu \equiv e : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : \} \times A_\mu = -e : \bar{\psi} \not{A} \psi : , \quad (\text{III.44})$$

où $e \equiv q$ est la charge électrique de **l'électron** et où l'on reconnaît le produit normal dans la définition de l'opérateur courant J^μ .

Problème n° III-8 – Niveau [1] : Montrer que la densité de Hamiltonien d'interaction est simplement donnée par

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = e : \bar{\psi} \not{A} \psi : . \quad (\text{III.45})$$

Interpréter physiquement le signe de ce résultat. On remarquera une fois encore que dans le schéma d'interaction, les densités \mathcal{H}_I et \mathcal{L}_I sont exprimées en fonction des champs libres φ_{free} .

Problème n° III-9 – Niveau [1] : En déduire alors la matrice S de l'électrodynamique quantique associant électrons et photons

$$S = T \left\{ \exp \left\{ -ie \int d^4x : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) \right\} \right\} . \quad (\text{III.46})$$

2) Le théorème de Wick.

La définition (III.46) de la matrice S fait intervenir le T-produit ou produit chronologique du Lagrangien d'interaction. En 1949, **Dyson** a démontré que le T-produit de n champs quantiques pouvait être développé en une série de termes composés chacun d'un produit normal et de propagateurs. La démonstration de Dyson a été ensuite généralisée et formalisée par **Wick** en 1950. La série de produits normaux conduit naturellement – enfin plutôt de manière algébrique – aux diagrammes de **Feynman**. Cette partie est essentiellement constituée de petits exercices.

2.1) Cas bosonique.

Considérons le champ bosonique φ_i qui peut représenter un champ scalaire neutre φ , un champ scalaire chargé φ ou son hermitien conjugué φ^\dagger , ou encore la composante A_α du champ électromagnétique. Le champ φ_i est pris au point spatio-temporel x_i associé à l'instant t_i . Il se décompose en opérateurs d'annihilation – partie φ_i^+ à énergie positive – et en opérateurs de création – partie φ_i^- à énergie négative – en sorte que

$$\varphi_i = \varphi_i^+ + \varphi_i^- , \quad (\text{III.47})$$

avec

$$\varphi_i^+ |0\rangle = 0 \quad \text{alors que} \quad \langle 0| \varphi_i^- = 0 . \quad (\text{III.48})$$

Dans le cas du champ scalaire neutre que nous avons étudié dans le chapitre **II**, cette décomposition prend la forme

$$\varphi(x) = \left\{ \varphi^+(x) \equiv \int \tilde{d}k a(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right\} + \left\{ \varphi^-(x) \equiv \int \tilde{d}k a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right\} . \quad (\text{III.49})$$

On considère tout d'abord le produit $\varphi_1 \varphi_2$ des deux champs φ_1 et φ_2 . Leur T-produit est défini par

$$T \{ \varphi_1 \varphi_2 \} = \theta(t_1 - t_2) \varphi_1 \varphi_2 + \theta(t_2 - t_1) \varphi_2 \varphi_1 , \quad (\text{III.50})$$

alors que le produit normal $: \varphi_1 \varphi_2 :$ s'obtient en plaçant les opérateurs de création φ_i^- à gauche et les opérateurs d'annihilation φ_i^+ à droite. Il se décompose alors en

$$\begin{aligned} : \varphi_1 \varphi_2 : &= : \{ \varphi_1^+ + \varphi_1^- \} \{ \varphi_2^+ + \varphi_2^- \} : \\ &= : \varphi_1^+ \varphi_2^+ : + : \varphi_1^+ \varphi_2^- : + : \varphi_1^- \varphi_2^+ : + : \varphi_1^- \varphi_2^- : , \\ &= \varphi_1^+ \varphi_2^+ + \varphi_2^- \varphi_1^+ + \varphi_1^- \varphi_2^+ + \varphi_1^- \varphi_2^- . \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Problème n° III–10 – Niveau [1] : Montrer que

$$T \{ \varphi_1 \varphi_2 \} = : \varphi_1 \varphi_2 : + \langle 0| T \{ \varphi_1 \varphi_2 \} |0\rangle = : \varphi_1 \varphi_2 : + \overline{\varphi_1 \varphi_2} , \quad (\text{III.52})$$

ainsi que

$$T \{ : \varphi_1 \varphi_2 : \} = : \varphi_1 \varphi_2 : . \quad (\text{III.53})$$

Problème n° III-11 – Niveau [2] : On considère le T -produit des trois champs φ_1 , φ_2 et φ_3 . Au sein d'un tel T -produit, l'ordre des termes importe peu puisque les champs seront de toute manière et par définition ordonnés chronologiquement en sorte que

$$T\{\varphi_3\varphi_1\varphi_2\} = T\{\varphi_2\varphi_3\varphi_1\} = T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = \text{etc} \dots \quad (\text{III.54})$$

On choisit de mettre en dernière position le champ correspondant au moment le plus antérieur. Ce rôle est tenu ici par φ_3 pour lequel t_3 est inférieur à t_1 et à t_2 . Il s'ensuit donc que

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = T\{\varphi_1\varphi_2\} \varphi_3 \quad (\text{III.55})$$

Montrer tout d'abord que

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = :\varphi_1\varphi_2:\varphi_3^- + :\varphi_1\varphi_2:\varphi_3^+ + \overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3 \quad (\text{III.56})$$

Justifier l'égalité

$$:\varphi_1\varphi_2:\varphi_3^+ \equiv :\varphi_1\varphi_2\varphi_3^+:\quad , \quad (\text{III.57})$$

et établir que

$$:\varphi_1\varphi_2:\varphi_3^- = :\varphi_1\varphi_2\varphi_3^-: + \overline{\varphi_2\varphi_3}\varphi_1 + \overline{\varphi_1\varphi_3}\varphi_2 \quad (\text{III.58})$$

En déduire finalement que

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = :\varphi_1\varphi_2\varphi_3: + \overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3 + \overline{\varphi_1\varphi_3}\varphi_2 + \overline{\varphi_2\varphi_3}\varphi_1 \quad (\text{III.59})$$

La dernière égalité peut aussi s'écrire

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = :\varphi_1\varphi_2\varphi_3: + :\overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3: + :\overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}: + :\varphi_1\overline{\varphi_2\varphi_3}: \quad (\text{III.60})$$

On remarquera avec profit que puisque t_3 est inférieur à t_1 , le propagateur $\overline{\varphi_1\varphi_3}$ n'est autre que le commutateur de φ_1^+ avec φ_3^-

$$\overline{\varphi_1\varphi_3} \equiv \langle 0|T\{\varphi_1\varphi_3\}|0\rangle = [\varphi_1^+, \varphi_3^-] \quad (\text{III.61})$$

Il en va de même pour le propagateur $\overline{\varphi_2\varphi_3}$.

Problème n° III–12 – Niveau [3] : Plus difficile est le cas du T -produit des quatre champs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 . Là encore, nous décidons d'appeler φ_4 le champ correspondant à l'instant le plus antérieur avec t_4 inférieur à t_1, t_2 et t_3 . Nous pouvons donc écrire que

$$T \{ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \} = T \{ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \} \varphi_4 . \quad (\text{III.62})$$

En procédant comme dans l'exercice précédent – mais avec une attention redoublée – on aboutira à la relation

$$\begin{aligned} T \{ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \} &= : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : \\ &+ \overline{\varphi_1 \varphi_2} : \varphi_3 \varphi_4 : + \overline{\varphi_1 \varphi_3} : \varphi_2 \varphi_4 : + \overline{\varphi_1 \varphi_4} : \varphi_2 \varphi_3 : \\ &+ \overline{\varphi_2 \varphi_3} : \varphi_1 \varphi_4 : + \overline{\varphi_2 \varphi_4} : \varphi_1 \varphi_3 : + \overline{\varphi_3 \varphi_4} : \varphi_1 \varphi_2 : \\ &+ \overline{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_3 \varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_4 \varphi_2 \varphi_3} . \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

2.2) Cas fermionique.

Considérons maintenant le champ fermionique ψ_i qui représentera une composante ψ_α ou $\bar{\psi}_\beta$ du spineur de Dirac ψ étudié dans le chapitre II. Ce champ est par essence un objet anti-commutant et nous le prenons au point spatio-temporel x_i associé à l'instant t_i . Il se décompose également en une partie ψ_i^+ à énergie positive constituée d'opérateurs d'annihilation ainsi qu'en une partie ψ_i^- à énergie négative associée à des opérateurs de création

$$\psi_i = \psi_i^+ + \psi_i^- , \quad (\text{III.64})$$

avec

$$\psi_i^+ |0\rangle = 0 \quad \text{alors que} \quad \langle 0 | \psi_i^- = 0 . \quad (\text{III.65})$$

Pour le spineur ψ , cette décomposition prend la forme

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left\{ \psi^+(x) \equiv \int \tilde{d}k \sum_{\alpha=1,2} b(\mathbf{k}, \alpha) u(\mathbf{k}, \alpha) e^{-ikx} \right\} \\ &+ \left\{ \psi^-(x) \equiv \int \tilde{d}k \sum_{\alpha=1,2} d^\dagger(\mathbf{k}, \alpha) v(\mathbf{k}, \alpha) e^{ikx} \right\} , \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

alors que pour son conjugué $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, elle s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \left\{ \bar{\psi}^-(x) \equiv \int \tilde{d}k \sum_{\alpha=1,2} b^\dagger(\mathbf{k}, \alpha) \bar{u}(\mathbf{k}, \alpha) e^{ikx} \right\} \\ &+ \left\{ \bar{\psi}^+(x) \equiv \int \tilde{d}k \sum_{\alpha=1,2} d(\mathbf{k}, \alpha) \bar{v}(\mathbf{k}, \alpha) e^{-ikx} \right\} . \end{aligned} \quad (\text{III.67})$$

Le T-produit des deux champs ψ_1 et ψ_2 est défini par

$$T \{ \psi_1 \psi_2 \} = \theta(t_1 - t_2) \psi_1 \psi_2 - \theta(t_2 - t_1) \psi_2 \psi_1 , \quad (\text{III.68})$$

alors que le produit normal $: \psi_1 \psi_2 :$ s'obtient en plaçant les opérateurs de création ψ_i^- à gauche et les opérateurs d'annihilation ψ_i^+ à droite. Il se décompose alors en

$$\begin{aligned} : \psi_1 \psi_2 : &= : \{ \psi_1^+ + \psi_1^- \} \{ \psi_2^+ + \psi_2^- \} : \\ &= : \psi_1^+ \psi_2^+ : + : \psi_1^+ \psi_2^- : + : \psi_1^- \psi_2^+ : + : \psi_1^- \psi_2^- : , \\ &= \psi_1^+ \psi_2^+ - \psi_2^- \psi_1^+ + \psi_1^- \psi_2^+ + \psi_1^- \psi_2^- . \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

Problème n° III-13 – Niveau [1] : *Montrer que*

$$T \{ \psi_1 \psi_2 \} = : \psi_1 \psi_2 : + \langle 0 | T \{ \psi_1 \psi_2 \} | 0 \rangle = : \psi_1 \psi_2 : + \overline{\psi_1} \psi_2 , \quad (\text{III.70})$$

ainsi que

$$T \{ : \psi_1 \psi_2 : \} = : \psi_1 \psi_2 : = - : \psi_2 \psi_1 : . \quad (\text{III.71})$$

Problème n° III–14 – Niveau [2] : On considère également le T -produit des trois champs ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 . L'instant t_3 étant choisi comme le plus antérieur, il est inférieur à t_1 et à t_2 en sorte que

$$T\{\psi_1\psi_2\psi_3\} = T\{\psi_1\psi_2\}\psi_3 . \quad (\text{III.72})$$

Remarquons en passant que l'ordre des termes importe peu au sein du T -produit précédent **à la signature près de leur permutation** puisque

$$T\{\psi_1\psi_2\psi_3\} = -T\{\psi_1\psi_3\psi_2\} = T\{\psi_3\psi_1\psi_2\} = -T\{\psi_3\psi_2\psi_1\} = \text{etc} \dots . \quad (\text{III.73})$$

Montrer tout d'abord que

$$T\{\psi_1\psi_2\psi_3\} = :\psi_1\psi_2:\psi_3^- + :\psi_1\psi_2:\psi_3^+ + \overline{\psi_1\psi_2}\psi_3 . \quad (\text{III.74})$$

Justifier l'égalité

$$:\psi_1\psi_2:\psi_3^+ \equiv : \psi_1\psi_2\psi_3^+ : , \quad (\text{III.75})$$

et établir que

$$:\psi_1\psi_2:\psi_3^- = :\psi_1\psi_2\psi_3^- : + \overline{\psi_2\psi_3}\psi_1 - \overline{\psi_1\psi_3}\psi_2 . \quad (\text{III.76})$$

En déduire finalement que

$$T\{\psi_1\psi_2\psi_3\} = :\psi_1\psi_2\psi_3: + \overline{\psi_1\psi_2}\psi_3 - \overline{\psi_1\psi_3}\psi_2 + \overline{\psi_2\psi_3}\psi_1 . \quad (\text{III.77})$$

La dernière égalité peut aussi s'écrire

$$T\{\psi_1\psi_2\psi_3\} = :\psi_1\psi_2\psi_3: + :\overline{\psi_1\psi_2}\psi_3: + :\overline{\psi_1\psi_2\psi_3}: + :\psi_1\overline{\psi_2\psi_3}: , \quad (\text{III.78})$$

où les champs sont agrafés deux à deux directement à l'intérieur du produit normal.

On remarquera avec profit que puisque t_3 est inférieur à t_1 , le propagateur $\overline{\psi_1\psi_3}$ n'est autre que le l'anti-commutateur de ψ_1^+ avec ψ_3^-

$$\overline{\psi_1\psi_3} \equiv \langle 0|T\{\psi_1\psi_3\}|0\rangle = \{\psi_1^+, \psi_3^-\} . \quad (\text{III.79})$$

Il en va de même pour le propagateur $\overline{\psi_2\psi_3}$.

Problème n° III-15 – Niveau [3] : Pour terminer, je vous propose d'examiner le cas du T-produit des quatre champs ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 . Là encore, nous décidons d'appeler ψ_4 le champ correspondant à l'instant le plus antérieur avec t_4 inférieur à t_1, t_2 et t_3 . Nous pouvons donc écrire que

$$T \{ \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \} = T \{ \psi_1 \psi_2 \psi_3 \} \psi_4 . \quad (\text{III.80})$$

Etablir alors la relation

$$\begin{aligned} T \{ \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \} &= : \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 : \\ &+ \overline{\psi_1 \psi_2} : \psi_3 \psi_4 : - \overline{\psi_1 \psi_3} : \psi_2 \psi_4 : + \overline{\psi_1 \psi_4} : \psi_2 \psi_3 : \\ &+ \overline{\psi_2 \psi_3} : \psi_1 \psi_4 : - \overline{\psi_2 \psi_4} : \psi_1 \psi_3 : + \overline{\psi_3 \psi_4} : \psi_1 \psi_2 : \\ &+ \overline{\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4} - \overline{\psi_1 \psi_3 \psi_2 \psi_4} + \overline{\psi_1 \psi_4 \psi_2 \psi_3} . \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

2.3) Cas général.

Cette fois, φ_i désigne un champ quelconque de nature fermionique ou bosonique. Quand nous réarrangerons l'ordre des termes d'un produit normal ou d'un T-produit, nous prendrons garde à introduire un signe - chaque fois que nous permuterons deux champs fermioniques entre eux. Le théorème de Wick établit que

$$\begin{aligned} T \{ \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \} &\equiv T \{ 1 2 \dots n \} = : 1 2 \dots n : \\ &+ \sum_{\text{une seule agrafe}} : \overline{1 2} 3 4 \dots n : + : \overline{1 2} 3 4 \dots n : + \text{etc} \dots \\ &+ : \overline{1 2} 3 4 5 \dots n : + : \overline{1 2} 3 4 5 \dots n : + \text{etc} \dots \\ &+ \sum_{\text{deux agrafes}} : \overline{1 2} \overline{3 4} 5 6 \dots n : + : \overline{1 2} \overline{3 4} 5 6 \dots n : + \text{etc} \dots \\ &+ \sum_{\text{trois agrafes}} : \overline{1 2} \overline{3 4} \overline{5 6} 7 8 \dots n : + : \overline{1 2} \overline{3 4} \overline{5 6} 7 8 \dots n : + \text{etc} \dots \\ &+ \text{etc} \dots . \end{aligned} \quad (\text{III.82})$$

Il se démontre par induction en admettant que la relation précédente est vraie à l'ordre n et en considérant ensuite le T-produit de $n + 1$ champs dans lequel on aura pris soin de placer en dernière position φ_{n+1} puisqu'il correspond à l'instant t_{n+1} le plus antérieur. Comme précédemment, il est immédiat de montrer que

$$T \{ \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \varphi_{n+1} \} = T \{ \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \} \varphi_{n+1} \quad (\text{III.83})$$

et que

$$:\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n:\varphi_{n+1}^+ = :\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\varphi_{n+1}^+:\quad . \quad (\text{III.84})$$

Dans le produit $:\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n:\varphi_{n+1}^-$, l'opérateur de création φ_{n+1}^- n'est pas à sa place. En le décalant à l'endroit approprié, il produit le propagateur

$$\overline{\varphi_i\varphi_{n+1}} = \langle 0|T\{\varphi_i\varphi_{n+1}\}|0\rangle = [\varphi_i^+, \varphi_{n+1}^-] \quad \text{ou} \quad \{\varphi_i^+, \varphi_{n+1}^-\} \quad (\text{III.85})$$

chaque fois qu'il traverse le champ φ_i^+ . L'anti-commutateur correspond au cas où les champs φ_i^+ et φ_{n+1}^- sont tous deux fermioniques. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} :\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n:\varphi_{n+1}^- &= :\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\varphi_{n+1}^-: + \\ + :\varphi_1\varphi_2\ldots\overline{\varphi_n\varphi_{n+1}}: &+ :\varphi_1\varphi_2\ldots\overline{\varphi_{n-1}\varphi_n\varphi_{n+1}}: + \\ &+ \text{etc} \ldots \\ &+ :\overline{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\varphi_{n+1}}: \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

La matrice S (III.46) de l'électrodynamique quantique associant électrons et photons admet comme développement – au second ordre en la charge électrique e – l'expression

$$S\{\text{second ordre}\} = \frac{(-ie)^2}{2} \int d^4x \int d^4y \mathcal{F}(x, y) \quad , \quad (\text{III.87})$$

où la fonction à intégrer est le T-produit

$$\mathcal{F}(x, y) = T\{:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x):A_\mu(x)\times:\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y):A_\nu(y)\} \quad . \quad (\text{III.88})$$

L'application du théorème de Wick conduit à développer la fonction $\mathcal{F}(x, y)$ en une série de produits normaux où chaque terme correspond à un diagramme de **Feynman** particulier

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, y) &= :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu(y): \\ &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)}A_\nu(y): \\ &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)}A_\nu(y): \\ &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)}A_\nu(y): \\ &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)}A_\nu(y): \\ &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)}A_\nu(y): \\ &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)}A_\nu(y): \\ &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)}A_\nu(y): \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

Le terme $\psi(x)$ correspond à une ligne fermionique aboutissant au point spatio-temporel x . Pour son conjugué $\bar{\psi}(x)$, la ligne fermionique part de x . Le champ électromagnétique

$A_\mu(x)$ est associé à une ligne ondulée dont une extrémité est fixée en x . Le propagateur fermionique est défini par

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} = \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle = i \{ S_F(x-y) \} , \quad (\text{III.90})$$

et est graphiquement décrit par un segment de ligne orientée allant de y à x . Dans le cas du propagateur du photon

$$\overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} = \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A_\nu(y) \} | 0 \rangle = i \eta_{\mu\nu} G_F(x-y) , \quad (\text{III.91})$$

la ligne ondulée connectant y et x n'est pas orientée.

Problème n° III-16 – Niveau [3] : La valeur dans le vide du T -produit d'un champ fermionique avec un champ bosonique est nulle. Démontrer la relation (III.89) et établir ensuite que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, y) &= : \bar{\psi}_\alpha(x) \{ \gamma^\mu \}_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\eta(y) \{ \gamma^\nu \}_{\eta\xi} \psi_\xi(y) A_\mu(x) A_\nu(y) : \quad (\text{III.92}) \\ &+ i : \bar{\psi}_\alpha(x) \{ \gamma^\mu \}_{\alpha\beta} \{ S_F(x-y) \}_{\beta\eta} \{ \gamma^\nu \}_{\eta\xi} \psi_\xi(y) A_\mu(x) A_\nu(y) : \\ &- i \{ S_F(y-x) \}_{\xi\alpha} \{ \gamma^\mu \}_{\alpha\beta} : \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\eta(y) \{ \gamma^\nu \}_{\eta\xi} A_\mu(x) A_\nu(y) : \\ &+ i : \bar{\psi}_\alpha(x) \{ \gamma^\mu \}_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\eta(y) \{ \gamma^\nu \}_{\eta\xi} \psi_\xi(y) : \eta_{\mu\nu} G_F(x-y) \\ &+ \{ S_F(y-x) \}_{\xi\alpha} \{ \gamma^\mu \}_{\alpha\beta} \{ S_F(x-y) \}_{\beta\eta} \{ \gamma^\nu \}_{\eta\xi} : A_\mu(x) A_\nu(y) : \\ &- : \bar{\psi}_\alpha(x) \{ \gamma^\mu \}_{\alpha\beta} \{ S_F(x-y) \}_{\beta\eta} \{ \gamma^\nu \}_{\eta\xi} \psi_\xi(y) : \eta_{\mu\nu} G_F(x-y) \\ &+ \{ S_F(y-x) \}_{\xi\alpha} \{ \gamma^\mu \}_{\alpha\beta} : \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\eta(y) : \{ \gamma^\nu \}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_F(x-y) \\ &+ i \{ S_F(y-x) \}_{\xi\alpha} \{ \gamma^\mu \}_{\alpha\beta} \{ S_F(x-y) \}_{\beta\eta} \{ \gamma^\nu \}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_F(x-y) . \end{aligned}$$

Les indices spinoriels α, β, η et ξ sont sommés de 1 à 4 alors que les indices de Lorentz μ et ν sont sommés de 0 à 3.

3) Règles de Feynman et calcul d'un processus.

Afin d'illustrer le calcul du taux des réactions entre particules élémentaires, nous nous concentrerons ici sur l'effet **Compton–Thomson** où un photon diffuse élastiquement sur un électron. Nous en profiterons pour dégager les règles qui président au calcul des diagrammes de Feynman correspondants et établirons finalement la relation permettant de calculer la section efficace différentielle de réaction.

3.1) Élément de matrice S .

Le processus auquel nous nous intéressons ici est la diffusion élastique d'un photon sur un électron

$$\gamma(\mathbf{k}_1, \lambda_1) + e^-(\mathbf{p}_1, s_1) \rightarrow \gamma(\mathbf{k}_2, \lambda_2) + e^-(\mathbf{p}_2, s_2) . \quad (\text{III.93})$$

Le photon incident possède l'impulsion \mathbf{k}_1 et son état de polarisation est décrit par le vecteur $e_1^\mu = e^\mu(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$. Le photon de l'état final est caractérisé par l'impulsion \mathbf{k}_2 et la polarisation $e_2^\mu = e^\mu(\mathbf{k}_2, \lambda_2)$. Quant aux électrons, leurs impulsions et hélicités sont respectivement \mathbf{p}_1 et s_1 dans l'état initial et \mathbf{p}_2 et s_2 dans l'état final. Du point de vue de la seconde quantification, l'état initial contient un seul électron et un seul photon dans tout le volume réactionnel

$$\mathcal{V} = \int d^3\mathbf{x} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{0}) , \quad (\text{III.94})$$

en sorte que nous le décrirons par le vecteur unitaire de l'espace de Fock de la théorie libre pris à l'instant initial $t_0 = -\infty$

$$|\text{initial}\rangle \equiv |i, t_0 = -\infty\rangle = \mathcal{C}_i b^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1) a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) |0\rangle . \quad (\text{III.95})$$

L'état final correspond au ket unitaire

$$|\text{final}\rangle \equiv |f, t_0 = -\infty\rangle = \mathcal{C}_f b^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2) a^\dagger(\mathbf{k}_2, \lambda_2) |0\rangle . \quad (\text{III.96})$$

Problème n° III–17 – Niveau [1] : Montrer que les coefficients de normalisation \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_f sont donnés par les expressions

$$\mathcal{C}_i = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_1 \mathcal{V}}} \frac{1}{\sqrt{(E_1/m) \mathcal{V}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_f = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_2 \mathcal{V}}} \frac{1}{\sqrt{(E_2/m) \mathcal{V}}} . \quad (\text{III.97})$$

Les énergies des photons sont ϵ_1 et ϵ_2 alors que E_1 et E_2 dénotent les énergies des électrons.

L'élément de matrice $\langle \text{final} | S | \text{initial} \rangle \equiv S_{fi}$ représente l'amplitude de probabilité associée à la diffusion (III.93). Celle-ci se déroule dans tout le volume \mathcal{V} entre l'instant $t_0 = -\infty$ et l'instant $t = +\infty$, donc sur une durée

$$\mathcal{T} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = 2\pi \delta(0) . \quad (\text{III.98})$$

Le carré $|\langle \text{final} | S | \text{initial} \rangle|^2$ est donc la probabilité pour qu'un électron et un photon contenus tous deux dans le volume \mathcal{V} interagissent entre eux via la diffusion Compton–Thomson pendant le laps de temps \mathcal{T} . Si cette probabilité vaut 1, nous comptabilisons alors une seule réaction dans tout le volume spatio-temporel $\mathcal{V}\mathcal{T}$. Le taux de réaction – le nombre de réaction par seconde et par unité de volume – est donc donné par le rapport

$$\text{taux de réaction} = \frac{|\langle \text{final} | S | \text{initial} \rangle|^2}{\mathcal{V}\mathcal{T}} . \quad (\text{III.99})$$

L'élément de transition S_{fi} fait intervenir le produit hermitien

$$S_{fi} = \mathcal{C}_i \mathcal{C}_f \langle 0 | a(\mathbf{k}_2, \lambda_2) b(\mathbf{p}_2, s_2) \times S \times b^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1) a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) | 0 \rangle . \quad (\text{III.100})$$

Or la matrice S se développe en une série de polynômes s'écrivant chacun en terme des champs libres ψ_α , $\bar{\psi}_\beta$ et A_μ – voir les relations (III.46), (III.87) et (III.89). Il faut pousser ce développement au second ordre en la charge électrique afin de trouver les premiers termes qui se réduiront exactement avec les opérateurs de création – $a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$ et $b^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1)$ – et d'annihilation – $a(\mathbf{k}_2, \lambda_2)$ et $b(\mathbf{p}_2, s_2)$ – en jeu dans le processus étudié et qui engendreront ainsi un résultat non-nul.

