

Table des matières

I	Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz	3
1	Introduction au gaz de bosons unidimensionnels	7
1.1	Description du modèle de Lieb-Liniger	7
1.2	Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques	8
2	Bethe Ansatz et solution exacte du modèle de Lieb-Liniger	9
2.1	Problème à deux corps	9
2.2	Problème à N corps	9
2.3	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz	9
II	Relaxation des systèmes quantiques isolés et phénomènes d'équilibre	11
3	Équilibre thermique et ensemble de Gibbs	13
3.1	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	13
3.2	Excitations élémentaires à température nulle	14
3.3	Physique statistique de l'ensemble de Gibbs	14
3.4	Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation	15
4	Équilibre non thermique et ensemble de Gibbs généralisé	17
4.1	Intégrabilité et charges conservées	17
4.2	Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés	17
4.3	Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables	17
4.4	Entropie de Yang-Yang généralisée et fluctuations	19
4.5	Fluctuations autour du profil stationnaire	20
4.5.1	Fluctuation du nombre d'atomes et de l'énergie	21
4.5.2	Approximation des fluctuation de	de
	23
III	Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée	25
5	Hydrodynamique et régimes asymptotiques	27
5.1	Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques	27
5.2	Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité	27
5.3	Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)	27
IV	Protocoles expérimentale	29
6	Présentation de l'expérience	31
6.1	Piégeage transverses et longitudinale	31
6.2	Sélection spatial	31
7	Mesure de distribution de rapidités locales pour des systèmes en équilibre	33

8	Mesure de distribution de rapidités locales pour des systèmes hors équilibre	35
9	Piégeage dipolaire	37

Première partie

Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz

Pourquoi en 1D ?

Explication classique à l'aide d'un modèle chaotique : la thermalisation en 2D, illustrée par l'exemple de l'eau en ébullition, avec comme paramètres T , E , N . Modélisation par des sphères dures et introduction du modèle ergodique : en 1D, l'intégrabilité du modèle de sphères dures dans un espace réduit entraîne un simple échange de vitesses, sans modifier la distribution des vitesses.

Pourquoi en 1D quantique ?

Le gaz de Bose unidimensionnel avec interactions ponctuelles (la version quantique de l'équation de Schrödinger non linéaire) est l'un des modèles intégrables les plus fondamentaux, pouvant être résolu par la méthode de l'Ansatz de Bethe (ref). Ce modèle a fait l'objet d'études approfondies (ref).

Après avoir décrit le modèle de Lieb-Liniger et analysé ses asymptotiques ainsi que les théories linéarisées (Gross-Pitaevskii et Bogoliubov) dans le chapitre 1, nous poursuivons par la construction des fonctions propres de l'Hamiltonien dans un volume fini.

Cette construction, détaillée dans le chapitre 2, met en évidence la forme explicite des fonctions propres et leur réductibilité au cas à deux particules, une caractéristique commune des modèles résolubles par l'Ansatz de Bethe. Enfin, dans la dernière section, nous imposons des conditions aux limites périodiques à

CHAPITRE

1

INTRODUCTION AU GAZ DE BOSONS UNIDIMENSIONNELS

Contents

1.1	Description du modèle de Lieb-Liniger	7
1.2	Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques	8

Introduction

1.1 Description du modèle de Lieb-Liniger

Le gaz de Bose unidimensionnel est décrit par les opérateurs champs quantiques de Bose canoniques d'annihilation $\Psi(x, t)$ et de création $\Psi^\dagger(x, t)$, satisfaisant les relations de commutation canoniques à temps égal $[\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(y, t)] = \delta(x - y)$ et $[\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}(y, t)] = [\hat{\Psi}^\dagger(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(y, t)] = 0$.

L'Hamiltonien du modèle s'écrit :

$$\hat{H} = \int dx \left(\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \hat{\Psi}^\dagger \partial_x \hat{\Psi} + \frac{g}{2} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \right)$$

où m est la masse de la particule g est la constante de couplage 1D. L'équation du mouvement correspondante

$$i\hbar \partial_t \hat{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \hat{\Psi} + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}$$

est l'équation de Schrödinger non linéaire (NS).

Les interactions entre particules sont répulsives donc $g > 0$. l'état fondamental à température nulle est une sphère de Fermi, et seul ce cas sera considéré par la suite.

