

$$V_{AL} = \vec{d} \cdot \vec{E}$$

$$V_{AL} = d_0 \left( \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} |J\rangle \langle J| e^{-i\omega t}}_{|J\rangle \langle J|} + e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} |J\rangle \langle m=0| \right)$$

$$|J\rangle \langle J| = |J\rangle \langle J|$$

$$+ |J - \frac{1}{2}\rangle \langle -\frac{1}{2}| + |J\rangle \langle J|$$

$$\vec{J} = \vec{I} + \vec{s}$$

$$\langle \frac{1}{2} | d_3 | J = \frac{3}{2}, m_J = \frac{1}{2} \rangle$$

$$|J = \frac{3}{2}, m_J = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2} |J = \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{2} |J = \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle$$

$$|J = \frac{3}{2}, m_J = \frac{3}{2}\rangle = |m_S = \frac{1}{2}, m_L = \frac{1}{2}\rangle$$

$$\sqrt{J(J+1)} - m(m-1) |J = \frac{3}{2}, m_J = \frac{3}{2}\rangle = |J = \frac{3}{2}, m_J = \frac{1}{2}\rangle$$

$\uparrow$   
 $S_z + L_z$

$$|m_S = -\frac{1}{2}, m_L = \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1(\frac{1}{2}) - 1 \times 0} |m_S = \frac{1}{2}, m_L = 0\rangle$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{3}{2}) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})} = 1$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}) - \frac{3}{2}(\frac{1}{2})} |J = \frac{3}{2}, m_J = \frac{1}{2}\rangle$$

$$\sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$S - \left| +\frac{1}{2} \right\rangle = \underbrace{\sqrt{S(S+1) - m(m-1)}}_{\begin{cases} S = \frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\left| S = \frac{1}{2}, m_S = \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| m_S = -\frac{1}{2}, m_L = 1 \right\rangle$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left| m_S = \frac{1}{2}, m_L = 0 \right\rangle$$

$$\cancel{\left( S = \frac{1}{2}, m_S = \frac{1}{2} \right) | m_S = \frac{1}{2} } = \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}} \left| -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle} \\ + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, 0 \right\rangle}$$

$$\cancel{\left( S = \frac{1}{2}, m_S = \frac{1}{2} \right) | m_S = \frac{1}{2} } = \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} \text{ do}$$

$$\left( S = \frac{1}{2}, m_S = \frac{1}{2} \right) | m_S = \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ do}$$

Calcul du décalage en  
énergie à l'aide de  
2 en Vair

$$\sqrt{\frac{2}{3}} d_0 = \omega_B \quad \Delta_A = \frac{1}{\sqrt{3}} d_0 E$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = \omega_L - \omega_{D1} \\ \Delta_2 = \omega_L - \omega_{D2} \end{cases}$$

$$U_{dip} = \Delta E = \frac{\omega_B^2}{\omega_{D1} - \omega_L} + \frac{\omega_B^2}{\omega_{D2} - \omega_L}$$

$$U_{dip} = d_0^2 E^2 \left( \frac{1}{3 \Delta_1} + \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta_2} \right)$$

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \left( e^{i\omega t} + E' e^{-i\omega t} \right)$$

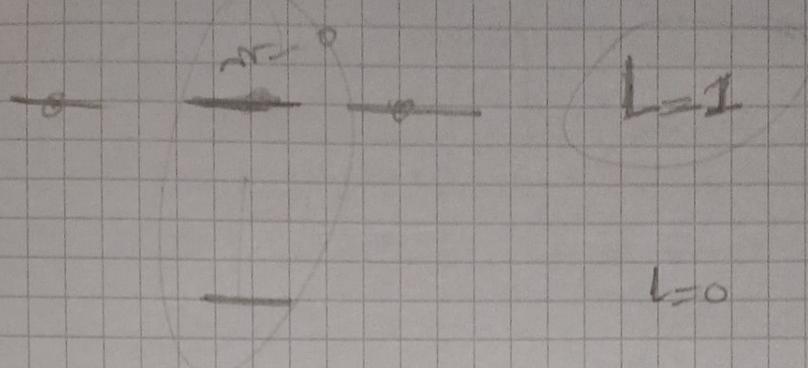
$$I = 2 \cdot \epsilon_0 E^2$$

• Que vaut  $d_0$  ? On a  $d_0^2 = \frac{3\pi\epsilon_0 A c^3}{w_0^3} P_{spur}$

$$U_{dip} = \frac{3\pi\epsilon_0 A c^3}{w_0^3} \cdot \frac{I}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{3 \Delta_1} + \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta_2} \right)$$

$$P_I = \frac{3\pi c^2 R_3}{2 w_0}$$

# Réseau de la Sphère



$\left\{ \begin{array}{l} m=0 = |p_3\rangle \text{ axe quant. z.} \\ m=\pm 1 = |p_2\rangle \end{array} \right.$

$$|p_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|m=1\rangle + |m=-1\rangle)$$

$$|p_y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|m=1\rangle - |m=-1\rangle)$$

Physique isotope  $\Rightarrow$  tous les m durant la vie  
on calcule pour  $|m=0\rangle$

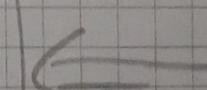
$$V_{p_2} = \sum_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{d'ordre}}} d_0 \delta(\vec{r}_0) \times (|p_2\rangle \langle p_2| + |p_2\rangle \langle p_1|)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = a^- a^+ \\ E = \sum_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{d'ordre}}} (a_{0z}^- + a_{0z}^+) \end{array} \right.$$

$$H = \sum_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{d'ordre}}} \hbar \omega B_z (a^+ a^- + \frac{1}{2})$$