Problème n° III–18 – Niveau [2] : Montrer que la contribution de la matrice S à la diffusion Compton–Thomson est donnée – au second ordre en e – par l'intégrale

$$S \{ \text{Compton} - \text{Thomson} \} = \frac{(-ie)^2}{2} \int d^4x \int d^4y \mathcal{F}_{\text{effectif}}(x, y) , \quad (\text{III.101})$$

où la fonction $\mathcal{F}_{\text{effectif}}(x, y)$ qui intervient ici est la combinaison

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{effectif}}(x, y) &= : \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \overline{\bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y)} : \\ &+ : \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y) : . \end{aligned} \quad (\text{III.102})$$

En permutant le rôle de x et de y , en déduire que

$$S \{ \text{Compton} - \text{Thomson} \} = (-ie)^2 \iint d^4x d^4y : \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \overline{\bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y)} : . \quad (\text{III.103})$$

3.2) Réduction de S_{fi} et règles de Feynman.

L'élément de matrice effectif qui intervient dans l'amplitude de la diffusion Compton–Thomson est donc égal à

$$S \{\text{effectif}\} = (-ie)^2 \int \int d^4x d^4y : \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \times i S_F(x-y) \times \mathcal{A}(y) \psi(y) : . \quad (\text{III.104})$$

Nous devons donc évaluer l'amplitude de transition

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (-ie)^2 \mathcal{C}_i \mathcal{C}_f \times \\ &\times \int \int d^4x d^4y \langle 0 | a_2 b_2 : \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) i S_F(x-y) \mathcal{A}(y) \psi(y) : b_1^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (\text{III.105})$$

Concentrons–nous tout d'abord sur les opérateurs fermioniques qui interviennent dans la relation précédente et examinons leur action sur le vide. Dans la mesure où ils commutent avec les opérateurs bosoniques associés au champ électromagnétique, il suffit de calculer le produit hermitien

$$\langle 0 | b_2 : \bar{\psi}(x) \psi(y) : b_1^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | b_2 : \{ \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \} \{ \psi^+(y) + \psi^-(y) \} : b_1^\dagger | 0 \rangle . \quad (\text{III.106})$$

L'évaluation de ce terme s'appelle une **réduction** et implique des règles simples. En vertu des développements (III.66) et (III.67), la combinaison $\bar{\psi}^-(x) \psi^+(y)$ contient le produit $b^\dagger b$ qui est ici le seul terme susceptible d'engendrer un résultat non–nul. Les trois autres possibilités contiennent au moins un opérateur d ou d^\dagger détruisant le vide à droite $|0\rangle$ ou à gauche $\langle 0|$.

Problème n° III–19 – Niveau [2] : Démontrer les formules de réduction

$$\psi^+(y) \times b^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1) | 0 \rangle = u(\mathbf{p}_1, s_1) e^{-ip_1 y} \times | 0 \rangle , \quad (\text{III.107})$$

et

$$\langle 0 | b(\mathbf{p}_2, s_2) \times \bar{\psi}^-(x) = \bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2) e^{ip_2 x} \times \langle 0 | . \quad (\text{III.108})$$

L'amplitude de transition s'écrit alors

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (-ie)^2 \mathcal{C}_i \mathcal{C}_f \int \int d^4x d^4y \times e^{ip_2 x} e^{-ip_1 y} \times \\ &\times \{ \bar{u}_2 \gamma^\mu i S_F(x-y) \gamma^\nu u_1 \} \times \langle 0 | a_2 : A_\mu(x) A_\nu(y) : a_1^\dagger | 0 \rangle , \end{aligned} \quad (\text{III.109})$$

et il ne reste plus qu'à réduire la partie bosonique.

Problème n° III–20 – Niveau [2] : Etablir à ce propos les formules de réduction

$$A_\mu^+(x) \times a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) |0\rangle = e_\mu(\mathbf{k}_1, \lambda_1) e^{-ik_1 x} \times |0\rangle \quad , \quad (\text{III.110})$$

et

$$\langle 0| a(\mathbf{k}_2, \lambda_2) \times A_\mu^-(x) = e_\mu(\mathbf{k}_2, \lambda_2) e^{ik_2 x} \times \langle 0| \quad . \quad (\text{III.111})$$

On s'aidera du développement de Fourier (II.104).

Problème n° III–21 – Niveau [2] : Réduire l'élément de matrice résiduel de l'expression intermédiaire (III.109) et établir que

$$\begin{aligned} \langle 0| a_2 : A_\mu(x) A_\nu(y) : a_1^\dagger |0\rangle &= \langle 0| a_2 : \{A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x)\} \{A_\nu^+(y) + A_\nu^-(y)\} : a_1^\dagger |0\rangle \\ &= \langle 0| a_2 \{A_\mu^-(x) A_\nu^+(y) + A_\nu^-(y) A_\mu^+(x)\} a_1^\dagger |0\rangle \\ &= e_\mu(2) e_\nu(1) e^{ik_2 x} e^{-ik_1 y} + e_\nu(2) e_\mu(1) e^{ik_2 y} e^{-ik_1 x} \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.112})$$

La relation (III.109) devient alors

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (-ie)^2 \mathcal{C}_i \mathcal{C}_f \int \int d^4x d^4y \times \\ &\times \left\{ e^{i(p_2 + k_2)x} e^{-i(p_1 + k_1)y} \times \{\bar{u}_2 \not{\epsilon}_2 i S_F(x - y) \not{\epsilon}_1 u_1\} \right. \\ &\quad \left. + e^{i(p_2 - k_1)x} e^{i(k_2 - p_1)y} \times \{\bar{u}_2 \not{\epsilon}_1 i S_F(x - y) \not{\epsilon}_2 u_1\} \right\} \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.113})$$

Il ne nous reste plus qu'à utiliser le développement de Fourier du propagateur de Feynman

$$i S_F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x - y)} \left\{ i S_F(q) = \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} \right\} \quad . \quad (\text{III.114})$$

Les intégrales sur x et sur y sont immédiates et nous aboutissons au résultat final

$$S_{fi} = \mathcal{C}_i \mathcal{C}_f (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \mathcal{M}_{fi} \quad , \quad (\text{III.115})$$

où l'élément de matrice \mathcal{M}_{fi} – que nous avons calculé pas à pas – s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \bar{u}_2 \times (-ie \not{\epsilon}_2) \times \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k}_1 - m + i\epsilon} \times (-ie \not{\epsilon}_1) \times u_1 \\ &+ \bar{u}_2 \times (-ie \not{\epsilon}_1) \times \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m + i\epsilon} \times (-ie \not{\epsilon}_2) \times u_1 \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.116})$$

Les règles associées au calcul de l'élément de matrice précédent ont été établies par Feynman et permettent de dériver rapidement \mathcal{M}_{fi} à l'aide de diagrammes.

- Un électron initial – ou final – fait respectivement apparaître le spineur $u(p, s)$ – ou $\bar{u}(p, s)$.
- Un positron dans l'état initial engendre par contre le spineur $\bar{v}(p, s)$ alors que dans l'état final nous obtenons $v(p, s)$.
- Un segment de ligne fermionique parcourue par l'impulsion q se décrit par le propagateur de Feynman

$$i S_F(q) = \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (\text{III.117})$$

- Chaque vertex électromagnétique – point de contact entre une ligne de photon et deux lignes fermioniques – fait intervenir le terme $(-i e \gamma^\mu)$.
- A chaque patte externe associée à un photon d'impulsion k et de polarisation λ est associée le quadri-vecteur $e_\mu(k, \lambda)$.
- Finalement, la ligne ondulée liant le vertex $(-i e \gamma^\mu)$ au vertex $(-i e \gamma^\nu)$ tout en transportant l'impulsion q conduit au propagateur électromagnétique

$$i \eta_{\mu\nu} G_F(q) = \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} . \quad (\text{III.118})$$

3.3) Section efficace différentielle.

En remarquant de manière assez heuristique que

$$\mathcal{V} \mathcal{T} = \int d^4x = (2\pi)^4 \delta^4(0) , \quad (\text{III.119})$$

nous dérivons le taux de réaction – nombre de diffusion Compton–Thomson par unité de volume et par unité de temps – en fonction de la matrice de transition \mathcal{M}_{fi}

$$\frac{|\langle \text{final} | S | \text{initial} \rangle|^2}{\mathcal{V} \mathcal{T}} = \mathcal{C}_i^2 \mathcal{C}_f^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) |\mathcal{M}_{fi}|^2 . \quad (\text{III.120})$$

Si je cherche maintenant à évaluer le taux de réaction en spécifiant les impulsions finales \mathbf{p}_2 et \mathbf{k}_2 à $d^3\mathbf{p}_2$ et $d^3\mathbf{k}_2$ près respectivement, je dois multiplier le résultat (III.99) par le nombre d'états de propagation correspondants.

Problème n° III–22 – Niveau [1] : Montrer que ce facteur multiplicatif vaut

$$\text{nombre d'états de propagation} = \frac{\mathcal{V} d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \times \frac{\mathcal{V} d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} , \quad (\text{III.121})$$

et qu'un terme \mathcal{V}^2 disparaît dans le dénominateur du produit $\mathcal{C}_i^2 \mathcal{C}_f^2$.

Le nombre d'événements par unités de volume et de temps dans lesquels l'état final est caractérisé à $d^3 \mathbf{p}_2$ et à $d^3 \mathbf{k}_2$ près est relié à la section efficace différentielle $d\sigma$ par

$$\frac{|S_{fi}|^2}{\mathcal{V} \mathcal{T}} \times \frac{\mathcal{V} d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \times \frac{\mathcal{V} d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} = d\sigma \times |\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_1| \times n_1 \times N_1 , \quad (\text{III.122})$$

où les vitesses du photon et de l'électron incidents sont respectivement notées \mathbf{v}_1 et \mathbf{V}_1 . Dans la mesure où l'état initial ne contient qu'un seul photon et qu'un seul électron, les densités correspondantes n_1 et N_1 valent

$$n_1 = N_1 = \frac{1}{\mathcal{V}} . \quad (\text{III.123})$$

Problème n° III–23 – Niveau [1] : Etablir alors que la section efficace différentielle $d\sigma$ se met sous la forme

$$d\sigma = \frac{1}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_1|} \frac{1}{2\epsilon_1} \frac{m}{E_1} \times \tilde{d}k_2 \tilde{d}p_2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) |\mathcal{M}_{fi}|^2 . \quad (\text{III.124})$$

Les relations (III.116) et (III.124) permettent de dériver la section efficace des réactions entre particules élémentaires. Le calcul complet de σ fait l'objet d'un autre cours.

Chapitre de révision

Introduction aux Groupes et à leurs Représentations

1) Quelques rappels sur les structures mathématiques.

1.1) Notion de groupe.

Un ensemble G est muni d'une loi interne \perp , c'est-à-dire d'une application de $G \times G$ dans G qui à tout couple d'éléments (x, y) associe $z = x \perp y$. L'ensemble G est un **groupe** si la loi interne \perp vérifie les trois propriétés suivantes.

- La loi \perp est associative :

$$\forall x, y \text{ et } z \in G \quad (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z) . \quad (\text{Rb.1})$$

- Il existe un élément neutre e tel que

$$\forall x \in G \quad e \perp x = x \perp e = x . \quad (\text{Rb.2})$$

- Finalement, tout élément x de G admet un symétrique y vis à vis de la loi \perp vérifiant

$$x \perp y = y \perp x = e . \quad (\text{Rb.3})$$

Si de surcroît la loi \perp est commutative, donc si

$$\forall x \text{ et } y \in G \quad x \perp y = y \perp x , \quad (\text{Rb.4})$$

le groupe G est **commutatif** ou encore **abélien**.

Problème n° Rb-1 – Niveau [1] : Montrer que l'élément neutre e d'un groupe est unique. Montrer ensuite que le symétrique y de tout élément x est également unique.

1.2) Notion d'anneau.

Considérons un groupe abélien (G, \perp) muni d'une seconde loi interne \circ vérifiant les deux propriétés suivantes.

- La loi \circ est associative :

$$\forall x, y \text{ et } z \in G \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad . \quad (\text{Rb.5})$$

- La loi \circ est distributive par rapport à la loi \perp

$$x \circ (a \perp b) = (x \circ a) \perp (x \circ b) \quad (\text{Rb.6})$$

$$(x \perp y) \circ a = (x \circ a) \perp (y \circ a) \quad . \quad (\text{Rb.7})$$

G a alors une structure **d'anneau**. Si de surcroît la loi \circ est commutative, l'anneau est **abélien**.

Problème n⁰ Rb-2 – Niveau [1] : On considère l'ensemble \mathcal{E} des fonctions continues de l'intervalle $[0, 1]$ dans l'ensemble des réels \mathbb{R} qui sont nulles en 0 et en 1. Montrer que $(\mathcal{E}, +, \times)$ est un anneau commutatif et qu'il est par ailleurs dépourvu d'élément neutre pour la loi multiplicative \times .

1.3) Notion de corps.

Considérons un anneau (K, \perp, \circ) muni des deux lois internes \perp et \circ . L'ensemble K muni de la loi \perp est donc un groupe abélien dont l'élément neutre sera noté 0. La loi \circ est associative et distributive par rapport à la loi \perp .

L'anneau K est un **corps** si l'ensemble K dépourvu de l'élément neutre 0^{||} de la première loi interne \perp est un groupe vis à vis de la seconde loi interne \circ . Si de plus \circ est commutative, alors le corps K est **abélien**.

Problème n⁰ Rb-3 – Niveau [1] : Montrer que $\forall x \in K$, la propriété suivante est vérifiée

$$x \circ 0 = 0 \circ x = 0 \quad . \quad (\text{Rb.8})$$

^{||}Cet ensemble est noté $K^* = K - \{0\}$

En conclusion, tout ensemble K muni des lois internes \perp et \circ est un corps si d'une part (K, \perp) est un groupe abélien, si d'autre part (K^*, \circ) est un groupe et si finalement la loi \circ est distributive par rapport à la loi \perp .

1.4) Notion d'espace vectoriel V sur le corps abélien (K, \perp, \circ) .

Considérons le corps abélien (K, \perp, \circ) . L'ensemble V muni de la loi interne $+$ et de la loi externe \times sur le corps K est un espace vectoriel s'il vérifie les propriétés suivantes.

1. Tout d'abord, l'ensemble $(V, +)$ est un groupe abélien. Son élément neutre est le vecteur θ tel que

$$\forall x \in V, \quad x + \theta = \theta + x = x . \quad (\text{Rb.9})$$

2. D'autre part, l'ensemble V est muni d'une loi externe sur K , autrement dit d'une application de $K \times V$ dans V qui à tout couple $(\alpha \in K, x \in V)$ associe le vecteur $y = (\alpha \times x) \in V$. Cette loi externe \times doit satisfaire aux quatre propriétés suivantes.

$$2.1) \quad \alpha \times (u + v) = (\alpha \times u) + (\alpha \times v) , \quad (\text{Rb.10})$$

$$2.2) \quad (\alpha \perp \beta) \times u = (\alpha \times u) + (\beta \times u) , \quad (\text{Rb.11})$$

$$2.3) \quad (\alpha \circ \beta) \times u = \alpha \times (\beta \times u) , \quad (\text{Rb.12})$$

$$2.4) \quad e \times u = u . \quad (\text{Rb.13})$$

La dernière propriété porte sur l'élément neutre e de la seconde loi interne \circ du corps abélien K .

Problème n° Rb-4 – Niveau [1] : Montrer que l'élément neutre θ de la première loi interne du corps K vérifie

$$\forall x \in V, \quad \theta \times x = \theta . \quad (\text{Rb.14})$$

Problème n° Rb-5 – Niveau [1] : Montrer que pour tout élément α de K et pour tout vecteur x de V

$$(-\alpha) \times x = -(\alpha \times x) = \alpha \times (-x) . \quad (\text{Rb.15})$$

Problème n⁰ Rb-6 – Niveau [1] : Considérons un corps abélien (K, \perp, \circ) . Montrer que K muni de la loi interne $+$ alias \perp et de la loi externe sur lui-même \times alias \circ

$$\begin{aligned} K(\text{corps}) \times K(\text{groupe}) &\longrightarrow K(\text{groupe}) \\ \alpha \quad , \quad \mathbf{u} \equiv u &\longrightarrow \alpha \times \mathbf{u} \equiv \alpha \circ u \end{aligned}$$

est un espace vectoriel. En déduire que tout corps K est un espace vectoriel sur lui-même. En particulier, le produit tensoriel K^n est un espace vectoriel à l'instar de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n .

1.5) Notion d'algèbre.

Considérons l'espace vectoriel $(V, +, \times)$ construit sur le corps abélien (K, \perp, \circ) . Supposons que V soit muni d'une seconde loi interne \star **bilinéaire** par rapport aux lois $+$ et \times qui vérifie alors les relations

$$((\alpha \times \mathbf{x}) + (\beta \times \mathbf{y})) \star \mathbf{z} = (\alpha \times (\mathbf{x} \star \mathbf{z})) + (\beta \times (\mathbf{y} \star \mathbf{z})) \quad , \quad (\text{Rb.16})$$

et

$$\mathbf{x} \star ((\alpha \times \mathbf{y}) + (\beta \times \mathbf{z})) = (\alpha \times (\mathbf{x} \star \mathbf{y})) + (\beta \times (\mathbf{x} \star \mathbf{z})) \quad , \quad (\text{Rb.17})$$

quels que soient les éléments α et β de K et les vecteurs \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} de V . L'espace vectoriel V est alors une **algèbre**. C'est une **algèbre de Lie** si de surcroît le produit \star est d'une part antisymétrique

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = -\mathbf{y} \star \mathbf{x} \quad , \quad (\text{Rb.18})$$

et si d'autre part il vérifie l'identité de Jacobi

$$\mathbf{x} \star (\mathbf{y} \star \mathbf{z}) + \mathbf{z} \star (\mathbf{x} \star \mathbf{y}) + \mathbf{y} \star (\mathbf{z} \star \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad . \quad (\text{Rb.19})$$

Problème n⁰ Rb-7 – Niveau [2] : Considérons une algèbre $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ dont la seconde loi interne est le produit \cdot associatif. A priori, \mathcal{A} n'est pas une algèbre de Lie. Définissons dans \mathcal{A} la nouvelle loi interne

$$x \star y = [x, y] = x \cdot y - y \cdot x \quad , \quad (\text{Rb.20})$$

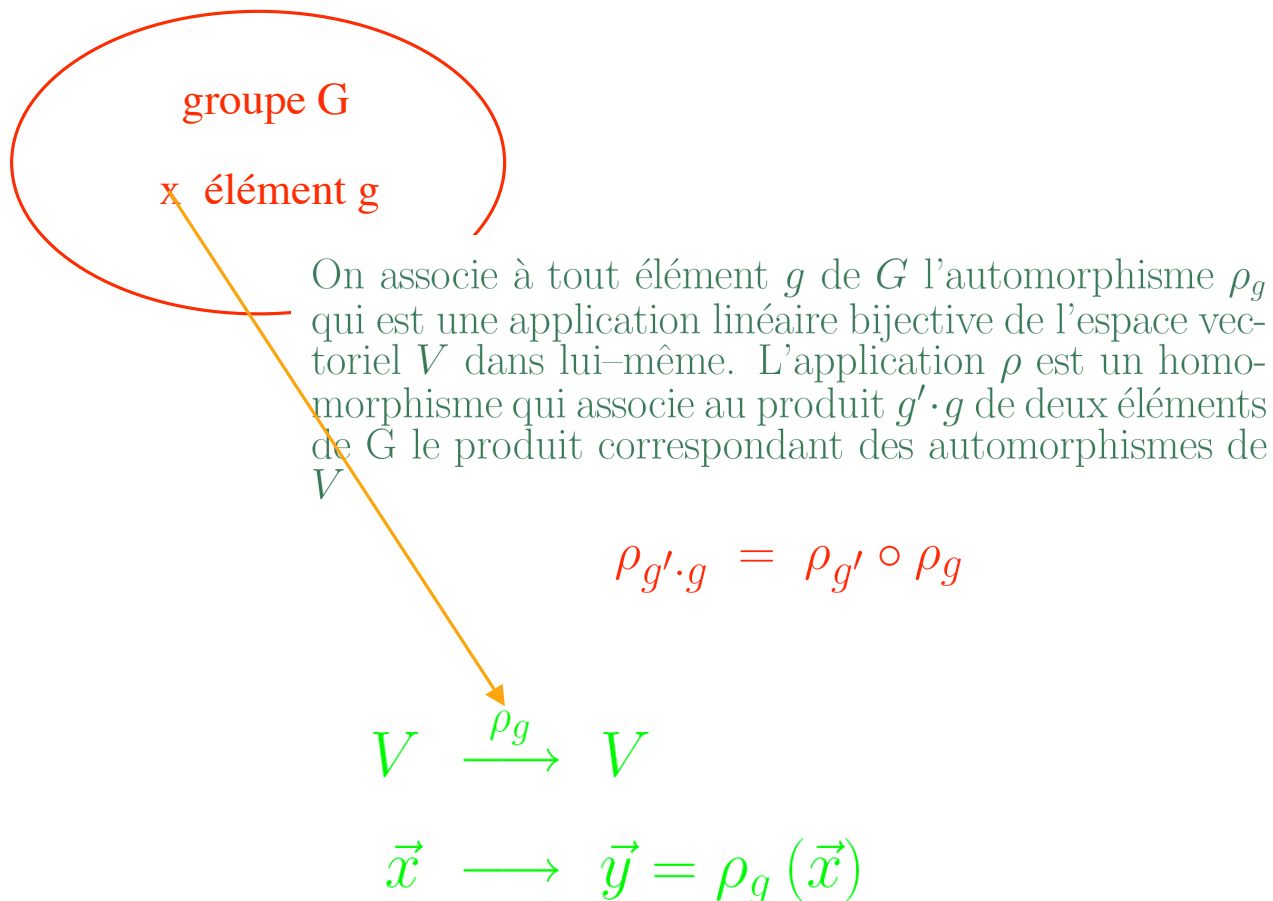
quels que soient les vecteurs x et y . Montrer alors que $(\mathcal{A}, +, \star)$ est une algèbre de Lie.

Problème n⁰ Rb-8 – Niveau [1] : Montrer que l'espace vectoriel des vecteurs de l'espace physique à trois dimensions est une algèbre de Lie lorsqu'il est muni du produit vectoriel

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} \equiv \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} . \quad (\text{Rb.21})$$

2) Représentation linéaire d'un groupe.

2.1) Définition.



Représenter un groupe G consiste à associer à tout élément g de G une application linéaire bijective ρ_g d'un espace vectoriel V dans lui-même. Celui-ci est alors une **représentation linéaire** du groupe G . L'application ρ_g est un automorphisme de V vérifiant la propriété de linéarité

$$\rho_g\{(\alpha \times \mathbf{u}) + (\beta \times \mathbf{v})\} = (\alpha \times \rho_g\{\mathbf{u}\}) + (\beta \times \rho_g\{\mathbf{v}\}) \quad , \quad (\text{Rb.22})$$

quels que soient les éléments α et β du corps K sur lequel l'espace vectoriel V est construit et quels que soient les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} . En pratique, V est construit sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Nous nous concentrons ici sur les représentations de dimension finie et $n = \dim(V)$ est le **degré**

de la représentation. L'application ρ est un homomorphisme qui projette la structure du groupe G sur les automorphismes de V – que l'on représente par des matrices $n \times n$ – et il vient

$$\rho_{g' \cdot g} = \rho_{g'} \circ \rho_g . \quad (\text{Rb.23})$$

Problème n° Rb–9 – Niveau [1] : Montrer que l'élément neutre e de G est associé à l'identité de V

$$\rho_e = \mathbb{I}_V , \quad (\text{Rb.24})$$

et que l'image par ρ du symétrique de g est l'application inverse de ρ_g

$$\rho_{g^{-1}} = (\rho_g)^{-1} . \quad (\text{Rb.25})$$

2.2) Un exemple instructif.

Prenons pour G le groupe des nombres complexes de module unité

$$U(1) = \{ z = e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R} \} . \quad (\text{Rb.26})$$

A tout élément $z = \exp(i\theta)$ de $U(1)$ on associe la rotation du plan réel \mathbb{R}^2 dans lui-même qui transforme tout vecteur \mathbf{u} de coordonnées x et y en le vecteur \mathbf{v} de coordonnées x' et y' . Représenter le groupe $U(1)$ revient donc à associer à tout complexe z de $U(1)$ la matrice de transformation $\mathcal{M}(z)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathcal{M}(z) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \quad (\text{Rb.27})$$

Problème n° Rb–10 – Niveau [1] : Montrer que la matrice $\mathcal{M}(z)$ réalise bien une représentation linéaire du groupe $U(1)$ dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 . Démontrer en particulier que

$$\mathcal{M}(z') \times \mathcal{M}(z) = \mathcal{M}(z'z) , \quad (\text{Rb.28})$$

et que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} . \quad (\text{Rb.29})$$

Problème n⁰ Rb-11 – Niveau [1] : *L'étude de cet exemple simple nous permet d'aller un zeste plus loin et de définir la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{Rb.30})$$

Montrer alors que

$$\mathcal{M}(z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(\theta A) . \quad (\text{Rb.31})$$

L'exponentielle d'une matrice est définie de manière canonique par la série

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} = \mathbb{I} + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots \quad (\text{Rb.32})$$

Le groupe $U(1)$ peut dès lors se concevoir comme l'ensemble des éléments $g = \exp(X)$ réalisant l'exponentiation du vecteur $X = \theta X_1 \equiv \theta i$. La matrice A représente le générateur $X_1 \equiv i$ dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 . On peut alors imaginer des structures plus riches où plusieurs générateurs X_a définissent une base d'un espace vectoriel et même d'une algèbre et dont l'exponentiation permet de construire le groupe associé.

2.3) Groupe de Lie.