Le vide de Fock $|0\rangle$ est défini par $\Psi|0\rangle = 0$

Enfin, les opérateurs nombre de particules \hat{Q} et impulsion \hat{P} s'écrivent :

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= \int dx \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \\ \hat{P} &= \frac{1}{2} \int dx \hat{\Psi}^\dagger (-i\hbar \partial_x) \hat{\Psi} + cc\end{aligned}$$

Ces opérateurs sont hermitiens et constituent des intégrales du mouvement $[\hat{H}, \hat{Q}] = [\hat{H}, \hat{P}] = 0$. Nous pouvons maintenant chercher les fonctions propres communes $|\Psi_N\rangle$ des opérateurs \hat{H} , \hat{P} et \hat{Q} :

$$|\Psi_N(\theta_1, \dots, \theta_N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N x \varphi_N(x_1, \dots, x_N | \theta_1, \dots, \theta_N) \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |0\rangle$$

Ici, φ_N est une fonction symétrique de toutes les variables x_j . Les équations aux valeurs propres sont $\hat{H}|\Psi_N\rangle = E_N|\Psi_N\rangle$, $\hat{P}|\Psi_N\rangle = p_N|\Psi_N\rangle$ et $\hat{Q}|\Psi_N\rangle = N|\Psi_N\rangle$.

Il en résulte que φ_N est une fonction propre à la fois de l'Hamiltonien quantique de Lieb et Liniger (LL)

$$\begin{aligned}H_{LL} &= \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{x_i}^2 + g \sum_{j>i} \delta(x_i - x_j) \right\} \\ H_{LL} \varphi_N &= E_N \varphi_N\end{aligned}$$

et de l'opérateur de moment quantique $P_N = -i\hbar \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}$:

1.2 Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques

CHAPITRE

2

BETHE ANSATZ ET SOLUTION EXACTE DU MODÈLE DE LIEB-LINIGER

Contents

2.1	Problème à deux corps	9
2.2	Problème à N corps	9
2.3	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz	9

2.1 Problème à deux corps

2.2 Problème à N corps

2.3 Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz

$$L\theta_a + \sum_{b=1}^N \Phi(\theta_a - \theta_b) = 2\pi I_a$$

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = \frac{2\pi}{L} \lim_{\text{therm}} \frac{|I_{a+1} - I_a|}{|\theta_{a+1} - \theta_a|} = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta_a) = 1 + \frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b)$$

Deuxième partie

Relaxation des systèmes quantiques isolés et phénomènes d'équilibre

CHAPITRE

3

ÉQUILIBRE THERMIQUE ET ENSEMBLE DE GIBBS

Contents

3.1	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	13
3.2	Excitations élémentaires à température nulle	14
3.3	Physique statistique de l'ensemble de Gibbs	14
3.4	Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation	15

3.1 Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle

Dans la limite thermodynamique, le nombre de particules N et le volume (la longueur de la boîte) L tendent vers l'infini de sorte que leur rapport $D = \frac{N}{L}$ reste fini :

$$\lim_{N, L \rightarrow \infty} \frac{N}{L} = D = \text{const} < \infty$$

Considérons le système à température nulle. Rappelons que l'état d'énergie minimale dans le secteur avec un nombre fixe de particules correspond aux solutions j des équations de Bethe suivantes :

$$L\theta_a + \sum_{b=1}^N \Phi(\theta_a - \theta_b) = 2\pi I_a,$$

où les nombres fermionique $I_a = a - (N + 1)/2$ et $a \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Dans la limite thermodynamique, les valeurs de θ_a se condensent ($\theta_{a+1} - \theta_a = \mathcal{O}(1/L)$), et remplissent l'intervalle symétrique , la mer de Dirac/ sphère de Fermi $\llbracket -K, K \rrbracket$ où $K = \theta_N$ (ici $n_a \geq n_b \Rightarrow \theta_a \geq \theta_b$)

La quantité ρ_s tel que (manque une intro avant)

$$2\pi\rho_s(\theta_a) = \frac{2\pi}{L} \lim_{\text{therm}} \frac{|I_{a+1} - I_a|}{|\theta_{a+1} - \theta_a|} = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta_a) = 1 + \frac{1}{L} \sum_{b=1}^N \Delta(\theta_a - \theta_b)$$

représente la densité de vacances que l'on appellera densité d'état avec $I(\theta_a) = I_a$ et $\Delta(\theta) = \Phi'(\theta) = \frac{2c}{c^2 + \theta^2}$.
Maintenant intéressons nous à la densité de particules dans l'espace des moments $\rho(\theta)$, définie de la manière suivante :

