

Table des matières

1 Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz	3
1.1 Introduction au gaz de bosons unidimensionnels	3
1.1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger	3
1.1.2 Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques	4
1.2 Bethe Ansatz et solution exacte du modèle de Lieb-Liniger	4
1.2.1 Problème à deux corps	4
1.2.2 Problème à N corps	4
1.2.3 Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz	4
2 Relaxation des systèmes quantiques isolés et phénomènes d'équilibre	5
2.1 Équilibre thermique et ensemble de Gibbs	5
2.1.1 Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	5
2.1.2 Excitations élémentaires à température nulle	6
2.1.3 Physique statistique de l'ensemble de Gibbs	6
2.1.4 Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation	7
2.2 Équilibre non thermique et ensemble de Gibbs généralisé	7
2.2.1 Intégrabilité et charges conservées	7
2.2.2 Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés	7
2.2.3 Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables	7
2.2.4 Entropie de Yang-Yang généralisée	8
3 Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée	9
3.1 Hydrodynamique et régimes asymptotiques	9
3.1.1 Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques	9
3.1.2 Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité	9
3.1.3 Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)	9
4 Fluctuation de ρ dans le GGE	11
4.1 Fluctuations autour de l'état typique	11
4.2 Fluctuations autour du profil stationnaire	12
4.3 Fluctuation du nombre d'atomes et de l'énergie	13
5 Protocoles expérimentale	17
5.1 Présentation de l'expérience	17
5.1.1 Piégeage transverses et longitudinale	17
5.2 Outil de sélection spatial	17
6 Étude du protocol de bi-partition : Mesure de distribution de rapidités locales $\rho(x, \theta)$ pour des systèmes hors équilibre	19
6.1 Dispositif expérimental	20
6.2 Prédictions de la GHD	21
6.3 Sonder la distribution locale des rapidités	22
6.4 Détails sur les calculs	25
6.4.1 Simulation de la déformation du bord	26
6.4.2 Simulation de l'expansion	27
7 Mise en place d'un confinement longitudinal dipolaire	29

7.1	calculs	29
7.2	laser , MOPA, etc .. Données	29

CHAPITRE 1

MODÈLE DE LIEB-LINIGER ET APPROCHE BETHE ANSATZ

Contents

1.1	Introduction au gaz de bosons unidimensionnels	3
1.1.1	Description du modèle de Lieb-Liniger	3
1.1.2	Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques	4
1.2	Bethe Ansatz et solution exacte du modèle de Lieb-Liniger	4
1.2.1	Problème à deux corps	4
1.2.2	Problème à N corps	4
1.2.3	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz	4

Pourquoi en 1D ?

Explication classique à l'aide d'un modèle chaotique : la thermalisation en 2D, illustrée par l'exemple de l'eau en ébullition, avec comme paramètres T , E , N . Modélisation par des sphères dures et introduction du modèle ergodique : en 1D, l'intégrabilité du modèle de sphères dures dans un espace réduit entraîne un simple échange de vitesses, sans modifier la distribution des vitesses.

Pourquoi en 1D quantique ?

Le gaz de Bose unidimensionnel avec interactions ponctuelles (la version quantique de l'équation de Schrödinger non linéaire) est l'un des modèles intégrables les plus fondamentaux, pouvant être résolu par la méthode de l'Ansatz de Bethe (ref). Ce modèle a fait l'objet d'études approfondies (ref).

Après avoir décrit le modèle de Lieb-Liniger et analysé ses asymptotiques ainsi que les théories linéarisées (Gross-Pitaevskii et Bogoliubov) dans le chapitre 1, nous poursuivons par la construction des fonctions propres de l'Hamiltonien dans un volume fini.

Cette construction, détaillée dans le chapitre 2, met en évidence la forme explicite des fonctions propres et leur réductibilité au cas à deux particules, une caractéristique commune des modèles résolubles par l'Ansatz de Bethe. Enfin, dans la dernière section, nous imposons des conditions aux limites périodiques à

1.1 Introduction au gaz de bosons unidimensionnels

Introduction

1.1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger

Le gaz de Bose unidimensionnel est décrit par les opérateurs champs quantiques de Bose canoniques d'annihilation $\Psi(x, t)$ et de création $\Psi^\dagger(x, t)$, satisfaisant les relations de commutation canoniques à temps égal $[\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(y, t)] = \delta(x - y)$ et

$$[\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}(y, t)] = [\hat{\Psi}^\dagger(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(y, t)] = 0 .$$

L'Hamiltonien du modèle s'écrit :

$$\hat{H} = \int dx \left(\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \hat{\Psi}^\dagger \partial_x \hat{\Psi} + \frac{g}{2} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \right)$$

où m est la masse de la particule g est la constante de couplage 1D. L'équation du mouvement correspondante

$$i\hbar \partial_t \hat{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \hat{\Psi} + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}$$

est l'équation de Schrödinger non linéaire (NS).

Les interactions entre particules sont répulsives donc $g > 0$. L'état fondamental à température nulle est une sphère de Fermi, et seul ce cas sera considéré par la suite.

Le vide de Fock $|0\rangle$ est défini par $\hat{\Psi}|0\rangle = 0$

Enfin, les opérateurs nombre de particules \hat{Q} et impulsion \hat{P} s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \int dx \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \\ \hat{P} &= \frac{1}{2} \int dx \hat{\Psi}^\dagger (-i\hbar \partial_x) \hat{\Psi} + cc \end{aligned}$$

Ces opérateurs sont hermitiens et constituent des intégrales du mouvement $[\hat{H}, \hat{Q}] = [\hat{H}, \hat{P}] = 0$. Nous pouvons maintenant chercher les fonctions propres communes $|\Psi_N\rangle$ des opérateurs \hat{H} , \hat{P} et \hat{Q} :

$$|\Psi_N(\theta_1, \dots, \theta_N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N x \varphi_N(x_1, \dots, x_N | \theta_1, \dots, \theta_N) \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |0\rangle$$

Ici, φ_N est une fonction symétrique de toutes les variables x_j . Les équations aux valeurs propres sont $\hat{H}|\Psi_N\rangle = E_N|\Psi_N\rangle$, $\hat{P}|\Psi_N\rangle = p_N|\Psi_N\rangle$ et $\hat{Q}|\Psi_N\rangle = N|\Psi_N\rangle$.

Il en résulte que φ_N est une fonction propre à la fois de l'Hamiltonien quantique de Lieb et Liniger (LL)

$$\begin{aligned} H_{LL} &= \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{x_i}^2 + g \sum_{j>i} \delta(x_i - x_j) \right\} \\ H_{LL} \varphi_N &= E_N \varphi_N \end{aligned}$$

et de l'opérateur de moment quantique $P_N = -i\hbar \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}$:

1.1.2 Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques

1.2 Bethe Ansatz et solution exacte du modèle de Lieb-Liniger

1.2.1 Problème à deux corps

1.2.2 Problème à N corps

1.2.3 Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz

$$L\theta_a + \sum_{b=1}^N \Phi(\theta_a - \theta_b) = 2\pi I_a$$

$$2\pi \rho_s(\theta_a) = \frac{2\pi}{L} \lim_{\text{therm}} \frac{|I_{a+1} - I_a|}{|\theta_{a+1} - \theta_a|} = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta_a) = 1 + \frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b)$$

CHAPITRE 2

RELAXATION DES SYSTÈMES QUANTIQUES ISOLÉS ET PHÉNOMÈNES D'ÉQUILIBRE

Contents

2.1	Équilibre thermique et ensemble de Gibbs	5
2.1.1	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	5
2.1.2	Excitations élémentaires à température nulle	6
2.1.3	Physique statistique de l'ensemble de Gibbs	6
2.1.4	Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation	7
2.2	Équilibre non thermique et ensemble de Gibbs généralisé	7
2.2.1	Intégrabilité et charges conservées	7
2.2.2	Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés	7
2.2.3	Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables	7
2.2.4	Entropie de Yang-Yang généralisée	8

2.1 Équilibre thermique et ensemble de Gibbs

2.1.1 Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle

Dans la limite thermodynamique, le nombre de particules N et le volume (la longueur de la boîte) L tendent vers l'infini de sorte que leur rapport $D = \frac{N}{L}$ reste fini :

$$\lim_{N,L \rightarrow \infty} \frac{N}{L} = D = \text{const} < \infty$$

Considérons le système à température nulle. Rappelons que l'état d'énergie minimale dans le secteur avec un nombre fixe de particules correspond aux solutions j des équations de Bethe suivantes :

$$L\theta_a + \sum_{b=1}^N \Phi(\theta_a - \theta_b) = 2\pi I_a,$$

où les nombres fermionique $I_a = a - (N+1)/2$ et $a \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Dans la limite thermodynamique, les valeurs de θ_a se condensent ($\theta_{a+1} - \theta_a = \mathcal{O}(1/L)$), et remplissent l'intervalle symétrique , la mer de Dirac/sphère de Fermi $\llbracket -K, K \rrbracket$ où $K = \theta_N$ (ici $I_a \geqq I_b \Rightarrow \theta_a \geqq \theta_b$)

La quantité ρ_s tel que (manque une intro avant)

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = \frac{2\pi}{L} \lim_{\text{therm}} \frac{|I_{a+1} - I_a|}{|\theta_{a+1} - \theta_a|} = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta_a) = 1 + \frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b)$$

représente la densité de vacances que l'on appellera densité d'état avec $I(\theta_a) = I_a$ et $\Delta(\theta) = \Phi'(\theta) = \frac{2c}{c^2 + \theta^2}$. Maintenant intéressons-nous à la densité de particules dans l'espace des moments $\rho(\theta)$, définie de la manière suivante :