Considérons une algèbre de Lie \mathcal{A} construite sur \mathbb{R} et de dimension D dont les vecteurs se mettent sous la forme

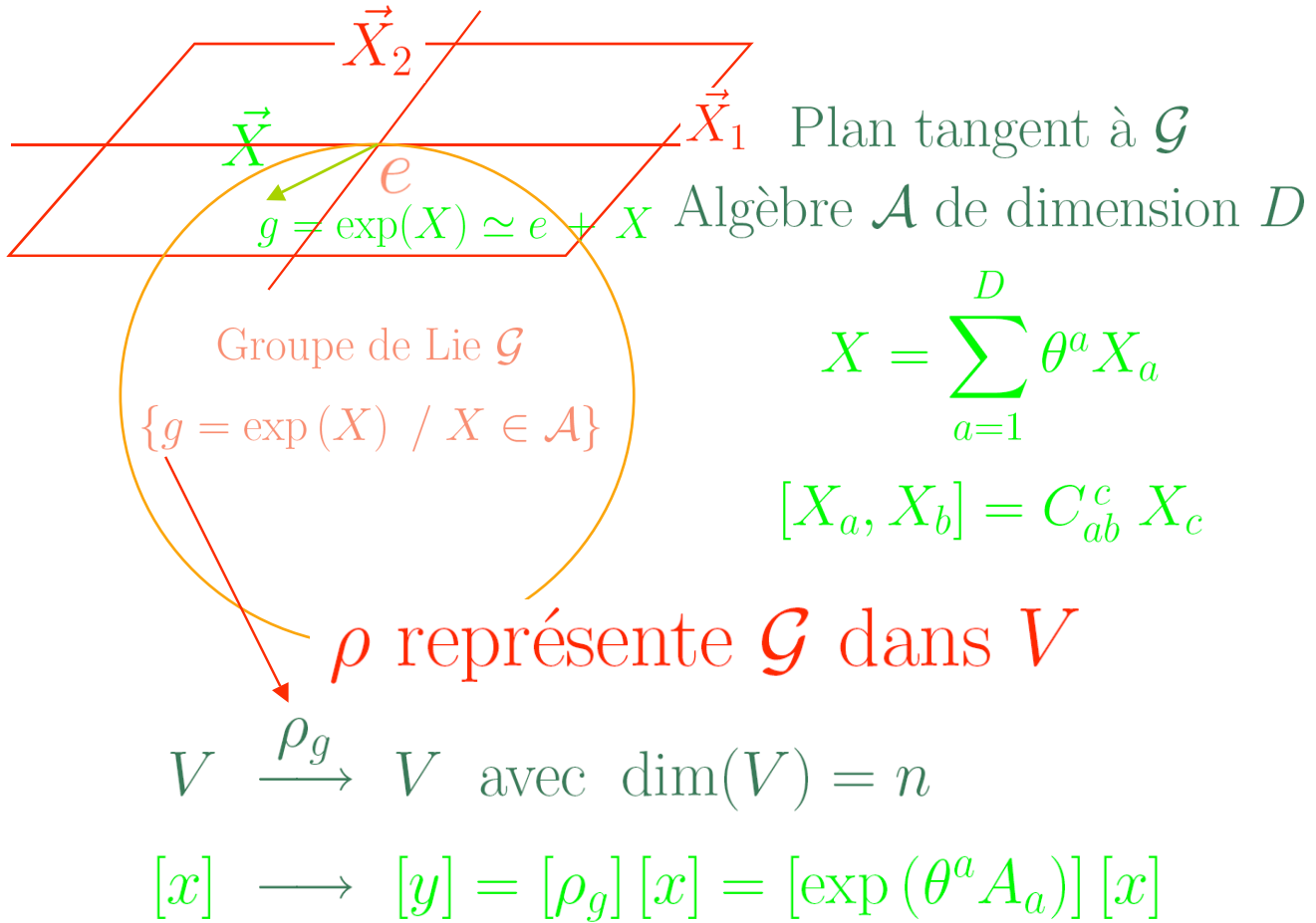
$$X = \sum_{a=1}^D \theta^a X_a . \quad (\text{Rb.33})$$

Les paramètres θ^a sont réels. Les vecteurs X_a sont les **générateurs** de l'algèbre \mathcal{A} . Celle-ci se comporte comme l'espace vectoriel \mathbb{R}^D vis à vis de sa première loi interne $+$ et de sa loi externe \times . La seconde loi interne \star est formellement notée grâce aux crochets de commutation

$$X \star Y \equiv [X, Y] , \quad (\text{Rb.34})$$

et confère à \mathcal{A} sa structure d'algèbre. De surcroît, les générateurs X_a entretiennent entre eux les relations de commutation

$$[X_a, X_b] = \sum_{c=1}^D C_{ab}^c X_c \equiv C_{ab}^c X_c , \quad (\text{Rb.35})$$



où les coefficients réels C_{ab}^c sont les **constantes de structure** de l'algèbre de Lie.

Un groupe de Lie \mathcal{G} construit à partir de l'algèbre \mathcal{A} est composé des éléments g qui s'écrivent formellement – en toute rigueur dans un voisinage de l'élément neutre e – comme les exponentielles des vecteurs X de \mathcal{A}

$$\mathcal{G} \equiv \{g = \exp(X) / X \in \mathcal{A}\} . \quad (\text{Rb.36})$$

La relation précédente est formelle dans la mesure où \exp dénote simplement une application de \mathcal{A} dans \mathcal{G} vérifiant les égalités

$$\exp(tX) \cdot \exp(t'X) = \exp((t+t')X) \quad (\text{Rb.37})$$

$$\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1} \quad (\text{Rb.38})$$

$$\exp(0) = e , \quad (\text{Rb.39})$$

quels que soient t et t' dans \mathbb{R} et quel que soit le vecteur X de l'algèbre \mathcal{A} . L'élément neutre de la loi interne \cdot de \mathcal{G} est noté e . Lorsque les paramètres θ^a sont petits en valeur absolue, le vecteur X est voisin du vecteur nul 0 et l'élément correspondant g du groupe est voisin de e . De manière intuitive mais très grossière, on peut développer g au premier ordre

$$g \simeq e + X = e + \sum_{a=1}^D \theta^a X_a . \quad (\text{Rb.40})$$

L'algèbre peut dès lors être vue comme le plan tangent au groupe \mathcal{G} en e .

Toutes ces notions deviennent moins ésotériques lorsque le groupe de Lie est composé de matrices comme dans le cas de $SO(n)$ ou de $SU(n)$. Les éléments g du groupe de Lie \mathcal{G} et les vecteurs X de son algèbre \mathcal{A} peuvent alors être additionnés entre eux et la relation (Rb.40) acquiert un sens. C'est le cas également de toute représentation linéaire V de \mathcal{G} de dimension finie n . L'homomorphisme ρ associe alors à chaque élément g du groupe un automorphisme de l'espace vectoriel V décrit par la matrice $n \times n$ permettant de transformer les coordonnées $[x]$ du vecteur \mathbf{x} en celles du vecteur \mathbf{y}

$$[y] = [\rho_g][x] = [\exp(\theta^a A_a)][x] . \quad (\text{Rb.41})$$

Les matrices A_a représentent dans V les générateurs X_a de l'algèbre de Lie \mathcal{A} et entretiennent entre elles les mêmes relations de commutation

$$[A_a, A_b] = \sum_{c=1}^D C_{ab}^c A_c \equiv C_{ab}^c A_c . \quad (\text{Rb.42})$$

L'ensemble des matrices

$$\left\{ A = \sum_{a=1}^D \theta^a A_a / \theta^a \in \mathbb{R} \text{ avec } a = 1, \dots, D \right\} \quad (\text{Rb.43})$$

constitue une algèbre de Lie – de structure identique à celle de \mathcal{A} – dont la seconde loi interne est effectivement réalisée grâce au commutateur

$$A \star B = [A, B] . \quad (\text{Rb.44})$$

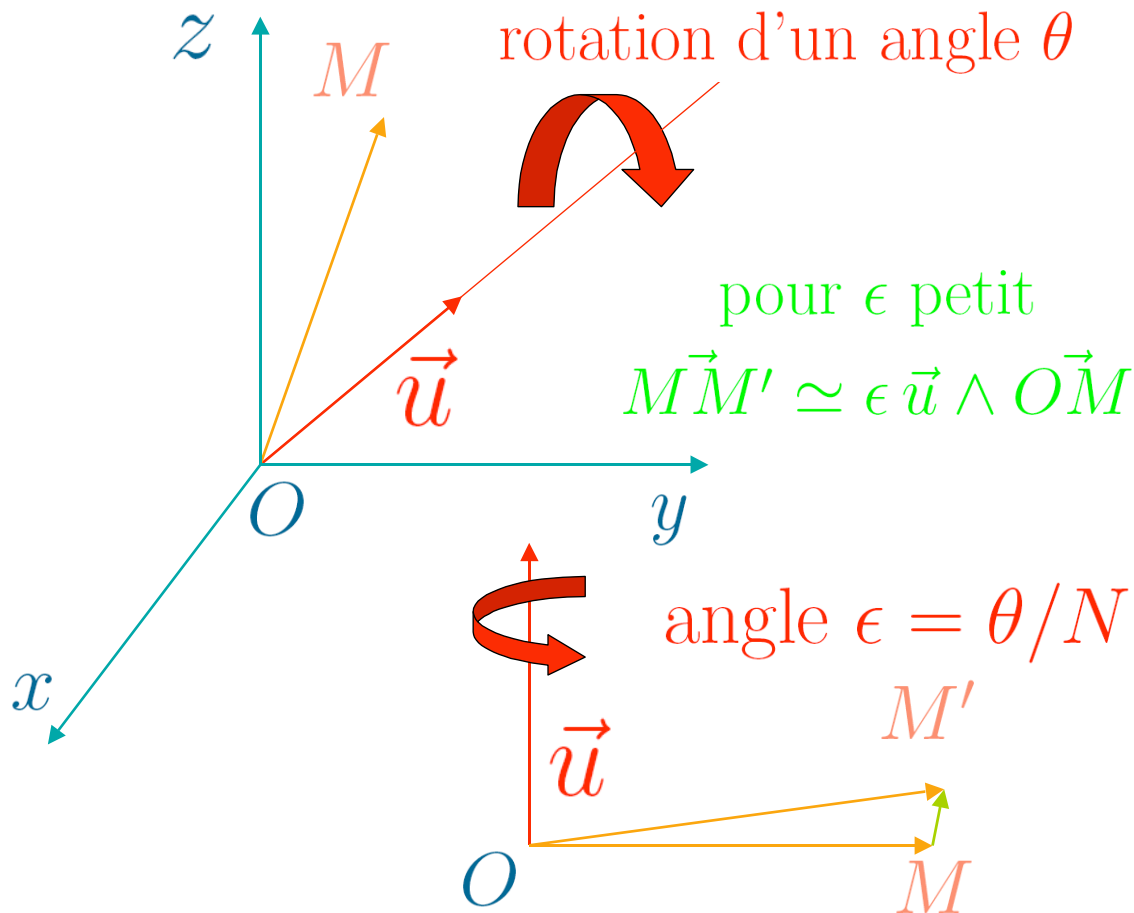
Souvent, la structure d'une algèbre de Lie se manifeste via une de ses représentations sur un espace vectoriel V au sein duquel l'étude est particulièrement simple. C'est le cas du groupe des rotations $SO(3)$.

3) Le groupe des rotations $SO(3)$.

3.1) L'algèbre de Lie de $SO(3)$.

Considérons la rotation d'un angle θ autour d'un axe orienté par le vecteur unitaire \mathbf{u} .
 Décomposons cette rotation en une série de N rotations infinitésimales d'angle $\epsilon = \theta/N$.
 Une de celle-ci déplace tout point M en M' de sorte que

$$MM' \simeq \epsilon \mathbf{u} \wedge \mathbf{OM} . \quad (\text{Rb.45})$$



Les coordonnées (x, y, z) de M sont transformées en

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \simeq \{ \mathbb{I}_3 + \epsilon \cdot \mathbf{A} \} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad (\text{Rb.46})$$

où le vecteur infinitésimal $\epsilon = \epsilon \mathbf{u}$ pointe en direction de l'axe de rotation. Les trois composantes constituant le vecteur formel \mathbf{A} sont les matrices

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Rb.47})$$

La rotation globale d'angle θ autour du vecteur \mathbf{u} est caractérisée par les trois coordonnées de $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{u}$. Elle s'obtient en effectuant successivement N rotations infinitésimales d'angle ϵ . Sa matrice s'écrit alors simplement

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}} = \left\{ \mathbb{I}_3 + \frac{(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{A})}{N} \right\}^N. \quad (\text{Rb.48})$$

Problème n⁰ Rb-12 – Niveau [3] : Cet exercice est particulièrement utile pour la suite du cours. Il convient de passer un peu de temps à le chercher ! Soit x un opérateur quelconque – un nombre réel ou complexe ou bien une matrice agissant dans un espace vectoriel. Cet opérateur commute avec lui-même si bien qu'il peut être traité d'un point de vue algébrique comme un nombre réel ou complexe. La fonction exponentielle est définie formellement par

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (\text{Rb.49})$$

En analysant le début du développement, démontrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{x}{N} \right\}^N = e^x. \quad (\text{Rb.50})$$

La relation précédente permet de mettre sous forme exponentielle de nombreuses règles de transformation à partir de leur forme différentielle.

En appliquant le résultat (Rb.50) de l'exercice précédent, nous pouvons mettre la matrice décrivant la rotation $\boldsymbol{\theta}$ de $SO(3)$ sous la forme d'une exponentielle

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}} = \exp \{ \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{A} \} = \exp \{ \theta^a A_a \}. \quad (\text{Rb.51})$$

Problème n° Rb-13 – Niveau [1] : Montrer que les matrices A_a vérifient les relations de commutation

$$[A_a, A_b] = \epsilon_{abc} A_c , \quad (\text{Rb.52})$$

où ϵ_{abc} est la signature de la permutation de $\{1, 2, 3\}$ en $\{a, b, c\}$ et est nul si deux au moins des éléments a, b ou c sont égaux.

Toute matrice d'une rotation de l'espace physique à trois dimensions est donc la représentation dans \mathbb{R}^3 d'un élément de $SO(3)$. Celui-ci est un groupe de Lie dont l'algèbre est l'ensemble des vecteurs

$$\mathbf{X} = \sum_{a=1}^3 \theta^a \mathbf{X}_a \text{ avec } \theta_a \in \mathbb{R} . \quad (\text{Rb.53})$$

Les générateurs X_a vérifient les relations de commutation (Rb.52) et l'algèbre de $SO(3)$ est donc isomorphe à l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^3 muni – en guise de seconde loi interne – du produit vectoriel.

3.2) Représentations de dimension finie du groupe $SO(3)$.

Nous cherchons tout d'abord à représenter l'algèbre de Lie de $SO(3)$ dans un espace vectoriel hermitien V construit sur \mathbb{C} et de dimension finie $\dim(V) = n$. Tout élément $g = \exp(\theta^a X_a)$ de $SO(3)$ est représenté sur V par l'automorphisme unitaire

$$V \longrightarrow V \quad (\text{Rb.54})$$

$$|\lambda\rangle \longrightarrow |\lambda'\rangle = \exp(\theta^a A_a) \times |\lambda\rangle . \quad (\text{Rb.55})$$

Problème n° Rb-14 – Niveau [1] : La matrice $\exp(\theta^a A_a)$ étant unitaire

$$[\exp(\theta^a A_a)]^\dagger = [\exp(\theta^a A_a)]^{-1} , \quad (\text{Rb.56})$$

montrer que les matrices A_a sont anti-hermitiennes

$$A_a^\dagger = -A_a . \quad (\text{Rb.57})$$

Problème n° Rb-15 – Niveau [1] : On définit $H_a = iA_a$ ainsi que

$$H_+ = iA_1 - A_2 \text{ et } H_- = iA_1 + A_2 . \quad (\text{Rb.58})$$

Etablir les relations de commutation

$$[H_+, H_-] = 2H_3 \text{ et } [H_3, H_\pm] = \pm H_\pm . \quad (\text{Rb.59})$$

Problème n° Rb-16 – Niveau [1] : Montrer que les valeurs propres de H_3 sont réelles et que deux vecteurs propres $|\lambda\rangle$ et $|\mu\rangle$ de H_3 possédant des valeurs propres λ et μ différentes sont orthogonaux

$$\langle \mu | \lambda \rangle = 0 . \quad (\text{Rb.60})$$

Montrer d'autre part que si $|\lambda\rangle$ est un vecteur propre de H_3 de valeur propre λ , le vecteur $H_+ |\lambda\rangle$ est également un vecteur propre de H_3 ayant cette fois la valeur propre $\lambda + 1$. Que peut-on dire du vecteur $H_- |\lambda\rangle$?

Le dernier exercice suggère de construire une base de l'espace hermitien V à partir des vecteurs propres $|\lambda\rangle$ de l'opérateur H_3 . En appliquant H_+ et H_- , on change de vecteur propre puisque

$$H_+ |\lambda\rangle = \beta_\lambda |\lambda + 1\rangle \text{ et } H_- |\lambda\rangle = \alpha_\lambda |\lambda - 1\rangle . \quad (\text{Rb.61})$$

Problème n° Rb-17 – Niveau [1] : Montrer que les coefficients α_λ et β_λ vérifient l'égalité

$$\alpha_\lambda \beta_{\lambda-1} = \alpha_{\lambda+1} \beta_\lambda + 2\lambda . \quad (\text{Rb.62})$$

Si l'on décide que β_λ et $\alpha_{\lambda+1}$ sont égaux, en déduire que

$$\alpha_\lambda^2 = \alpha_{\lambda+1}^2 + 2\lambda . \quad (\text{Rb.63})$$

Il est alors possible d'engendrer une base de V qui ne contient incidemment que $n = \dim V$ vecteurs. Il existe donc une valeur propre maximale $j \equiv \lambda_{\max}$ associée au vecteur propre $|j\rangle$ qui joue le rôle de fusible. Si H_+ lui est appliqué, le résultat $H_+ |j\rangle$ est en effet le vecteur nul 0.

Nous nous intéressons ici aux **représentations irréductibles** qui ont la particularité de ne pas pouvoir être scindées en sous-espaces vectoriels de dimension inférieure se comportant eux-mêmes comme des représentations à part entière du groupe. Une représentation V est donc irréductible lorsqu'il n'est pas possible de découper en blocs distincts et de manière identique les matrices $\exp(\theta^a A_a)$ représentant les éléments du groupe. La représentation que nous construisons étant irréductible, le vecteur $|j\rangle$ est unique. Une base de V est engendrée en appliquant autant de fois que nécessaire l'opérateur H_- .

Problème n° Rb-18 – Niveau [2] : *Montrer que*

$$\begin{aligned}\alpha_j^2 &= 2j \ , \\ \alpha_{j-1}^2 &= 2(j-1) + 2j \ , \\ \alpha_{j-2}^2 &= 2(j-2) + 2(j-1) + 2j \ , \\ \text{etc} \dots\end{aligned}\tag{Rb.64}$$

Expliquer la raison pour laquelle le vecteur $|j - (n-1)\rangle$ est associé à la valeur propre minimale $j - (n-1)$ de H_3 . Que devient ce vecteur lorsque l'opérateur H_- lui est appliqué ? En déduire que

$$0 = 2(j - (n-1)) + \alpha_{j-(n-2)}^2 \ .\tag{Rb.65}$$

Etablir finalement que

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} 2(j-i) \ .\tag{Rb.66}$$

et en conclure que

$$j = \frac{(n-1)}{2} \ .\tag{Rb.67}$$

Les valeurs propres de H_3 sont entières ou demi-entières suivant que la dimension n de la représentation est impaire ou paire. D'autre part, la représentation est caractérisée par la valeur propre constante $j(j+1)$ associée à l'opérateur $H^2 \equiv \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$.

Problème n° Rb-19 – Niveau [1] : A partir des relations (Rb.63) et (Rb.64), montrer que

$$\alpha_m^2 = j(j+1) - m(m-1) , \quad (\text{Rb.68})$$

où m est une valeur propre de l'opérateur H_3 . Démontrer ensuite que

$$H^2 = H_+H_- + H_3^2 - H_3 . \quad (\text{Rb.69})$$

En déduire que tout vecteur propre $|m\rangle$ de l'opérateur H_3 est également vecteur propre de H^2 . Montrer que la valeur propre correspondante est toujours égale à $j(j+1)$.

Les vecteurs de la représentation $(2j+1)$ de $SO(3)$ seront désormais notés $|j, m\rangle$. Cette représentation peut d'ailleurs être construite à partir de l'état de moment angulaire vertical maximal $|j, j\rangle$ par application de l'opérateur H_- .

Problème n° Rb-20 – Niveau [1] : Montrer que

$$H_+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle , \quad (\text{Rb.70})$$

ainsi que

$$H_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle , \quad (\text{Rb.71})$$

3.3) La représentation de spin 1.

Nous décidons de faire agir $SO(3)$ dans l'espace hermitien de dimension 3 – construit sur \mathbb{C} – obtenu en complexifiant l'espace physique usuel. Les générateurs X_a de l'algèbre de $SO(3)$ y sont toujours représentés par les matrices A_a définies en (Rb.47). Nous décidons de changer de base et définissons

$$|0\rangle \equiv |e_z\rangle \quad \text{et} \quad |\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_x\rangle \pm i|e_y\rangle) . \quad (\text{Rb.72})$$

Problème n° Rb-21 – Niveau [1] : Montrer que l'opérateur H_3 est décrit par la matrice

$$H'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Rb.73})$$

quand on se place dans la nouvelle base $\{|-\rangle, |0\rangle, |+\rangle\}$. Commentaires ?

4) Le groupe $SU(2)$.

4.1) Le problème des représentations spinorielles de $SO(3)$.

Nous venons de montrer que la représentation complexe de dimension 2 du groupe $SO(3)$ était caractérisée par les valeurs propres $\pm 1/2$ de l'opérateur H_3 . Dans cet espace vectoriel isomorphe à \mathbb{C}^2 , nous pouvons représenter les générateurs X_a de l'algèbre de Lie de $SO(3)$ à l'aide des matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{Rb.74})$$

Problème n° Rb-22 – Niveau [2] : Montrer que les matrices $A_a = -i\sigma_a/2$ vérifient dans \mathbb{C}^2 les relations de commutation (Rb.52). En déduire qu'une rotation de $SO(3)$ caractérisée par l'angle θ et le vecteur unitaire \mathbf{u} – donc par le vecteur de rotation $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{u}$ – agit sur le spineur à deux composantes Ψ en le transformant en

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Psi'_+ \\ \Psi'_- \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \Psi. \quad (\text{Rb.75})$$

Considérons une rotation d'un angle $\theta_z = \varphi$ autour de l'axe Oz . Il lui correspond la matrice de transformation

$$\mathcal{R}_\varphi = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{+\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}. \quad (\text{Rb.76})$$

Nous constatons qu'une rotation d'un angle $\varphi = 2\pi$ autour de Oz – qui est égale dans l'espace physique usuel à l'identité e – est alors représentée par les matrices $+\mathbb{I}_2$ ou $-\mathbb{I}_2$ suivant que l'on prenne $\varphi = 0$ ou $\varphi = 2\pi$ dans l'expression (Rb.76). A toute rotation $g \in SO(3)$ correspondent **deux** automorphismes de \mathbb{C}^2 et non un seul. Les deux matrices correspondantes diffèrent d'ailleurs par un signe global. Le groupe des rotations $SO(3)$ est donc représenté à un signe près dans l'espace hermitien des spineurs à deux composantes qui en constitue une **représentation projective** et non plus linéaire puisqu'à tout élément g du groupe correspondent maintenant plusieurs automorphismes ρ_g . La représentation de spin 1/2 est cependant une bonne vieille représentation linéaire d'un groupe englobant $SO(3)$ – en réalité deux fois plus grand et se comportant comme le produit cartésien $SO(3) \times \mathbb{Z}_2$.

4.2) Le groupe $SU(2)$ et son algèbre.

Le groupe $SU(2)$ est constitué des matrices unitaires 2×2 à coefficients complexes et de déterminant unité. Les éléments de $SU(2)$ s'écrivent donc

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ avec } \det A = a\bar{a} + b\bar{b} = 1 . \quad (\text{Rb.77})$$

Problème n° Rb–23 – Niveau [1] : Afin de déterminer l'algèbre de $SU(2)$, on développe A autour de l'unité $e \equiv \mathbb{I}_2$ et l'on pose $a = 1 + x + iy$ et $b = z + it$. Les réels x, y, z et t sont petits devant 1. En négligeant les termes du second ordre, montrer que $x = 0$ et que, si l'on pose $y = -\epsilon_z/2$, $z = -\epsilon_y/2$ et $t = -\epsilon_x/2$, la matrice A s'écrit

$$A = \mathbb{I}_2 - \frac{i}{2} \epsilon^a \sigma_a . \quad (\text{Rb.78})$$

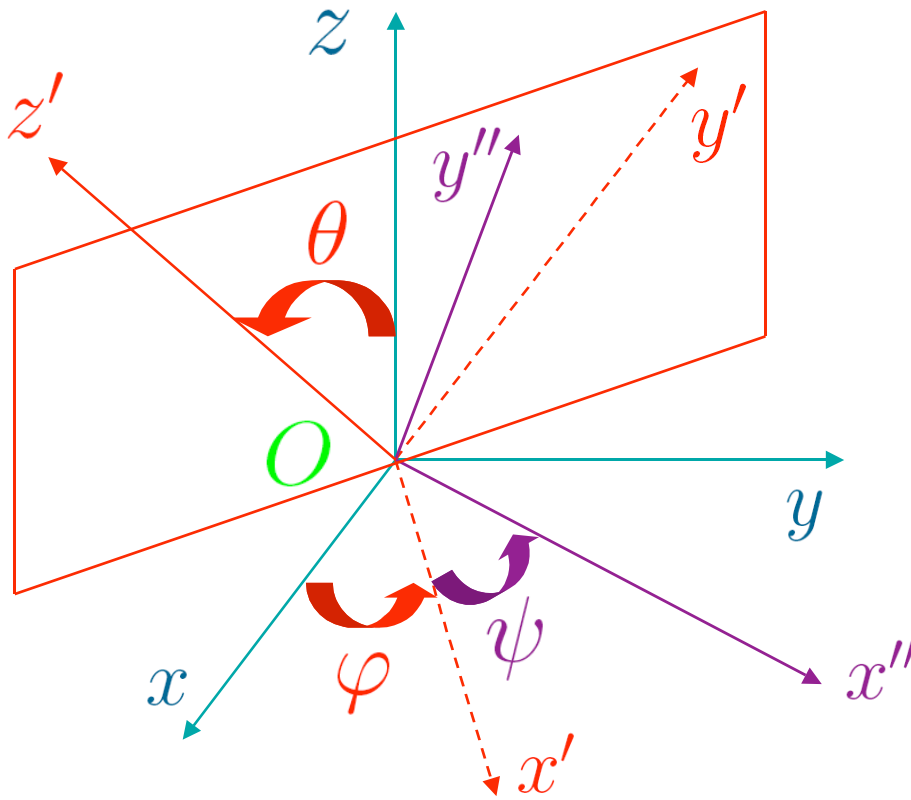
En utilisant la propriété (Rb.37) de l'application exponentielle ainsi que la relation (Rb.50), en déduire que toute matrice A se mettant sous la forme

$$A = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \theta^a \sigma_a \right\} \text{ avec } \theta^a \in \mathbb{R} , \quad (\text{Rb.79})$$

appartient bien au groupe $SU(2)$. Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer que l'inverse est vrai et que toute matrice de $SU(2)$ s'écrit sous la forme exponentielle précédente.

4.3) Construction de $SU(2)$ à partir de $SO(3)$.