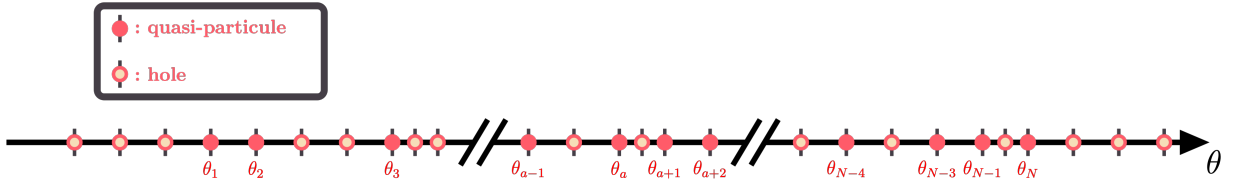
$$\rho(\theta_a) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \frac{1}{\theta_{a+1} - \theta_a} > 0.$$

À l'états fondamentale tous les vacances dans $[-K, K]$ sont occupés donc $\rho = \rho_s$. La quantité $L\rho(\theta)d\theta$ est le nombre de rapidité dans la cellule $[\theta, \theta + d\theta]$. La quantité $L \int_{-K}^K \rho(\theta) d\theta$ est le nombre de particule N . On remplace la somme par une intégrale :

$$2\pi\rho = 1 + \Delta \star \rho$$

3.2 Excitations élémentaires à température nulle

3.3 Physique statistique de l'ensemble de Gibbs



On écrit l'observable énergie et nombre :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (3.1)$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (3.2)$$

avec $\sum_{a=1}^N 1 \equiv \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{N}} | \{\theta_a\} \rangle$ et $\sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \equiv \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{E}} | \{\theta_a\} \rangle$.
La probabilité que le système soit dans configuration $\{\theta_a\}$ est

$$P_{\{\theta_a\}} = \frac{e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})}}{Z_{thermal}} = \frac{e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}}{Z_{thermal}} \quad (3.3)$$

avec la fonction de partition $Z_{thermal} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}$

$$\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \bigg|_T, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \mu^2} \bigg|_T = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \bigg|_T \quad (3.4)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \bigg|_\mu, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \bigg|_\mu = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \bigg|_\mu \quad (3.5)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \bigg|_\mu \right] \ln Z, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}}}^2 = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \bigg|_\mu \right]^2 \ln Z = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \bigg|_\mu \right] \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle \quad (3.6)$$

La matrice densité thermique est :

$$\hat{\rho}_{thermal} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z_{thermal}}, \quad (3.7)$$

$$e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (3.8)$$

3.4 Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation

CHAPITRE

4

ÉQUILIBRE NON THERMIQUE ET ENSEMBLE DE GIBBS GÉNÉRALISÉ

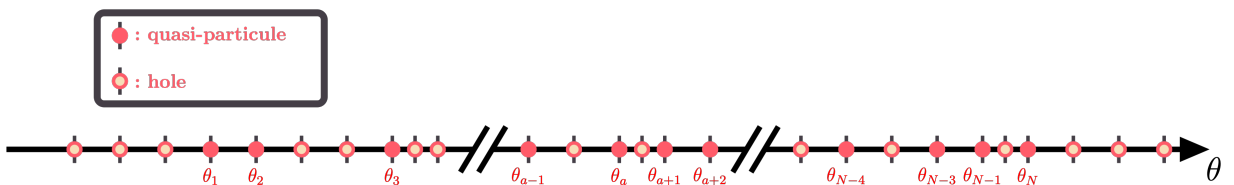
Contents

4.1	Intégrabilité et charges conservées	17
4.2	Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés	17
4.3	Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables	17
4.4	Entropie de Yang-Yang généralisée et fluctuations	19
4.5	Fluctuations autour du profil stationnaire	20
4.5.1	Fluctuation du nombre d'atomes et de l'énergie	21
4.5.2	Approximation des fluctuation de	23

4.1 Intégrabilité et charges conservées

4.2 Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés

4.3 Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables



On peut commence à généraliser avec l'opérateur :

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (4.1)$$

$\hat{\mathcal{O}}_i \in \{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}\}$ tel que $\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \beta \left(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \right)$ et pour simplifier ici $Z \equiv Z_{thermal}$:

Point clé n° 1. Sa moyenne , variance et écartype de l'observable :

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{\overbrace{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}^{P_{\{\theta_a\}}}}{Z} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \quad (4.2)$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i}$$

$$\Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 = \left\langle \left(\hat{\mathcal{O}}_i - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \right)^2 \quad (4.3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \right) \Big|_{\beta_j \neq i} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_j \neq i} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_j \neq i} \quad (4.4)$$

si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = -\beta\mu$ et si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = \beta$.