Règle d'a de Fermi:

$$S_{\text{sph}} = \frac{\omega_0^3 d_0^2}{3\pi \epsilon_0 \mu_0 c^3}$$



$$\vec{E} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}$$

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + V(\vec{r})$$

$|1\rangle$

$$|\tilde{\psi}\rangle = U|1\rangle = e^{-\frac{q}{\hbar} \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r})}$$

approx  
replace

$$U|1\rangle = U^{-1}|\tilde{\psi}\rangle$$

$$\begin{array}{c} \text{d} \\ \text{p} \\ \text{e} \\ |dp\rangle \end{array}$$

$$= |d+p\rangle$$

$$+ U H U^{-1} |\tilde{\psi}\rangle$$

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

$$= [i\vec{r} \cdot \vec{\partial} - \frac{q}{\hbar} \vec{A}] e^{-i\vec{r} \cdot \vec{A}}$$

$$- E_e e^{-i\vec{r} \cdot \vec{A}}$$

$$\langle \phi | U H U^{-1} |\tilde{\psi}\rangle$$

$$\langle \vec{p} - \frac{q}{\hbar} \vec{A} | H U^{-1} |\tilde{\psi}\rangle$$

$$\hat{H}' = H_0 + \vec{J} \cdot \vec{E}$$

$$U H U^{-1} |p\rangle$$

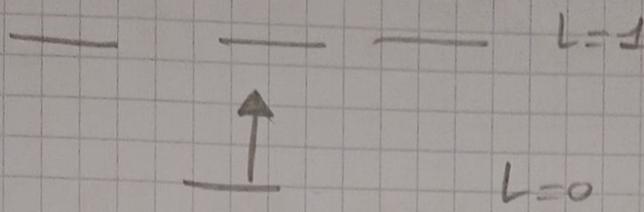
$$= \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 |p - qA\rangle$$

$$|p\rangle$$

$$= p$$

1

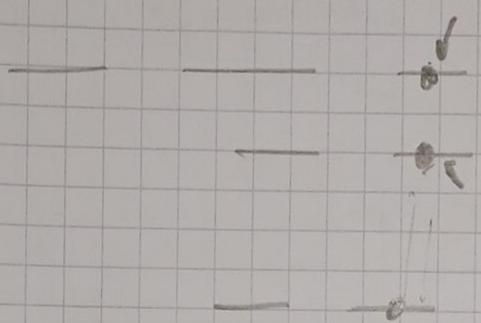
Calcul de  $U_{\text{dip}}$  pour  
 $s \rightarrow p$  et  $R_b$



Polarisation linéaire

$$\langle L=0 | d_3 | L=1, m=0 \rangle = d_0$$

Ceci passe dans la base fine.



$$J = S + L$$

$$S = 1/2$$

• Calcul de  $\langle \frac{1}{2} | d_3 | J=3/2, m_J=1/2 \rangle = A$

a) décomposer  $|J=3/2, m_J=1/2\rangle$  dans la base  $|S, m_S, L=m_L\rangle$

$$|J=3/2, m_J=1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |L=1, m_L=1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |L=0, m_L=0\rangle$$

( $d_3$  conserve  $m_S$ )

Donc  $A = d_0 \sqrt{\frac{2}{3}}$

• Calcul de  $\langle \frac{1}{2} | d_3 | J=1/2, m_J=1/2 \rangle = B$

Décomposition  $|J=1/2, m_J=1/2\rangle$  dans base  $|S, m_S, L=m_L\rangle$

Il est le vecteur orthogonal à  $|J=3/2, m_J=1/2\rangle$

$$\hookrightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}} |L=1, m_L=1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |L=0, m_L=0\rangle \Rightarrow B = \frac{d_0}{\sqrt{3}}$$

(2)

Relier Montante - basse  
et  $E$

$$\vec{E}_{\text{rel}} = \vec{z}^{\circ} \left( E e^{i\omega t} + E^* e^{-i\omega t} \right)$$

Énergie par unité de volume:

$$H_0 = \int \frac{\epsilon_0}{2} \left( |\vec{E}_{\text{rel}}|^2 + c^2 |\vec{B}_{\text{rel}}|^2 \right) d^3 r$$

Equipartition:  $\frac{E}{V} = \frac{(E)_{\text{temp}}}{V} = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0}{2} \frac{1}{2} 4 E^2 \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{E}{V} = \frac{\epsilon_0}{2} 4 E^2$$

lien avec  $I$ :  $I = \epsilon \left( \frac{E}{V} \right)$ , donc  $I = \epsilon \epsilon_0 2 E^2$

→ Potentiel dipolaire

$$U_{\text{dip}} = d_0^2 E^2 \left( \frac{1}{3} \frac{1}{D_1} + \frac{2}{3} \frac{1}{D_2} \right)$$

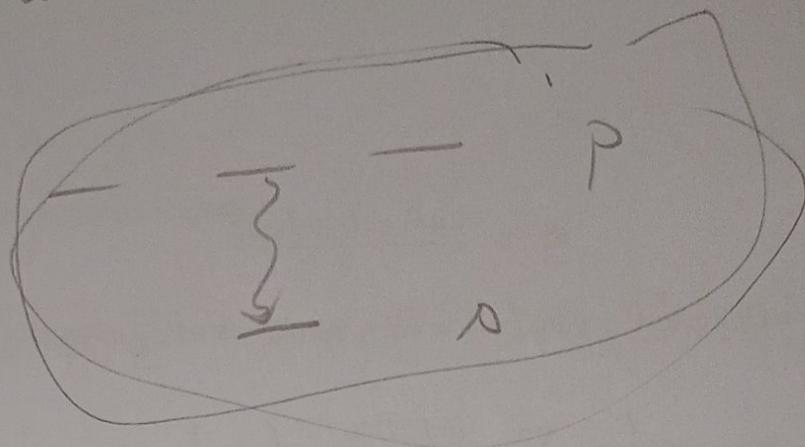
$$U_{\text{dip}} = d_0^2 \frac{I}{c \epsilon_0 2} \quad ( )$$

En utilisant  $S_{\text{pfr}} = \frac{w_0^3 d_0^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$  ↪ à calculer avec FOR

$$U_{\text{dip}} = \left( S_{\text{pfr}} \frac{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}{w_0^3} \right) \frac{I}{c \epsilon_0 2} \left( \frac{1}{3 D_1} + \frac{2}{3 D_2} \right)$$

(3)

On a une transition  $S \rightarrow P$



On veut calculer  $S_{\text{spont}}$

On utilise la règle d'onde fermé.