Nous allons construire $SU(2)$ à partir de $SO(3)$. Chaque rotation de l'espace physique usuel est caractérisée par ses angles d'Euler – voir le schéma ci-dessous. Le trièdre (O, x, y, z) subit tout d'abord une rotation d'un angle φ autour de l'axe vertical Oz . L'axe Ox vient alors en Ox' . Puis une seconde rotation d'angle θ autour de Ox' transforme l'axe Oz en Oz' . Ces deux rotations ont alors transformé le trièdre (O, x, y, z) en (O, x', y', z') . Finalement, une rotation d'angle ψ autour du nouvel axe Oz' aboutit au trièdre final (O, x'', y'', z') . Toutes les rotations de $SO(3)$ sont obtenues quand les angles



Les angles d'Euler

φ et ψ varient de 0 à 2π et quand θ varie de 0 à π .

A toute rotation $\mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi)$ de $SO(3)$ nous associons la matrice complexe

$$A(\varphi, \theta, \psi) = \exp\left(-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z\right) \times \exp\left(-\frac{i}{2}\theta\sigma_x\right) \times \exp\left(-\frac{i}{2}\psi\sigma_z\right) . \quad (\text{Rb.80})$$

Problème n° Rb-24 – Niveau [3] : Montrer que

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\theta\sigma_x\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} . \quad (\text{Rb.81})$$

Effectuer le produit (Rb.80) et établir que la matrice $A(\varphi, \theta, \psi)$ a bien la forme d'un élément de $SU(2)$

$$A(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} , \quad (\text{Rb.82})$$

où les coefficients complexes a et b s'expriment en fonction des angles d'Euler par

$$a = e^{-\frac{i}{2}(\varphi + \psi)} \cos(\theta/2) , \quad (\text{Rb.83})$$

et par

$$b = -i e^{\frac{i}{2}(\psi - \varphi)} \sin(\theta/2) . \quad (\text{Rb.84})$$

On constate que l'on décrit l'intégralité de $SU(2)$ lorsque les angles d'Euler varient sur leurs domaines respectifs de définition. Lorsque θ prend toute valeur entre 0 et π , le module $|a| = \cos(\theta/2)$ augmente de 0 à 1 alors que la somme $|a|^2 + |b|^2$ reste toujours égale à l'unité. Les arguments

$$\alpha = -\frac{(\varphi + \psi)}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{(\psi - \varphi - \pi)}{2} \quad (\text{Rb.85})$$

couvrent chacun de manière indépendante toutes les valeurs possibles allant de 0 à 2π lorsque φ et ψ évoluent. Il est cependant remarquable de constater qu'à chaque rotation $\mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi)$ de $SO(3)$ sont associées les deux matrices de $SU(2)$

$$A(\varphi, \theta, \psi) \quad \text{et} \quad A(\varphi + 2\pi, \theta, \psi) \equiv -A(\varphi, \theta, \psi) . \quad (\text{Rb.86})$$

Le groupe $SU(2)$ ainsi construit est deux fois plus grand que $SO(3)$. A toute rotation $\mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi)$ de $SO(3)$ correspondent les deux éléments $A(\varphi, \theta, \psi)$ et $-A(\varphi, \theta, \psi)$ de $SU(2)$. Chaque élément A de $SU(2)$ est désormais représenté par **un seul automorphisme** de l'espace hermitien \mathbb{C}^2 dont la matrice représentative est précisément A . La représentation de spin 1/2 était projective vis à vis de $SO(3)$. Elle est linéaire et normale vis à vis du groupe $SU(2)$ qui constitue le recouvrement universel de $SO(3)$.

5) Addition du spin.

5.1) La décomposition de Clebsch–Gordan.

La représentation précédente de spin $1/2$ – isomorphe à l'espace hermitien \mathbb{C}^2 – est notée par le chiffre **2** car elle contient les deux vecteurs $|+\rangle \equiv |1/2, 1/2\rangle$ et $|-\rangle \equiv |1/2, -1/2\rangle$ suivant que le spin est dirigé vers le haut ou vers le bas. Le produit tensoriel $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ de deux représentations de spin $1/2$ comprend toutes les juxtapositions possibles des vecteurs précédents. Les opérateurs H_i agissent sur ce produit tensoriel via la décomposition

$$H_i \equiv H_{1,i} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes H_{2,i} . \quad (\text{Rb.87})$$

Problème n° Rb–25 – Niveau [1] : En appliquant l'opérateur H_- au vecteur

$$|1, 1\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle , \quad (\text{Rb.88})$$

construire une base de la représentation de spin 1 contenue dans le produit tensoriel $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$. On montrera que la représentation de spin 1 contient le vecteur $|1, 1\rangle$ ainsi que

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle \} \quad (\text{Rb.89})$$

et

$$|1, -1\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle . \quad (\text{Rb.90})$$

Le dernier vecteur du produit tensoriel $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ est la combinaison antisymétrique

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle \} \quad (\text{Rb.91})$$

qui appartient à la représentation scalaire $j = 0$ de $SU(2)$. Le vecteur précédent s'annule dès lors qu'on lui applique H_+ ou H_- . Nous avons ici une illustration du théorème de Clebsch–Gordan puisque le produit tensoriel de deux représentations spinorielles se décompose en la somme directe

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} . \quad (\text{Rb.92})$$

Plus généralement, si $(2j_1+1)$ et $(2j_2+1)$ sont deux représentations irréductibles de $SU(2)$ associées respectivement aux valeurs propres $j_1(j_1+1)$ et $j_2(j_2+1)$ du moment angulaire

total H^2 , leur produit tensoriel se décompose en une somme directe de représentations irréductibles $(2j+1)$

$$(2j_1+1) \otimes (2j_2+1) = \sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) . \quad (\text{Rb.93})$$

Nous présenterons la méthode générale permettant de construire les vecteurs $|j, m\rangle$ de chaque représentation $(2j+1)$ à partir des juxtapositions $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ qui apparaissent naturellement dans le produit tensoriel $(2j_1+1) \otimes (2j_2+1)$. Nous illustrerons cette construction en nous concentrant sur le produit tensoriel $\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}$ permettant d'additionner – au sens de la mécanique quantique – un spin 1 et un spin 1/2.

Problème n° Rb-26 – Niveau [2] : *Montrer tout d'abord que le vecteur*

$$|3/2, 3/2\rangle \equiv |1, 1\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle \quad (\text{Rb.94})$$

appartient à la représentation 4 de spin 3/2. Construire une base orthonormée de cette représentation en appliquant autant de fois que nécessaire l'opérateur H_- . Etablir que

$$\begin{aligned} |3/2, 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 1\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle , \\ |3/2, -1/2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |1, -1\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle , \\ |3/2, -3/2\rangle &= |1, -1\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle . \end{aligned} \quad (\text{Rb.95})$$

Construire ensuite le vecteur $|1/2, 1/2\rangle$ normé à partir de la combinaison linéaire des vecteurs $|1, 0\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle$ et $|1, 1\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle$ que l'opérateur H_+ annule. Appliquer ensuite l'opérateur H_- pour dériver $|1/2, -1/2\rangle$. Etablir que

$$\begin{aligned} |1/2, 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle , \\ |1/2, -1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle \end{aligned} \quad (\text{Rb.96})$$

Les coefficients de Clebsch–Gordan sont définis par la décomposition

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 j ; m_1 m_2 m) |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle . \quad (\text{Rb.97})$$

Ils constituent les éléments d'une matrice \mathcal{C} permettant de pivoter de la base $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ à la base $|j, m\rangle$. En jouant sur la phase des vecteurs, on peut choisir des coefficients réels de sorte que la matrice \mathcal{C} est orthogonale. La relation précédente peut alors être inversée en

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \sum_{j, m} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) |j, m\rangle . \quad (\text{Rb.98})$$

Problème n° Rb-27 – Niveau [1] : Calculer les coefficients de Clebsch–Gordan qui apparaissent dans la décomposition précédente

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{2} . \quad (\text{Rb.99})$$

5.2) Tenseurs de $SU(2)$ et tableaux d'Young.

Tout vecteur $|\varphi\rangle$ de la représentation spinorielle $\mathbf{2}$ du groupe $SU(2)$ se décompose suivant la base des vecteurs $|+\rangle$ et $|-\rangle$

$$|\varphi\rangle = \varphi_+ |+\rangle + \varphi_- |-\rangle \equiv \sum_{a=-}^{a=+} \varphi_a |a\rangle . \quad (\text{Rb.100})$$

Alors que jusqu'ici nous avons travaillé avec les vecteurs tels que $|\varphi\rangle$, nous allons maintenant nous concentrer sur les composantes spinorielles φ_a et construire des tenseurs en les superposant. Une rotation de $SU(2)$ transforme les composantes φ_a en nouvelles composantes φ'_a telles que

$$\varphi_a \longrightarrow \varphi'_a = [U]_{ab} \varphi_b = \left[\exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} \right]_{ab} \varphi_b . \quad (\text{Rb.101})$$

La représentation $\bar{\mathbf{2}}$ de $SU(2)$ contient les spineurs qui se transforment comme les complexes conjugués φ_a^* en suivant la loi

$$\varphi_a^* \longrightarrow \varphi'^*_a = [U^*]_{ab} \varphi_b^* = \left[\exp \left\{ +\frac{i}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \right\} \right]_{ab} \varphi_b^* . \quad (\text{Rb.102})$$

Problème n° Rb-28 – Niveau [2] : Montrer que la matrice $\epsilon \equiv i \sigma_y$ vérifie l'égalité

$$\epsilon^{-1} \boldsymbol{\sigma}^* \epsilon = -\boldsymbol{\sigma} . \quad (\text{Rb.103})$$

En conclure que les composantes de la matrice $\epsilon^{-1} [\varphi^*]$ se transforment comme celles de la matrice $[\varphi]$.

Il est donc possible de faire correspondre à chaque élément φ_a de la représentation **2** un spineur φ^a de la représentation conjuguée $\bar{\mathbf{2}}$ grâce à la bijection décrite par la matrice ϵ . En ce sens, les représentations **2** et $\bar{\mathbf{2}}$ sont dites équivalentes et l'on note

$$\varphi^a = \epsilon^{ab} \varphi_b , \quad (\text{Rb.104})$$

avec $\epsilon^{12} = +1 = -\epsilon^{21}$. Les composantes ϵ_{ab} sont choisies égales à ϵ^{ab} en sorte que

$$\varphi_a = -\epsilon_{ab} \varphi^b . \quad (\text{Rb.105})$$

On peut également définir les transformations de $SU(2)$ en jouant sur la position des indices spinoriels a et b avec

$$\begin{aligned} \varphi'_a &= [U]_{ab} \varphi_b \equiv U_a{}^b \varphi_b , \\ \varphi'^a &= [U^*]_{ab} \varphi^b \equiv U^a{}_b \varphi^b . \end{aligned} \quad (\text{Rb.106})$$

Problème n° Rb-29 – Niveau [1] : Montrer que la contraction spinorielle $\psi^a \varphi_a$ est invariante sous une rotation de $SU(2)$. Elle se comporte donc comme un élément de la représentation scalaire **1**. On peut dès lors manipuler le spineur φ^a comme on le ferait avec les composantes x^μ d'un vecteur covariant de Lorentz. A ce propos, le tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$ de Minkowski est invariant quand on effectue une transformation de Lorentz. Montrer que de manière similaire, l'objet ϵ_{ab} est invariant sous $SU(2)$ dans la mesure où il vérifie

$$\epsilon_{ab} \longrightarrow \epsilon'_{ab} = U_a{}^\alpha U_b{}^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{ab} . \quad (\text{Rb.107})$$

L'analogie est ainsi complète !

Le tenseur spinoriel de rang 2 dont les composantes sont $\psi_a \varphi_b$ appartient à la représentation $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ de $SU(2)$. On peut le rendre symétrique par rapport à ses indices a et b

$$\psi_{(a} \varphi_{b)} \equiv \psi_a \varphi_b + \psi_b \varphi_a , \quad (\text{Rb.108})$$

ou antisymétrique

$$\psi_{[a} \varphi_{b]} \equiv \psi_a \varphi_b - \psi_b \varphi_a . \quad (\text{Rb.109})$$

Il peut également s'écrire comme la somme de sa composante symétrique et de sa composante antisymétrique puisque

$$\psi_a \varphi_b = \frac{1}{2} \psi_{(a} \varphi_{b)} + \frac{1}{2} \psi_{[a} \varphi_{b]} . \quad (\text{Rb.110})$$

Problème n° Rb-30 – Niveau [1] : Vérifier tout d'abord que la partie antisymétrique $\psi_{[a} \varphi_{b]}$ se met sous la forme

$$\psi_{[a} \varphi_{b]} \equiv \epsilon_{ab} \psi_m \varphi^m , \quad (\text{Rb.111})$$

et qu'elle est invariante sous une transformation de $SU(2)$. A quelle représentation appartient-elle ? Montrer ensuite que la partie symétrique $\psi_{(a} \varphi_{b)}$ a trois composantes. Commentaires ?

Nous venons de trouver une méthode pour effectuer la décomposition de Clebsch–Gordan du produit tensoriel $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ en jouant directement sur les composantes du tenseur spinoriel $\psi_a \varphi_b$. Cette procédure est représentée symboliquement à l'aide des tableaux d'Young. Chaque case correspond à un spineur comme ψ_a ou φ_b . On accole deux cases verticalement quand on antisymétrise par rapport aux indices a et b , et horizontalement si l'on choisit de symétriser.

$$\boxed{a} \otimes \boxed{b} = \boxed{\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} \oplus \boxed{a \ b} \quad (\text{Rb.112})$$

La situation se complique sérieusement dans le cas d'un tenseur à trois indices et sera analysée en détail plus loin. Pour l'instant, intéressons-nous au produit tensoriel d'un spin 1 avec un spin 1/2 décrit par les tableaux d'Young

$$\boxed{a \ b} \otimes \boxed{c} = \boxed{\begin{smallmatrix} a & b \\ c \end{smallmatrix}} \oplus \boxed{a \ b \ c} . \quad (\text{Rb.113})$$

Afin de comprendre la signification du tableau à symétrie mixte $\boxed{\begin{smallmatrix} a & b \\ c \end{smallmatrix}}$, il convient de calculer toutes les composantes tensorielles correspondantes.

Problème n° Rb–31 – Niveau [3] : On considère le produit $\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}$ représenté par le tenseur $\psi_{(a} \varphi_{b)} \chi_c$ de rang 3. Montrer que

$$3\psi_{(a} \varphi_{b)} \chi_c = S_{abc} + \{M_{abc} \equiv \epsilon_{ac} \psi_{(b} \varphi_{m)} \chi^m + \epsilon_{bc} \psi_{(a} \varphi_{m)} \chi^m\} , \quad (\text{Rb.114})$$

où la partie complètement symétrique est décrite par

$$S_{abc} \equiv \psi_{(a} \varphi_{b} \chi_{c)} = \psi_{(a} \varphi_{b)} \chi_c + \psi_{(b} \varphi_{c)} \chi_a + \psi_{(c} \varphi_{a)} \chi_b . \quad (\text{Rb.115})$$

Calculer explicitement chacune des huit composantes de S_{abc} et de M_{abc} . Développer ensuite les vecteurs $S_{abc} |a\rangle|b\rangle|c\rangle$ et $M_{abc} |a\rangle|b\rangle|c\rangle$ en fonction des composantes indépendantes de S_{abc} et de M_{abc} . Retrouver alors les résultats de l'exercice I–26.

Nous avons démontré à partir des composantes de $\psi_{(a} \varphi_{b)} \chi_c$ que le produit tensoriel $\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}$ est égal à la somme directe $\mathbf{2} \oplus \mathbf{4}$. Le tenseur S_{abc} est complètement symétrique dans l'échange de ses indices a , b et c . Le tenseur M_{abc} présente par contre des symétries plus complexes à percevoir. Il est bien symétrique dans l'échange de a et de b . Il est antisymétrique dans l'échange simultané de a avec c et de b avec c de sorte que

$$M_{cba} + M_{acb} = -M_{abc} . \quad (\text{Rb.116})$$

5.3) Un peu de $SU(3)$.

Il est possible de généraliser l'analyse précédente au groupe $SU(3)$ constitué des matrices 3×3 de déterminant unité (spéciales) et unitaires. La représentation spinorielle est maintenant un espace vectoriel de dimension trois construit sur \mathbb{C} sur lequel agissent les matrices de $SU(3)$. Cette représentation qualifiée de fondamentale est notée par le symbole $\mathbf{3}$. Chaque spineur est donc décrit par φ_a où l'indice a varie de 1 à 3. Le modèle des quarks, que Gell–Mann et Ne'eman ont proposé en 1961, permet de classer les baryons et les mésons suivant les représentations fondamentales de $SU(3)$. Celles-ci s'obtiennent par une décomposition de Clebsch–Gordan des produits tensoriels $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$. Le modèle se fonde mathématiquement sur la représentation fondamentale $\mathbf{3}$ de $SU(3)$ dont les vecteurs de base incarnent de nouveaux états quantiques que Gell–Mann, qui n'y croyait pas au départ, a dénommés **quarks** par boutade. Tout vecteur de la $\mathbf{3}$ peut donc se mettre sous la forme

$$|\varphi\rangle = \sum_{a=1}^{a=3} \varphi_a |a\rangle \equiv \varphi_1 |u\rangle + \varphi_2 |d\rangle + \varphi_3 |s\rangle . \quad (\text{Rb.117})$$

particule	T_3	Y	Q
u	$+1/2$	$+1/3$	$+2/3$
d	$-1/2$	$+1/3$	$-1/3$
s	0	$-2/3$	$-1/3$
\bar{u}	$-1/2$	$-1/3$	$-2/3$
\bar{d}	$+1/2$	$-1/3$	$+1/3$
\bar{s}	0	$+2/3$	$+1/3$

Table **Rb.1**: Quarks et antiquarks sont présentés en fonction de leur isospin fort T_3 , de leur hypercharge Y et de leur charge électrique Q . Celle-ci est fractionnaire mais aucune particule portant une telle charge n'a été observée. Les quarks sont astreints à former des associations dont la charge totale Q est entière.

Dans le cas de la chromodynamique quantique, les indices a, b et c représentent cette fois les trois états rouge, vert et bleu d'une nouvelle propriété quantique dénommée **couleur**. Les rotations sous $SU(3)$ s'écrivent de manière générique comme

$$\varphi_a \longrightarrow \varphi'_a = U_a{}^b \varphi_b = \left[\exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\lambda} \right\} \right]_{ab} \varphi_b . \quad (\text{Rb.118})$$

Le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ possède désormais huit composantes et l'algèbre de $SU(3)$ est représentée par les matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{Rb.119})$$

Les quarks sont caractérisés par leur **isospin fort** $T_3 = \lambda_3/2$ et par leur **hypercharge** $Y = \lambda_8/\sqrt{3}$. Leur charge électrique est donnée par la relation de Gell-Mann et Nishijima

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (\text{Rb.120})$$

de sorte que nous pouvons les classer dans la table **Rb.1** et la figure **Rb.1** en fonction de leurs nombres quantiques.

La représentation conjuguée $\bar{\mathbf{3}}$ n'est pas isomorphe à la représentation $\mathbf{3}$ comme c'était le cas avec $SU(2)$ et nous devons remplacer le tenseur ϵ^{ab} par un objet complètement antisymétrique dans ses indices que nous noterons ϵ^{abc} avec $\epsilon^{123} = +1 = \epsilon_{123}$.

Problème n° Rb-32 – Niveau [2] : Montrer que ϵ est un tenseur invariant sous $SU(3)$ puisqu'il vérifie

$$\epsilon_{abc} \longrightarrow \epsilon'_{abc} = U_a{}^\alpha U_b{}^\beta U_c{}^\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \equiv \epsilon_{abc} . \quad (\text{Rb.121})$$

Montrer qu'il en va de même pour ϵ^{abc} . On essaiera de faire apparaître le déterminant de la matrice U .

Problème n° Rb-33 – Niveau [2] : On définit un spineur de la représentation $\bar{\mathbf{3}}$ en contractant ϵ^{abc} avec le tenseur $\varphi_b \chi_c$ de rang 2 en sorte que

$$\bar{\psi}^a = \epsilon^{abc} \varphi_b \chi_c . \quad (\text{Rb.122})$$

Montrer que

$$\bar{\psi}^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \varphi_{[b} \chi_{c]} . \quad (\text{Rb.123})$$

Etablir que $\bar{\psi}^a$ se transforme selon la loi

$$\bar{\psi}^a \longrightarrow \bar{\psi}'^a = [U^*]_{ab} \bar{\psi}^b \equiv U^a{}_b \bar{\psi}^b . \quad (\text{Rb.124})$$

et qu'il appartient bien à la représentation spinorielle conjuguée $\bar{\mathbf{3}}$ de $SU(3)$. Celle-ci s'obtient donc en antisymétrisant le tenseur $\varphi_b \chi_c$ appartenant au produit direct $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$. Relier les nombres quantiques (T_3 , Y et Q) de l'antiquark \bar{s} à ceux des quarks u et d . Faire de même pour \bar{u} et \bar{d} . Montrer que la partie symétrique $\varphi_{(b} \chi_{c)}$ contient 6 composantes différentes de sorte que

$$\square (\mathbf{3}) \otimes \square (\mathbf{3}) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} (\bar{\mathbf{3}}) \oplus \square\square (\mathbf{6}) . \quad (\text{Rb.125})$$

Finalement, considérons le tenseur $\xi_a \bar{\psi}^b$ que nous choisissons de décomposer en

$$\xi_a \bar{\psi}^b = \left\{ \xi_a \bar{\psi}^b - \frac{1}{3} \delta_a^b \xi_m \bar{\psi}^m \right\} + \frac{1}{3} \delta_a^b \xi_m \bar{\psi}^m . \quad (\text{Rb.126})$$

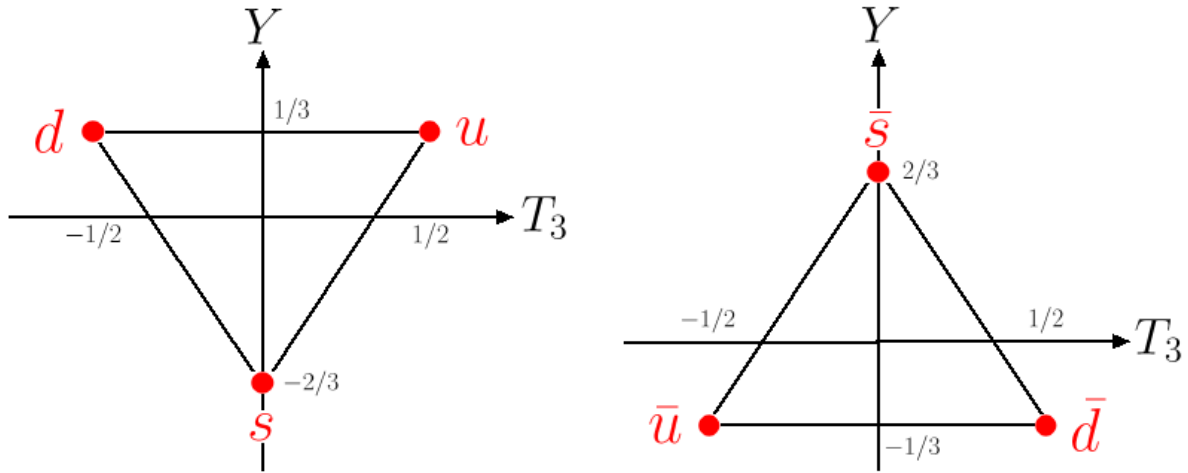


Figure Rb.1: Les quarks (panneau de gauche) et les antiquarks (panneau de droite) sont représentés dans le plan (T_3, Y) où ils forment deux triangles symétriques l'un de l'autre. Les quarks appartiennent à la représentation fondamentale $\mathbf{3}$ de $SU(3)$ alors que leurs antiparticules sont dans la représentation conjuguée $\bar{\mathbf{3}}$.

En s'aidant de l'exercice Rb-32, on peut montrer que le dernier terme est un scalaire invariant sous les rotations de $SU(3)$ alors que le terme en accolade contient 8 composantes différentes. Nous avons alors l'intuition que

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} (\bar{\mathbf{3}}) \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{3}) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{1}) \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{8}) . \quad (\text{Rb.127})$$

En utilisant les tableaux d'Young, on peut essayer de se convaincre ensuite que

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{6}) \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{3}) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{8}) \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{10}) . \quad (\text{Rb.128})$$

et d'aboutir à

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{3}) \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{3}) \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{3}) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{1}) \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{8}) \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{8}) \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} (\mathbf{10}) . \quad (\text{Rb.129})$$

La relation précédente se comprend bien intuitivement mais n'est pas utilisable en l'espèce car nous n'avons pas établi de manière claire les règles permettant de construire les tenseurs associés à chaque représentation.

5.4) Retour sur les tableaux d'Young.

Afin de déterminer les fonctions d'onde de spin et de saveur des mésons et des baryons, il est crucial de pouvoir calculer explicitement les combinaisons des permutations d'indice qui entrent en jeu dans les relations (Rb.127) et (Rb.129). Concentrons-nous sur la dernière égalité et considérons la représentation fondamentale de $SU(n)$, que nous noterons \mathbf{n} , en gardant à l'esprit que $n = 2$ pour le spin ou 3 pour la saveur. Nous cherchons à développer la puissance tensorielle cubique de la représentation \mathbf{n} en fonction des représentations irréductibles de $SU(n)$. Cette décomposition de Clebsch–Gordan se met sous la forme

$$\mathbf{n}^{\otimes 3} \equiv \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{M}_\mathbf{A} \oplus \mathbf{M}_\mathbf{S} \oplus \mathbf{S} . \quad (\text{Rb.130})$$

Dans le cas de $SU(3)$, les représentations irréductibles \mathbf{A} , $\mathbf{M}_\mathbf{A}$, $\mathbf{M}_\mathbf{S}$ et \mathbf{S} correspondent respectivement aux représentations singlet $\mathbf{1}$, mixte antisymétrique $\mathbf{8}$, mixte symétrique $\mathbf{8}$ et décuplet $\mathbf{10}$.