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}}_i | \{\theta_a\} \rangle \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}, \quad (4.5)$$

$$= \sum_{\{\theta_b\}} \langle \{\theta_b\} | \hat{\mathcal{O}}_i \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} | \{\theta_b\} \rangle, \quad (4.6)$$

$$= \text{Tr}(\hat{\mathcal{O}}_i \hat{\rho}) \quad (4.7)$$

avec $\hat{\rho} = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$ et $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}$ tel que $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$

La matrice densité GGE avec $Z \equiv Z_{GGE}$ est :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|. \quad (4.8)$$

Dans le cas thermique, on peut remarquer que $\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^0$ et $\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^2$. On peut donc réécrire $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{a=1}^N \theta_a^i \quad (4.9)$$

et pour chaque $a \in \llbracket 1, N \rrbracket$: $\sum_i \alpha_i \theta_a^i$ converge donc on peut échanger les deux sommes soit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^N f(\theta_a) \quad (4.10)$$

avec $f(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i$. Et on peut réécrire la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \frac{e^{-\hat{Q}[f]}}{Z_{GGE}}, \quad (4.11)$$

$$e^{-\hat{Q}[f]} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (4.12)$$

pour une certaine fonction f relié à la charge $\hat{Q}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N f(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$. Et on peut réécrire la probabilité de la configuration $\{\theta_a\} : P_{\{\theta_a\}} = \langle \{\theta_a\} | \hat{\rho}_{GGE}[f] | \{\theta_a\} \rangle = e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} / Z$ avec $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}$.

Nous aimerions calculer les valeurs d'attente par rapport à cette matrice de densité, par exemple La moyenne GGE d'un observable s'écrit ,

Point clé n° 2.

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} \doteq \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} \hat{\rho}_{GGE}[f])}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{GGE}[f])} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} e^{-\hat{Q}[f]})}{\text{Tr}(e^{-\hat{Q}[f]})} = \frac{\sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}}{\sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}} \quad (4.13)$$

pour une certaine observable $\hat{\mathcal{O}}$.

4.4 Entropie de Yang-Yang généralisée et fluctuations

La fonction de partition des états s'exprime comme une fonctionnelle de la distribution de rapidité ρ :

$$\Xi = \sum_{\rho} \exp(-\mathcal{A}(\rho)).$$

Dans la section *Entropie de Yang-Yang* (??), nous avons montré que l'action $\mathcal{A}(\rho)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}(\rho) \doteq -L S_{YY}(\rho) + L \int f(\theta) \rho(\theta) d\theta,$$

où S_{YY} désigne la fonctionnelle d'entropie de Yang-Yang, définie en (??), et f la fonction génératrice associée aux charges conservées, introduite en (??).

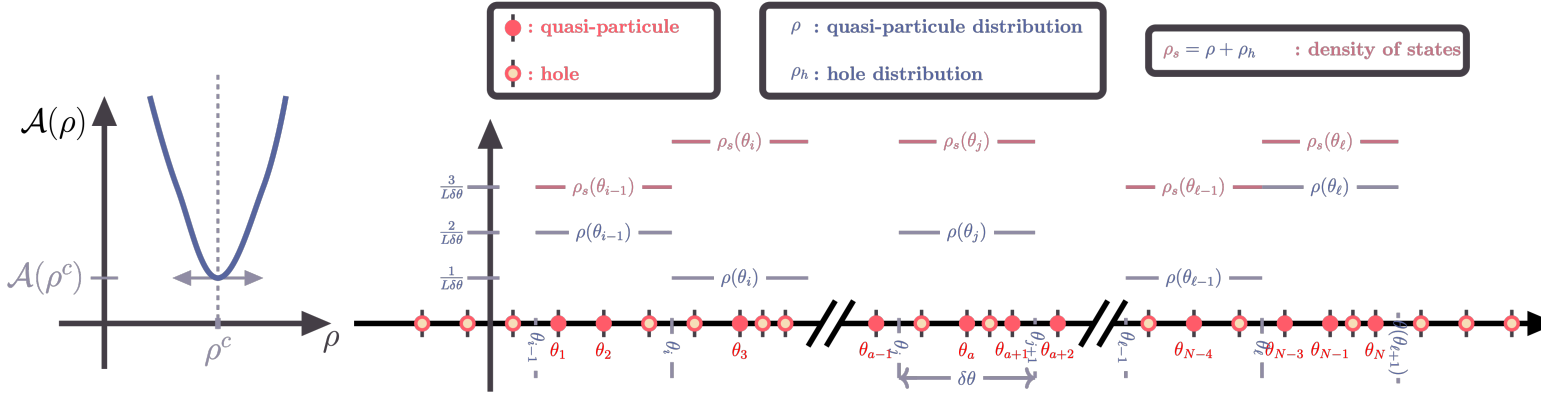
Dans cette même section, nous avons également mis en évidence que la distribution ρ^c qui maximise la contribution à la fonction de partition correspond à un point stationnaire de l'action, et est entièrement déterminée par la fonction f . Cette distribution ρ^c définit ainsi l'état macroscopique typique du système au sein de l'ensemble statistique considéré.