On note  $\vec{E}$  la polar du laser.

On suppose que l'on part de  $m=0$

$$\langle g | d_z | \vec{0} \rangle = d_0 \quad \text{Elle dépend de}$$

On a aussi  $\langle g | d_- | \pm \rangle = d_0$  w.

Théorème Wigner-Eckart  $\langle g | d_+ | - \pm \rangle = d_0$

Il faut calculer  $S$  avec la FGR

cf C. Fabre. 
$$S_{\text{spont}} = \frac{\omega_0^3 d_0^2}{3\pi\epsilon_0 k c^3}$$

Tout est bien défini.

$S_{\text{spont}}$  s'obtient par calcul perturbatif à l'ordre 2 et avec les débonds

## 0.1 Quelle longueur d'onde du laser ?

La structure interne de l'atome est modélisée par un système à deux niveaux, et la polarisabilité de l'atome est décrite par le modèle classique de Lorentz [9902072]. En utilisant les notations suivantes :  $\omega_0$  pour la fréquence propre entre ces deux niveaux et  $\omega$  pour la fréquence du faisceau laser, lorsque le désaccord est négligeable par rapport à la fréquence du laser ( $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ ), le taux d'amortissement classique est donné par :

$$\Gamma(\omega) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3} \omega^2$$

Cela conduit à l'expression suivante :

$$\hbar\Gamma_{sc} = \frac{\Gamma_0}{\omega - \omega_0} U_{dip}$$

où  $\Gamma_0 \equiv \Gamma(\omega_0)$ .

À partir de cette dernière équation, on peut établir une relation entre la longueur d'onde du laser  $\lambda$ , le potentiel dipolaire  $U_{dip}$  et le taux de photons diffusés  $\Gamma_{sc}$ . Si l'on impose les conditions suivantes :

- Le potentiel dipolaire  $U_{dip}$  doit être supérieur à  $U_{dip,\min}$ .
- $\Gamma_{sc}$  pour une valeur de  $U_{dip}$  doit être inférieur à  $\Gamma_{sc,\max}$ .

On obtient alors la longueur d'onde maximale  $\lambda_{\max}$  que le laser peut avoir :

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\Gamma_0}{\Gamma_{sc}} \frac{U_{dip}}{hc} + \frac{1}{\lambda_0}} \leq \frac{1}{\frac{\Gamma_0}{\Gamma_{sc,\max}} \frac{U_{dip,\min}}{hc} + \frac{1}{\lambda_0}} = \lambda_{\max} \quad (3)$$

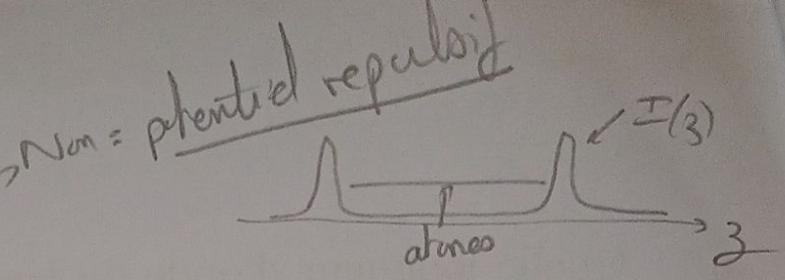
Nous prenons  $U_{dip,0,\min}/k_B = 1 \mu K$  comme valeur minimale du potentiel dipolaire, et le taux de diffusion des photons pour  $U_{dip,\min} = U_{dip,0,\min}/2 = 500 nK \times k_B$  est  $\Gamma_{sc,\max} = 1 s^{-1}$ . Nous nous plaçons autour de la transition  $D_2$  du rubidium 87, c'est-à-dire à une longueur d'onde propre  $\lambda_0 = 780 \text{ nm}$ . Nous obtenons ainsi  $\lambda_{\max} = 779,228 \text{ nm}$ , ce qui correspond à un décalage de moins de 1 nm.

## 0.2 Quelle Puissance du laser ?

Le potentiel dipolaire s'exprime par l'équation suivante :

$$U_{dip}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma_0}{\omega - \omega_0} I(\vec{r}) \quad (4)$$

où  $I(\vec{r})$  est l'intensité du champ laser. On modélise cette intensité par l'intensité d'un faisceau gaussien :



$$I(\vec{r}) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} e^{-\frac{2x^2}{w^2(z)}} \quad (5)$$

avec  $P$  la puissance du faisceau laser,  $w(z)$  le diamètre du faisceau laser à la position  $z$ ,  $w_0$  la waist, et  $z_R = \pi w_0^2/\lambda$  la longueur de Rayleigh du laser. Étant donné que les atomes se trouvent proches du point focal du faisceau, nous effectuons un développement limité du potentiel dipolaire au premier ordre en  $x^2/w_0^2$  et en  $z^2/z_R^2$  :

$$U_{dip}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma_0}{\omega - \omega_0} \frac{2P}{\pi w_0^2} \left( 1 - \frac{2x^2}{w_0^2} - \frac{z^2}{z_R^2} \right) \quad (6)$$