Si la représentation \mathbf{n} a pour base l'ensemble des vecteurs $|i\rangle$ avec i variant de 1 à n , la puissance tensorielle $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ a pour base les $N = n^3$ produits tensoriels

$$|i j k\rangle \equiv |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle .$$

Déterminer la décomposition de Clebsch–Gordan (Rb.130) revient à trouver les opérateurs permettant de projeter les vecteurs de base $|i j k\rangle$ sur les représentations irréductibles \mathbf{A} , $\mathbf{M}_\mathbf{A}$, $\mathbf{M}_\mathbf{S}$ et \mathbf{S} . Ces opérateurs sont mathématiquement des **projecteurs** que nous noterons respectivement \mathcal{P}_- , \mathcal{Q}_- , \mathcal{Q}_+ et \mathcal{P}_+ . Ils sont construits à partir des permutations des vecteurs $|i\rangle$, $|j\rangle$ et $|k\rangle$ au sein du produit tensoriel $|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle$. Celles-ci peuvent également se concevoir comme les permutations des indices $i j k$ entre eux au sein du ket $|i j k\rangle$. Tout vecteur $|\alpha\rangle \equiv |i j k\rangle$ se met dès lors sous la forme

$$|\alpha\rangle = \mathcal{P}_- (|\alpha\rangle) \in \mathbf{A} + \mathcal{Q}_- (|\alpha\rangle) \in \mathbf{M}_\mathbf{A} + \mathcal{Q}_+ (|\alpha\rangle) \in \mathbf{M}_\mathbf{S} + \mathcal{P}_+ (|\alpha\rangle) \in \mathbf{S} . \quad (\text{Rb.131})$$

Cette égalité traduit au niveau des vecteurs $|i j k\rangle$ de la base de l'espace vectoriel $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ la décomposition de Clebsch–Gordan (Rb.130) et se représente par les tableaux d'Young

$$\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline k \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline k \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline i & k \\ \hline j & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline k & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline i & j & k \\ \hline \end{array} . \quad (\text{Rb.132})$$

Au fond, nous voulons décomposer l'identité de l'espace vectoriel $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ en somme de projecteurs

$$\mathbb{I}_N = \mathcal{P}_- + \mathcal{Q}_- + \mathcal{Q}_+ + \mathcal{P}_+ , \quad (\text{Rb.133})$$

où chacun des projecteurs \mathcal{P}_\pm et \mathcal{Q}_\pm , que nous noterons de manière générique \mathcal{P}_r , est une combinaison linéaire, qu'il nous faut déterminer, de permutations des indices $i j k$ des vecteurs $|i j k\rangle$. Ces dernières sont des produits de transpositions qui n'échangent que deux indices et laissent les autres invariants. La transposition P_{12} , par exemple, agit sur le vecteur $|i j k\rangle$ en lui associant le vecteur $|j i k\rangle$. De manière générale, la transposition P_{12} agit sur le produit tensoriel de p vecteurs en échangeant simplement les deux premiers.

Problème n° Rb-34 – Niveau [2] : Montrer que la transposition P_{12} agissant sur l'espace vectoriel $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ et ses vecteurs de base $|\alpha\rangle \equiv |i j k\rangle$ se représente par une matrice $N \times N$ ne contenant que des 0 ou des 1. On pourra traiter le cas simple mais instructif de $SU(2)$ où $n = 2$ et $N = 8$. On rappelle que la matrice M associée à l'application linéaire f est construite de manière à ce que l'élément $M_{\beta\alpha}$ donne la composante du vecteur $f(|\alpha\rangle)$ (situé sur la colonne α) suivant le vecteur $|\beta\rangle$ (placé sur la ligne β) en sorte que

$$f(|\alpha\rangle) = M_{\beta\alpha} |\beta\rangle . \quad (\text{Rb.134})$$

Montrer ensuite que la matrice associée à P_{12} est égale à sa transposée et est donc hermitienne. Etablir finalement que chacun des projecteurs \mathcal{P}_\pm et \mathcal{Q}_\pm se représente par une matrice réelle.

Afin de simplifier les notations, nous désignerons les transpositions P_{12} , P_{13} et P_{23} respectivement par a , b et c . Le groupe des permutations de trois indices $i j k$, alias $i_1 i_2 i_3$, est le groupe symétrique S_3 de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Problème n° Rb-35 – Niveau [1] : Montrer que ce groupe ne contient que les éléments

$$S_3 = \{1, a, b, c, ab, ba\} , \quad (\text{Rb.135})$$

et que a, b et c vérifient l'identité $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ ainsi que les relations

$$ab = bc = ca \text{ et } ba = ac = cb . \quad (\text{Rb.136})$$

Nous sommes désormais prêts à exprimer les projecteurs \mathcal{P}_r en fonction des éléments du groupe S_3 . Pour commencer, nous réalisons que la décomposition de Clebsch–Gordan du

produit tensoriel $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ fait intervenir les vecteurs de base

$$|ij\rangle = |S\rangle + |A\rangle , \quad (\text{Rb.137})$$

qui se développent suivant les combinaisons symétriques et antisymétriques

$$|S\rangle = \frac{1}{2}(1+a)|ij\rangle \quad \text{et} \quad |A\rangle = \frac{1}{2}(1-a)|ij\rangle . \quad (\text{Rb.138})$$

Cette égalité se traduit par le diagramme d'Young

$$\boxed{i} \otimes \boxed{j} = \boxed{\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}} \oplus \boxed{i \ j} , \quad (\text{Rb.139})$$

où nous pouvons noter symboliquement l'action des projecteurs $(1 \pm a)/2$ par

$$\boxed{\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}} = \frac{1}{2}(1-a) (\boxed{i} \otimes \boxed{j}) \quad \text{et} \quad \boxed{i \ j} = \frac{1}{2}(1+a) (\boxed{i} \otimes \boxed{j}) . \quad (\text{Rb.140})$$

Problème n° Rb-36 – Niveau [3] : En s'inspirant de la méthode présentée dans l'exercice Rb-31, montrer que les projecteurs \mathcal{P}_\pm et \mathcal{Q}_\pm se mettent respectivement sous la forme

$$\mathcal{P}_\epsilon = \frac{1}{6} \{1 + \epsilon(a+b+c) + ab + ba\} \quad (\text{Rb.141})$$

$$\mathcal{Q}_\epsilon = \frac{1}{6} (1 + \epsilon a) (2 - \epsilon b - \epsilon c) , \quad (\text{Rb.142})$$

où ϵ prend les valeurs $+1$ et -1 . Vérifier que la relation de fermeture (Rb.133) est bien satisfaite. Montrer finalement que les opérateurs \mathcal{P}_ϵ et \mathcal{Q}_ϵ sont bien des projecteurs en établissant tout d'abord que

$$\mathcal{P}_\epsilon \mathcal{Q}_{\epsilon'} = 0 . \quad (\text{Rb.143})$$

Vérifier ensuite que le produit $\mathcal{P}_\epsilon \mathcal{P}_{\epsilon'}$ est égal à \mathcal{P}_ϵ lorsque $\epsilon = \epsilon'$ et est nul sinon. Terminer en démontrant qu'il en va de même pour le produit $\mathcal{Q}_\epsilon \mathcal{Q}_{\epsilon'}$.

Problème n° Rb-37 – Niveau [2] : A partir des expressions (Rb.141) et (Rb.142) ainsi que des relations (Rb.136) qu'entretiennent les éléments du groupe S_3 entre eux, montrer que chacun des projecteurs \mathcal{P}_\pm et \mathcal{Q}_\pm est égal à sa transposée et qu'il est donc hermitien. Les combinaisons de permutations des indices $i j k$ que nous venons d'établir dans l'exercice précédent s'appliquent de manière identique aux vecteurs de base $|i j k\rangle$ et aux composantes tensorielles T_{ijk} d'un vecteur quelconque $|T\rangle$. Chaque tableau d'Young encode donc une combinaison particulière de permutations à utiliser aussi bien avec les composantes tensorielles T_{ijk} qu'avec les vecteurs de base $|i j k\rangle$ par rapport auxquels celles-ci sont exprimées.

Tout vecteur $|T\rangle$ de l'espace vectoriel $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ se met sous la forme

$$|T\rangle = T_{ijk} |i j k\rangle \equiv T_\alpha |\alpha\rangle \quad , \quad (\text{Rb.144})$$

où nous notons symboliquement les N triplets d'indice $i j k$ par la lettre α . La relation de fermeture (Rb.133) peut être insérée dans l'égalité précédente en sorte que

$$|T\rangle = \delta_{\alpha\beta} T_\beta |\alpha\rangle = \sum_r (\mathcal{P}_r)_{\alpha\beta} T_\beta |\alpha\rangle = \sum_r (\mathcal{P}_r^2)_{\alpha\beta} T_\beta |\alpha\rangle \quad . \quad (\text{Rb.145})$$

Chaque projecteur \mathcal{P}_r est en effet égal à son carré. Comme il est aussi égal à sa transposée, il vient finalement

$$|T\rangle = \sum_r \{(\mathcal{P}_r)_{\mu\beta} T_\beta\} \{(\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_r^t)_{\mu\alpha} |\alpha\rangle\} \quad . \quad (\text{Rb.146})$$

Nous venons de démontrer la propriété énoncée à la fin de l'exercice précédent : tout vecteur de la représentation \mathbf{r} résulte de l'action du projecteur \mathcal{P}_r sur les vecteurs $|\alpha\rangle$ alias $|i j k\rangle$ de l'espace vectoriel $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$. Ses composantes tensorielles sont également de la forme $(\mathcal{P}_r)_{\mu\beta} T_\beta$ qui implique la même combinaison de permutations des indices α alias $i j k$.

Problème n° Rb-38 – Niveau [2] : A partir des propriétés des projecteurs \mathcal{P}_r établies précédemment, montrer que deux vecteurs appartenant à des représentations différentes sont orthogonaux. Montrer que la représentation complètement antisymétrique \mathbf{A} est impaire sous l'effet de a , de b et de c . Montrer ensuite que la représentation complètement symétrique \mathbf{S} est paire sous l'effet de ces opérateurs. Etudier le comportement des représentations mixte antisymétrique $\mathbf{M}_\mathbf{A}$ et mixte symétrique $\mathbf{M}_\mathbf{S}$ sous l'effet de a et commenter. Comment réagissent-elles sous l'effet de $b + c$?

Toute rotation R de $SU(n)$ donne du vecteur $|i\rangle$ de la représentation \mathbf{n} l'image

$$|i'\rangle = R(|i\rangle) = R_{ii'} |i\rangle . \quad (\text{Rb.147})$$

Le vecteur $|i j k\rangle \equiv |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle$ de l'espace vectoriel $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ a pour image, via la rotation R de $SU(n)$, le vecteur

$$|i'\rangle \otimes |j'\rangle \otimes |k'\rangle = R(|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle) = R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle . \quad (\text{Rb.148})$$

L'action de la transposition P_{12} sur ce vecteur conduit à

$$P_{12} |i'\rangle \otimes |j'\rangle \otimes |k'\rangle = |j'\rangle \otimes |i'\rangle \otimes |k'\rangle \equiv R_{ij'} R_{ji'} R_{kk'} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle , \quad (\text{Rb.149})$$

qui, après une permutation des indices i et j , se met sous la forme

$$P_{12} R(|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle) = R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} |j\rangle \otimes |i\rangle \otimes |k\rangle = R(P_{12} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle) . \quad (\text{Rb.150})$$

Nous venons de montrer que la transposition P_{12} commute avec toute rotation R de $SU(n)$. Il en va de même pour les projecteurs \mathcal{P}_r . Les espaces vectoriels \mathbf{A} , $\mathbf{M}_\mathbf{A}$, $\mathbf{M}_\mathbf{S}$ et \mathbf{S} sont donc bien des représentations de $SU(n)$ dans la mesure où aucune rotation de ce groupe ne peut faire passer un vecteur d'une représentation à une autre. Nous n'avons toutefois pas démontré que ces représentations étaient irréductibles. Nous terminerons cette introduction aux tableaux d'Young par des travaux pratiques.

Problème n° Rb-39 – Niveau [2] : Dans le cas de $SU(2)$, appliquer les projecteurs \mathcal{P}_\pm et \mathcal{Q}_\pm sur les vecteurs de l'espace $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$. Montrer que la représentation \mathbf{A} ne contient que le vecteur nul. Construire explicitement les vecteurs de la représentation $\mathbf{M}_\mathbf{A}$ et montrer qu'ils sont proportionnels à $|0,0\rangle \otimes |\pm\rangle$. Faire de même pour les représentations $\mathbf{M}_\mathbf{S}$ et \mathbf{S} et retrouver les résultats de l'exercice Rb-26.

Le proton est un assemblage de deux quarks u et d'un quark d . Il appartient à l'octet des baryons dont toutes les particules ont un spin $1/2$. Sa fonction d'onde de saveur et de spin s'obtient en combinant des produits tensoriels faisant intervenir un ket de saveur $|\mathcal{F}\rangle$ appartenant à une représentation de $SU(3)$ avec un ket de spin $|\mathcal{S}\rangle$ appartenant à une représentation de $SU(2)$. La fonction d'onde finale est symétrique sous l'échange de deux quarks quelconques. Il convient donc d'associer des représentations de $SU(3)$ et de $SU(2)$ qui possèdent les mêmes symétries vis à vis des permutations et dont les valeurs propres sous l'action de l'opérateur a sont bien identiques sous peine de ne pouvoir construire

un état parfaitement symétrique. Le proton appartenant à un octet, on peut écarter la représentation **10** de $SU(3)$. De même, la **4** de $SU(2)$ doit être abandonnée car elle est caractérisée par un spin $3/2$ alors que le proton est un état de spin $1/2$. On ne peut donc associer entre elles que les représentations \mathbf{M}_S ou bien \mathbf{M}_A . Dans le premier cas, le produit tensoriel recherché est de la forme

$$|\mathcal{F}\rangle \otimes |\mathcal{S}\rangle = (2|ud\rangle - |du\rangle - |du\rangle) \otimes (2|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle) \quad , \quad (\text{Rb.151})$$

alors que la combinaison de vecteurs appartenant aux représentations \mathbf{M}_A de $SU(3)$ et de $SU(2)$ s'écrit

$$|\mathcal{F}'\rangle \otimes |\mathcal{S}'\rangle = (|udu\rangle - |duu\rangle) \otimes (|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \quad . \quad (\text{Rb.152})$$

Problème n° Rb-40 – Niveau [3] : Démontrer les relations (Rb.151) et (Rb.152). La fonction d'onde du proton s'obtient en prenant la combinaison linéaire

$$|p, \uparrow\rangle = \alpha |\mathcal{F}\rangle \otimes |\mathcal{S}\rangle + \beta |\mathcal{F}'\rangle \otimes |\mathcal{S}'\rangle \quad , \quad (\text{Rb.153})$$

et en imposant que l'action de $P_{13} \equiv b$ laisse invariant le vecteur final. On notera que P_{13} agit simultanément sur les kets de saveur et de spin. Montrer alors que $\beta = 3\alpha$ et en déduire la fonction d'onde normée du proton

$$|p, \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{2|d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow\rangle - |d_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow\rangle - |d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle + \text{permutations}\} \quad , \quad (\text{Rb.154})$$

où les permutations s'obtiennent en décalant le quark d à la seconde puis à la troisième place.

Chapitre IV

Théories de jauge et modèle de Weinberg–Salam

Ce chapitre est une introduction aux théories de jauge non-abéliennes. Nous commencerons par la notion de dérivée covariante D_μ puis analyserons les propriétés essentielles de l'électromagnétisme afin de les généraliser à une théorie s'appuyant sur un groupe non-abélien. Nous aborderons ensuite la notion de **brisure spontanée de symétrie** que nous illustrerons avec le cas simple du chapeau mexicain. L'existence d'un boson de **Nambu–Goldstone** associé au générateur cassé par le vide y apparaît déjà et une interprétation physique est possible. Nous étudierons des cas plus compliqués impliquant les groupes $SO(n)$ et $SU(2)$ où l'on retrouve le théorème de Goldstone dont nous finirons par donner une démonstration générale. Le mécanisme miraculeux de **Higgs** sera ensuite étudié et illustré avec tout d'abord $U(1)$ et ensuite $SU(2)$. Nous serons alors fin prêts à aborder le modèle électrofaible de **Weinberg–Salam** dont nous construirons le Lagrangien et dériverons les interactions après avoir relié la masse des bosons de jauge Z^0 et W^\pm à la constante de **Fermi** G_F et à l'angle faible θ_W .

1) La dérivée covariante en électromagnétisme.

La notion de dérivée covariante apparaît déjà en mécanique classique dans l'étude d'une particule M de masse m plongée dans un champ électromagnétique dont le potentiel vecteur est $A^\mu \equiv \{A^0 = \Phi, A^i = \mathbf{A}\}$. Au Lagrangien $L_0 \equiv T$ de la particule libre, il convient de soustraire une énergie potentielle V dépendant de la position \mathbf{x} et de la vitesse \mathbf{v} de M de sorte que le Lagrangien se met sous la forme

$$L = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}^2 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \{V \equiv q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\} . \quad (\text{IV.1})$$

Puisque l'énergie potentielle V dépend de la vitesse, le moment conjugué de x^i n'est plus l'impulsion $m \dot{x}^i$ mais l'impulsion généralisée

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial v^i} = m \dot{x}^i + q A^i . \quad (\text{IV.2})$$

La quantité de mouvement $m \mathbf{v}$ est donc remplacée par

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} + q \mathbf{A} . \quad (\text{IV.3})$$

Le Hamiltonien associé à L est défini par $H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$. Un calcul élémentaire permet alors d'établir que

$$H = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q \Phi = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q \mathbf{A})^2 + q \Phi . \quad (\text{IV.4})$$

Le Hamiltonien est donc bien égal à l'énergie mécanique totale de la particule, c'est-à-dire à la somme de l'énergie cinétique $m \mathbf{v}^2/2$ et de l'énergie potentielle électrique $q \Phi$. Le champ magnétique \mathbf{B} exerce toujours une force perpendiculaire à la trajectoire. Ne travaillant pas, il n'apparaît pas dans la relation donnant le Hamiltonien. Le passage à la mécanique ondulatoire est alors immédiat. Il convient de substituer à l'impulsion généralisée \mathbf{p} l'opérateur $-i \hbar \nabla$ alors que le Hamiltonien H devient $i \hbar \partial/\partial t$. L'équation de Schrödinger régissant le comportement de la fonction d'onde ψ qui décrit maintenant la particule M s'écrit

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv H \psi = \left\{ \frac{1}{2m} \left\{ \frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A} \right\}^2 + q \Phi \right\} \psi . \quad (\text{IV.5})$$

Problème n° IV-1 – Niveau [1] : L'équation de Schrödinger pour une particule libre se met sous la forme canonique

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi . \quad (\text{IV.6})$$

Montrer qu'en présence du potentiel vecteur A^μ , elle devient

$$i \hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \Phi \right\} \psi = - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \nabla - i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \right\}^2 \psi . \quad (\text{IV.7})$$

En prenant $\hbar \equiv 1$, nous concluons que l'effet du champ électromagnétique sur la particule M est pris en compte via le potentiel vecteur en remplaçant les dérivées temporelle ∂_t et spatiale ∇ par

$$D_t \equiv \partial_t + i q \Phi \quad \text{et} \quad D_i = \partial_i - i q A^i . \quad (\text{IV.8})$$

La **dérivée covariante** D_μ vient de faire son apparition. Elle est définie par

$$D_\mu = \partial_\mu + i q A_\mu . \quad (\text{IV.9})$$

Elle est formellement identique à la dérivée covariante de la relativité générale qui, appliquée au vecteur V^ν , se met sous la forme

$$D_\mu V^\nu \equiv V^\nu_{;\mu} = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu V^\alpha . \quad (\text{IV.10})$$

Le symbole de Christoffel $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$ y est défini en fonction du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ par

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\nu = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right\} . \quad (\text{IV.11})$$

Les relations (IV.9) et (IV.10) sont formellement indentiques. Le potentiel vecteur A_μ peut être interprété comme une connexion affine et joue le même rôle que le symbole de Christoffel $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$. Le cadre commun aux théories de jauge et à la relativité générale est fourni par la théorie des fibrés.

La généralisation de l'étude précédente au cas relativiste est tout d'abord fournie par le Lagrangien standard

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - \{V \equiv q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\} . \quad (\text{IV.12})$$

Les variables canoniques sont toujours les coordonnées x^i de la particule M et la variable temporelle qui intervient dans les équations d'Euler–Lagrange et dans la définition de l'action est le temps $t \equiv x^0$.

Problème n° IV–2 – Niveau [1] : Montrer à partir du Lagrangien (IV.12) que le moment conjugué p^i de la variable canonique x^i est égal à

$$p^i = \frac{m v^i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + q A^i . \quad (\text{IV.13})$$

Etablir alors que les équations d'Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left\{ p^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right\} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad (\text{IV.14})$$

se ramènent à la relation fondamentale de la dynamique (Ra.36) exprimant l'action sur la particule M de la force de Lorentz

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} = q \mathbf{E} + q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} . \quad (\text{IV.15})$$

Le Lagrangien (Ra.32) du chapitre de révision correspondant permet une approche complètement relativiste dans laquelle les variables canoniques sont désormais les **quatre** coordonnées spatio-temporelles x^μ alors que le rôle du temps est maintenant tenu par le temps propre τ ou tout paramètre p qui lui est proportionnel. Comme il est démontré ci-dessous, le bon Lagrangien permettant de passer de la mécanique classique relativiste à la mécanique quantique est l'opposé de (Ra.32) avec

$$\mathcal{L} = -\frac{m}{2} U_\mu U^\mu - q U_\mu A^\mu . \quad (\text{IV.16})$$

Problème n° IV-3 – Niveau [1] : Montrer tout d'abord que le moment conjugué de la variable canonique x^μ est l'impulsion généralisée

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^\mu} = -m U_\mu - q A_\mu . \quad (\text{IV.17})$$

La quantification canonique permet le passage de la mécanique classique à la mécanique ondulatoire en remplaçant le crochet de Poisson des deux fonctions $\mathcal{A}(q_i, p_i, t)$ et $\mathcal{B}(q_i, p_i, t)$ par le commutateur des opérateurs quantiques A et B correspondants selon la règle

$$\{ \mathcal{A}, \mathcal{B} \} \longrightarrow \frac{i}{\hbar} [A, B] . \quad (\text{IV.18})$$

En déduire que les opérateurs quantiques $\hat{\Pi}_\mu$ et \hat{x}^ν respectivement associés à l'impulsion généralisée Π_μ et à la position x^ν vérifient les relations de commutation

$$[\hat{\Pi}_\mu, \hat{x}^\nu] = -i \hbar \delta_\mu^\nu = -i \hbar \eta_\mu^\nu . \quad (\text{IV.19})$$

Montrer qu'une réalisation possible de la relation précédente consiste à considérer que \hat{x}^ν revient à la multiplication de la fonction d'onde ψ par x^ν alors que l'opérateur $\hat{\Pi}_\mu$ appliqué à ψ est défini par la dérivée $-i \hbar \partial_\mu \psi$. En déduire qu'en présence du potentiel vecteur A_μ , l'opérateur quantique $m \hat{U}_\mu$ est équivalent à

$$m \hat{U}_\mu \equiv i \hbar \partial_\mu - q A_\mu , \quad (\text{IV.20})$$

et que par conséquent, dans l'équation de Schrödinger décrivant le comportement de la fonction d'onde ψ , l'effet des interactions électromagnétiques revient à remplacer la dérivée partielle $\partial_\mu \psi$ par la dérivée covariante $D_\mu \psi$ définie par

$$D_\mu = \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar} A_\mu . \quad (\text{IV.21})$$

En présence d'une interaction électromagnétique, le Lagrangien de Dirac (II.122) devient

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left\{ i \vec{\mathcal{D}} - m \right\} \psi . \quad (\text{IV.22})$$

En utilisant la définition (IV.9), \mathcal{L} apparaît comme la somme du Lagrangien \mathcal{L}_0 de la particule libre et du Lagrangien d'interaction \mathcal{L}_{int}

$$\mathcal{L} = \left(\mathcal{L}_0 \equiv \bar{\psi} \left\{ i \vec{\partial} - m \right\} \psi \right) + \left(\mathcal{L}_{\text{int}} \equiv -q \bar{\psi} \mathcal{A} \psi \right) . \quad (\text{IV.23})$$

2) Quelques leçons de l'électromagnétisme.

Dénotons par ψ un champ complexe. Il peut s'agir d'un champ scalaire chargé φ ou encore de la composante ψ_α d'un spineur de Dirac. Nous avons déjà défini la manière dont le groupe $U(1)$ agit sur ψ via la rotation complexe

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-iq\theta} \psi . \quad (\text{IV.24})$$

L'angle de rotation θ est multiplié par la charge q que porte la particule décrite par ψ . Une transformation de jauge est de **première espèce** ou **globale** si θ est indépendant de la position. En ce cas, la dérivée $\partial_\mu \psi$ se transforme comme ψ avec

$$\partial_\mu \psi \longrightarrow \partial_\mu \psi' = e^{-iq\theta} \partial_\mu \psi . \quad (\text{IV.25})$$

Il n'en va pas de même lorsque θ dépend de la position x dans l'espace-temps. En ce cas, la transformation de jauge est dite de **seconde espèce** ou **locale**.

Problème n° IV-4 – Niveau [1] : Montrer que lorsque θ est une fonction de x , la dérivée $\partial_\mu \psi$ se transforme en

$$\partial_\mu \psi' = e^{-iq\theta} \partial_\mu \psi - iq (\partial_\mu \theta) \psi' \neq e^{-iq\theta} \partial_\mu \psi . \quad (\text{IV.26})$$

Comme en relativité générale, on introduit la dérivée covariante D_μ en exigeant que $D_\mu \psi$ se transforme comme le champ ψ lui-même, et ce en toute généralité, donc lorsque θ dépend de x

$$D_\mu \psi \longrightarrow D'_\mu \psi' = e^{-iq\theta} D_\mu \psi . \quad (\text{IV.27})$$

Le potentiel vecteur A_μ qui entre dans la définition (IV.9) de D_μ doit alors se transformer en A'_μ de sorte que

$$D'_\mu \psi' \equiv (\partial_\mu + iq A'_\mu) \psi' = e^{-iq\theta} D_\mu \psi = e^{-iq\theta} (\partial_\mu + iq A_\mu) \psi . \quad (\text{IV.28})$$

Problème n° IV-5 – Niveau [1] : Dédurre de la relation précédente que la loi de transformation du potentiel vecteur est donnée par

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta . \quad (\text{IV.29})$$

Nous venons de justifier la relation (II.77) introduite dans le chapitre II lors de l'étude de la quantification du champ électromagnétique.

En relativité générale, la courbure est décrite par le tenseur de Riemann–Christoffel $R^\beta_{\alpha\mu\nu}$ défini à partir du commutateur des dérivées covariantes D_μ et D_ν avec

$$[D_\mu, D_\nu] V_\alpha = V_\beta R^\beta_{\alpha\mu\nu} . \quad (\text{IV.30})$$

La courbure électromagnétique est définie de même.

Problème n° IV–6 – Niveau [1] : *Etablir que l'équivalent électromagnétique de la relation (IV.30) se met sous la forme*

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = i q F_{\mu\nu} \psi , \quad (\text{IV.31})$$

où le tenseur de courbure n'est autre que le champ électromagnétique

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (\text{IV.32})$$

Nous retrouvons la définition (II.73) du chapitre II.