L'hypothèse selon laquelle, après relaxation, le système est décrit par un ensemble généralisé de Gibbs (GGE) constitue un fondement majeur de notre compréhension des dynamiques hors équilibre dans les systèmes intégrables. Cette hypothèse a des implications théoriques profondes et mérite d'être testée expérimentalement. Toutefois, la seule connaissance de la distribution de rapidité moyenne ρ^c ne permet pas de confirmer l'adéquation du GGE. En effet, plusieurs ensembles statistiques peuvent mener à une même valeur moyenne de ρ . Pour lever cette ambiguïté, il est nécessaire d'étudier les fluctuations autour de la distribution typique, notées $\delta\rho$, définies par $\rho = \rho^c + \delta\rho$.

Afin de caractériser ces fluctuations, nous développons l'action $\mathcal{A}(\rho)$ au voisinage de ρ^c . Par construction, ρ^c étant un point stationnaire, la différentielle première de \mathcal{A} en ce point est nulle : $d\mathcal{A}_{\rho^c} = 0$ (cf. équation (??)). En appliquant le développement de Taylor-Young à l'ordre deux en $\delta\rho$, nous obtenons :

$$\mathcal{A}(\rho^c + \delta\rho) \underset{\delta\rho \rightarrow 0}{=} \mathcal{A}(\rho^c) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \rho^2} \Big|_{\rho^c} (\delta\rho) + \mathcal{O}((\delta\rho)^3),$$

où $\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \rho^2} \Big|_{\rho^c}$ désigne la forme linéaire symétrique (a priori définie positive) associée à la hessienne de l'action, illustrée en Fig. (4.1b). Cette approximation quadratique constitue la base du traitement gaussien des fluctuations autour de l'état typique, permettant d'accéder aux corrélations et à la structure fine de l'ensemble statistique effectif.



4.5 Fluctuations autour du profil stationnaire

Dans les systèmes intégrables à grand nombre de particules, la description hydrodynamique est régie par la densité de rapidité $\rho(\theta)$, qui encode la répartition des quasi-particules sur l'axe des rapidités θ . À l'équilibre, le profil stationnaire $\rho^c(\theta)$ maximise la probabilité d'observer une configuration donnée. On s'intéresse ici aux fluctuations autour de ce profil stationnaire, et plus précisément aux corrélations à deux points des fluctuations $\delta\rho(\theta) = \rho(\theta) - \rho^c(\theta)$.

Pour ce faire, on discrétise l'axe des rapidités en petites cellules $[\theta, \theta + \delta\theta]$, chacune contenant un nombre moyen de quasi-particules donné par $L\rho(\theta)\delta\theta$, où L désigne la taille du système.

Dans cette discrétisation, le développement quadratique de l'action $\mathcal{A}[\rho]$ autour du profil stationnaire ρ^c s'écrit comme un produit scalaire :

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \rho^2} \right|_{\rho^c} (\delta \rho) = \sum_{a,b} \delta \rho(\theta_a) \left. \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta \rho(\theta_a) \partial \delta \rho(\theta_b)} \right|_{\rho^c} \delta \rho(\theta_b).$$

Cette structure quadratique mène naturellement à une intégrale fonctionnelle gaussienne pour la probabilité des fluctuations. Les corrélations à deux points des fluctuations s'expriment alors comme :

$$\langle \delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta') \rangle = \frac{\int \mathcal{D} \delta \rho \delta \rho(\theta) \delta \rho(\theta') \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{a,b} \delta \rho(\theta_a) \hat{\mathbf{A}}_{\theta_a, \theta_b} \delta \rho(\theta_b) \right)}{\int \mathcal{D} \delta \rho \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{a,b} \delta \rho(\theta_a) \hat{\mathbf{A}}_{\theta_a, \theta_b} \delta \rho(\theta_b) \right)} = \left(\hat{\mathbf{A}}^{-1} \right)_{\theta, \theta'},$$

où $\hat{\mathbf{A}}$ est la matrice hessienne de l'action évaluée au point stationnaire ρ^c , c'est-à-dire :

$$\mathbf{A}_{\theta, \theta'} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta \rho(\theta) \partial \delta \rho(\theta')} \right|_{\rho^c}.$$