La hauteur du piège est donnée par :

$$U_{dip,0} = U_{dip}(0, 0, 0) = \frac{3c^2\Gamma_0}{w_0^2\omega_0^3(\omega - \omega_0)} P \quad (7)$$

En inversant cette équation et en ajoutant la condition sur le potentiel dipolaire minimal  $U_{dip,0,\min}$ , on obtient la puissance minimale du faisceau laser en fonction de sa pulsation :

$$P(\omega) = \frac{w_0^2\omega_0^3(\omega - \omega_0)}{3c^2\Gamma_0} U_{dip,0} \geq \frac{w_0^2\omega_0^3(\omega - \omega_0)}{3c^2\Gamma_0} U_{dip,0,\min} = P_{\min}(\omega) \quad (8)$$

Nous avons déterminé la longueur maximale  $\lambda_{\max}$  du faisceau laser, c'est-à-dire sa pulsation minimale  $\omega_{\min} \equiv 2\pi c/\lambda_{\max}$ . Notons  $P_{\min} \equiv P_{\min}(\omega_{\min})$  la puissance minimale du faisceau laser pour satisfaire les deux conditions sur la hauteur du potentiel et le taux de diffusion des photons pour un waist de  $w_0 = 200\mu\text{m}$ . On obtiens  $P_{\min} = 1.9 \text{ mW}$ .

[http://10.117.51.227:8890/notebooks/analysedata/analyses\\_jupyter/analyses\\_Guillaume/Calculs%20puissance%20laser%20.ipynb](http://10.117.51.227:8890/notebooks/analysedata/analyses_jupyter/analyses_Guillaume/Calculs%20puissance%20laser%20.ipynb)

Quel waiste ?

Quel waiste ?

### 0.3 Le potentiel dipolaire ?

Dans la [thèse d'Isabelle], on trouve une expression dérivée du potentiel dipolaire prenant en compte la structure fine du niveau  $5P_{J'}$ . L'expression est donnée par :

$$U_{dip}(\vec{r}) = -\frac{d_0^2}{2c\epsilon_0\hbar} I(\vec{r}) \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\omega_{D_1} - \omega} + \frac{1}{\omega_{D_1} + \omega} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\omega_{D_2} - \omega} + \frac{1}{\omega_{D_2} + \omega} \right) \right) \quad (9)$$

Comparée à l'expression (4), cette expression prend en compte la structure fine des niveaux  $5P_{J'}$ , où  $\omega_{D_1} \equiv \omega_{5P_{1/2}5S_{1/2}} = \omega_{5P_{1/2}} - \omega_{5S_{1/2}}$  et  $\omega_{D_2} \equiv \omega_{5P_{3/2}5S_{1/2}} = \omega_{5P_{3/2}} - \omega_{5S_{1/2}}$ . Les termes non résonnantes ne sont pas négligés dans cette nouvelle expression. Le facteur  $d_0 \propto \langle 5P_{J'} | \vec{d} | 5S_{1/2} \rangle$  est proportionnelle à l'élément de matrice de la matrice dipôle électrique entre les états  $5P_{J'}$  et  $5S_{1/2}$ .

### 0.3.1 $d_0 = \langle 5P_{3/2} | \vec{d} | 5S_{1/2} \rangle$ ?

Dans cette expression, l'aspect quantique de la structure interne de l'atome émerge avec  $d_0$  et la différence entre  $\omega_{D_1}$  et  $\omega_{D_2}$ , c'est-à-dire avec la structure fine de l'atome. J'aimerais me pencher sur cet aspect.

Pour cela, je propose de commencer par mieux comprendre l'élément de matrice dipôle électrique  $d_0$ . Une première approche consiste à trouver une expression classique de  $d_0$ . Pour cela, nous allons transformer l'expression du potentiel dipolaire (9) quantique en une expression classique de la forme (4). Pour cela, nous négligeons la structure fine et la structure interne de l'atome, c'est-à-dire que nous considérons  $|\omega_{D_1} - \omega_{D_2}| \ll \omega_{D_1}, \omega_{D_2}, \omega$  ou  $\omega_{D_2} \approx \omega_{D_1} \approx \omega_0$ . Pour que le potentiel dipolaire reste repulsive on impose que  $\omega < \omega_0$ .

De plus, nous nous autorisons à négliger le terme non résonant.

On obtient l'expression du potentiel dipolaire classique en négligeant les termes non résonants :

$$U_{dip}(\vec{r}) = -\frac{d_0^2}{2c\epsilon_0\hbar} \frac{1}{\omega_0 - \omega} I(\vec{r}) \quad (10)$$

En identifiant cette expression avec celle donnée précédemment (4), on obtient :

$$\frac{d_0^2}{2c\epsilon_0\hbar} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \Gamma_0 \quad (11)$$

En utilisant  $\Gamma_0 = \Gamma(\omega_0)$  avec (1), on a :

$$d_0^2 = \frac{3\pi c^3 \epsilon_0 \hbar}{\omega_0^3} \Gamma_0 = \frac{1}{2} \frac{e^2 \hbar}{m_e} \frac{1}{\omega_0} = e \frac{e \hbar}{2m_e} \frac{1}{\omega_0} = e \mu_e \frac{1}{\omega_0} \quad (12)$$

où  $\mu_e$  est le magnéton de Bohr.