3) Introduction aux théories de jauge non–abéliennes.

Une théorie de jauge non–abélienne est construite à partir du groupe de Lie non–commutatif \mathcal{G} dont l'algèbre \mathcal{A} de dimension D est constituée des vecteurs

$$\mathbf{X} = \sum_{a=1}^D \theta^a \mathbf{X}_a \equiv \theta^a \mathbf{X}_a . \quad (\text{IV.33})$$

3.1) Action du groupe de jauge sur le multiplet ψ .

Le groupe de jauge \mathcal{G} agit sur l'espace vectoriel V de dimension n construit sur le corps des réels \mathbb{R} ou des complexes \mathbb{C} . Les D vecteurs de base \mathbf{X}_a de l'algèbre \mathcal{A} y sont représentés par les matrices $n \times n$ A_a . Tout élément $g = \exp(\mathbf{X})$ du groupe \mathcal{G} est représenté dans V par l'automorphisme ρ_g dont la matrice est égale à

$$[\rho_g] = [\exp(g \theta^a A_a)] = [\exp(-i g \theta^a T_a)] , \quad (\text{IV.34})$$

où les générateurs T_a remplacent iA_a . Le rôle du champ complexe ψ précédent est maintenant tenu par les n champs réels ou complexes ψ_i qui constituent les composantes du

vecteur ψ appartenant à la représentation V réelle ou complexe. La transformation de jauge (IV.24) se généralise en

$$\psi_i \longrightarrow \psi'_i = [\exp(-i g \theta^a T_a)]_{ij} \psi_j , \quad (\text{IV.35})$$

où g est la constante de couplage associée au groupe de jauge \mathcal{G} et correspond à la charge q en électromagnétisme. Les coordonnées θ^a du vecteur \mathbf{X} de l'algèbre \mathcal{A} généralisent l'angle θ et dépendent de la position x dans le cas d'une transformation locale. Les indices i et j varient de 1 à n puisque le vecteur ψ vit dans la représentation V de dimension n . Une écriture plus compacte de (IV.35) est

$$\psi \longrightarrow \psi' = \left\{ \mathcal{R}_\theta \equiv e^{-i g \theta} \right\} \psi , \quad (\text{IV.36})$$

dans laquelle θ désigne la somme $\theta^a T_a$ et représente dans V le vecteur \mathbf{X} à un facteur i près. Le groupe \mathcal{G} est non-abélien dans la mesure où les générateurs T_a entretiennent les relations de commutation

$$[T_a, T_b] = i C_{ab}^c T_c , \quad (\text{IV.37})$$

où apparaissent les constantes de structure réelles C_{ab}^c .

3.2) Dérivée covariante D_μ et potentiel vecteur A_μ .

La dérivée covariante (IV.9) est définie désormais à l'aide des D potentiels vecteurs A_μ^a par la matrice $n \times n$ agissant dans V

$$[D_\mu]_{ij} = \partial_\mu \mathbb{I}_{ij} + i g A_\mu^a [T_a]_{ij} , \quad (\text{IV.38})$$

Cette expression se met sous la forme plus compacte

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbb{I} + i g \mathbf{A}_\mu , \quad (\text{IV.39})$$

où \mathbf{A}_μ dénote la somme $A_\mu^a T_a$ portant sur les matrices T_a avec comme coefficients les D potentiels vecteurs réels A_μ^a . La i ème composante du vecteur $D_\mu \psi$ est donc égale à

$$[D_\mu \psi]_i = \partial_\mu \psi_i + i g A_\mu^a [T_a]_{ij} \psi_j = \partial_\mu \psi_i + i g [\mathbf{A}_\mu]_{ij} \psi_j . \quad (\text{IV.40})$$

La dérivée covariante $D_\mu \psi$ se transforme sous l'effet de la transformation de jauge \mathcal{R}_θ comme le vecteur ψ de sorte que

$$D_\mu \psi \longrightarrow D'_\mu \psi' = \left\{ \mathcal{R}_\theta \equiv e^{-i g \theta} \right\} D_\mu \psi . \quad (\text{IV.41})$$

Problème n° IV-7 – Niveau [2] : Dédurre de la relation (IV.41) la loi de transformation pour les potentiels vecteurs

$$\mathbf{A}_\mu \longrightarrow \mathbf{A}'_\mu = \mathcal{R}_\theta \times \mathbf{A}_\mu \times \mathcal{R}_\theta^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu \mathcal{R}_\theta) \times \mathcal{R}_\theta^{-1} . \quad (\text{IV.42})$$

Montrer que dans la limite où les angles θ^a sont infiniment petits, la transformation de jauge \mathcal{R}_θ engendre une variation du potentiel vecteur A_μ^a égale à

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \theta^a + g C_{bc}^a \theta^b A_\mu^c . \quad (\text{IV.43})$$

Le groupe $SU(2)$ constitue une excellente illustration de la théorie générale. L'algèbre de $SU(2)$ est l'espace vectoriel physique usuel \mathbb{R}^3 muni comme seconde loi interne du produit vectoriel $\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$. Les potentiels vecteurs associés aux trois générateurs $T_1 \equiv \mathbf{T}_x$, $T_2 \equiv \mathbf{T}_y$ et $T_3 \equiv \mathbf{T}_z$ de l'algèbre sont notés

$$A_\mu^a \equiv W_\mu^a = \{W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3\} = \mathbf{W}_\mu . \quad (\text{IV.44})$$

Etablir alors que dans ce cas, la relation (IV.43) se met sous la forme

$$\delta \mathbf{W}_\mu = \partial_\mu \boldsymbol{\theta} + g \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{W}_\mu . \quad (\text{IV.45})$$

3.3) Le champ de jauge $F_{\mu\nu}$ et ses propriétés.

(i) Dans une théorie de jauge non-abélienne construite sur le groupe de Lie \mathcal{G} , le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est remplacé par les D champs de jauge $F_{\mu\nu}^a$ constituant les composantes du vecteur $\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a T_a$ de l'algèbre \mathcal{A}^{**} . En s'inspirant de la relation (IV.31), le vecteur champ de force $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ est défini par

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = i g \mathbf{F}_{\mu\nu} \psi \equiv i g F_{\mu\nu}^a T_a \psi . \quad (\text{IV.46})$$

La relation (IV.32) de l'électromagnétisme se généralise dans le cas du groupe de jauge non-abélien \mathcal{G} en

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c . \quad (\text{IV.47})$$

Les D champs $F_{\mu\nu}^a$ contiennent en sus des dérivées déjà présentes en électromagnétisme un produit quadratique de potentiels vecteurs.

**A un facteur i près cependant, puisque les vecteurs de base de \mathcal{A} sont les matrices $n \times n$ $A_a = -i T_a$ et non les matrices T_a .

Problème n° IV-8 – Niveau [1] : Etablir la formule (IV.47) et montrer que dans le cas de $SU(2)$, le champ de jauge est défini par

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g \mathbf{W}_\mu \wedge \mathbf{W}_\nu . \quad (\text{IV.48})$$

(ii) Sous l'effet de la transformation de jauge caractérisée par la matrice \mathcal{R}_θ , le vecteur ψ et sa dérivée covariante $D_\mu \psi$ se transforment de manière identique de sorte que

$$D'_\mu \psi' = \mathcal{R}_\theta \times D_\mu \psi = \mathcal{R}_\theta \times D_\mu \times \mathcal{R}_\theta^{-1} \psi' . \quad (\text{IV.49})$$

Puisque l'égalité (IV.49) est vérifiée pour tout vecteur ψ' de la représentation V , il vient

$$D'_\mu \equiv \mathcal{R}_\theta \times D_\mu \times \mathcal{R}_\theta^{-1} . \quad (\text{IV.50})$$

Le commutateur $[D_\mu, D_\nu]$ se transforme de manière similaire et, en vertu de la relation (IV.46), il en va de même pour le champ $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ avec

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \longrightarrow \mathbf{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{R}_\theta \times \mathbf{F}_{\mu\nu} \times \mathcal{R}_\theta^{-1} . \quad (\text{IV.51})$$

Problème n° IV-9 – Niveau [2] : Une transformation de jauge infinitésimale est caractérisée par des angles θ^a très petits devant 1 et se développe au premier ordre comme

$$\mathcal{R}_\theta = e^{-ig\boldsymbol{\theta}} \simeq \mathbb{I}_n - ig\boldsymbol{\theta} = \mathbb{I}_n - ig\theta^a T_a . \quad (\text{IV.52})$$

En déduire que les champs de force $F_{\mu\nu}^a$ varient de

$$\delta F_{\mu\nu}^a = g C_{bc}^a \theta^b F_{\mu\nu}^c . \quad (\text{IV.53})$$

On utilisera avec profit l'antisymétrie des constantes de structure C_{ab}^c vis à vis des indices a et b . Appliquer le résultat précédent au cas de $SU(2)$ et établir que

$$\delta \mathbf{F}_{\mu\nu} = g \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{F}_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.54})$$

Dans le cas de $SU(2)$, le vecteur $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ se comporte donc exactement comme un vecteur \mathbf{x} de l'espace physique usuel \mathbb{R}^3 subissant la rotation $g\boldsymbol{\theta}$. Ce n'est pas étonnant. Avec ses

trois composantes, $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ a été construit comme un vecteur de l'algèbre de $SU(2)$. Or si celle-ci engendre par exponentiation le groupe \mathcal{G} , elle peut également se concevoir comme une représentation particulière de \mathcal{G} appelée la représentation adjointe. Cette propriété est en fait générale.

(iii) Par définition, la **représentation adjointe** d'un groupe de Lie \mathcal{G} est son algèbre \mathcal{A} considérée pour l'occasion comme un espace vectoriel V de représentation parmi d'autres. L'algèbre \mathcal{A} agit sur la représentation adjointe via les matrices $D \times D$ A_a dont les éléments sont donnés par

$$[A_a]^k_j = -i [T_a]^k_j \equiv C_{aj}^k . \quad (\text{IV.55})$$

Problème n° IV–10 – Niveau [2] : La définition (IV.55) des matrices T_a de l'adjointe est cohérente ainsi que cet exercice nous en persuadera. En effet, démontrer tout d'abord rapidement que les trois matrices quelconques A , B et C vérifient la relation de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 . \quad (\text{IV.56})$$

En s'aidant de (IV.37), en déduire que

$$C_{am}^n C_{bc}^m + C_{cm}^n C_{ab}^m + C_{bm}^n C_{ca}^m = 0 . \quad (\text{IV.57})$$

Montrer alors que l'égalité précédente s'interprète comme le produit

$$[T_a T_b]^n_c - [T_b T_a]^n_c = i C_{ab}^m [T_m]^n_c , \quad (\text{IV.58})$$

où les matrices T_a sont définies par (IV.55). Ces matrices $D \times D$ vérifient donc les relations de structure (IV.37) et représentent bien l'algèbre \mathcal{A} dans l'adjointe.

Lors d'une transformation de jauge infinitésimale, donc caractérisée par les D angles θ^a très petits devant 1, les champs de force $F_{\mu\nu}^n$ varient selon la prescription (IV.53) et deviennent

$$F'_{\mu\nu}{}^n = F_{\mu\nu}^n + g C_{am}^n \theta^a F_{\mu\nu}^m . \quad (\text{IV.59})$$

Les constantes structures qui apparaissent se réinterprètent comme des éléments de matrices T_a de l'adjointe avec

$$F'_{\mu\nu}{}^n = \delta_m^n F_{\mu\nu}^m - i g \theta^a [T_a]^n_m F_{\mu\nu}^m . \quad (\text{IV.60})$$

Nous voyons apparaître la matrice de rotation infinitésimale

$$\mathcal{R}_\theta \simeq \mathbb{I}_D - i g \theta^a T_a , \quad (\text{IV.61})$$

dont les éléments s'écrivent

$$[\mathcal{R}_\theta]_m^n = \delta_m^n - i g \theta^a [T_a]_m^n . \quad (\text{IV.62})$$

La matrice \mathcal{R}_θ agit sur le vecteur $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ de l'adjointe dont les D composantes $F_{\mu\nu}^a \equiv \psi_i$ se comportent comme celles du multiplet ψ d'une représentation quelconque.

(iv) La **métrique** du groupe \mathcal{G} est définie à partir des générateurs T_a de la représentation adjointe par la relation

$$g_{ab} = \text{Tr} \{T_a T_b\} . \quad (\text{IV.63})$$

En s'aidant de (IV.55), cette identité prend la forme

$$g_{ab} = -C_{am}^n C_{bn}^m . \quad (\text{IV.64})$$

Pour les groupes simples et compacts, il existe toujours une base de l'algèbre de Lie \mathcal{A} dans laquelle la métrique g_{ab} se réduit à l'identité \mathbb{I}_D à un facteur multiplicatif κ près

$$g_{ab} = \kappa \delta_{ab} . \quad (\text{IV.65})$$

Problème n° IV-11 – Niveau [1] : Dans le cas de $SU(2)$, établir rapidement que les constantes de structure C_{ab}^c sont égales à ϵ_{abc} . En déduire que κ vaut 2.

Nous sommes prêts désormais à généraliser le Lagrangien (II.99) de l'électromagnétisme classique à une théorie de jauge non-abélienne. Le Lagrangien des champs de jauge est en effet défini par

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4\kappa} \text{Tr} \{ \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} \} \equiv -\frac{1}{4\kappa} \text{Tr} \{ T_a T_b \} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} . \quad (\text{IV.66})$$

Les matrices T_a étant celles de la représentation adjointe, le Lagrangien se simplifie en

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4\kappa} (g_{ab} \equiv \kappa \delta_{ab}) F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu} . \quad (\text{IV.67})$$

Problème n° IV-12 – Niveau [1] : La rotation de jauge \mathcal{R}_θ transforme le vecteur $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ en $\mathbf{F}'_{\mu\nu}$ suivant la règle (IV.51). Montrer alors que le Lagrangien $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ devient

$$\mathcal{L}'_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4\kappa} \text{Tr} \{ (\mathcal{R}_\theta \times \mathbf{F}_{\mu\nu} \times \mathcal{R}_\theta^{-1}) \times (\mathcal{R}_\theta \times \mathbf{F}^{\mu\nu} \times \mathcal{R}_\theta^{-1}) \} . \quad (\text{IV.68})$$

La trace d'un produit de matrices est invariant si l'on permute de manière cyclique celles-ci. En déduire que

$$\mathcal{L}'_{\text{gauge}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} . \quad (\text{IV.69})$$

Le Lagrangien (IV.66) est donc invariant de jauge. Dans le cas de $SU(2)$, il se met sous la forme

$$\mathcal{L}_{SU(2)} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g \mathbf{W}_\mu \wedge \mathbf{W}_\nu) \cdot (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu - g \mathbf{W}^\mu \wedge \mathbf{W}^\nu). \quad (\text{IV.70})$$

Ce Lagrangien contient des produits impliquant trois ou quatre champs de jauge. Contrairement au cas de l'électromagnétisme, les champs de jauge d'une théorie non-abélienne interagissent entre eux.

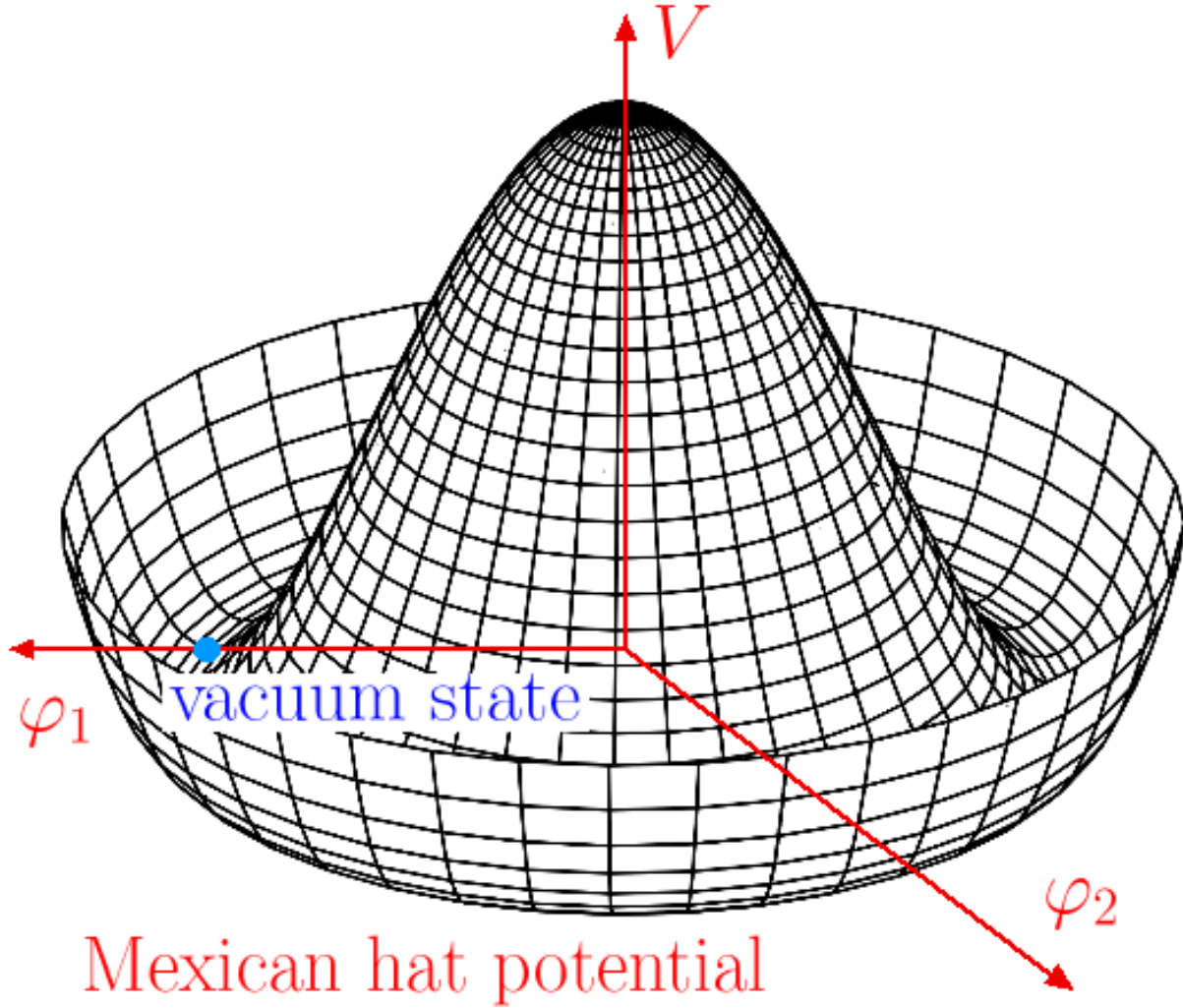


Figure IV.1: Le chapeau mexicain offre une illustration simple d'une brisure spontanée de symétrie. Le potentiel V du champ scalaire complexe $\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$ présenté ici est bien invariant par rotation autour de l'axe vertical, mais la configuration d'énergie minimale correspondant au point bleu ne l'est pas.

4) Brisure spontanée de symétrie.

Le Lagrangien d'une théorie de jauge est construit afin d'être invariant sous toute rotation \mathcal{R}_θ du groupe \mathcal{G} . Cette symétrie est susceptible d'être **spontanément brisée** si l'état d'énergie minimale de la théorie, et non le Lagrangien, viole l'invariance de jauge. Le chapeau mexicain offre une illustration simple de ce mécanisme. Le potentiel V présenté dans la figure IV.1 est bien invariant par rotation dans le plan complexe $\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$. Mais la Nature choisit comme vide une configuration d'énergie minimale localisée dans la rigole circulaire du chapeau. Dans la figure, le champ ϕ s'est stabilisé en $\varphi_1^0 = v$ et $\varphi_2^0 = 0$. Cette direction n'est pas invariante par rotation et la symétrie de jauge $U(1)$ de cet exemple est brisée dès lors qu'une direction particulière du plan (φ_1, φ_2) a été choisie. Une brisure spontanée de symétrie est en définitive caractérisée par une invariance du Lagrangien, mais pas des états de la théorie.

4.1) Le cas pédagogique du chapeau mexicain.

Afin d'illustrer simplement la notion de brisure spontanée de symétrie, considérons tout d'abord le cas du groupe de jauge abélien $U(1)$. Le champ scalaire chargé étudié au chapitre II sera décrit ici par $\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$. Le Lagrangien associé se met sous la forme

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V . \quad (\text{IV.71})$$

Il doit être invariant sous les transformations de jauge globales de ϕ qui correspondent dans le cas de $U(1)$ aux rotations complexes

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-iq\theta} \phi . \quad (\text{IV.72})$$

C'est bien le cas du terme cinétique puisque l'angle θ est constant. Quant au potentiel, il doit être une fonction de la variable

$$\phi^\dagger \phi \equiv \frac{1}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} R^2 . \quad (\text{IV.73})$$

Le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ du plan complexe, par ailleurs isomorphe à \mathbb{R}^2 , a pour coordonnées les champs réels φ_1 et φ_2 . Un exemple de potentiel brisant spontanément la symétrie de rotation $U(1)$ est présenté qualitativement dans la figure IV.1. Le minimum de V est atteint pour une valeur R non nulle de la norme du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$. La forme canonique du potentiel V fait intervenir le terme quadratique $\phi^\dagger \phi$ et son carré $(\phi^\dagger \phi)^2$ avec

$$V = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 . \quad (\text{IV.74})$$

Le paramètre μ est homogène à une masse et λ est la constante de couplage quartique du champ ϕ .

En exprimant $\phi^\dagger\phi$ en fonction de la norme $R = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/2}$ du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$, il vient

$$V = -\frac{\mu^2}{2} R^2 + \frac{\lambda}{4} R^4 . \quad (\text{IV.75})$$

Le minimum du potentiel est atteint pour

$$R = R_0 \equiv v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} . \quad (\text{IV.76})$$

Si l'on ajoute la constante $V_0 = \lambda v^4/4$, nous obtenons la courbe rouge de la figure IV.2 associée à la nouvelle expression

$$V = \frac{\lambda}{4} (R^2 - v^2)^2 . \quad (\text{IV.77})$$

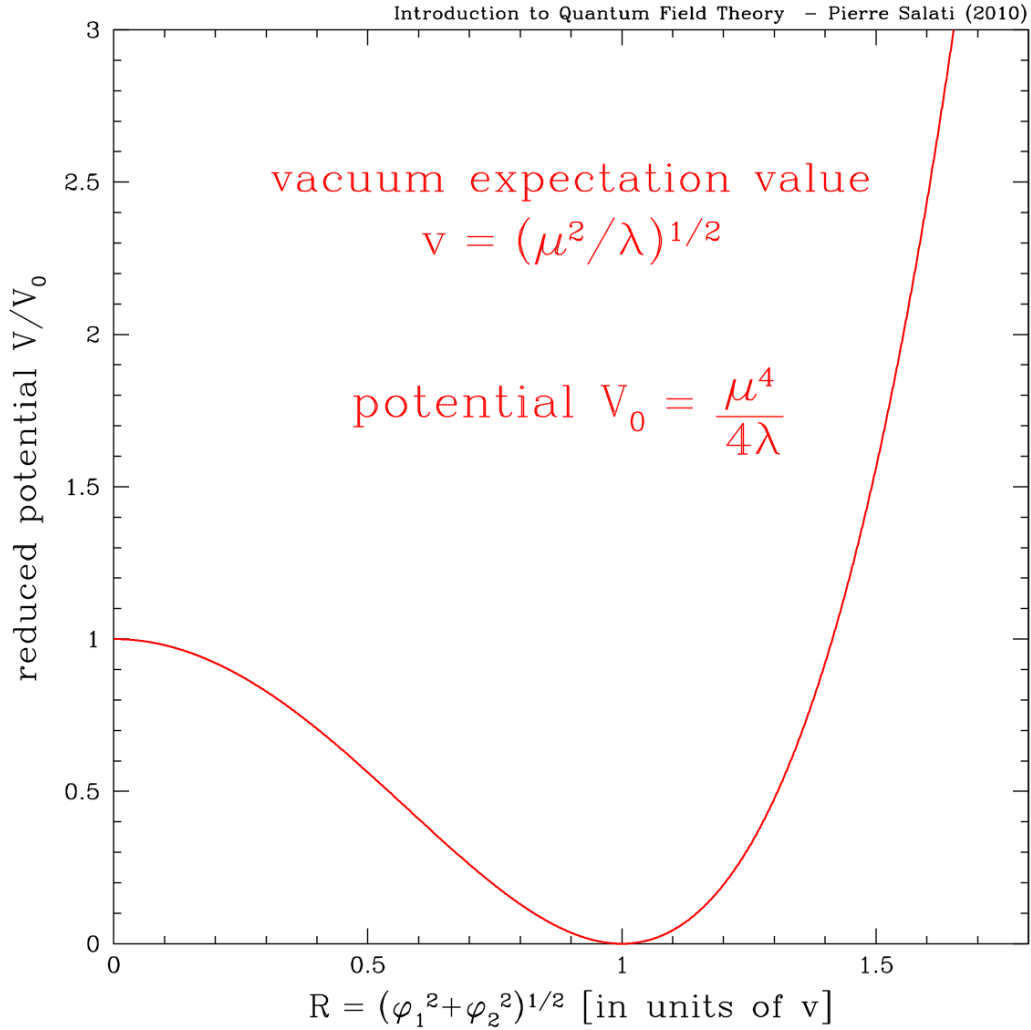


Figure IV.2: Le potentiel réduit V/V_0 est tracé en fonction du rapport R/v dans lequel R désigne la norme du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$. Le potentiel (IV.77) est minimal quand il est nul. La norme R prend alors la valeur $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$.

Le fait que le potentiel ne dépende que de la norme R est une illustration de son invariance par rotation dans le plan (φ_1, φ_2) . La Nature choisit comme état de vide $|0\rangle$ la configuration dans laquelle le champ ϕ a l'énergie minimale. Puisque la densité de Hamiltonien associée au Lagrangien (IV.71) est égale à

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + V , \quad (\text{IV.78})$$

l'état d'énergie minimale correspond à un champ scalaire ϕ constant et homogène avec un potentiel V aussi petit que possible. Dans la figure IV.1, le vide $|0\rangle$ est représenté par le point bleu associé au vecteur φ_0 de composantes $\varphi_1^0 = v$ et $\varphi_2^0 = 0$. Tout autre point de la rigole circulaire du chapeau mexicain aurait fait également l'affaire. Une simple rotation de jauge permet alors un changement des coordonnées φ_1 et φ_2 qui nous ramène au cas précédent. Dans le chapitre II, nous avons relié l'invariance du Lagrangien (IV.71) vis à vis des rotations de jauge du groupe $U(1)$ à la notion de charge électrique et à sa conservation. La brisure spontanée de la symétrie $U(1)$ provoque ici l'émergence d'une direction privilégiée φ_0 et fait apparaître un vide $|0\rangle$ doté d'une charge électrique non nulle. De surcroît, le champ φ développe des excitations \mathbf{h} autour de sa valeur dans le vide φ_0 de sorte que

$$\varphi = \varphi_0 + \mathbf{h} . \quad (\text{IV.79})$$

Une fois exprimé en fonction de $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, le Lagrangien (IV.71) perd explicitement son invariance sous le groupe $U(1)$. La notion même de charge électrique devient caduque et à fortiori sa conservation.