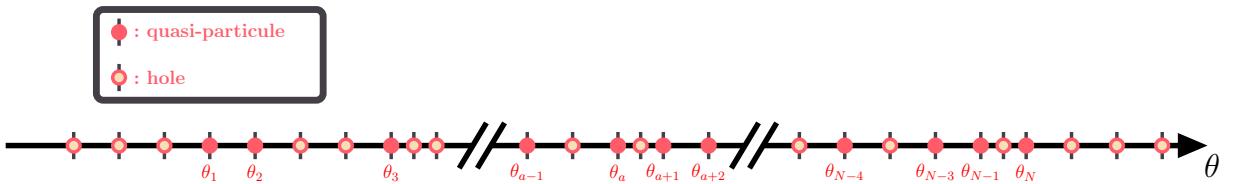
$$\rho(\theta_a) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \frac{1}{\theta_{a+1} - \theta_a} > 0.$$

À l'état fondamental tous les vacances dans $[-K, K]$ sont occupés donc $\rho = \rho_s$. La quantité $L\rho(\theta)d\theta$ est le nombre de rapidité dans la cellule $[\theta, \theta + d\theta]$. La quantité $L \int_{-K}^K \rho(\theta) d\theta$ est le nombre de particule N . On remplace la somme par une intégrale :

$$2\pi\rho = 1 + \Delta * \rho$$

2.1.2 Excitations élémentaires à température nulle

2.1.3 Physique statistique de l'ensemble de Gibbs



On écrit l'observable énergie et nombre :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (2.1)$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (2.2)$$

avec $\sum_{a=1}^N 1 \equiv \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{N}} | \{\theta_a\} \rangle$ et $\sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \equiv \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{E}} | \{\theta_a\} \rangle$. La probabilité que le système soit dans configuration $\{\theta_a\}$ est

$$P_{\{\theta_a\}} = \frac{e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})}}{Z_{thermal}} = \frac{e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}}{Z_{thermal}} \quad (2.3)$$

avec la fonction de partition $Z_{thermal} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}$

$$\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \Big|_T, \quad \Delta_{\mathcal{N}}^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \mu^2} \Big|_T = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \Big|_T \quad (2.4)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Big|_\mu, \quad \Delta_{\mathcal{E}-\mu \mathcal{N}}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \Big|_\mu = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \Big|_\mu \quad (2.5)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \right]_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_\mu \ln Z, \quad \Delta_{\mathcal{E}}^2 = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \right]_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_\mu \left[\ln Z \right]^2 = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \right]_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_\mu \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle \quad (2.6)$$

La matrice densité thermique est :

$$\hat{\rho}_{thermal} = \frac{e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}}{Z_{thermal}}, \quad (2.7)$$

$$e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (2.8)$$

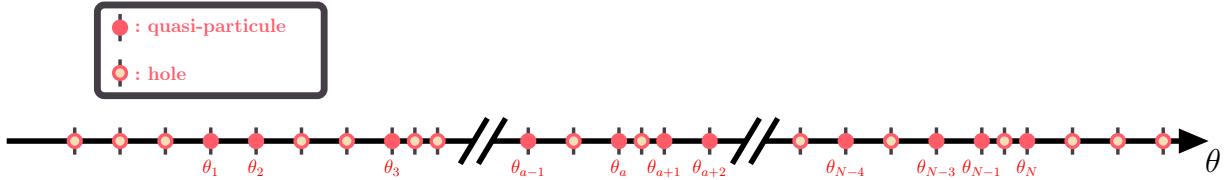
2.1.4 Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation

2.2 Équilibre non thermique et ensemble de Gibbs généralisé

2.2.1 Intégrabilité et charges conservées

2.2.2 Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés

2.2.3 Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables



On peut commencer à généraliser avec l'opérateur :

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (2.9)$$

$\hat{\mathcal{O}}_i \in \{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}\}$ tel que $\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \beta \left(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \right)$ et pour simplifier ici $Z \equiv Z_{thermal}$:

Point clé n° 1. Sa moyenne, variance et équartype de l'observable :

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} \overbrace{\frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}}^{P_{\{\theta_a\}}} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \quad (2.10)$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}^2 \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 &= \left\langle \left(\hat{\mathcal{O}}_i - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \right) \Big|_{\beta_j \neq i} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \end{aligned} \quad (2.12)$$

si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = -\beta\mu$ et si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = \beta$.

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}}_i | \{\theta_a\} \rangle \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}, \quad (2.13)$$

$$= \sum_{\{\theta_b\}} \langle \{\theta_b\} | \hat{\mathcal{O}}_i | \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} | \{\theta_b\} \rangle, \quad (2.14)$$

$$= Tr(\hat{\mathcal{O}}_i \hat{\rho}) \quad (2.15)$$

avec $\hat{\rho} = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} |$ et $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}$ tel que $Tr(\hat{\rho}) = 1$

La matrice densité GGE avec $Z \equiv Z_{GGE}$ est :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|. \quad (2.16)$$

Dans le cas thermique, on peut remarquer que $\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^0$ et $\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^2$. On peut donc réécrire $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{a=1}^N \theta_a^i \quad (2.17)$$

et pour chaque $a \in \llbracket 1, N \rrbracket$: $\sum_i \alpha_i \theta_a^i$ converge donc on peut échanger les deux sommes soit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^N f(\theta_a) \quad (2.18)$$

avec $f(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i$. Et on peut réécrire la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \frac{e^{-\hat{Q}[f]}}{Z_{GGE}}, \quad (2.19)$$

$$e^{-\hat{Q}[f]} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (2.20)$$

pour une certaine fonction f relié à la charge $\hat{Q}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N f(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$. Et on peut réécrire la probabilité de la configuration $\{\theta_a\}$: $P_{\{\theta_a\}} = \langle \{\theta_a\} | \hat{\rho}_{GGE}[f] | \{\theta_a\} \rangle = e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} / Z$ avec $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}$.

Nous aimions calculer les valeurs d'attente par rapport à cette matrice de densité, par exemple La moyenne GGE d'un observable s'écrit ,

Point clé n° 2.

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} \doteq \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} \hat{\rho}_{GGE}[f])}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{GGE}[f])} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} e^{-\hat{Q}[f]})}{\text{Tr}(e^{-\hat{Q}[f]})} = \frac{\sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}}{\sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}} \quad (2.21)$$

pour une certaine observable $\hat{\mathcal{O}}$.

2.2.4 Entropie de Yang-Yang généralisée

CHAPITRE 3

DYNAMIQUE HORS-ÉQUILIBRE ET HYDRODYNAMIQUE GÉNÉRALISÉE

Contents

3.1	Hydrodynamique et régimes asymptotiques	9
3.1.1	Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques	9
3.1.2	Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité	9
3.1.3	Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)	9

3.1 Hydrodynamique et régimes asymptotiques

3.1.1 Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques

3.1.2 Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité

3.1.3 Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)

CHAPITRE 4

FLUCTUATION DE ρ DANS LE GGE

Contents

4.1	Fluctuations autour de l'état typique	11
4.2	Fluctuations autour du profil stationnaire	12
4.3	Fluctuation du nombre d'atomes et de l'énergie	13

4.1 Fluctuations autour de l'état typique

La fonction de partition des états s'exprime comme une fonctionnelle de la distribution de rapidité ρ :

$$\Xi = \sum_{\rho} \exp(-\mathcal{A}(\rho)). \quad (4.1)$$

Dans la section *Entropie de Yang-Yang* (??), nous avons montré que l'action $\mathcal{A}(\rho)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}(\rho) \doteq -L\mathcal{S}_{YY}(\rho) + L \int f(\theta) \rho(\theta) d\theta, \quad (4.2)$$

où L désigne la taille du système, \mathcal{S}_{YY} désigne la fonctionnelle d'entropie de Yang-Yang, définie en (??), et f la fonction génératrice associée aux charges conservées, introduite en (??).

Dans cette même section, nous avons également montré que la distribution ρ^c maximisant la contribution à la fonction de partition correspond à un point stationnaire de l'action, et est entièrement déterminée par la fonction f . Cette distribution ρ^c définit ainsi l'état macroscopique typique du système au sein de l'ensemble statistique considéré.

L'hypothèse selon laquelle, après relaxation, le système est décrit par un ensemble généralisé de Gibbs (GGE) constitue un fondement majeur de notre compréhension des dynamiques hors équilibre dans les systèmes intégrables. Cette hypothèse a des implications théoriques profondes et mérite d'être testée expérimentalement. Toutefois, la seule connaissance de la distribution de rapidité moyenne ρ^c ne permet pas de confirmer l'adéquation du GGE. En effet, plusieurs ensembles statistiques peuvent mener à une même valeur moyenne de ρ . Pour lever cette ambiguïté, il est nécessaire d'étudier les fluctuations autour de la distribution typique, notées $\delta\rho$, définies par $\rho = \rho^c + \delta\rho$.