Le magnéton de Bohr  $\mu_e$  a une valeur approximative de  $\mu_e \stackrel{AN}{\approx} 9.274 \times 10^{-24} \text{ J/T}$ , et la charge électrique de l'électron est  $e \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ . On peut approximer  $\omega_0$  à celle de la transition  $5P_{3/2}$ , c'est-à-dire la transition  $D_2$  avec  $\lambda_0 \approx 780 \text{ nm}$ , soit  $\omega_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} \stackrel{AN}{\approx} 2\pi \times 384.34 \text{ THz}$ . En utilisant ces valeurs, on trouve  $d_0 \stackrel{AN}{\approx} 2.95185 ea_0$ , où

$a_0 \approx 0.529 \text{ \AA} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$  est le rayon de Bohr. Soit  $ea_0 \stackrel{AN}{\approx} 8.478 \times 10^{-30} \text{ Cm}$ .

Dans les articles [1208.4291, 1209.0613, rubidium87numbers.1.6], des valeurs de  $d_0$  sont tabulées, calculées ou mesurées expérimentalement, et ces valeurs sont autour de  $4.227(5) ea_0$ . Cependant, avec mon expression classique (12), on obtient deux fois moins. Je me demande "Pourquoi?".

Ah, mon hypothèse  $|\omega_{D_1} - \omega_{D_2}| \ll \omega_{D_1}, \omega_{D_2}, \omega$  ou  $\omega_{D_2} \approx \omega_{D_1} \approx \omega_0$  et  $\omega < \omega_0$  peut s'écrire de manière équivalente comme  $|\omega_{D_2} - \omega| \approx |\omega_{D_1} - \omega|$  et  $\omega < \omega_0$ . Cela implique que  $\omega$  est loin de  $\omega_0$ , ce qui n'est pas compatible avec  $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0, \omega$ .

Donc  $|\omega_{D_1} - \omega_{D_2}|^3 \ll \omega_0 \omega_{D_1} \omega_{D_2}$  oui

Mais  $|\omega_{D_2} - \omega_1|$  peut être de l'ordre de  $\omega$ . mais différent de  $|\omega_{D_1} - \omega|$

J'aurai vu sur cas par pas - Pas de diff envoe de do )

### 0.3.2 $d_0 = \langle 5P_{J'} || \vec{d} || 5S_{1/2} \rangle ?$

Pour satisfaire cette dernière hypothèse, nous allons supposer que la fréquence du laser  $\omega$  sera proche d'une transition de structure fine, de telle sorte que nous pourrons négliger l'autre transition. Par exemple, nous pouvons supposer que  $|\omega_{D_2} - \omega| \ll \omega_{D_2}, |\omega_{D_1} - \omega|, \omega$ . Nous notons alors  $\omega_0 \equiv \omega_{D_2}$  tout en conservant  $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0, \omega$ . En reprenant l'expression (9), nous allons également négliger le terme non-résonant. On a une expression de  $d_0^2$  :

$$d_0^2 = \frac{3}{2} e \mu_e \frac{1}{\omega_0}. \quad (13)$$

Et si la fréquence laser  $\omega$  se trouve très proche de la transition  $D_1$  :  $|\omega_{D_1} - \omega| \ll \omega_{D_1}, |\omega_{D_2} - \omega|, \omega$ . Nous notons alors  $\omega_0 \equiv \omega_{D_1}$  tout en conservant  $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0, \omega$ . En reprenant l'expression (9), nous allons également négliger le terme non-résonant. On a une expression de  $d_0^2$  :

$$d_0^2 = 3 e \mu_e \frac{1}{\omega_0}. \quad (14)$$

J'ai regrouper dans le tableau suivant les résultats du calcul classique de la valeur absolue de l'élément de matrice du dipole électrique (14, 13) et puis les résultat regrouper dans les articles [1208.4291, 1209.0613, rubidium87numbers.1.6] exprimé en  $ea_0$ .

	classic	1208.4291	1209.0613	rubidium87numbers.1.6
$ \langle 5P_{1/2}    \vec{D}    5S_{1/2} \rangle $	3.615(3)	4.231(3)	4.227(6)	2.992(3)
$ \langle 5P_{3/2}    \vec{D}    5S_{1/2} \rangle $	5.067(5)	5.978(5)	5.977(9)	4.227(5)

Mes calculs classiques ne donne pas les même résultat que ceux dans les articles. Mais "es ce que je compare les même chose?" et "comment en être certain?". D'autant plus que l'article [ rubidium87numbers.1.6 ] je ne trouve pas du tous les même que dans les articles [ 1208.4291, 1209.0613 ]. Dans les les articles [ 1208.4291, 1209.0613 ] on parle de valeur absolue de (E1) élément de matrice, soit les éléments de matrice de dipôle électrique. Mais dans l'article [ rubidium87numbers.1.6 ] on parle de élément de matrice dipolaire de transition. Dans les les articles [ 1208.4291, 1209.0613 ] on dit bien que l'on calcule  $|\langle 5P_J || \vec{D} || 5S_{1/2} \rangle|$ . Mais dans l'article [ rubidium87numbers.1.6 ] on dit l'on calcule  $|\langle 5P_J || e\vec{R} || 5S_{1/2} \rangle|$ . "Parle-t-on de la même matrice?", " $\vec{D} \stackrel{?}{=} -e\vec{R}$  dans tous les article? ". Pour moi on parle de la même chose :  $\vec{D} \stackrel{?}{=} -e\vec{R}$  partout. Mais j'avoue que la différence des valeur me met le doute.