Problème n° IV–13 – Niveau [1] : *Etudions comment la brisure spontanée de $U(1)$ conduit à l'existence d'un vide $|0\rangle$ électriquement chargé. Etablir tout d'abord que la transformation de jauge (IV.72) revient à une rotation dans le plan (φ_1, φ_2) d'un angle égal à $-q\theta$. La matrice de cette rotation sera alors écrite sous la forme exponentielle $\mathcal{R}_\theta = \exp(-i\theta Q)$, où le générateur Q décrivant la charge électrique agit sur φ par le truchement de l'opérateur*

$$Q = q \times \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.80})$$

Appliquer Q sur la configuration d'énergie minimale $|0\rangle \equiv \varphi_0 = (v, 0)$ et montrer que

$$iQ|0\rangle = iQ \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ qv \end{pmatrix} \neq 0 . \quad (\text{IV.81})$$

Le vide a désormais acquis une charge électrique non nulle.

L'essence même du mécanisme de brisure étudié ici réside dans l'évolution spontanée du système de l'état symétrique $\varphi = \mathbf{0}$ vers la configuration d'énergie minimale φ_0 , appelée également vide, et correspondant au nouvel état fondamental $|0\rangle$ des excitations du champ scalaire. Ce vide dans lequel se stabilise le système n'est plus invariant par rotation. Toute transformation \mathcal{R}_θ transforme $\varphi_0 \equiv |0\rangle$ en un nouvel état $\varphi'_0 \equiv |0'\rangle$ différent, d'où deux conséquences importantes.

(i) Le générateur Q associé à la charge électrique ne laisse plus le vide invariant puisque

$$\varphi'_0 - \varphi_0 = \{\mathcal{R}_\theta - \mathbb{I}_2\} \varphi_0 \simeq \{-i\theta Q\} \varphi_0 \neq \mathbf{0} . \quad (\text{IV.82})$$

Nous retrouvons le résultat de l'exercice précédent. Le fait que $Q|0\rangle$ soit non nul caractérise la brisure de la symétrie de rotation associée au générateur Q . Celui-ci est cassé par l'existence du vide $|0\rangle$ et l'invariance sous $U(1)$ est perdue. La conséquence physique est un vide électriquement chargé.

(ii) Une rotation quelconque expédie le vide φ_0 vers le nouvel état φ'_0 également d'énergie minimale^{††} et forcément situé dans la rigole du chapeau mexicain. En prenant toutes les rotations avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, celle-ci est totalement parcourue. Le générateur Q appliqué à φ_0 permet de définir le vecteur $iQ(\varphi_0)$ pointant le long de la vallée du potentiel. Dans le cas de la figure IV.1 par exemple, $iQ(\varphi_0)$ est bien parallèle à l'axe φ_2 . Dans cette direction, qui correspond au fond de la rigole du chapeau, le potentiel ne varie pas. L'excitation h_2 doit être de masse nulle.

Problème n° IV-14 – Niveau [1] : Afin de vérifier cette importante propriété, utiliser le développement (IV.79) pour exprimer le Lagrangien (IV.71) en fonction des champs h_1 et h_2 . Etablir que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu h_2 \partial^\mu h_2 - V , \quad (\text{IV.83})$$

où le potentiel (IV.77) s'écrit désormais

$$V(h_1, h_2) = \mu^2 h_1^2 + \lambda v h_1 (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}) + \frac{\lambda}{4} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h})^2 . \quad (\text{IV.84})$$

Le produit scalaire $\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$ est une notation pour $h_1^2 + h_2^2$.

Le seul terme quadratique est $\mu^2 h_1^2$. Il confère au champ scalaire neutre h_1 la masse $m_1 = \sqrt{2}\mu$, alors que l'excitation h_2 dirigée le long de la vallée du potentiel a une masse nulle comme anticipé. Le générateur Q , brisé par l'existence d'un vide qu'il ne laisse pas

^{††}Le potentiel V est toujours invariant sous $U(1)$.

invariant, est associé au champ scalaire de masse nulle h_2 . Nous avons là une illustration du **théorème de Goldstone**. Celui-ci stipule que dans une théorie de jauge spontanément brisée, chaque générateur T_a ne préservant pas le vide – donc tel que $T_a |0\rangle \neq 0$ – est associé à un champ scalaire neutre h_a de masse nulle appelé **boson de Goldstone ou de Nambu–Goldstone**. Le paragraphe suivant confirme ce théorème dans le cas de groupes non-abéliens plus compliqués que $U(1)$. Une démonstration générale est ensuite proposée.

4.2) Généralisation aux groupes $SO(n)$ et $SU(2)$.

(i) Le cas de $SO(n)$

Le champ scalaire φ est maintenant un vecteur de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Il a pour coordonnées les n scalaires neutres

$$\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \quad . \quad (\text{IV.85})$$

Le Lagrangien (IV.71) se généralise immédiatement sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \cdot \partial^\mu \varphi - \left\{ V \equiv \frac{1}{4} \lambda v^4 - \frac{1}{2} \mu^2 (\varphi \cdot \varphi) + \frac{1}{4} \lambda (\varphi \cdot \varphi)^2 \right\} \quad . \quad (\text{IV.86})$$

Il est manifestement invariant sous les rotations de \mathbb{R}^n . Le potentiel V par exemple ne dépend que de la norme R du vecteur φ , avec une variation donnée par la relation (IV.77). Le minimum de V est donc atteint pour un rayon $R = v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ et la rigole du chapeau mexicain est remplacée ici par la surface à $n-1$ dimensions d'une sphère de rayon v . Le système évolue spontanément vers une configuration d'énergie, et donc de potentiel, minimale située sur la surface de cette sphère et décrite par le vecteur $\varphi_0 \equiv |0\rangle$. Dans la figure IV.3 qui illustre le cas de $SO(3)$, le vide correspond au point bleu qui s'est stabilisé en $(v, 0, 0)$. Dans le cas général, les coordonnées du vide sont égales à

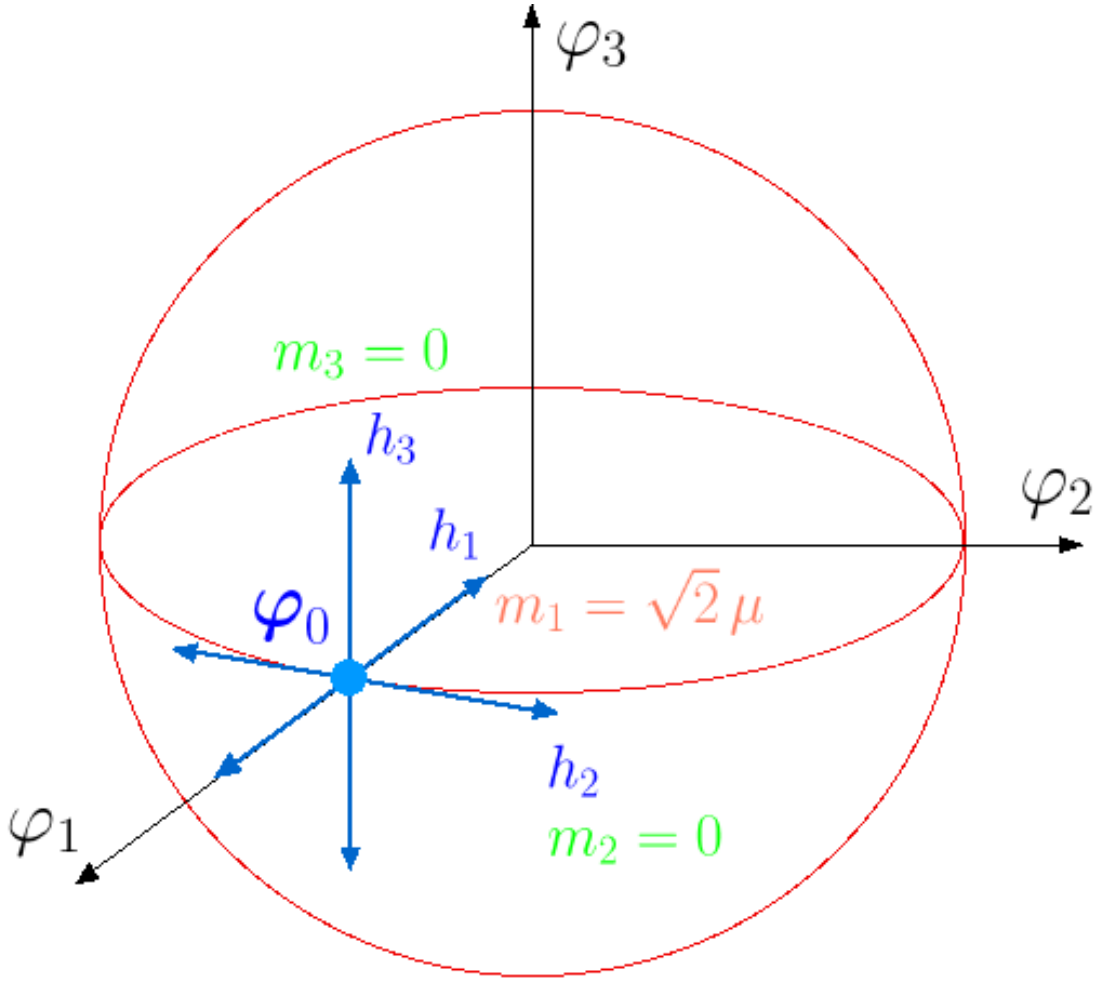
$$\varphi = \{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0\} \quad . \quad (\text{IV.87})$$

Les excitations du champ scalaire φ autour du vide φ_0 sont prises en compte par le vecteur

$$\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\} \quad (\text{IV.88})$$

défini par la relation (IV.79). Le potentiel V se développe alors autour de sa valeur minimale $V_0 \equiv V(\varphi_0)$ en fonction des champs h_i . En poussant le calcul jusqu'au second ordre inclus, il vient

$$V(\varphi) = V_0 + \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right|_0 h_i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_0 h_i h_j + \mathcal{O}(h^3) \quad . \quad (\text{IV.89})$$



$SO(n)$ symmetry breaking

Figure IV.3: La brisure spontanée de la symétrie $SO(n)$ est illustrée dans cet exemple à trois dimensions. Le système évolue vers la configuration d'énergie minimale φ_0 située à une distance v du centre. Les excitations du champ scalaire φ autour du vide φ_0 sont décrites par les champs h_1 , h_2 et h_3 . Les deux derniers scalaires sont des bosons de Goldstone. Ils pointent en effet en direction de la vallée du potentiel.

La dérivée première de V par rapport à φ_i est nulle en φ_0 . La dérivée seconde s'interprète comme la matrice de masse des excitations h_i de sorte que

$$V(\varphi) = V_0 + \frac{1}{2} \mathcal{M}_{ij} h_i h_j + \mathcal{O}(h^3) . \quad (\text{IV.90})$$

Problème n° IV–15 – Niveau [2] : Calculer les dérivées premières et secondes du potentiel en un point φ quelconque. Dans la mesure où V ne dépend que du rayon R , établir que

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = V'(R) \frac{\varphi_i}{R} , \quad (\text{IV.91})$$

alors que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = V''(R) \frac{\varphi_i \varphi_j}{R^2} + \frac{V'(R)}{R} \left\{ \delta_{ij} - \frac{\varphi_i \varphi_j}{R^2} \right\} . \quad (\text{IV.92})$$

En φ_0 , le potentiel V est minimum et $V'(R \equiv v)$ est nul. Montrer que la matrice de masse des excitations h_i est égale à

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_0 = \mathcal{M}_{ij} = V''(v) \frac{\varphi_i^0 \varphi_j^0}{v^2} = 2\mu^2 \frac{\varphi_i^0 \varphi_j^0}{v^2} . \quad (\text{IV.93})$$

Si, à l'instar de la figure IV.3, le vide se stabilise le long de l'axe φ_1 uniquement avec

$$\varphi_0 = \{v, 0, \dots, 0\} \quad \text{ou encore} \quad \varphi_i^0 = \delta_{i1} v , \quad (\text{IV.94})$$

la matrice de masse des excitations scalaires h_i est trivialement donnée par

$$\mathcal{M}_{ij} = 2\mu^2 \delta_{i1} \delta_{1j} . \quad (\text{IV.95})$$

Seul le champ h_1 acquiert la masse $m_1 = \sqrt{2}\mu$. Toutes les autres excitations scalaires de h_2 à h_n sont de masse nulle. Le cas de $SO(n)$ généralise donc l'exemple du chapeau mexicain où l'opérateur Q engendrait les rotations de φ_1 vers φ_2 . Dans \mathbb{R}^n , il existe $C_n^2 = n(n-1)/2$ rotations permettant de faire pivoter l'axe φ_i vers l'axe φ_j . Parmi ces opérateurs, le générateur T_{1k} est responsable de la rotation de l'axe φ_1 vers l'axe $\varphi_k \neq \varphi_1$. Celle-ci transforme le vide φ_0 en vecteur φ'_0 légèrement différent puisque doté d'une composante dirigée selon φ_k et définie par

$$\varphi'_0 - \varphi_0 = \left\{ e^{-i\theta_{1k} T_{1k}} - \mathbb{I}_n \right\} \varphi_0 \simeq \{-i\theta_{1k} T_{1k}\} \varphi_0 \neq \mathbf{0} . \quad (\text{IV.96})$$

Le générateur T_{1k} est brisé par le vide $|0\rangle \equiv \varphi_0$ qu'il ne laisse pas invariant. A un facteur multiplicatif θ_{1k} près, il le transforme en $-iT_{1k}(\varphi_0)$ parallèle à l'axe φ_k . L'excitation correspondante est le champ h_k dirigé le long de la surface de la sphère de rayon v et de potentiel minimal. Ce champ ne produisant aucune variation de V dans le voisinage de φ_0 , il est de masse nulle. Nous retrouvons le théorème de Goldstone : aux $n-1$ générateurs T_{1k} brisés par le vide correspondent les $n-1$ bosons de Nambu–Goldstone h_k de masse nulle.

Problème n° IV-16 – Niveau [1] : La symétrie associée au groupe $\mathcal{G} = SO(n)$ est donc spontanément brisée par la stabilisation du système dans la configuration d'énergie minimale $\varphi_0 \equiv |0\rangle$. Le vide n'est pas invariant en effet sous une transformation quelconque de \mathcal{G} .

Quelle que soit la position de φ_0 sur la sphère de rayon $R = v$, une simple rotation permet de redéfinir les axes φ_i en sorte que la relation (IV.94) peut être utilisée. Montrer alors que le vide est quand même invariant sous les rotations de $\mathcal{G}' = SO(n-1)$ qui basculent l'axe $\varphi_i \neq \varphi_1$ vers l'axe $\varphi_j \neq \varphi_1$. Combien les algèbres de $SO(n)$ et de $SO(n-1)$ ont-elles de générateurs ? Que vaut la différence ? Commentaires ?

Problème n° IV-17 – Niveau [1] : A l'aide du développement (IV.79), mettre le Lagrangien (IV.86) sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \mathbf{h} \cdot \partial^\mu \mathbf{h} - V , \quad (\text{IV.97})$$

où le potentiel est donné par

$$V(\mathbf{h}) = \lambda (\varphi_0 \cdot \mathbf{h})^2 + \lambda (\varphi_0 \cdot \mathbf{h}) (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}) + \frac{\lambda}{4} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h})^2 . \quad (\text{IV.98})$$

Retrouver la relation (IV.84) lorsque le vide est aligné sur l'axe φ_1

(ii) Le cas de $SU(2)$

Le champ scalaire ϕ est ici complexe. Il appartient à la représentation fondamentale $\mathbf{2}$ de $SU(2)$ isomorphe à \mathbb{C}^2 et possède donc deux composantes complexes Φ^+ et Φ^0 qui forment le doublet

$$\phi \equiv \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.99})$$

Le Lagrangien du champ scalaire \mathbf{H} construit sur le modèle (IV.71) se met sous la forme

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \mathbf{H}^\dagger \partial^\mu \mathbf{H} - \left\{ V \equiv \frac{1}{4} \lambda v^4 - \mu^2 \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \lambda (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^2 \right\} . \quad (\text{IV.100})$$

Bien qu'apparemment très différent du cas précédent puisque la représentation de $SU(2)$ à laquelle \mathbf{H} appartient est complexe et non réelle, nous allons montrer que nous pouvons cependant nous ramener à $SO(n)$. Mieux ! Le Lagrangien (IV.100) cache une invariance

sous $SO(4)$ qui englobe celle associée à $SU(2)$. Exprimons pour ce faire les composantes complexes de \mathbf{H} en fonction de leurs parties réelles et imaginaires et posons

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.101})$$

Le champ scalaire $\boldsymbol{\varphi} \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ appartenant à \mathbb{R}^4 entre alors en scène. Puisque

$$\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_3 - i\varphi_4, \varphi_1 - i\varphi_2) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} , \quad (\text{IV.102})$$

le Lagrangien (IV.100) se réduit à la forme (IV.86) étudiée précédemment. Sous l'effet du potentiel V , le système évolue spontanément vers un vide $\boldsymbol{\varphi}_0$ situé sur la 3-sphère de rayon v de l'espace \mathbb{R}^4 auquel $\boldsymbol{\varphi}$ appartient. La question essentielle désormais est de savoir si cette configuration $\boldsymbol{\varphi}_0 \equiv |0\rangle$ brise les générateurs du groupe $SU(2)$, ce dernier constituant un sous-groupe de $SO(4)$. Une rotation de $SU(2)$ transforme \mathbf{H} en

$$\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}' = e^{-i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} \times \mathbf{H} . \quad (\text{IV.103})$$

L'éventuelle constante de couplage g a été absorbée dans la définition des angles $\boldsymbol{\theta}$ et le vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ désigne les trois matrices de Pauli σ_x , σ_y et σ_z . Si l'un des générateurs de $SU(2)$ ne laisse pas le vide invariant, il est alors brisé de manière spontanée et un boson de Nambu–Goldstone lui est associé.

Problème n° IV–18 – Niveau [1] : La configuration d'énergie minimale est prise ici égale à $\boldsymbol{\varphi}_0 \equiv \{v, 0, 0, 0\}$ et correspond au doublet de $SU(2)$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.104})$$

Dans la littérature, la valeur dans le vide de \mathbf{H} est également notée $\langle \mathbf{H} \rangle \equiv \mathbf{H}_0$. Appliquer la transformation de jauge (IV.103) à \mathbf{H}_0 en considérant des angles θ_x , θ_y et θ_z infiniment petits. Etablir alors que

$$\mathbf{H}'_0 - \mathbf{H}_0 = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_z & \theta_x - i\theta_y \\ \theta_x + i\theta_y & -\theta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \delta\varphi_3^0 + i\delta\varphi_4^0 \\ \delta\varphi_1^0 + i\delta\varphi_2^0 \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.105})$$

En déduire que dans l'espace \mathbb{R}^4 dans lequel vit le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$, le vide $\boldsymbol{\varphi}_0$ subit la modification

$$\delta\varphi_1^0 = 0 \quad , \quad \delta\varphi_2^0 = \frac{\theta_z}{2} v \quad , \quad \delta\varphi_3^0 = -\frac{\theta_y}{2} v \quad \text{et} \quad \delta\varphi_4^0 = -\frac{\theta_x}{2} v . \quad (\text{IV.106})$$

Or la rotation de $SO(4)$ qui bascule l'axe φ_1 vers l'axe φ_2 engendre la variation

$$\varphi'_0 - \varphi_0 = \left\{ e^{-i\theta_{12}T_{12}} - \mathbb{I}_4 \right\} \varphi_0 \simeq \{-i\theta_{12}T_{12}\} \varphi_0 = \{0, (\theta_{12}v), 0, 0\} , \quad (\text{IV.107})$$

où seule la composante $\delta\varphi_2^0 \equiv \theta_{12}v$ est non nulle. Nous pouvons dès lors identifier l'angle de rotation θ_{12} de $SO(4)$ avec le paramètre $(\theta_z/2)$ de $SU(2)$. Le générateur σ_z de $SU(2)$ a le même effet sur la configuration d'énergie minimale φ_0 que le générateur T_{12} de $SO(4)$. Tout comme T_{12} , σ_z est brisé par le vide qu'il ne le laisse pas invariant. Le boson de Goldstone associé est le champ scalaire neutre h_2 . Il en va de même à un signe près pour les générateurs $\sigma_y \equiv T_{13}$ et $\sigma_x \equiv T_{14}$ puisque leur effet sur le vide est respectivement donné par

$$\delta\varphi_3^0 = -\frac{\theta_y}{2}v = \theta_{13}v \quad \text{et} \quad \delta\varphi_4^0 = -\frac{\theta_x}{2}v = \theta_{14}v . \quad (\text{IV.108})$$

Les excitations scalaires h_3 et h_4 sont les bosons de Goldstone associés. La brisure de $SU(2)$ engendrée par l'évolution spontanée du système vers le vide $\langle \mathbf{H} \rangle \equiv \mathbf{H}_0$ asymétrique est donc totale. Tous les générateurs du groupe sont cassés et trois bosons de Nambu-Goldstone apparaissent comme le prévoit le théorème de Goldstone.

4.3) Théorème de Goldstone.

Nous sommes prêts désormais à nous attaquer au théorème de Goldstone dans le cas d'un groupe non-abélien \mathcal{G} quelconque. L'algèbre \mathcal{A} associée a pour vecteurs de base les D générateurs \mathbf{X}_a . Le champ scalaire ϕ responsable de la brisure de la symétrie de jauge appartient à la représentation \mathcal{V} . Son potentiel $V(\phi)$ présente un minimum V_0 pour une valeur ϕ_0 non nulle. Cette configuration d'énergie minimale constitue le nouvel état fondamental $|0\rangle$ vers lequel le système évolue spontanément. Le vide $|0\rangle \equiv \phi_0$ casse tout générateur \mathbf{X}_a qui ne le laisse pas invariant et qui, de ce fait, vérifie

$$\{A_a \equiv -i T_a\} \times \{\phi_0\} \neq 0 . \quad (\text{IV.109})$$

La matrice A_a représente dans l'espace vectoriel \mathcal{V} le générateur \mathbf{X}_a de l'algèbre \mathcal{A} . Nous pouvons dès lors classer les éléments de cet ensemble en deux catégories : ceux qui préservent le vide et ceux qui au contraire ne le laissent pas invariant.

Montrons tout d'abord que l'ensemble \mathcal{A}' des générateurs qui préservent le vide constituent une sous-algèbre de \mathcal{A} .

(i) Soient \mathbf{X}_a et \mathbf{X}_b deux éléments de \mathcal{A}' . Ils sont représentés dans \mathcal{V} par les matrices A_a et A_b vérifiant par définition les égalités

$$\{A_a\} \times \{\phi_0\} = 0 \quad \text{et} \quad \{A_b\} \times \{\phi_0\} = 0 . \quad (\text{IV.110})$$

Alors pour tout couple de réels α et β , il vient

$$\{\alpha A_a + \beta A_b\} \times \{\phi_0\} = \alpha \{A_a\} \times \{\phi_0\} + \beta \{A_b\} \times \{\phi_0\} = 0 . \quad (\text{IV.111})$$

Le générateur $\alpha A_a + \beta A_b$ appartient aussi à \mathcal{A}' de sorte que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de \mathcal{A} .

(ii) La seconde loi interne \star de l'algèbre \mathcal{A} associe à tout couple de générateurs \mathbf{X}_a et \mathbf{X}_b de \mathcal{A} l'élément $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_a \star \mathbf{X}_b$ représenté dans \mathcal{V} par le commutateur $[A_a, A_b]$ des matrices A_a et A_b . En particulier si \mathbf{X}_a et \mathbf{X}_b appartiennent à \mathcal{A}' , l'action de leurs matrices A_a et A_b sur le vide ϕ_0 conduit à l'identité

$$[A_a, A_b] \times \{\phi_0\} = \{A_a\} \times \{A_b\} \times \{\phi_0\} - \{A_b\} \times \{A_a\} \times \{\phi_0\} = 0 , \quad (\text{IV.112})$$

en vertu de la définition (IV.110). Le produit $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_a \star \mathbf{X}_b$ appartient encore au sous-espace vectoriel \mathcal{A}' vis à vis duquel la loi \star est donc interne. L'ensemble \mathcal{A}' est bien une sous-algèbre de \mathcal{A} . Toute base de \mathcal{A}

$$\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_d, \mathbf{X}_{d+1}, \dots, \mathbf{X}_D\} \quad (\text{IV.113})$$

peut donc se décomposer en un ensemble de générateurs $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_d\}$ constituant la base de la sous-algèbre \mathcal{A}' . Les générateurs restant $\{\mathbf{X}_{d+1}, \mathbf{X}_{d+2}, \dots, \mathbf{X}_D\}$ au nombre de $K = D - d$ forment une base de l'espace vectoriel \mathcal{B} qui entre dans la décomposition

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \oplus \mathcal{B} . \quad (\text{IV.114})$$

La sous-algèbre \mathcal{A}' engendre le sous-groupe de Lie \mathcal{G}' du groupe \mathcal{G} qui décrit la symétrie résiduelle laissée intacte par le vide. Dans le cas de $SO(n)$, les générateurs permettant de basculer l'axe $\varphi_i \neq \varphi_1$ vers l'axe $\varphi_j \neq \varphi_1$ engendraient l'algèbre de $SO(n-1)$, sous-groupe résiduel de $SO(n)$.

La seconde étape du raisonnement consiste à faire apparaître les champs de Goldstone. En toute généralité, le champ ϕ appartient à la représentation \mathcal{V} de \mathcal{G} . Cet espace vectoriel peut être réel comme dans le cas de $SO(n)$. Le champ ϕ est alors décrit par les $n \equiv \dim \mathcal{V}$ coordonnées φ_i que le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ y prend et la représentation \mathcal{V} est isomorphe à \mathbb{R}^n . L'alternative est une représentation \mathcal{V} complexe de dimension p . En ce cas, ϕ est spécifié par la donnée des p nombres complexes Φ_j . Inspirés par le cas de $SU(2)$, nous pouvons décrire ϕ à l'aide des parties réelles et imaginaires des coordonnées complexes Φ_j en posant

$$\Phi_j = \frac{\varphi_j + i \varphi_{p+j}}{\sqrt{2}} . \quad (\text{IV.115})$$

Nous sommes ramenés au cas précédent en définissant le vecteur

$$\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \dots, \varphi_{2p}\} . \quad (\text{IV.116})$$

Ce vecteur appartient à l'espace vectoriel \mathbb{R}^n de dimension $n = 2p$. Bien que cela ne soit pas évident à priori, celui-ci est également une représentation du groupe \mathcal{G} . Chaque générateur \mathbf{X}_a de l'algèbre \mathcal{A} y est représenté par une matrice $n \times n$ égale à $-i\mathcal{T}_a$ et qui traduit dans \mathbb{R}^n , au niveau des composantes φ_i du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$, l'action des matrices $A_a \equiv -iT_a$ de la représentation \mathcal{V} .