Afin de caractériser ces fluctuations, nous développons l'action $\mathcal{A}(\rho)$ au voisinage de ρ^c . Par construction, ρ^c étant un point stationnaire, la différentielle première de \mathcal{A} en ce point est nulle : $d\mathcal{A}_{\rho^c} = 0$ (cf. équation (??)). En appliquant un développement de Taylor-Young à l'ordre deux en $\delta\rho$, on obtient :

$$\mathcal{A}(\rho^c + \delta\rho) \underset{\delta\rho \rightarrow 0}{=} \mathcal{A}(\rho^c) + \frac{1}{2} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \rho^2} \right|_{\rho^c} (\delta\rho) + \mathcal{O}((\delta\rho)^3), \quad (4.3)$$

où $\left. \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \rho^2} \right|_{\rho^c}$ désigne la forme bilinéaire symétrique (a priori définie positive) associée à la hessienne de l'action. Celle-ci s'écrit également à partir de la dérivée fonctionnelle seconde de l'entropie de Yang-Yang au point ρ^c (via l'équation (4.2)) :

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \rho^2} \right|_{\rho^c} = -L \left. \frac{\delta^2 \mathcal{S}_{YY}}{\delta \rho^2} \right|_{\rho^c}.$$

La dérivée seconde $\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \rho^2} \Big|_{\rho^c}$ étant strictement négative, on conclut que $\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \rho^2} \Big|_{\rho^c}$ est bien définie positive. La taille L étant grande devant les autres échelles du problème, ainsi, l'action croît fortement dès que la configuration ρ s'éloigne de ρ^c (voir Fig. 4.1a).

Cette approximation quadratique constitue la base du traitement gaussien des fluctuations autour de l'état typique, permettant d'accéder aux corrélations et à la structure fine de l'ensemble statistique effectif.

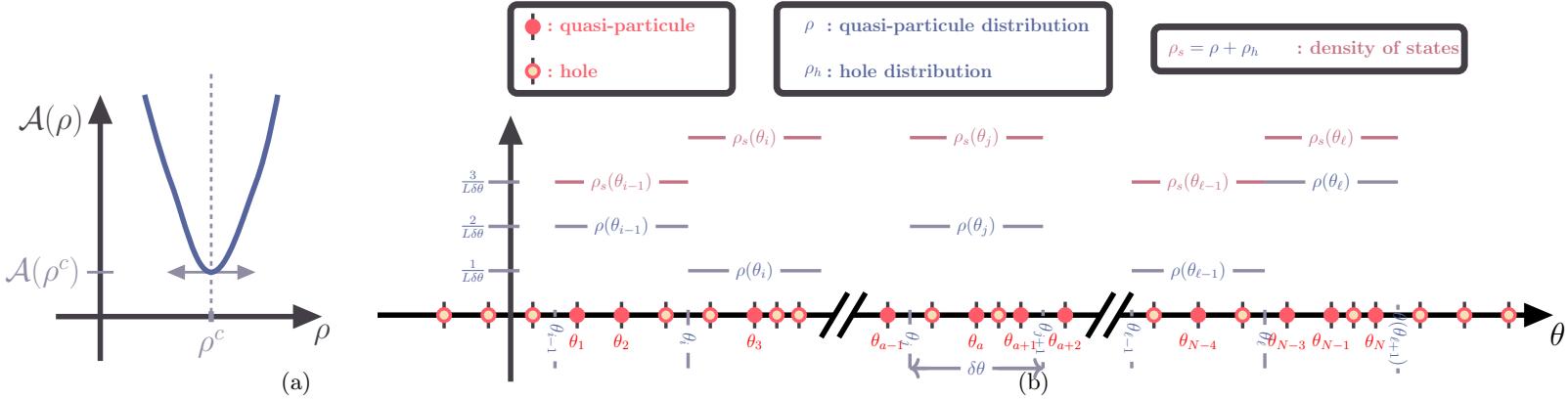


FIGURE 4.1

4.2 Fluctuations autour du profil stationnaire

On discrétise l'axe des rapidités en petites cellules $[\theta, \theta + \delta\theta]$, chacune contenant un nombre moyen de quasi-particules donné par $L\rho(\theta)\delta\theta$.

Dans cette discrétisation, le développement quadratique de l'action $\mathcal{A}[\rho]$ autour du profil stationnaire ρ^c s'écrit comme un produit scalaire :

$$\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \rho^2} \Big|_{\rho^c} (\delta\rho) = \sum_{a,b} \delta\rho(\theta_a) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial(\delta\rho(\theta_a)) \partial(\delta\rho(\theta_b))} \Big|_{\rho^c} \delta\rho(\theta_b).$$

Cette structure quadratique mène naturellement à une intégrale fonctionnelle gaussienne pour la probabilité des fluctuations. Les corrélations à deux points des fluctuations s'expriment alors comme :

$$\langle \delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta') \rangle = \frac{\int \mathcal{D}(\delta\rho) \delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta') \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{a,b} \delta\rho(\theta_a) A_{\theta_a, \theta_b} \delta\rho(\theta_b)\right)}{\int \mathcal{D}(\delta\rho) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{a,b} \delta\rho(\theta_a) A_{\theta_a, \theta_b} \delta\rho(\theta_b)\right)} = (A^{-1})_{\theta, \theta'},$$

où A est la matrice hessienne de l'action évaluée au point stationnaire ρ^c , c'est-à-dire :

$$A_{\theta, \theta'} = \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial(\delta\rho(\theta)) \partial(\delta\rho(\theta'))} \Big|_{\rho^c} = -L \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{YY}}{\partial(\delta\rho(\theta)) \partial(\delta\rho(\theta'))} \Big|_{\rho^c}.$$

Dans le cas considéré, le profil stationnaire s'écrit sous la forme $\rho^c = \rho_s^c \nu^c$, avec ν^c la fonction d'occupation des quasi-particules et ρ_s^c la densité d'états disponibles. La matrice A se décompose alors en deux contributions :

$$A = D + \delta\theta V,$$

avec une partie diagonale :

$$D_{\theta,\theta'} = L \delta\theta \left(\frac{1}{\rho_s^c(\theta)\nu^c(\theta)(1-\nu^c(\theta))} \right) \delta_{\theta,\theta'},$$

et

$$V_{\theta,\theta'} = L \delta\theta \left\{ - \left(\frac{1}{\rho_s^c(\theta)(1-\nu^c(\theta))} + \frac{1}{\rho_s^c(\theta')(1-\nu^c(\theta'))} \right) \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} + \sum_{\theta''} \delta\theta \frac{\nu^c(\theta'')}{\rho_s^c(\theta'')(1-\nu^c(\theta''))} \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi} \right\}.$$

Pour obtenir une expression explicite de la matrice A^{-1} , il est tentant d'utiliser une approche basée sur la théorie des perturbations, ce qui revient à appliquer la formule de Neumann. Toutefois, cette méthode n'est pas applicable ici car $\|\delta\theta D^{-1} V\| > 1$. De plus, même en faisant tendre $\delta\theta \rightarrow 0$, cette norme reste constante. Cela est dû à une dégénérescence des valeurs propres de la matrice A^{-1} lorsque $\delta\theta$ devient petit.

Une écriture possible de l'inverse de la matrice A^{-1} est donnée par :

$$A^{-1} = D^{-1} - \delta\theta D^{-1} V A^{-1},$$

où le premier terme est singulier (irrégulier) et le second régulier.

En faisant tendre la tailles des cellules vers 0 , $\delta\theta \rightarrow 0$,

$$\sum_{\theta_a} \delta\theta \xrightarrow{\delta\theta \rightarrow 0} \int d\theta,$$

les fluctuations s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \delta\rho(\theta) \delta\rho(\theta') \rangle &= \frac{\rho_s^c(\theta)\nu^c(\theta)(1-\nu^c(\theta))}{L \delta\theta} \delta(\theta - \theta') \\ &+ L \rho_s^c(\theta)\nu^c(\theta)(1-\nu^c(\theta)) \left\{ \frac{\Delta}{2\pi} \star \left[\left(\frac{1}{\rho_s^c(\theta)(1-\nu^c(\theta))} + \frac{1}{\rho_s^c(1-\nu^c)} \right) \langle \delta\rho \delta\rho(\theta') \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\nu^c}{\rho_s^c(1-\nu)} \left(\frac{\Delta}{2\pi} \star \langle \delta\rho \delta\rho(\theta') \rangle \right) \right] \right\} (\theta), \end{aligned}$$

où $(f \star g)(x)$ désigne la convolution $\int f(x-t) g(t) dt$.

4.3 Fluctuation du nombre d'atomes et de l'énergie

Il est maintenant pertinent de tester notre expression des fluctuations.

Les fluctuations des observables "nombre d'atomes" $\hat{\mathcal{N}}$ et "énergie" $\hat{\mathcal{E}}$ peuvent être exprimées à l'aide des fluctuations de ρ :

$$\begin{aligned} \langle (\hat{\mathcal{N}} - \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle)^2 \rangle &= L^2 \int d\theta_a \int d\theta_b \langle \delta\rho(\theta_a) \delta\rho(\theta_b) \rangle, \\ \langle (\hat{\mathcal{E}} - \mu\hat{\mathcal{N}} - \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu\hat{\mathcal{N}} \rangle)^2 \rangle &= L^2 \int d\theta_a \int d\theta_b \left(-\mu + \frac{1}{2}m\theta_a^2 \right) \left(-\mu + \frac{1}{2}m\theta_b^2 \right) \langle \delta\rho(\theta_a) \delta\rho(\theta_b) \rangle, \end{aligned}$$

où $\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle$ désigne la moyenne de l'observable $\hat{\mathcal{O}}_i$, m la masse des atomes et μ le potentiel chimique.