Dans le cas considéré, le profil stationnaire s'écrit sous la forme $\rho^c = \rho_s^c \nu^c$, avec ν^c la fonction d'occupation des quasi-particules et ρ_s^c la densité d'états disponibles. La matrice \mathbf{A} se décompose alors en deux contributions :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)} + \delta\theta \mathbf{V},$$

avec :

$$A_{\theta, \theta'}^{(0)} = L \delta\theta \left(\frac{1}{\rho_s^c(\theta)(1 - \nu^c(\theta))\nu^c(\theta)} \right) \delta(\theta - \theta'),$$

et

$$V_{\theta, \theta'} = L \delta\theta \left\{ - \left[\left(\frac{1}{\rho_s^c(1 - \nu^c)} \right) (\theta) + \left(\frac{1}{\rho_s^c(1 - \nu^c)} \right) (\theta') \right] \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} + \int d\theta'' \left(\frac{\nu^c}{\rho_s^c(1 - \nu^c)} \right) (\theta'') \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi} \right\}.$$

Cette matrice encode la structure des fluctuations du système dans l'espace des configurations de rapidité.

4.5.1 Fluctuation du nombre d'atomes et de l'énergie

Il est maintenant pertinent de tester notre expression des fluctuations.

Les fluctuations des observables "nombre d'atomes" $\hat{\mathcal{N}}$ et "énergie" $\hat{\mathcal{E}}$ peuvent être exprimées à l'aide des fluctuations de ρ :

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\hat{\mathcal{N}} - \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle \right)^2 \right\rangle &= L^2 \int d\theta_a \int d\theta_b \langle \delta\rho(\theta_a) \delta\rho(\theta_b) \rangle, \\ \left\langle \left(\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} - \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle \right)^2 \right\rangle &= L^2 \int d\theta_a \int d\theta_b \left(-\mu + \frac{1}{2} m \theta_a^2 \right) \left(-\mu + \frac{1}{2} m \theta_b^2 \right) \langle \delta\rho(\theta_a) \delta\rho(\theta_b) \rangle,\end{aligned}$$

où $\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle$ désigne la moyenne de l'observable $\hat{\mathcal{O}}_i$, m la masse des atomes et μ le potentiel chimique.

Dans la section {??}, nous avons vu que la variance d'une observable $\hat{\mathcal{O}}_i$, autrement dit ses fluctuations, peut également s'exprimer comme une dérivée thermodynamique de sa moyenne :

$$\Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 = - \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_j \neq i},$$

où β_i est la variable conjuguée à $\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle$. En particulier, les fluctuations du nombre d'atomes et de l'énergie peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 &= \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \right|_T, \\ \Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2 &= - \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \right|_{\mu},\end{aligned}$$

avec $\beta = (k_B T)^{-1}$, T étant la température.

Les quantités $\left\langle \left(\hat{\mathcal{N}} - \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle \right)^2 \right\rangle$ et $\Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2$ sont analytiquement équivalentes, de même que $\left\langle \left(\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} - \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle \right)^2 \right\rangle$ et $\Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2$.

Nous souhaitons maintenant effectuer une comparaison numérique entre ces deux approches. Pour ce faire, nous avons d'abord résolu numériquement l'équation {??} avec $f(\theta) = \frac{\epsilon(\theta) - \mu}{T}$, ce qui nous a permis d'obtenir $\rho(\theta)$ et $\rho_s(\theta)$.

Nous avons ensuite calculé les fluctuations de ρ pour une densité spatiale fixée à $n = 10 \text{ } \mu\text{m}^{-1}$, et pour différentes températures T allant de 5.7 K à 53.5 nK. Le potentiel chimique μ est ici une fonction de T et de n . Les points correspondants sont représentés en bleu sur un diagramme de phase du modèle de Lieb-Liniger. En abscisse, nous avons le logarithme décimal du paramètre d'interaction de Lieb-Liniger $\gamma = \frac{mg}{\hbar^2 n}$, et en ordonnée le logarithme décimal de $t = \frac{\hbar^2}{\beta mg^2}$ (voir Fig. 4.1a).

Ce même diagramme contient également un point rouge correspondant à $T = 60 \text{ nK}$ et $\mu = 27 \text{ nK}$. Les fluctuations associées à ce point sont représentées en niveaux de couleur sur un graphique 2D (voir Fig. 4.1b).