### 0.3.3 L'hamiltonien du système {atome+Champ électromagnétique quantifié (vide) } ? la Jauge ?

Pour enlever ce doute je me propose de comprendre d'où vient l'expression (9). Pour cela je vais partir de l'expression l'hamiltonien du système atome dans un champ électromagnétique que j'ai pris dans le [cours de M1 de Pascal Parnex] au chapitre 7 "Interaction d'un système avec une onde E.M :

oui bien

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + \hat{V}(\vec{R})}_{\hat{H}_{at}} + \underbrace{\frac{e}{2m} (\hat{\vec{P}} \cdot \hat{\vec{A}} + \hat{\vec{A}} \cdot \hat{\vec{P}})}_{\hat{W}(t)} + \frac{e^2}{2m} \hat{\vec{A}}^2 + \frac{e\hbar g_e}{2m} \vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \hat{\vec{A}}) \quad (15)$$

Avec la jauge de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{A}} = \vec{0}$ , soit  $\hat{\vec{P}} \cdot \hat{\vec{A}} = \hat{\vec{A}} \cdot \hat{\vec{P}}$ . On réécrit dans cette jauge

$$\hat{W}(t) = \frac{e}{m} \hat{\vec{P}} \cdot \hat{\vec{A}} + \frac{e^2}{2m} \hat{\vec{A}}^2 + \frac{e\hbar g_e}{2m} \vec{s} \cdot \hat{\vec{B}} \quad (16)$$

La probabilité de faire la transition  $g \rightarrow e$  est lié à  $W_{ge}(t) = \langle g | \hat{W}(t) | e \rangle$ . Et le commutateur

$$[\hat{H}, \hat{\vec{R}}] = \left[ \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + \hat{V}(\vec{R}), \hat{\vec{R}} \right] = \left[ \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m}, \hat{\vec{R}} \right] = -i \frac{\hbar}{m} \hat{\vec{P}} \quad (17)$$

soit *pas longue*

$$\langle g | \hat{\vec{P}} | e \rangle = i \frac{m}{\hbar} \langle g | [\hat{H}, \hat{\vec{R}}] | e \rangle = -m\omega_{ge} \langle g | \hat{\vec{R}} | e \rangle \quad (18)$$

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A}$$

avec  $\hbar\omega_{ge} = E_e - E_g$ . Si le champ électrique s'écrit  $\vec{E} = -\partial_t \vec{A}$  alors sit de plus la pulsation du laser  $\omega$  est proche de la pulsation de résonance  $\omega_{ge}$  il vient que

$$\langle g | \hat{\vec{P}} \cdot \hat{\vec{A}} | e \rangle = m \frac{\omega_{ge}}{\omega} \langle g | \hat{\vec{R}} \cdot \hat{\vec{E}} | e \rangle \approx m \langle g | \hat{\vec{R}} \cdot \hat{\vec{E}} | e \rangle. \quad (19)$$

Soit on peut réécrire

$$\hat{W}(t) = -\hat{\vec{D}} \cdot \hat{\vec{E}} + \frac{e^2}{2m} \hat{\vec{A}}^2 + \frac{e\hbar g_e}{2m} \vec{s} \cdot \hat{\vec{B}}, \quad (20)$$

avec  $\hat{\vec{D}} = -e\hat{\vec{D}}$ .

J'en dire que l'on choisie la jauge de Coulomb pour travailler avec le dipole électrique.

### 0.3.4 Le potentiel dipolaire

Dans ce qui suit je vais détailler les hypothèses pour enfin arriver à un hamiltonien.

Dans la thèse d'Ivan Castin et dans les notes de cours de Jean Dalibard : Atomés ultra-froids il est expliqués que l'onde lumineux laser est préparée dans un état quasi-classique (où cohérent) : le faisceau est hautement cohérent et bien défini contreremment à une source thermique qui émet des photons de manière aléatoire. La fonction d'onde

Sans faire cette supposition :  $|\Psi\rangle = U|\tilde{\Psi}\rangle$  avec  $U = e^{-i\vec{q} \cdot \hat{\vec{A}}(\vec{r}) - \frac{1}{2}\vec{r}^2}$

$$\text{Alors } i\partial_t |\Psi\rangle = \tilde{H} |\tilde{\Psi}\rangle$$

$$\tilde{H} = \hat{\vec{p}_c}^2 + V(r) - \vec{d} \cdot \vec{E}$$

complexe conserve les propriétés de cohérence et de phase. "Ce qui permet, via une transformation unitaire<sup>1</sup>, de la traiter l'onde lumineux comme un champ classique extérieur dépendant du temps"

$$\hat{\vec{E}}(\hat{\vec{R}}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}(\hat{\vec{R}})(\vec{\epsilon}(\hat{\vec{R}}) e^{-i\omega t - i\phi(\vec{R})} + cc) \quad (21)$$

À l'approximation dipolaire électrique, l'hamiltonien du système {atome+Champ électromagnétique quantifié (vide)} est la somme de quatre termes :

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{V}_{AL} + \hat{V}_{AR} \quad (22)$$

— L'hamiltonien atomique  $\hat{\vec{H}}$  inclut l'énergie cinétique du centre de masse de l'atome, ainsi que l'énergie interne dans le cadre du modèle à deux niveaux :

$$\hat{H}_A = \underbrace{\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m}}_{\hat{H}_A^{ext}} + \underbrace{\hbar\omega_0 \sum_{m=-j_e}^{j_e} |e m\rangle_{zz} \langle e m|}_{\hat{H}_A^{int}} \quad (23)$$

— L'hamiltonien du rayonnement s'écrit comme une somme sur les modes  $\ell = (\vec{k}, \vec{\epsilon})$  du rayonnement quantifié :

$$\hat{H}_R = \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell} (\hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} + 1/2) \quad (24)$$

— Le couplage atome-laser se met sous la forme :

$$\hat{V}_{AL} = -\vec{D} \cdot \hat{\vec{E}} \quad \leftarrow \quad (25)$$

 L'opérateur champ électrique quantifié peut se décomposer sous la forme :

$$\hat{\vec{E}}_R = \sum_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \vec{\epsilon}_{\ell} \hat{a}_{\ell} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} + cc \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\ell} = i \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\ell}}{2\epsilon_0 L^3}} \quad (26)$$

où  $L^3$  est le volume choisi pour la décomposition en modes. Le couplage atome-rayonnement quantifiés s'exprime :

$$\hat{V}_{AR} = -\vec{D} \cdot \hat{\vec{E}}_R \quad (27)$$

1. voir par exemple *Photons et Atomes*, Processus d'interaction, Chap. IV, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynpberg.