Dans la section {??}, nous avons vu que la variance d'une observable $\hat{\mathcal{O}}_i$, autrement dit ses fluctuations, peut également s'exprimer comme une dérivée thermodynamique de sa moyenne :

$$\Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 = - \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_j \neq i},$$

où β_i est la variable conjuguée à $\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle$. En particulier, les fluctuations du nombre d'atomes et de l'énergie peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 &= \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \right|_T, \\ \Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2 &= - \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \right|_\mu,\end{aligned}$$

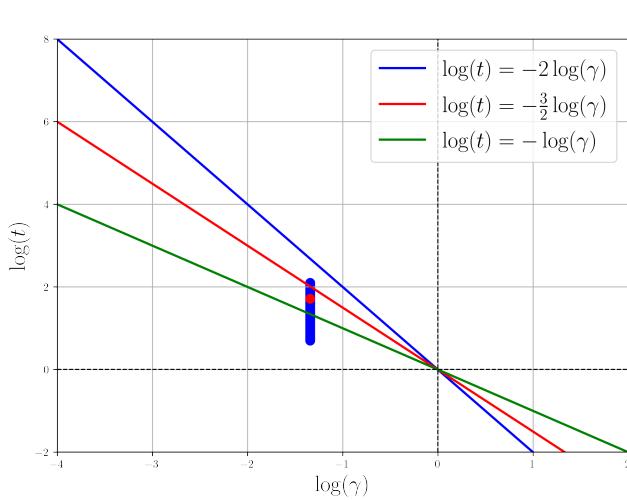
avec $\beta = (k_B T)^{-1}$, T étant la température.

Les quantités $\langle (\hat{\mathcal{N}} - \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle)^2 \rangle$ et $\Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2$ sont analytiquement équivalentes, de même que $\langle (\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} - \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle)^2 \rangle$ et $\Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2$.

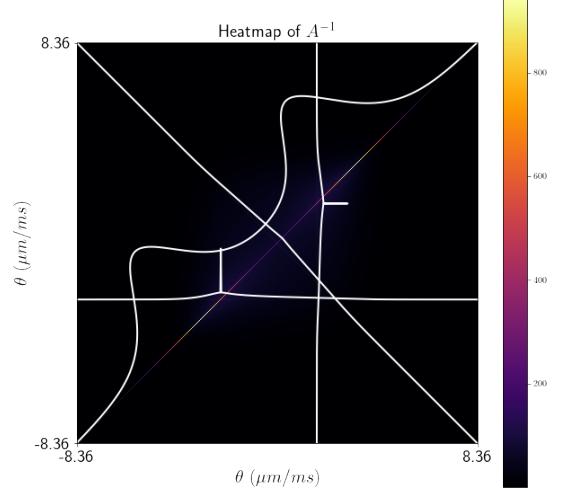
Nous souhaitons maintenant effectuer une comparaison numérique entre ces deux approches. Pour ce faire, nous avons d'abord résolu numériquement l'équation {??} avec $f(\theta) = \frac{\epsilon(\theta) - \mu}{T}$, ce qui nous a permis d'obtenir $\rho(\theta)$ et $\rho_s(\theta)$.

Nous avons ensuite calculé les fluctuations de ρ pour une densité spatiale fixée à $n = 10 \text{ } \mu\text{m}^{-1}$, et pour différentes températures T allant de 5.7 K à 53.5 nK. Le potentiel chimique μ est ici une fonction de T et de n . Les points correspondants sont représentés en bleu sur un diagramme de phase du modèle de Lieb-Liniger. En abscisse, nous avons le logarithme décimal du paramètre d'interaction de Lieb-Liniger $\gamma = \frac{mg}{\hbar^2 n}$, et en ordonnée le logarithme décimal de $t = \frac{\hbar^2}{\beta mg^2}$ (voir Fig. 4.2a).

Ce même diagramme contient également un point rouge correspondant à $T = 60 \text{ nK}$ et $\mu = 27 \text{ nK}$. Les fluctuations associées à ce point sont représentées en niveaux de couleur sur un graphique 2D (voir Fig. 4.2b).



(a)



(b) Fluctuations mesurées

FIGURE 4.2 – (a) Diagramme de phase du modèle de Lieb-Liniger à l'équilibre thermique. Différents régimes asymptotiques sont séparés par des transitions progressives. Les points bleus représentent les fluctuations calculées numériquement pour différentes températures. Les coordonnées sont données par $\gamma = \frac{mg}{\hbar^2 n}$ et $t = \frac{k_B T}{mg^2 / \hbar^2}$. (b) Représentation en niveaux de couleur des fluctuations $\delta\rho$ pour $T = 60 \text{ nK}$ et $\mu = 27 \text{ nK}$ (point rouge dans (a)).

Nous calculons ensuite les moyennes des observables :

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle &= L \int \rho(\theta) d\theta, \\ \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle &= L \int \left(-\mu + \frac{1}{2} m \theta^2 \right) \rho(\theta) d\theta,\end{aligned}$$

pour chaque point du diagramme (Fig. 4.2a). En faisant varier leur variable conjuguée, nous accédons alors aux fluctuations $\Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2$ et $\Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2$.

Les résultats obtenus à l'aide de cette méthode thermodynamique sont comparés à ceux issus du calcul direct des fluctuations de ρ . Ces comparaisons sont représentées sur la Fig. 4.3, et montrent une excellente concordance entre les deux approches.

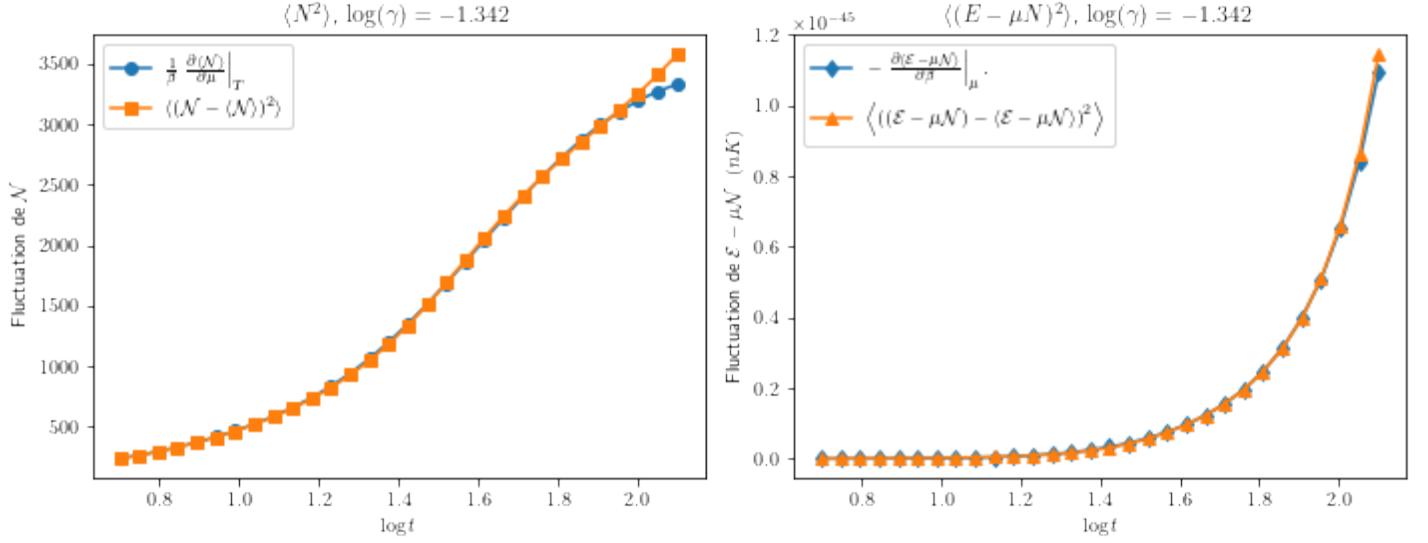


FIGURE 4.3 – Comparaison numérique entre les fluctuations calculées à partir de l'analyse quadratique de l'action (fluctuations de ρ) et celles obtenues par dérivées thermodynamiques des observables moyennes.

CHAPITRE 5

PROTOCOLES EXPERIMENTALE

Contents

5.1	Présentation de l'expérience	17
5.1.1	Piégeage transverses et longitudinale	17
5.2	Outil de sélection spatial	17

5.1 Présentation de l'expérience

5.1.1 Piégeage transverses et longitudinale

5.2 Outil de sélection spatial

CHAPITRE 6

ÉTUDE DU PROTOCAL DE BI-PARTITION : MESURE DE DISTRIBUTION DE RAPIDITÉS LOCALES $\rho(x, \theta)$ POUR DES SYSTÈMES HORS ÉQUILIBRE

Contents

6.1	Dispositif expérimental	20
6.2	Prédictions de la GHD	21
6.3	Sondre la distribution locale des rapidités	22
6.4	Détails sur les calculs	25
6.4.1	Simulation de la déformation du bord	26
6.4.2	Simulation de l'expansion	27

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'évolution d'un gaz quantique unidimensionnel après une rupture de symétrie initiale. Nous utilisons un gaz de bosons ultra-froids, confiné dans une géométrie unidimensionnelle. Ce gaz est bien décrit par le modèle intégrable de Lieb-Liniger. Les interactions entre atomes sont courtes et répulsives.

Nous préparons d'abord un gaz homogène (Fig ??). Ensuite, nous supprimons brutalement une moitié du nuage. Cela crée une frontière nette entre deux zones : une avec des atomes, l'autre vide (Fig ?? (a),(b),(c),(d)). Cette configuration correspond à ce qu'on appelle un « quench bipartite ».