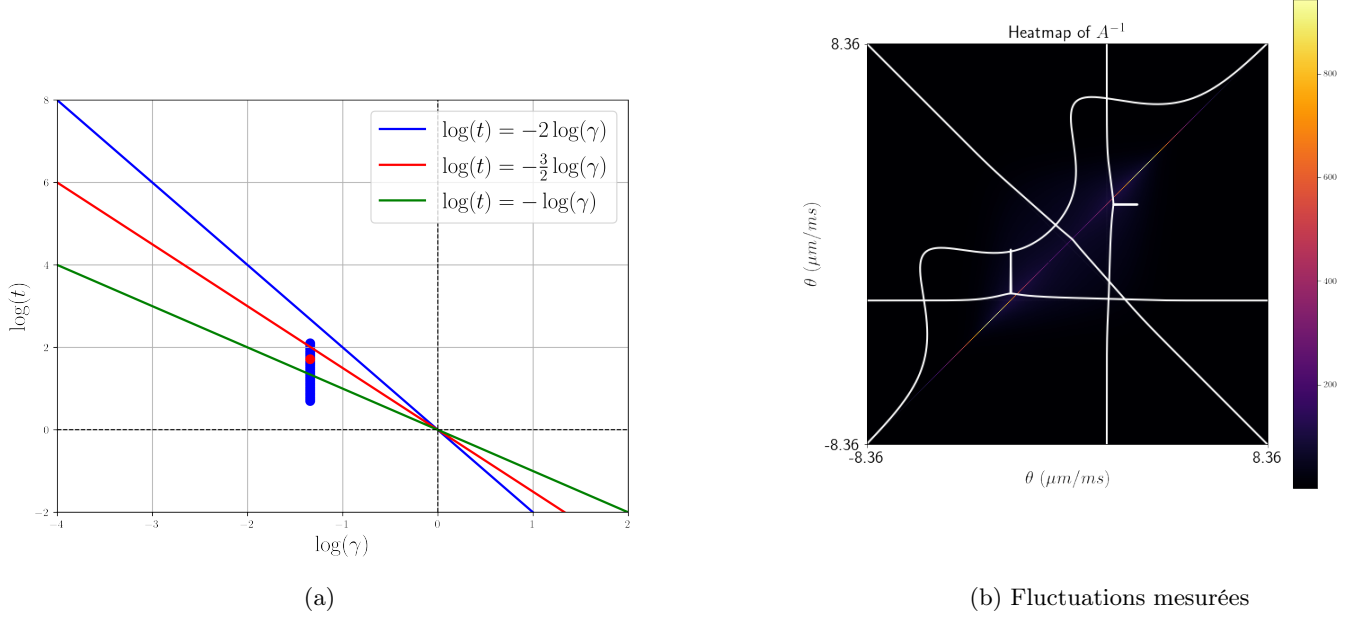


FIGURE 4.1 – (a) Diagramme de phase du modèle de Lieb-Liniger à l'équilibre thermique. Différents régimes asymptotiques sont séparés par des transitions progressives. Les points bleus représentent les fluctuations calculées numériquement pour différentes températures. Les coordonnées sont données par $\gamma = \frac{mg}{\hbar^2 n}$ et $t = \frac{k_B T}{mg^2/\hbar^2}$. (b) Représentation en niveaux de couleur des fluctuations $\delta\rho$ pour $T = 60$ nK et $\mu = 27$ nK (point rouge dans (a)).

Nous calculons ensuite les moyennes des observables :

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle &= L \int \rho(\theta) d\theta, \\ \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle &= L \int \left(-\mu + \frac{1}{2} m \theta^2 \right) \rho(\theta) d\theta,\end{aligned}$$

pour chaque point du diagramme (Fig. 4.1a). En faisant varier leur variable conjuguée, nous accédons alors aux fluctuations :

$$\Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \right|_T, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2 = - \left. \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \right|_{\mu}.$$

Les résultats obtenus à l'aide de cette méthode thermodynamique sont comparés à ceux issus du calcul direct des fluctuations de ρ . Ces comparaisons sont représentées sur la Fig. 4.2, et montrent une excellente concordance entre les deux approches.