Dans la thèse d'Ivan Castin pour introduire le couplage entre atome et rayonnement quantique, il est bien mentionné que "Le couplage dipolaire électrique s'exprime simplement en terme de l'opérateur dipôle électrique atomique  $\hat{D}$  et de l'opérateur champ électrique  $\hat{\vec{E}}_R$ , évalué en  $\hat{R}$ , opérateur position du centre de masse atomique" et "En toute rigueur, signalons que ce couplage est obtenu après transformation unitaire à partir de la jauge  $(\hat{A}, \hat{P})$ : l'opérateur  $\hat{\vec{E}}_R \equiv \hat{\vec{E}}_\perp$ , qui s'exprime comme l'opérateur champ électrique transverse en jauge  $(\hat{A}, \hat{P})$ , ne représente pas l'observable champ électrique dans la jauge  $(\hat{D}, \hat{\vec{E}}_R)$ , mais l'observable induction électrique, à un facteur  $\epsilon_0$  près.

Revenons à la perturbation  $\hat{W}(t)$ . Dans l'article [1211.2673]

$$\hat{W}(t) = \hat{V}^{hfs} + \hat{V}_{AL} \quad (28)$$

avec

$$\hat{V}^{hfs} = \hbar A_{hfs} \hat{\vec{I}} \cdot \hat{\vec{J}} + \hbar B_{hfs} \frac{6(\hat{\vec{I}} \cdot \hat{\vec{J}})^2 + 3\hat{\vec{I}} \cdot \hat{\vec{J}} - 2\hat{\vec{I}}^2 \hat{\vec{J}}^2}{2I(2I-1)2J(2J-1)}, \quad \text{On se joint de la structure hf} \quad (29)$$

$$\rightarrow \hat{V}_{AL} = -\frac{|\mathcal{E}|^2}{4} \left\{ \alpha_{nJ}^s - i\alpha_{nJ}^v \frac{[\vec{u}^* \times \vec{u}] \cdot \hat{\vec{J}}}{2J} + \alpha_{nJ}^T \frac{3[(\vec{u}^* \cdot \hat{\vec{J}})(\vec{u} \cdot \hat{\vec{J}}) + (\vec{u} \cdot \hat{\vec{J}})(\vec{u}^* \cdot \hat{\vec{J}})] - 2\hat{\vec{J}}^2}{2J(2J-1)} \right\} \quad (30)$$

avec ici  $\hat{V}_{AL}$  diagonal dans la base  $\{|nJ\rangle\}$ . Le champ électrique du faisceau laser :

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} e^{-i\omega t} + cc = \frac{1}{2} \mathcal{E} \vec{u} e^{-i\omega t} + cc. \quad (31)$$

Les polarisabilités scalaires, vectorielles et tensorielles dynamiques conventionnelles, respectivement, de l'atome dans le niveau de structure fine  $|nJ\rangle$ .

$$\alpha_{nJ}^s = \frac{1}{\sqrt{3(2J+1)}} \alpha_{nJ}^{(0)}, \quad (32)$$

$$\alpha_{nJ}^v = \sqrt{\frac{2J}{(J+1)(2J+1)}} \alpha_{nJ}^{(1)}, \quad (33)$$

$$\alpha_{nJ}^T = \sqrt{\frac{2J(2J-1)}{3(J+1)(2J+2)(2J+3)}} \alpha_{nJ}^{(2)}, \quad (34)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{nJ}^{(K)} &= (-1)^{J+K+1} \sqrt{2K+1} \\ &\sum_{n'J'} (-1)^{J'} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & K & 1 \\ J & J' & J \end{array} \right\} |\langle n'J' | \hat{D} | nJ \rangle|^2 \\ &\frac{1}{\hbar} \Re \left( \frac{1}{\omega_{n'J'nJ} - \omega - i\gamma_{n'J'nJ}/2} + \frac{(-1)^K}{\omega_{n'J'nJ} + \omega + i\gamma_{n'J'nJ}/2} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

avec  $K = 0, 1, 2$ .

Si on prend que la partie scalaire

$$\alpha_{nJ}^{(0)} = \frac{2}{\hbar\sqrt{3(2J+1)}} \sum_{n'J'} |\langle n'J' \|\vec{D}\|nJ \rangle|^2 \frac{\omega_{n'J'nJ}(\omega_{n'J'nJ}^2 - \omega^2 + \gamma_{n'J'nJ}^2/4)}{(\omega_{n'J'nJ}^2 - \omega^2 + \gamma_{n'J'nJ}^2/4)^2 + \gamma_{n'J'nJ}^2\omega^2} \quad (36)$$

$$= \frac{2}{\hbar\sqrt{3(2J+1)}} \sum_{J'} |\langle nJ' \|\vec{D}\|nJ \rangle|^2 \frac{\omega_{nJ'nJ}}{\omega_{nJ'nJ}^2 - \omega^2}, \quad (37)$$

On va supposer que pour  $n' > n$ ,  $|\langle n'J' \|\vec{D}\|nJ \rangle|^2 \ll |\langle nJ' \|\vec{D}\|nJ \rangle|^2$  et que  $\omega \approx \omega_{n'J'nJ}$ . On fait quelques approximations supplémentaires pour la polarisabilité scalaire  $\alpha_{nJ}^{(0)}$  dans le cas où le niveau  $|nJ\rangle$  est l'état fondamental  $nS_{1/2}$ . On ne garde que les niveaux excités  $|n'J'\rangle = nP_{3/2}$  et  $|n'J'\rangle = nP_{1/2}$  dans la somme sur  $n'J'$ .