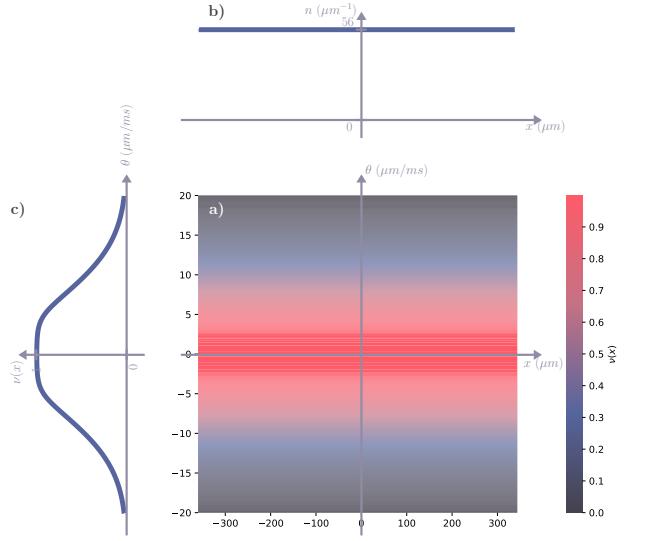


FIGURE 6.1 – a) Facteur d'occupation initial $\nu(x, \theta) = \nu_0(\theta)$ correspondant à l'équilibre thermique à la température $T = 560 \text{ nK}$, pour une densité spatiale linéaire $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$, soit une potentiel chimique $\mu = 65 \text{ nK}$. (b) Densité spatiale linéaire $n(x) = \int \rho_{[\nu]}(x, \theta) d\theta \equiv n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$. (c) Facteur d'occupation initial $\nu_0(\theta)$ correspondant au cas présenté en a).

Le gaz évolue ensuite selon la dynamique de son Hamiltonien. Nous observons le déplacement de la frontière au cours du temps. Pour cela, nous mesurons le profil de densité atomique à différents temps d'évolution.

Nous voyons que la frontière se propage de manière balistique. La largeur du profil de densité augmente de façon linéaire avec le temps. Ce comportement est prédict par la théorie de l'hydrodynamique généralisée (GHD). Cette théorie décrit comment les propriétés locales d'un système intégrable évoluent dans le temps (Fig ?? (e),(f),(g)).

Dans notre cas, GHD prévoit un profil de densité particulier si le gaz initial est à température nulle. Les données expérimentales sont proches de cette prédition, mais avec de légers écarts. Ces écarts peuvent venir de la température non nulle du gaz ou d'autres imperfections expérimentales.

Nous montrons que le profil de densité contient beaucoup d'informations. En théorie, on peut retrouver la distribution de rapidité initiale à partir du profil de frontière. Cela permettrait d'avoir une méthode d'analyse très puissante, comme une sorte de « thermomètre généralisé ».

Enfin, nous utilisons une nouvelle méthode expérimentale pour mesurer la distribution de rapidité localement (Part ??), à l'intérieur du profil. Nous observons une asymétrie, comme prévu par la théorie. D'un côté, la distribution est lisse et large ; de l'autre, elle est plus abrupte, comme pour un état fondamental. Cette observation confirme le comportement prédictif de la GHD, bien que la résolution spatiale limite la finesse des détails que nous pouvons observer.

6.1 Dispositif expérimental

Nous utilisons une puce atomique pour produire un gaz ultra-froid d'atomes de rubidium 87. (cf ??) Les atomes sont dans l'état étiré $|F = 2, m_F = 2\rangle$. Un champ magnétique longitudinal uniforme de $B_0 = 3,36 \text{ G}$ est appliqué.

Par évaporation radiofréquence, nous refroidissons le gaz jusqu'à une température de $T = 100 \text{ nK}$. Le potentiel chimique est $\mu/k_B = 45 \text{ nK}$. Ainsi, on a $\mu/(\hbar\omega_\perp) = 0,4$ et $k_B T/(\hbar\omega_\perp) = 0,8$. Le gaz entre alors dans le régime unidimensionnel.

Le couplage effectif en 1D est donné par $g = 2a_{3D}\hbar\omega_\perp$ (??), avec $a_{3D} = 5.3 \text{ nm}$, la longueur de diffusion en 3D pour le rubidium 87 (cf ??). Le paramètre sans dimension de Lieb est $\gamma = mg/(\hbar^2n_0)$, avec n_0 la densité linéaire. Il varie entre 0,004 et 0,007. La température vérifie $T \ll n_0^{3/2} \sqrt{\hbar^2 g/m}/k_B$, ce qui place le gaz dans le régime de quasi-condensat (cf ??).

Le piégeage longitudinal est assuré par quatre fils supplémentaires. Ces fils sont placés de part et d'autre des trois microfils transverses (voir Fig. ??(a)). Ils sont éloignés du centre de la puce. Le potentiel longitudinal est alors bien approché par une série de polynômes : $V(x) = \sum_i a_i x^i$. Nous ajustons les courants dans ces fils pour annuler les termes linéaire, quadratique et cubique (a_1, a_2, a_3). Le terme dominant est alors le terme quartique : $V(x) = a_4 x^4$. Ce type de piège crée une densité atomique quasi homogène sur une grande longueur. C'est important pour notre étude, car le protocole de coupure bipartite suppose un système semi-infini. Un exemple de profil de densité dans un tel potentiel est donné en gris sur la Fig. ??(b). La densité linéaire n_0 reste constante à 10% près sur une longueur d'environ $250 \mu\text{m}$.

Pour créer la coupure initiale, nous utilisons une méthode de sélection spatiale (Part ??).

Cette méthode crée une frontière nette entre une région vide et un gaz homogène. Cette netteté est surtout limitée par la résolution de l'image, de l'ordre du micromètre. L'effet de réabsorption des photons diffusés peut aussi réduire la netteté. Pour l'atténuer, on détune le faisceau de 15 MHz par rapport à la transition D2.

Le profil de densité après cette sélection est montré en jaune dans la Fig. ???. Le gaz est alors homogène à 10% près sur environ 200 μm .

Après cette préparation, nous relâchons le confinement longitudinal tout en maintenant le piège transverse. La frontière initiale s'élargit avec le temps. Nous suivons cette dynamique en enregistrant les profils de densité $n(x; t)$ à différents temps d'évolution.

6.2 Prédictions de la GHD

Le dispositif expérimental décrit ci-dessus peut être analysé théoriquement comme suit. Au cours de l'évolution temporelle, la frontière nette initiale du nuage devient plus lisse et les dérivées temporelles des quantités locales diminuent. Après un certain temps, après un lissage, on s'attend à ce que le gaz puisse être décrit localement par des états stationnaires.

Les états stationnaires du modèle de Lieb-Liniger sont complètement caractérisés par leur distribution de rapidité $\rho(\theta)$. Alternativement, ces états peuvent être caractérisés par une fonction $\nu(\theta)$ appelée "facteur d'occupation".

Puisque nous supposons une stationnarité locale, le système dans son ensemble est décrit par une distribution de rapidité dépendante du temps et de la position $\rho(x, \theta; t)$, ou équivalemment par le facteur d'occupation dépendant du temps et de la position $\nu(x, \theta; t)$. Ce dernier conduit à des calculs plus simples, tandis que le premier est particulièrement utile pour extraire la densité linéaire, qui est donnée par

$$n(x; t) = \int d\theta \rho(x, \theta; t). \quad (6.1)$$

Les équations de GHD [?, ?] prédisent l'évolution temporelle de $\rho(x, \theta; t)$, ou équivalentement de $\nu(x, \theta; t)$. Lorsqu'elles sont écrites en termes du facteur d'occupation $\nu(x, \theta; t)$, les équations de GHD prennent la forme d'une équation convective :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + v_{[\nu]}^{\text{eff}} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0, \quad (6.2)$$

et une deuxième relation qui fixe la vitesse effective $v_{[\nu]}^{\text{eff}}$ comme une fonctionnelle de la distribution locale de rapidité (cf ??).