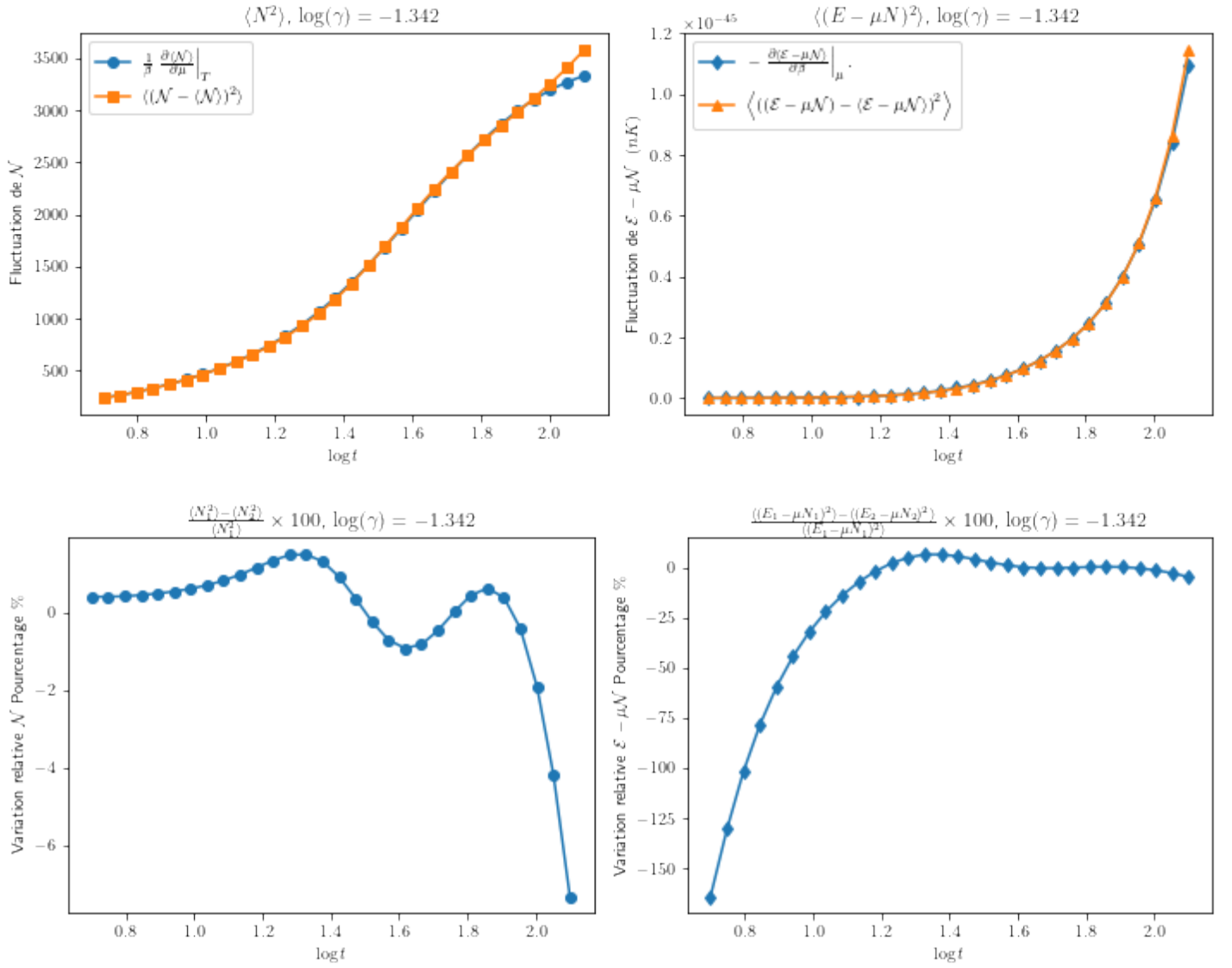


FIGURE 4.2 – Comparaison numérique entre les fluctuations calculées à partir de l’analyse quadratique de l’action (fluctuations de ρ) et celles obtenues par dérivées thermodynamiques des observables moyennes.

4.5.2 Approximation des fluctuation de

On est confiant sur notre formule des fluctuation de ρ . Mais là pour l’instant on a une formule analytique pour l’inverse des fluctuation. On aimerait avoir une formule analytique pour les fluctuation. On va chercher une approximation. En voyant la forme de \hat{A} l’inverse des fluctuation (ref??) il est tantant de d’appliquer une théorie des perturbation. D’après Neuman :

$$\hat{A}^{-1} = \sum_{k=0} (-\delta)^k \left(\left(\hat{A}^{(0)} \right)^{-1} \hat{V} \right)^k \hat{A}^{(0)}$$

avec
 \hat{A}^{-1}

Troisième partie

Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée

CHAPITRE

5

HYDRODYNAMIQUE ET RÉGIMES ASYMPTOTIQUES

Contents

5.1	Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques	27
5.2	Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité	27
5.3	Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)	27

5.1 Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques

5.2 Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité

5.3 Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)

Quatrième partie

Protocoles expérimentale

CHAPITRE

6

PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIENCE

Contents

6.1	Piégeage transverses et longitudinale	31
6.2	Sélection spatial	31

6.1 Piégeage transverses et longitudinale

6.2 Sélection spatial

CHAPITRE

7

MESURE DE DISTRIBUTION DE RAPIDITÉS
LOCALES POUR DES SYSTÈMES EN ÉQUILIBRE

CHAPITRE

8

MESURE DE DISTRIBUTION DE RAPIDITÉS
LOCALES POUR DES SYSTÈMES HORS
ÉQUILIBRE

CHAPITRE

9

PIÉGEAGE DIPOLAIRE