$$\alpha_{nJ}^{(0)} \underset{\omega \approx \omega_{nJ'nJ}}{\approx} \frac{2}{\hbar\sqrt{3(2J+1)}} \sum_{J'} |\langle nJ' \|\vec{D}\|nJ \rangle|^2 \frac{\omega_{nJ'nJ}}{\omega_{nJ'nJ}^2 - \omega^2}, \quad (38)$$

$$\underset{\omega \approx \omega_{nJ'nJ}}{\approx} \frac{1}{\hbar\sqrt{3(2J+1)}} \sum_{J'} |\langle nJ' \|\vec{D}\|nJ \rangle|^2 \left( \frac{1}{\omega_{nJ'nJ} - \omega} + \frac{1}{\omega_{nJ'nJ} + \omega} \right), \quad (39)$$

Car

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \quad (40)$$

Si on note

$$\frac{1}{\Delta_i} = \frac{1}{\omega_{D_i} - \omega} + \frac{1}{\omega_{D_i} + \omega} \quad (41)$$

avec  $\omega_{D_1} = \omega_{nJ'=1/2, nJ=1/2}$  et  $\omega_{D_2} = \omega_{nJ'=3/2, nJ=1/2}$  alors

$$\alpha_{nJ}^s \underset{\omega \approx \omega_{nJ'nJ}}{\approx} \frac{1}{6\hbar} \left( \frac{|\langle nP_{1/2} \|\vec{D}\|nS_{1/2} \rangle|^2}{\Delta_1} + \frac{|\langle nP_{3/2} \|\vec{D}\|nS_{1/2} \rangle|^2}{\Delta_2} \right) \quad (42)$$

or

$$|\langle nJ' \|\vec{D}\|nJ \rangle| = (-1)^{L+S+J'+1} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \left\{ \begin{array}{ccc} J & 1 & J' \\ L' & S & L \end{array} \right\} |\langle nL \|\vec{D}\|nL' \rangle| \quad (43)$$

soit

$$\frac{|\langle nP_{3/2} \|\vec{D}\|nS_{1/2} \rangle|^2}{|\langle nP_{1/2} \|\vec{D}\|nS_{1/2} \rangle|^2} = 2 \quad (44)$$

On note

$$d_0^2 \equiv \frac{|\langle nP_{1/2} | \vec{D} | nS_{1/2} \rangle|^2}{2} \quad (45)$$

La partie scalaire de  $\hat{V}_{AL}$  pour  $|nJ\rangle = nS_{1/2}$  et  $|n'J'\rangle = nP_{3/2}, nP_{1/2}$  :

$$\hat{V}_{AL} \underset{\omega \approx \omega_{nJ'nJ}}{\approx} -\frac{I}{2c\epsilon_0\hbar} \sum_{J'=1/2,2/3} \frac{|\langle nJ' | \vec{D} | nJ \rangle|^2}{6} \left( \frac{1}{\omega_{nJ'nJ} - \omega} + \frac{1}{\omega_{nJ'nJ} + \omega} \right), \quad (46)$$

$$\underset{\omega \approx \omega_{nJ'nJ}}{\approx} -\frac{d_0^2}{2c\epsilon_0\hbar} I \left( \frac{1}{3\Delta_1} + \frac{2}{3\Delta_2} \right) \quad (47)$$

On retrouve la formule dans la [ thèse d'Isabelle ] (9)  
reprenons le tableau avec  $d_0$  qui suit l'équation (12) et

$$|\langle nP_{1/2} | \vec{D} | nS_{1/2} \rangle| = \sqrt{2}d_0, \quad (48)$$

$$|\langle nP_{3/2} | \vec{D} | nS_{1/2} \rangle| = 2d_0. \quad (49)$$

	classic	1208.4291	1209.0613	rubidium87numbers.1.6	1211.2673
$ \langle 5P_{1/2}   \vec{D}   5S_{1/2} \rangle $	4.174(5)	4.231(3)	4.227(6)	2.992(3)	
$ \langle 5P_{3/2}   \vec{D}   5S_{1/2} \rangle $	5.903(7)	5.978(5)	5.977(9)	4.227(5)	
$ \langle 6P_{1/2}   \vec{D}   6S_{1/2} \rangle $	4.431(1)				4.489
$ \langle 6P_{3/2}   \vec{D}   6S_{1/2} \rangle $	6.266(5)				6.324

[http://10.117.51.227:8890/notebooks/analysedata/analyses\\_jupyter/analyses\\_Guillaume/Calculs%20puissance%20laser%20.ipynb](http://10.117.51.227:8890/notebooks/analysedata/analyses_jupyter/analyses_Guillaume/Calculs%20puissance%20laser%20.ipynb)

Si on ne considère que les transitions  $nJ \rightarrow nJ'$ , l'équation (9) est bien avec (48) et (49). [rubidium87numbers.1.6] je ne comprend pas leur résultat.

### 0.3.5 $|\langle n'J' | \vec{D} | nJ \rangle| ?$

J'aimerais calculer  $|\langle n'J' | \vec{D} | nJ \rangle|$ . Dans les articles [1208.4291, 1209.0613, 1211.2673] on parle de "toutes les excitations simple-double (SD) ou simple-double et triple de valence partielle (SDpT) de la fonction d'onde de Dirac-Fock (DF) sont incluses dans tous les ordres de la théorie des perturbations" et "méthode CCSD(T)".