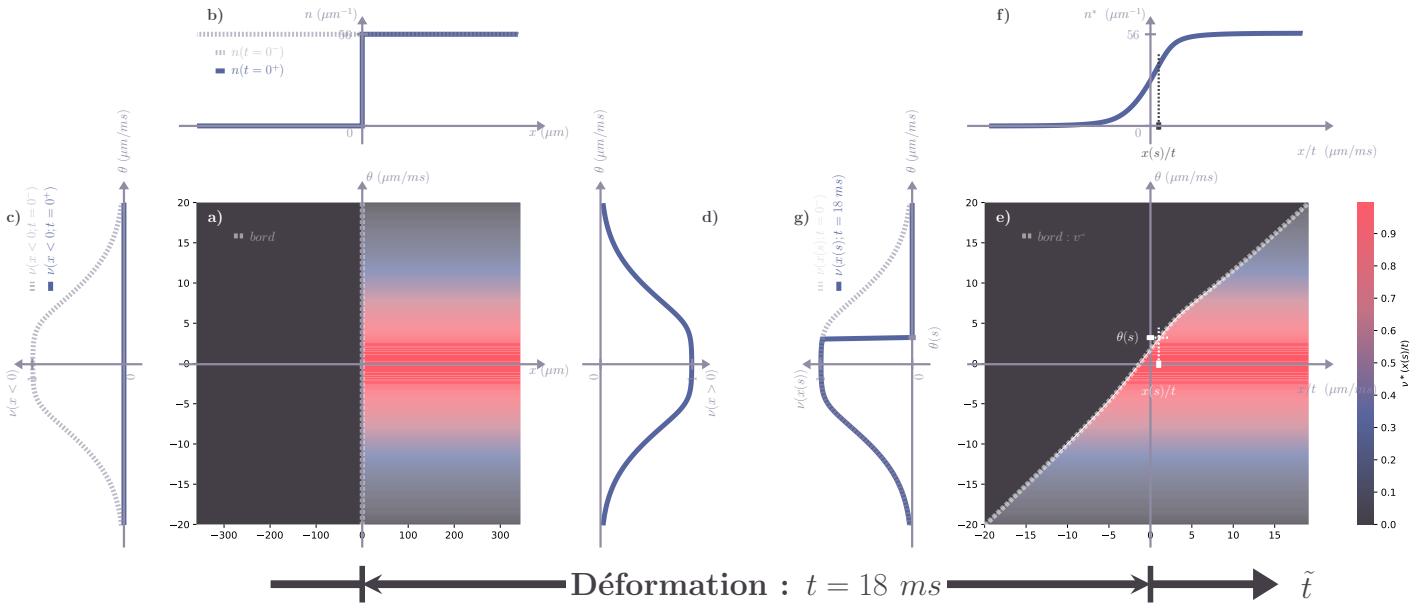


FIGURE 6.2 – (a) À l'instant $t = 0^+$, immédiatement après le « quench bipartite » en $x = 0$, le facteur d'occupation est donné par $\nu(x, \theta; t = 0^+) = \nu_0(\theta)$ pour $x > 0$ et est nul pour $x < 0$. Le bord initial représenté en tirets par l'ensemble des points $(x(s); t = 0^+) = 0, \theta(s); t = 0^+)$. (b) Densité spatiale linéique $n(x)$: en pointillés, $n(x; t = 0^-) = \int \rho(x, \theta; t = 0^-) d\theta = n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$ juste avant le quench; en ligne pleine, $n(x; t = 0^+) = n_0$ pour $x > 0$ et 0 pour $x < 0$. (c) À gauche de la coupure ($x < 0$) : en pointillés, $\nu(x, \theta; t = 0^-) = \nu_0(\theta)$; en ligne pleine, $\nu(x, \theta; t = 0^+) = 0$. (d) À droite de la coupure ($x > 0$), le facteur d'occupation reste inchangé : $\nu(x, \theta; t = 0^+) = \nu_0(\theta)$. (e) À l'instant $t = 18 \text{ ms}$, après l'évolution balistique post-quench, le facteur d'occupation est donné par $\nu^*(x(s); t, \theta) = \nu_0(\theta)$ pour $\theta < \theta(s; t)$, et nul pour $\theta > \theta(s; t)$, résolvant l'équation (6.4), pour $t > 0$. $\nu(x(s); t, \theta(s; t)) (= \nu^*(x(s); t, \theta(s; t)))$ est invariant de la déformation ie de $t > 0$. Le bord représenté en tirets par l'ensemble des points $(x(s); t, \theta(s; t))$. Étant donné que la coupure initiale est en $x = 0$ et que l'évolution du bord est balistique, cette courbe résoud $v_{[\nu^*(x(s); t, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s; t)) = x(s; t)/t = v(s)$ (6.2). (f) Densité spatiale réduite $n^*(x/t)$. (g) Pour les atomes à droite de la coupure : en pointillés, $\nu^*(x(s); t, \theta) = \nu_0(\theta)$; en ligne pleine, $\nu^*(x(s); t, \theta) = \nu_0(\theta)$ pour $\theta < \theta(s; t)$ et nul pour $\theta > \theta(s; t)$. Le raisonnement est similaire pour les atomes à gauche de la coupure.

Pour une bipartition initiale dont la discontinuité est située à $x = 0$, la solution de (??) est invariante le long des rayons de vitesse constante x/t [?, ?]. En d'autres termes, l'équation (??) implique que, pour cette classe d'états initiaux, la distribution du facteur d'occupation local et donc toutes les propriétés locales du gaz, dépendent de x et t uniquement à travers la quantité $v = x/t$. La solution de l'équation (??) peut donc être écrite en utilisant le facteur d'occupation le long des rayons $\nu^*(v, \theta)$ tel que

$$\nu(x, t, \theta) = \nu^*(x/t, \theta). \quad (6.3)$$

Pour la situation considérée dans cet article, où initialement un état de vide est situé pour $x < 0$ et un état de distribution du facteur d'occupation ν_0 pour $x > 0$, la solution $\nu^*(v, \theta)$ est paramétrée par une rapidité de bord θ^* selon [?, ?]

$$\nu^*(v, \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } \theta < \theta^* \\ 0 & \text{si } \theta > \theta^* \end{cases} \quad \text{où} \quad v_{[\nu^*(v, \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta^*) = v. \quad (6.4)$$

Cette équation peut être résolue numériquement pour toute distribution initiale donnée $\nu_0(\theta)$, voir la Fig. ?? pour un exemple. Avec l'équation (6.3), elle décrit entièrement le système à l'échelle d'Euler. Notez que, pour calculer la densité linéaire $n(x, t)$ afin de comparer avec les profils de densité expérimentaux, on utilise l'équation (6.1).

6.3 Sonder la distribution locale des rapidités

Pour un état initial du gaz correspondant à un facteur d'occupation lisse $\nu(\theta)$ — par exemple un état thermique —, le facteur d'occupation $\nu^*(x/t, \theta)$ à rapport x/t fixé est attendu comme étant fortement asymétrique en fonction de θ , selon

l'équation (6.4). En effet, du côté droit, il présente une discontinuité du type saut, similaire à celle du facteur d'occupation de l'état fondamental, tandis que du côté gauche, il reste lisse. Afin de révéler ces caractéristiques particulières de l'état local du gaz, nous utilisons le protocole introduit dans la Réf. [?] pour sonder la distribution locale des rapidités, comme expliqué ci-après.

Nous laissons d'abord le gaz se dilater pendant un temps $t = 18$ ms, de sorte que le bord s'étale sur une large zone d'environ $350 \mu\text{m}$, comme illustré en Fig. ??(e)-(f) et Fig. 6.4 (a). Nous sélectionnons ensuite une tranche du gaz comprise dans l'intervalle $[x_0 - \ell/2, x_0 + \ell/2]$, en éliminant tous les atomes situés hors de cette tranche à l'aide d'un faisceau de poussée [?](Fig. ??(a)-(c)).

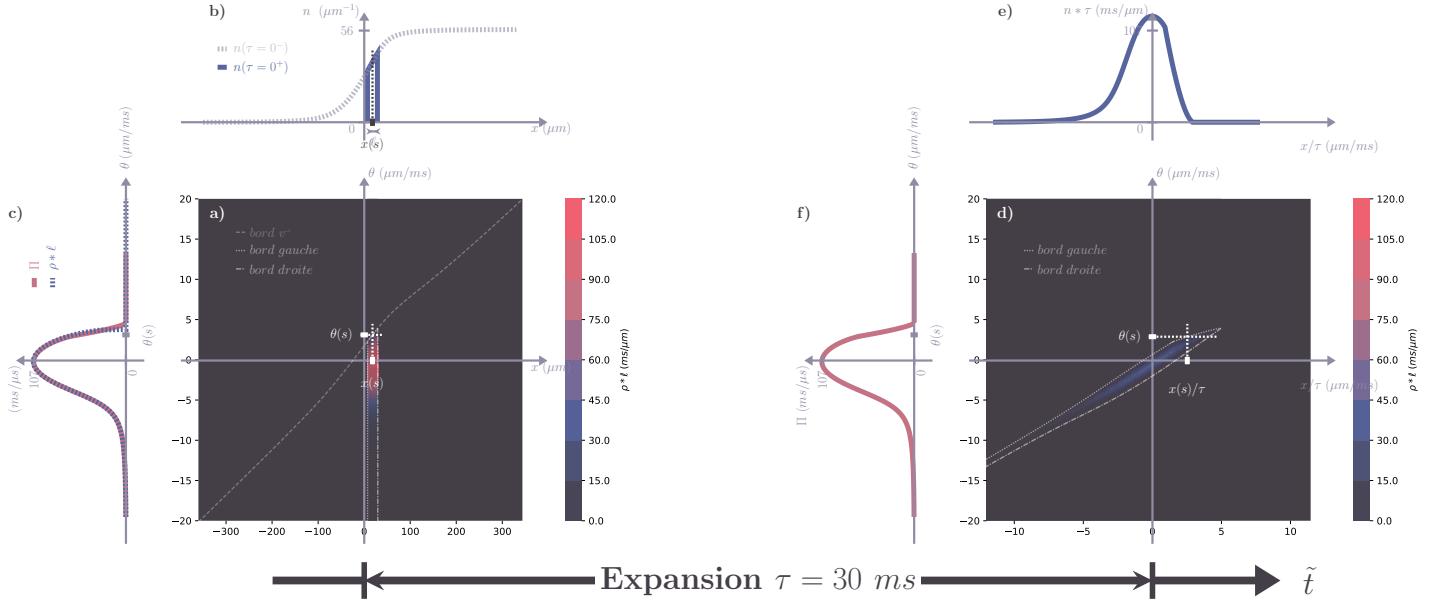


FIGURE 6.3 – (a) À l'instant $\tau = 0^+$, immédiatement après la sélection de la tranche centrée en $x = x_0$ et de largeur ℓ , la distribution de rapidité localement résolue est donnée par $\rho(x, \theta; \tau = 0^+) = \nu(x, \theta; t = 18 \text{ ms}) \rho_s(x, \theta; t = 18 \text{ ms})$ pour $|x - x_0| < \ell/2$, et est nulle pour $|x - x_0| > \ell/2$. Le bord gauche immédiatement après la sélection est représenté en pointillés par l'ensemble des points $(x_g(s; \tau = 0^+), \theta_g(s; \tau = 0^+))$, et le bord droit en tiret-point par l'ensemble des points $(x_d(s; \tau = 0^+), \theta_d(s; \tau = 0^+))$. Le bord complet est donc la concaténation de ces deux ensembles. (b) Densité linéique spatiale $n(x)$: en pointillés, $n(x; t = 18 \text{ ms})$ juste avant la sélection ; en ligne pleine, $n(x; \tau = 0^+)$, égal à $n(x; t = 18 \text{ ms})$ pour $|x - x_0| < \ell/2$ et nul ailleurs. (c) Distribution de rapidité après sélection, $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta; \tau) dx$, invariante sous l'évolution unidimensionnelle, représentée en rouge. La distribution localement résolue en $x(s; \tau = 0^+)$, $\rho(x(s; \tau = 0^+), \theta; \tau = 0^+)$, est représentée en pointillés. Cette distribution est localement conservée, i.e., $\rho(x(s; \tau), \theta(s; \tau))$ reste inchangée au cours de l'évolution unidimensionnelle, indépendamment de τ . (e) Distribution localement résolue $\rho(x, \theta; \tau = 30 \text{ ms})$ après une évolution unidimensionnelle de 30 ms. Le bord gauche est représenté en pointillés par les points $(x_g(s; \tau = 30 \text{ ms}), \theta(s; \tau = 30 \text{ ms}))$, et le bord droit en tiret-point par $(x_d(s; \tau = 30 \text{ ms}), \theta(s; \tau = 30 \text{ ms}))$. (f) Densité spatiale réduite $n(x; \tau = 30 \text{ ms})$. (g) Distribution de rapidité $\Pi(\theta)$ après la sélection (identique à celle de (c)).