Problème n° IV-19 – Niveau [2] : Dans l'exemple de la brisure spontanée de $SU(2)$, le doublet scalaire complexe \mathbf{H} donne naissance à un vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ à quatre composantes réelles et sur lequel $SU(2)$ agit via des rotations de l'axe φ_1 vers les autres axes. Montrer que les matrices $T_a \equiv \sigma_a/2$ de la représentation fondamentale $\mathcal{V} \equiv \mathbf{2}$ de $SU(2)$ sont transcrites dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 auquel $\boldsymbol{\varphi}$ appartient par les matrices 4×4

$$\mathcal{T}_1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{T}_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{T}_3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $T_a \equiv \sigma_a/2$ vérifient les relations de commutation $[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}\sigma_c$ qui traduisent la seconde loi interne \star de l'algèbre de $SU(2)$ et la transposent comme il se doit dans la représentation $\mathcal{V} \equiv \mathbf{2}$. En est-il de même pour les matrices \mathcal{T}_a de \mathbb{R}^4 ? Conclusion ?

Le vide ϕ_0 de la représentation \mathcal{V} correspond au vecteur $\boldsymbol{\varphi}_0$ de \mathbb{R}^n . Les n champs scalaires h_i apparaissent dans le développement (IV.79) de $\boldsymbol{\varphi}$ autour de $\boldsymbol{\varphi}_0$. Nous allons considérer maintenant l'application f de l'algèbre \mathcal{A} dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n précédemment défini qui, à tout générateur \mathbf{X}_a de \mathcal{A} , associe le vecteur $\{-i\mathcal{T}_a\}\boldsymbol{\varphi}_0$ de \mathbb{R}^n . Rappelons que la matrice $-i\mathcal{T}_a$ traduit dans \mathbb{R}^n l'action de la matrice $-iT_a \equiv A_a$ qui représente dans \mathcal{V} le générateur \mathbf{X}_a . Dans la mesure où, pour tout couple de réels α et β , il vient

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{X}_a + \beta \mathbf{X}_b) &\equiv \{-i(\alpha \mathcal{T}_a + \beta \mathcal{T}_b)\}\boldsymbol{\varphi}_0 \\ &= \alpha\{-i\mathcal{T}_a\}\boldsymbol{\varphi}_0 + \beta\{-i\mathcal{T}_b\}\boldsymbol{\varphi}_0 \\ &= \alpha f(\mathbf{X}_a) + \beta f(\mathbf{X}_b), \end{aligned} \tag{IV.117}$$

l'application f est linéaire. Elle transporte l'algèbre \mathcal{A} considérée comme un espace vectoriel de dimension D construit sur \mathbb{R} vers l'espace vectoriel image \mathbb{R}^n de dimension n . Le **théorème du rang** s'applique dès lors, conduisant à la relation

$$\dim \mathcal{A} = \dim \mathbf{Ker}(f) + \dim \mathbf{Im}(f). \tag{IV.118}$$

- Le noyau $\mathbf{Ker}(f)$ de l'application f est l'ensemble des éléments \mathbf{X} de l'algèbre \mathcal{A} qui laissent le vide inchangé. Cet ensemble n'est autre que la sous-algèbre \mathcal{A}' de dimension d , définie plus haut, qui engendre le sous-groupe résiduel \mathcal{G}' .
- L'image de \mathcal{A} par f est le sous-espace vectoriel $\mathbf{Im}(f)$ inclus dans \mathbb{R}^n et doté du même nombre de dimensions que \mathcal{B} puisque

$$\dim \mathbf{Im}(f) = \dim \mathcal{A} - \dim \mathcal{A}' = \dim \mathcal{B} = D - d = K . \quad (\text{IV.119})$$

C'est dans cet espace \mathbb{R}^K que vivent les K bosons de Goldstone associés aux K générateurs brisés constituant la base de \mathcal{B} .

Le troisième acte de la démonstration consiste à prouver l'assertion précédente. Considérons un élément \mathbf{X}_b quelconque appartenant à \mathcal{B} . Ce générateur ne laisse pas invariant le vide et nous savons que $\{-i\mathcal{T}_b\}\varphi_0$ est un vecteur non nul de $\mathbf{Im}(f) \equiv \mathbb{R}^K$ que nous noterons

$$\mathbf{h} \equiv \{-i\mathcal{T}_b\}\varphi_0 = f(\mathbf{X}_b) . \quad (\text{IV.120})$$

Ce vecteur possède les coordonnées h_i et est différent du vecteur nul. A l'aide du générateur \mathbf{X}_b et de sa représentation $-i\mathcal{T}_b$ dans \mathbb{R}^n , construisons la rotation

$$\mathcal{R}_b = e^{-i\epsilon\mathcal{T}_b} \simeq \mathbb{I}_n - i\epsilon\mathcal{T}_b , \quad (\text{IV.121})$$

où l'angle ϵ est infiniment petit. Une telle rotation agit également sur le vide ϕ_0 de la vraie représentation \mathcal{V} en le transformant en

$$\{\phi'_0\} = \left\{e^{-i\epsilon\mathcal{T}_b}\right\} \times \{\phi_0\} , \quad (\text{IV.122})$$

auquel correspond le vecteur φ'_0 de \mathbb{R}^n . Le potentiel V est invariant de jauge et ne change pas entre ϕ_0 et ϕ'_0 , donc entre φ_0 et φ'_0 . Ces deux points de \mathbb{R}^n infiniment voisins sont au fond de la vallée de potentiel, là où V est localement minimal. Le gradient du potentiel étant nul aussi bien en φ_0 qu'en φ'_0 , il vient

$$0 \equiv \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi'_0} = \left\{ \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi_0} + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi_j^0 \right\} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi_j^0 . \quad (\text{IV.123})$$

La rotation \mathcal{R}_b bascule φ_0 en φ'_0 , engendrant la variation

$$\delta \varphi_0 = \varphi'_0 - \varphi_0 \simeq \{-i\epsilon\mathcal{T}_b\}\varphi_0 \equiv \epsilon \mathbf{h} . \quad (\text{IV.124})$$

La matrice de masse \mathcal{M}_{ij} des excitations h_j du champ scalaire φ autour du vide étant définie par la dérivée seconde du potentiel en φ_0 , la relation (IV.123) conduit à

$$\mathcal{M}_{ij}(\epsilon h_j) \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi_j^0 = 0 . \quad (\text{IV.125})$$

Le vecteur \mathbf{h} est donc de masse nulle puisqu'en simplifiant par ϵ , il vient

$$\mathcal{M}_{ij} h_j = 0 \quad . \quad (\text{IV.126})$$

Tout élément \mathbf{X}_b de \mathcal{B} a pour image par f un vecteur de masse nulle. L'ensemble des images des éléments de \mathcal{B} est l'espace vectoriel $\mathbf{Im}(f) \equiv \mathbb{R}^K$ possédant K degrés de liberté réels. Ces excitations du champ φ ont toutes une masse nulle. Ce sont les bosons de Nambu–Goldstone associés aux K générateurs brisés de l'algèbre \mathcal{A} qui forment une base de l'espace vectoriel \mathcal{B} .

5) Le miracle de Higgs.

Nous allons compliquer la situation en considérant désormais des théories invariantes sous les transformations de jauge **locales** engendrées par un groupe non-abélien \mathcal{G} . Cette invariance est cependant spontanément brisée par un champ scalaire ϕ dont les configurations classiques d'énergie minimale violent la symétrie de jauge. Ce champ évolue en effet vers un état fondamental $\phi_0 \neq 0$ qui casse certains générateurs du groupe. Le cas le plus simple est celui du champ scalaire chargé étudié dans le cadre du potentiel en forme de chapeau mexicain. Le Lagrangien (IV.71) doit maintenant faire intervenir une dérivée covariante et non plus simple. Le champ de jauge associé entre également en jeu de sorte que

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathcal{L}_{\text{scalar}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V \right\} + \left\{ \mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \quad , \quad (\text{IV.127})$$

où la dérivée covariante de ϕ a été définie par $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + i q A_\mu \phi$ et où le champ électromagnétique est égal à $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Le potentiel (IV.77) conduit le champ scalaire à évoluer vers une configuration non nulle qui se ramène, par rotation des axes φ_1 et φ_2 , à $\varphi_0 = \{v, 0\}$.

Problème n° IV–20 – Niveau [1] : On développe ϕ autour du vide ϕ_0 en introduisant les excitations scalaires h_1 et h_2 définies par

$$\phi = \frac{(v + h_1) + i h_2}{\sqrt{2}} \quad . \quad (\text{IV.128})$$

Calculer le terme cinétique du champ scalaire et établir que

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \mathbf{h} \cdot \partial^\mu \mathbf{h} + q(v + h_1) A^\mu \partial_\mu h_2 - q h_2 A^\mu \partial_\mu h_1 + \\ &+ \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu \{v^2 + 2v h_1 + \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}\} \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.129})$$

Force est de constater que ce seul terme cinétique est déjà bien compliqué avec un drôle de couplage entre le photon A^μ et les champs h_1 et h_2 . Beaucoup plus excitante est la présence dans la seconde ligne de l'expression (IV.129) du terme

$$\mathcal{L}_{\text{gauge mass}} = \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu \equiv \frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\mu A^\mu . \quad (\text{IV.130})$$

Le boson vecteur A_μ , introduit pour rendre locale l'invariance de jauge, acquiert une masse $m_\gamma = q v$ lorsque cette symétrie est spontanément brisée. Cette masse dépend du couplage de jauge q (ici la charge électrique) et de la norme v de φ_0 (encore appelée valeur dans le vide du champ scalaire).

5.1) Illustration du mécanisme de Higgs dans un cas simple.

Peter Higgs d'Edimbourg, mais également **Robert Brout** et **François Englert** de Bruxelles, ont remis de l'ordre dans le Lagrangien précédent. Celui-ci décrit la situation compliquée d'un champ scalaire ϕ dont l'invariance locale par rapport à un groupe de jauge \mathcal{G} est brisée spontanément. Leur remarque est illustrée dans la figure IV.4. Elle tient en ce que la symétrie de jauge étant justement locale, elle va nous permettre de simplifier considérablement la description du champ scalaire ϕ que l'on peut faire tourner dans le plan complexe (φ_1, φ_2) sans que le Lagrangien (IV.127) ne soit affecté.

En chaque point x de l'espace-temps, le champ scalaire complexe ϕ s'exprime en fonction des champs scalaires neutres h_1 et h_2 grâce à la relation (IV.128). Il correspond au vecteur φ du plan (φ_1, φ_2) de la figure IV.4. Les composantes de φ par rapport au vide φ_0 dépendent donc en toute généralité de la position x . Celle-ci étant fixée, la figure IV.4 suggère qu'une simple rotation dans le plan complexe du champ ϕ permet de rabattre le vecteur φ sur l'axe horizontal φ_1 en l'amenant en $\varphi' = \{(v + h), 0\}$ puisque

$$\phi' = e^{-i q \theta} \times \phi = e^{-i q \theta} \times e^{i \alpha} \times \left(\frac{v + h}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{v + h}{\sqrt{2}} \right) , \quad (\text{IV.131})$$

pour peu que $\theta = \alpha/q$. L'angle θ dépend de la position x dans l'espace-temps, mais comme le Lagrangien (IV.127) est invariant sous les transformations de jauge locales, donc sous les rotations dont l'angle θ dépend de x , il s'exprime exactement de la même manière en fonction de ϕ' qu'en fonction de ϕ . La rotation de jauge permettant de substituer ϕ' à ϕ transforme le potentiel vecteur A_μ en A'_μ . L'expression du Lagrangien en fonction de ϕ' , A'_μ et de la dérivée covariante $D'_\mu \phi'$ est rigoureusement identique à celle de la relation (IV.127). La dernière étape consiste à gommer les primes sur les champs ϕ et A_μ . On peut dès lors utiliser le Lagrangien (IV.127) en prenant pour champ scalaire $\phi \equiv (v + h)/\sqrt{2}$. Les calculs sont alors considérablement simplifiés. La grande question est désormais de savoir où est passé le second degré de liberté puisqu'on se retrouve avec

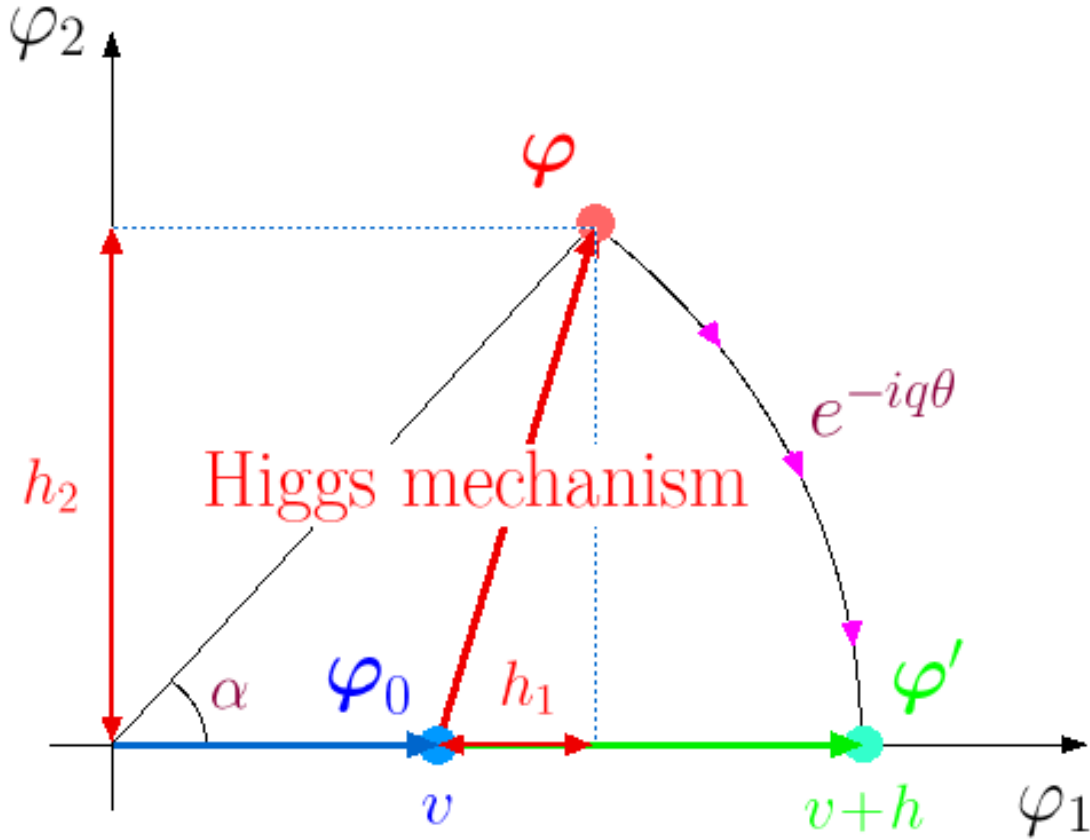


Figure IV.4: En tout point x de l'espace-temps, le champ scalaire ϕ est décrit par le vecteur φ du plan (φ_1, φ_2) et donc par les coordonnées h_1 et h_2 de celui-ci par rapport au vide φ_0 . Une simple rotation de jauge d'un angle $\theta \equiv \alpha/q$ rabat le vecteur φ sur l'axe φ_1 et conduit au vecteur φ' qui, lui, ne dépend plus que de la seule composante réelle h .

un seul champ scalaire h appelé **boson de Higgs** alors qu'on était parti avec les deux champs h_1 et h_2 .

Problème n° IV-21 – Niveau [1] : Reprendre le calcul du terme cinétique de l'exercice précédent et montrer que

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} q^2 (v + h)^2 A_\mu A^\mu . \quad (\text{IV.132})$$

La relation (IV.132) est d'une grande simplicité. Outre le terme cinétique du champ de Higgs h , nous reconnaissons le terme de masse du photon ainsi que deux termes de

couplage entre le boson h et le photon A_μ . Nous confirmons la propriété essentielle trouvée précédemment. Au cours de la brisure spontanée de la symétrie de jauge $U(1)$ – symétrie rendue locale par l’introduction du potentiel vecteur A_μ – le photon acquiert la masse $m_\gamma = qv$. Se comportant désormais comme un champ vectoriel massif, il est caractérisé par trois degrés de liberté correspondant aux deux états d’hélicité transverse de la théorie de Maxwell auxquels s’ajoute un troisième état de polarisation longitudinale. Celui-ci correspond au degré de liberté qui nous faisait défaut. **En devenant massif, le photon a avalé le boson de Goldstone engendré par la brisure spontanée de la symétrie de jauge.** Le champ φ de la figure IV.4 est aussi bien décrit par les deux champs h_1 et h_2 que par le champ de Higgs h et l’angle $\theta = \alpha/q$. Lorsqu’il est infiniment petit, ce dernier correspond à la direction φ_2 associée au boson de Goldstone puisque

$$\phi = e^{iq\theta} \times \left(\frac{v+h}{\sqrt{2}} \right) \simeq \left(h_1 = \frac{v+h}{\sqrt{2}} \right) + i \left(h_2 = \frac{q\theta(v+h)}{\sqrt{2}} \right) . \quad (\text{IV.133})$$

La transformation locale de jauge permettant de rabattre le champ ϕ sur l’axe réel absorbe l’angle θ qui réapparaît comme état d’hélicité longitudinale du photon devenu massif.

Problème n° IV–22 – Niveau [2] : Développer le Lagrangien (IV.127) une fois que le boson de Goldstone a été avalé par le photon et établir que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} (\sqrt{2}\mu)^2 h^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (qv)^2 A_\mu A^\mu + \\ & + q^2 v h A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} q^2 h^2 A_\mu A^\mu - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4} h^4 . \end{aligned} \quad (\text{IV.134})$$

La première ligne correspond au Lagrangien libre du boson de Higgs h et du photon A_μ , tous deux massifs. La deuxième ligne décrit les couplages du photon au boson de Higgs ainsi que les interactions de celui-ci avec lui-même.

5.2) Généralisation au cas du groupe $SU(2)$.

La transposition de l’étude précédente à $SU(2)$ est immédiate. Le champ scalaire complexe ϕ est remplacé par le doublet \mathbf{H} appartenant à la représentation fondamentale $\mathbf{2}$ de spin 1/2. Le Lagrangien (IV.127) devient

$$\mathcal{L} = \{ \mathcal{L}_{\text{scalar}} = (D_\mu \mathbf{H})^\dagger (D^\mu \mathbf{H}) - V \} + \{ \mathcal{L}_{\text{gauge}} = \mathcal{L}_{SU(2)} \} , \quad (\text{IV.135})$$

où le potentiel a été écrit sous la forme désormais canonique

$$V(\mathbf{H}) = \frac{1}{4} \lambda v^4 - \mu^2 \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \lambda (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^2 . \quad (\text{IV.136})$$

Le Lagrangien $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ rend compte des bosons vecteurs \mathbf{W}_μ et se met sous la forme (IV.70) notée $\mathcal{L}_{SU(2)}$ dans un paragraphe précédent. Les rotations de jauge basculent \mathbf{H} en

$$\mathbf{H}' = \mathcal{R} \times \mathbf{H} = e^{-ig\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} \times \mathbf{H} , \quad (\text{IV.137})$$

où g est la constante de couplage du groupe $SU(2)$. La même transformations s'applique à la dérivée covariante $D_\mu \mathbf{H}$ définie comme

$$D_\mu \mathbf{H} = \partial_\mu \mathbf{H} + ig \mathbf{W}_\mu \cdot (\boldsymbol{\sigma}/2) \times \mathbf{H} . \quad (\text{IV.138})$$

Le système évolue spontanément vers la configuration d'énergie minimale $\mathbf{H}_0 \neq \mathbf{0}$ qui n'est pas invariante sous les transformations de $SU(2)$. Au vide \mathbf{H}_0 correspond le vecteur $\boldsymbol{\varphi}_0$ de \mathbb{R}^4 dont le module est v . Nous pouvons définir les axes φ_i de sorte que le vide s'écrive simplement $\boldsymbol{\varphi}_0 = \{v, 0, 0, 0\}$.

La généralisation au groupe $SU(2)$ du mécanisme de Higgs discuté précédemment dans le cadre de $U(1)$ revient à montrer qu'en tout point x de l'espace-temps, il existe une rotation de jauge permettant de transformer un doublet \mathbf{H} quelconque en un doublet \mathbf{H}' aligné sur le vide et dont la seule composante non-nulle est $\varphi'_1 = v + h$. Le problème réside donc dans la construction d'une matrice \mathcal{R} de $SU(2)$ vérifiant l'égalité

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix} = \mathcal{R} \times \mathbf{H}' = \begin{pmatrix} \bar{a} & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ (v+h) \end{pmatrix} , \quad (\text{IV.139})$$

les composantes φ_i de \mathbf{H} étant quelconques. La rotation \mathcal{R} préserve la norme hermitienne

$$\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{R^2}{2} = \frac{(v+h)^2}{2} . \quad (\text{IV.140})$$

Les nombres complexes a et b ont été définis dans le chapitre de révision sur les groupes par

$$a = \cos \theta/2 \times e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad b = \sin \theta/2 \times e^{i\beta} . \quad (\text{IV.141})$$

Les angles α et β sont compris entre 0 et 2π alors que θ appartient à l'intervalle allant de 0 à π en sorte que $\cos \theta/2$ et $\sin \theta/2$ sont les modules des nombres complexes a et b .

Problème n° IV-23 – Niveau [2] : En supposant pour simplifier que $(v+h) \equiv R$ est positif, montrer que

$$e^{i\alpha} = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}} \quad \text{et} \quad e^{i\beta} = \frac{\varphi_3 + i\varphi_4}{\sqrt{\varphi_3^2 + \varphi_4^2}} , \quad (\text{IV.142})$$

alors que

$$\cos \theta/2 = \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}{R} \quad \text{et} \quad \sin \theta/2 = \frac{\sqrt{\varphi_3^2 + \varphi_4^2}}{R} . \quad (\text{IV.143})$$

La relation (IV.139) permet donc d'exprimer une valeur quelconque du champ \mathbf{H} , qui dépend à priori des quatre composantes φ_i du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$, en fonction du champ de Higgs h et des trois paramètres entrant dans la définition de la matrice de rotation \mathcal{R} . Dans l'exercice précédent, il s'agit des angles α, β et θ . La matrice \mathcal{R} peut également être définie à partir du vecteur $\boldsymbol{\theta}$ décrivant la rotation dans \mathbb{R}^3 dont les angles d'Euler permettent la reconstruction de a et de b , comme discuté dans le chapitre de révision sur les groupes. Le doublet \mathbf{H} peut donc s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix} = e^{-ig\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.144})$$

Il dépend de h et des trois angles θ_i . Lorsque ceux-ci sont petits, le doublet \mathbf{H} acquiert une composante perpendiculaire à l'axe φ_1 sur lequel le vide \mathbf{H}_0 est aligné. Nous savons que l'effet des matrices de Pauli σ_x, σ_y et σ_z sur un vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ de \mathbb{R}^4 parallèle à $\boldsymbol{\varphi}_0$ est identique à celui des rotations $-T_{14}, -T_{13}$ et T_{12} de $SO(4)$. Les angles θ_x, θ_y et θ_z sont donc respectivement associés aux bosons de Goldstone h_4, h_3 et h_2 . Le mécanisme de Higgs s'applique encore dans le cas de $SU(2)$. La transformation de jauge locale \mathcal{R}^{-1} permet de remplacer \mathbf{H} par le doublet \mathbf{H}' sans que le Lagrangien (IV.135) ne soit affecté. Cette rotation de jauge modifie également les bosons \mathbf{W}_μ en \mathbf{W}'_μ et la dérivée covariante $D_\mu\mathbf{H}$ en $D'_\mu\mathbf{H}'$. La dernière étape est la même que pour $U(1)$: on gomme les primes et on se retrouve avec le Lagrangien (IV.135) dans lequel le doublet \mathbf{H} se met simplement sous la forme

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ (v+h) \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.145})$$

Les trois degrés de liberté de \mathbf{H} associés aux bosons de Goldstone ont disparus comme dans le cas précédent. Ils ont été mangés par les trois bosons de jauge W_μ^i qui, du coup, ont acquis une masse que nous allons déterminer. En effet, en calculant l'effet de la dérivée covariante D_μ sur le champ de Higgs (IV.145), il vient

$$D_\mu\mathbf{H} = \left\{ \partial_\mu \mathbb{I}_2 + i\frac{g}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right\} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ (v+h) \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.146})$$

Cette expression se met sous la forme

$$D_\mu\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i(g/2)(W_\mu^1 - iW_\mu^2)(v+h) \\ \partial_\mu h - i(g/2)W_\mu^3(v+h) \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.147})$$

La matrice adjointe de $D_\mu\mathbf{H}$ est égale à

$$(D_\mu\mathbf{H})^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-i(g/2)(W_\mu^1 + iW_\mu^2)(v+h), \partial_\mu h + i(g/2)W_\mu^3(v+h) \right) . \quad (\text{IV.148})$$

Problème n° IV–24 – Niveau [1] : Etablir les expressions précédentes et montrer que le terme cinétique est égal à

$$(D_\mu \mathbf{H})^\dagger (D^\mu \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g^2}{8} \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu (v + h)^2 . \quad (\text{IV.149})$$

En déduire que les trois bosons de jauge de $SU(2)$ acquièrent chacun la masse

$$m_W = \frac{g v}{2} . \quad (\text{IV.150})$$

Nous obtenons le même comportement que dans le cas de $U(1)$. La brisure spontanée de la symétrie de jauge conduit, dans le cas où elle est locale, à des bosons vecteurs rendus massifs après avoir mangé les bosons de Goldstone associés aux générateurs brisés. Une théorie initialement invariante sous $SU(2)$ et spontanément brisée contient trois bosons vecteurs W_μ^i . Ceux-ci absorbent les trois bosons de Goldstone h_i qui apparaissent avec les trois générateurs brisés $T^i \equiv \boldsymbol{\sigma}/2$.

6) Le modèle de Weinberg–Salam.

6.1) Présentation du modèle et ébauche du Lagrangien.

6.2) Brisure spontanée du groupe $SU(2) \times U(1)$.

6.3) Couplage des fermions aux bosons de jauge.