En Fig. 6.4(a), nous présentons le profil de densité mesuré 1 ms après la sélection de la tranche. L'ajustement à une fonction rectangulaire lissée donne $x_0 = 18 \mu\text{m}$. Pour les calculs, la largeur ℓ sera déterminée à partir du nombre d'atomes sélectionnés (voir ci-dessous). Enfin, nous laissons cette tranche se dilater en 1D pendant un temps d'expansion τ , puis nous mesurons la densité longitudinale $\tilde{n}(x, \tau)$. Celle-ci reflète la distribution totale des rapidités dans la tranche $\Pi(\theta) = \int \rho(x, \theta; \tau > 0) dx = \int_{x_0 - \ell/2}^{x_0 + \ell/2} \rho(x, \theta; \tau = 0^+) dx$, car pour $\tau \rightarrow \infty$, on s'attend à ce que $\tau \tilde{n}(\tau * \theta - x_0; \tau) \simeq \Pi(\theta)$. L'asymétrie attendue de Π devrait ainsi induire une asymétrie de la densité $\tilde{n}(x, \tau)$ en fonction de x . Nous observons effectivement cette asymétrie dans nos profils d'expansion, comme illustré en Fig. 6.4(b) pour un temps d'expansion $\tau = 30$ ms.

Pour aller au-delà de cette observation qualitative, nous effectuons un calcul GHD à l'échelle d'Euler du profil d'expansion, en supposant que l'état initial est thermique. La température est obtenue par ajustement du profil de bord avant la sélection de la tranche, comme indiqué en Fig. 6.4(a), ce qui donne $T = 560 \text{ nK}$. Le potentiel chimique est ajusté afin que la densité linéaire initiale corresponde à celle mesurée dans la région $x > 0$, avant l'élargissement du bord. À partir du profil initial, nous simulons à la fois l'élargissement du bord et l'expansion de la tranche en GHD, en supposant une découpe parfaite,

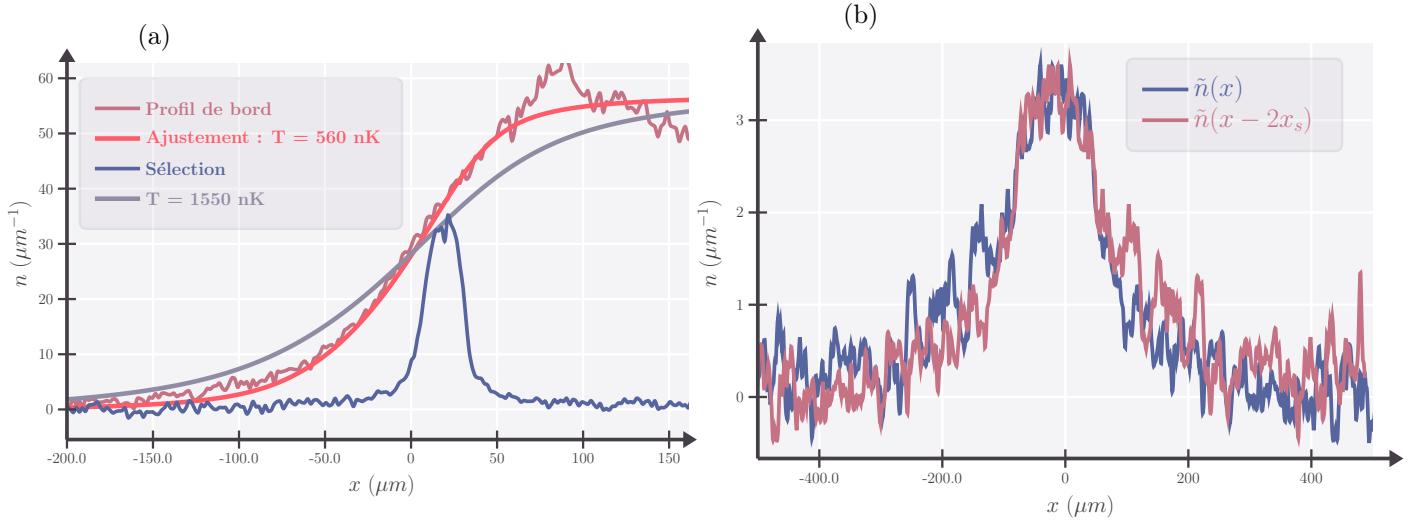


FIGURE 6.4 – (a) *Profil de bord et tranche sélectionnée*. Le profil de bord après 18 ms est montré en rouge. L’ajustement thermique donne une température $T = 560 \text{ nK}$ (orange). Le profil de densité mesuré 1 ms après la sélection de la tranche est en bleu. (b) *Asymétrie du profil d’expansion de la tranche*. Le profil de densité après une expansion pendant $\tau = 30 \text{ ms}$ est comparé à son image miroir. Le centre de symétrie $x_s = -17 \mu\text{m}$ minimise la distance quadratique $\delta^2 = \int dx (\tilde{n}(x) - \tilde{n}(2x_s - x))^2$.

c'est-à-dire $\nu(x, \theta) = 0$ pour $|x - x_0| > \ell/2$ et $\nu(x, \theta)$ inchangé sinon. La largeur ℓ est ajustée de sorte que le nombre d’atomes sélectionnés dans la simulation corresponde à celui mesuré expérimentalement après expansion, et on obtient $\ell = 24 \mu\text{m}$.

Le profil d’expansion simulé est montré en Fig. 6.5(a). Il présente une forte asymétrie, comme attendu, avec un bord droit abrupt et une densité nulle au-delà d’un certain point. Cependant, cette chute est moins marquée que celle prédictive pour la distribution locale des rapidités $\rho(x_0, \theta)$ à $x = x_0$. Deux effets contribuent à cet élargissement : (i) la distribution en rapidité n’est pas homogène à l’intérieur de la tranche, si bien que $\Pi(\theta)$ diffère de $\ell\rho(x_0, \theta)$, comme le montre la comparaison entre la ligne marron pleine et la ligne pointillée en Fig. 6.5(a) ; (ii) le temps d’expansion est fini, de sorte que le profil observé $\tilde{n}(x, \tau)$ ne correspond pas exactement à $\Pi((x - x_0)/\tau)/\tau$, comme le montre la comparaison entre les courbes marron et rouge.

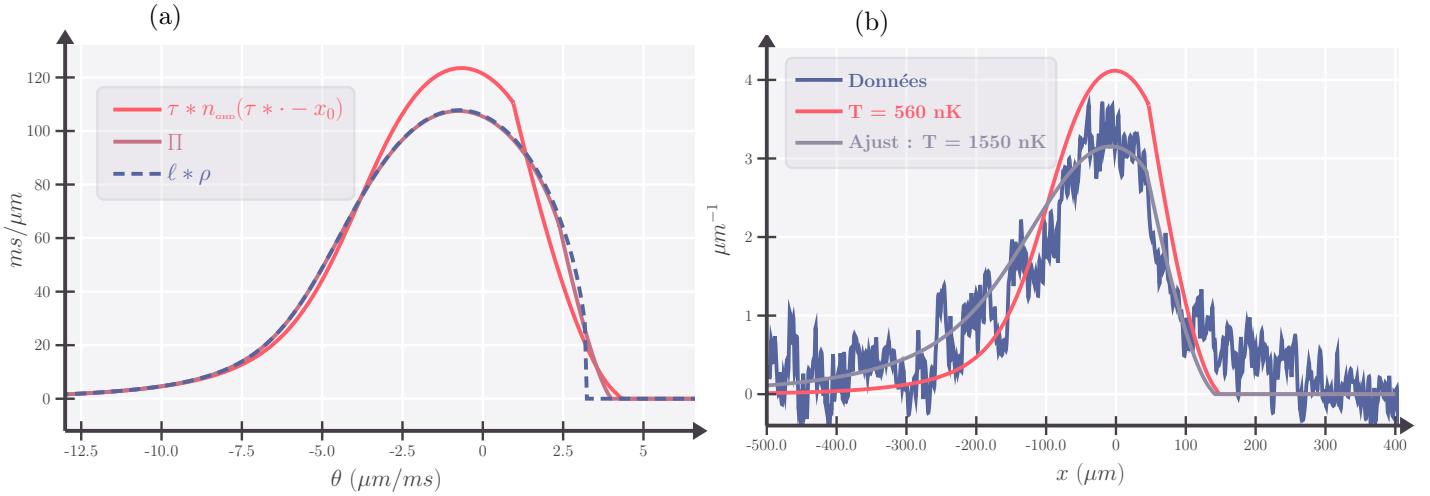


FIGURE 6.5 – (a) *Profil de densité après expansion de la tranche : effets de la largeur finie et du temps d’expansion fini*. Courbe orange : profil obtenu par simulation GHD après expansion pendant $\tau = 30 \text{ ms}$, avec $T = 560 \text{ nK}$. Courbe marron : distribution asymptotique $\Pi((x - x_0)/\tau)/\tau$. Courbe pointillée noire : approximation $\ell\rho(x_0, (x - x_0)/\tau)/\tau$ dans le cas d’une tranche étroite. (b) *Comparaison aux données expérimentales*. En bleu : profil expérimental après expansion pendant $\tau = 30 \text{ ms}$. En orange : simulation GHD avec $T = 560 \text{ nK}$. En magenta : ajustement du profil expérimental donnant $T = 1550 \text{ nK}$.

Nous comparons ensuite le profil d'expansion simulé par la GHD avec les données expérimentales. Comme montré en Fig. 6.5(b), le profil prédit reproduit les principales caractéristiques du profil d'expansion observé expérimentalement. Des écarts atteignant 25 % sont cependant visibles dans la partie centrale du profil. Afin d'obtenir un meilleur accord entre données et calculs, nous avons ajusté le profil d'expansion expérimental avec le calcul GHD en utilisant la température de l'état initial comme paramètre d'ajustement. Le résultat, représenté par la ligne magenta dans la Fig. 6.5(b), donne une température $T = 1550$ nK, plus de deux fois supérieure à celle obtenue en ajustant le profil au bord. Le profil au bord calculé pour cette température n'est pas compatible avec le profil expérimental, comme le montre la Fig. 6.5(b).

Une des raisons de l'échec de nos tentatives de reproduction du profil de densité après l'expansion de la tranche réside dans la présence de queues à droite du profil expérimental — voir le profil de densité dans la Fig. 6.5(b). Ces queues sont absentes des calculs GHD à l'échelle d'Euler car la fonction d'occupation dans la tranche s'annule strictement au-delà d'une certaine rapidité. L'origine de ces queues reste incertaine. Elles pourraient être dues à des effets de bord associés à la procédure de sélection de tranche, les atomes en bordure étant chauffés par le faisceau de poussée. Il est également possible qu'un effet diffusif, non pris en compte dans la GHD à l'échelle d'Euler, intervienne au début de la déformation du bord, lorsque les gradients sont importants.

6.4 Détails sur les calculs

On fait l'hypothèse que le système est dans un état thermique. Cela implique que la fonction f qui paramétrise l'opérateur charge (cf. ??) vérifie :

$$f(\theta) = \frac{\varepsilon(\theta) - \mu}{T},$$

avec $\varepsilon(\theta) = \frac{m\theta^2}{2}$. On peut réécrire cette relation en minimisant l'entropie de Yang-Yang (cf. ??) et en injectant la forme du facteur d'occupation $\nu = \rho/\rho_s = (1 + e^{\beta\epsilon})^{-1}$, avec $\beta = (k_B T)^{-1}$. On obtient alors une équation de type point fixe :

$$\beta\epsilon(\theta) = \beta\epsilon_0(\theta) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln \left(1 + e^{-\beta\epsilon(\theta)} \right),$$

avec $\epsilon_0(\theta) = \frac{m}{2}\theta^2 - \mu$. Cette équation est bien définie et converge (cf. ??). Pour s'en convaincre, on peut calculer la norme du déterminant du jacobien de l'application. Si elle est inférieure à 1, on est assuré de la convergence.

L'équation étant non linéaire, pour garantir la convergence vers la bonne solution (éitant les cycles), on itère la suite suivante :

$$\beta\epsilon_{n+1}(\theta) = \beta\epsilon_0(\theta) - \frac{\Delta}{2\pi} \star \ln \left(1 + e^{-\beta\epsilon_n(\theta)} \right),$$

jusqu'à ce que la distance entre deux itérations successives soit suffisamment petite : ici $\beta\|\epsilon_{n+1} - \epsilon_n\| < 10^{-12}$.

Ainsi, en fixant le couple (μ, T) , on obtient ϵ , puis ν , puis enfin ρ_s via :

$$2\pi\rho_s = \frac{m}{\hbar} \cdot 1^{\text{dr}},$$

où la fonction "habillée" f^{dr} est définie par :

$$f^{\text{dr}} = f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu * f^{\text{dr}}),$$

ce qui est une équation linéaire. Numériquement, on la résout sous la forme :

$$\left\{ \text{id} - \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu * \cdot) \right\} f^{\text{dr}} = f.$$

La densité physique est alors obtenue par $\rho = \nu * \rho_s$. Expérimentalement, on mesure la densité homogène $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$ (voir Fig. ??). À température fixée, on ajuste donc le potentiel chimique μ pour satisfaire la contrainte :

$$n_0 = \int \rho(\theta) d\theta.$$

L'équation (6.4) implique :

$$\nu(x(s; t), \theta(s; t)) = \nu(x(s; 0), \theta(s; 0)),$$

ce qui signifie que ν est constant au cours du temps si on suit le couple $(x(s; t), \theta(s; t))$ — c'est la vision lagrangienne en hydrodynamique. La graduation fixe des axes donne la vision eulérienne. Cela implique également :

$$\partial_t \begin{pmatrix} x(s; t) \\ \theta(s; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta(s; t)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où $\theta(s; t) = \theta(s; 0) \equiv \theta(s)$. On note $\Gamma_t \doteq \{(x(s; t), \theta(s; t))\}$. À l'intérieur de ce contour, le facteur d'occupation est indépendant de x (voir Fig. ??), donc il est conservé au cours du temps :

$$\nu(x(s, t), \theta(s)) = \nu_0(\theta),$$

ce qui est le cas dans tout le protocole. On peut ainsi calculer l'évolution du contour au cours du temps.

6.4.1 Simulation de la déformation du bord

Dans la partie "déformation du bord" (Fig. ??), initialement, l'intérieur du contour correspond à $x > 0$. Il est donc suffisant d'étudier l'évolution du bord initialement situé en $(x(s, t = 0) = 0, \theta(s))$. La bijectivité du contour implique que la vitesse effective soit constante : $v_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta) = v$, d'où

$$\frac{x(s; t)}{t} = v_{[\nu^*(v(s), \cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s)) = v(s),$$

avec la mise à l'échelle suivante :

$$\nu(x(s, t), \theta(s)) = \nu^*(v(s), \theta(s)),$$

ce qui montre que la déformation est indépendante du temps. Ainsi, pour simuler la déformation du bord, il suffit de calculer la vitesse effective :

$$v_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta) = \frac{\text{id}^{\text{dr}}(\theta)}{1^{\text{dr}}(\theta)}.$$

Une fois cette vitesse obtenue, on peut en déduire la position du bord après un temps t de déformation :

$$x(s; t) = v_{[\nu]}^{\text{eff}}(\theta) \cdot t.$$

Connaissant le bord au temps t , on en déduit le facteur d'occupation (Fig. ??(e)(g)), et donc la densité linéique $n(x, t)$ (Fig. ??(e)(f)).

Sachant que $n_0 = 56 \mu\text{m}^{-1}$ et que μ dépend de T et de n_0 , on ajuste la température des simulations GHD sur les données expérimentales de la déformation du bord (Fig. 6.4). Cet ajustement donne $T = 560 \text{ nK}$.

6.4.2 Simulation de l'expansion

Nous effectuons une sélection du système après la déformation du bord (Fig. ??(a)) et nous procédon à une expansion unidimensionnelle de cette tranche (Fig. ??(e)). Contrairement au cas de la déformation du bord, le contour n'est ici pas bijectif. La vitesse effective $v_{[\nu(x(s;\tau),\cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s))$ dépend donc du temps d'expansion τ .

Pour contourner cela, nous découpons le contour en deux parties : le bord gauche $(x_g(s,t), \theta_g(s))$ et le bord droit $(x_d(s,t), \theta_d(s))$, de sorte que ces deux bords soient bijectifs (Fig. ??(a) et (e)). Avec cette découpe, après une expansion unidimensionnelle d'une durée τ , le facteur d'occupation devient :

$$\nu(x(s;\tau), \theta) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } \theta \in [\theta_g(s), \theta_d(s)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ayant la connaissance de $v_{[\nu(x(s;\tau),\cdot)]}^{\text{eff}}(\theta(s))$, on peut suivre l'évolution du contour, et donc de la densité spatiale $n(x,t)$ (Fig. ??(f)).

Après avoir réalisé une simulation GHD avec $T = 560$ nK, valeur obtenue via l'ajustement sur la déformation du bord, on compare cette simulation aux données expérimentales après $\tau = 30$ ms d'expansion. On compare alors la courbe orange aux données en bleu dans la Fig. 6.5(b).

La simulation ne reproduit pas bien les données, comme attendu : certains phénomènes physiques ne sont pas pris en compte dans les simulations GHD. Cela se manifeste notamment autour de $\pm 350 \mu\text{m}$.

Nous avons donc effectué un ajustement direct de T sur les données après expansion (courbe grise de la Fig. 6.5(b)).

CHAPITRE 7

MISE EN PLACE D'UN CONFINEMENT LONGITUDINALE DIPOLAIRE

Contents

7.1	calculs	29
7.2	laser , MOPA, etc .. Données	29

7.1 calculs

7.2 laser , MOPA, etc .. Données