

# TABLE DES MATIÈRES

<b>I</b>	<b>Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Introduction au gaz de bosons unidimensionnels</b>	<b>7</b>
1.1	Motivations et contexte physique . . . . .	8
1.2	Description du modèle de Lieb-Liniger . . . . .	8
1.3	Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques . . . . .	8
1.4	Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat . . . . .	8
1.4.1	Équation de Gross-Pitaevskii . . . . .	8
1.4.2	Transformation de Bogoliubov pour système homogène . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Bethe Ansatz et solution exacte du modèle de Lieb-Liniger</b>	<b>9</b>
2.1	Problème à deux corps . . . . .	9
2.2	Problème à N corps . . . . .	9
2.3	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz . . . . .	9
<b>II</b>	<b>Relaxation des systèmes quantiques isolés et phénomènes d'équilibre</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Équilibre thermique et ensemble de Gibbs : chaos quantique</b>	<b>13</b>
3.1	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle . . . . .	13
3.2	Excitations élémentaires à température nulle . . . . .	13
3.3	Physique statistique de l'ensemble de Gibbs . . . . .	15
3.4	Chaos quantique et brisure de l'intégrabilité . . . . .	15
3.5	Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Équilibre non thermique et ensemble de Gibbs généralisé : ergodicité</b>	<b>17</b>
4.1	Intégrabilité et charges conservées . . . . .	17
4.2	Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés . . . . .	17
4.3	Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables . . . . .	17
4.4	Entropie de Yang-Yang généralisée . . . . .	19
<b>III</b>	<b>Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Hydrodynamique et régimes asymptotiques</b>	<b>23</b>
5.1	Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques . . . . .	23
5.2	Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité . . . . .	23

5.3	Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD) . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Fluctuations et corrections à l'hydrodynamique généralisée</b>	<b>25</b>
6.1	Fluctuations de la distribution de rapidité . . . . .	25
6.2	Ordre 2 des corrections et rôle de l'entropie de Yang-Yang . . . . .	27
6.3	Confrontation entre hydrodynamique classique et hydrodynamique généralisée . . . . .	27

## Première partie

# Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz



Les modèles mécaniques dans les dimensions espace-temps sont présentés dans cet article. Cette méthode a été suggérée pour la première fois par H. Bethe en 1931 [1] et est traditionnellement appelée l'Ansatz de Bethe. Par la suite, la méthode a été développée par Hulthen, Yang et Yang, Lieb, Sutherland, Baxter, Gaudin et d'autres (voir [2], [3], et [4]).

Nous commençons la présentation par l'Ansatz de Bethe en coordonnées, non seulement pour des raisons historiques, mais aussi en raison de sa simplicité et de sa clarté. La matrice de diffusion à plusieurs particules apparaît comme étant égale au produit des matrices à deux particules pour les modèles intégrables. Cette propriété de réductibilité à deux particules est d'une importance primordiale lors de la construction de la fonction d'onde de Bethe. L'une des caractéristiques importantes des modèles intégrables est qu'il n'y a pas de production multiple de particules hors des coquilles de masse. Cette propriété est étroitement liée à l'existence d'un nombre infini de lois de conservation dans de tels modèles ; cela sera expliqué dans la Partie II.

Quatre modèles principaux, à savoir le gaz de Bose unidimensionnel, le magnétisme de Heisenberg, le modèle de Thirring massif et le modèle de Hubbard, sont considérés dans la Partie I. Les fonctions propres des hamiltoniens de ces modèles sont construites. L'application des conditions aux limites périodiques mène à un système d'équations pour les valeurs permises des moments. Celles-ci sont connues sous le nom d'équations de Bethe. Ce système peut également être dérivé d'un certain principe variationnel, l'action correspondante étant appelée l'action de Yang-Yang. Elle joue un rôle important dans l'étude des modèles. Les équations de Bethe sont également utiles dans la limite thermodynamique. L'énergie de l'état fondamental, la vitesse du son, etc., peuvent être calculées dans cette limite. Les excitations au-dessus de l'état fondamental, c'est-à-dire les particules physiques, sont également étudiées. Pour définir leurs caractéristiques physiques, la technique des équations de "dressing" est introduite et étudiée. La thermodynamique du modèle est expliquée en détail.

Le matériel de cette Partie est organisé comme suit. La théorie du gaz de Bose unidimensionnel avec une interaction répulsive ponctuelle entre les particules est présentée dans le premier chapitre. La solution du magnétisme de Heisenberg  $X X Z$  dans un champ magnétique externe est donnée dans le deuxième chapitre. Le modèle quantique du champ spinor avec une auto-interaction à quatre points dans deux dimensions espace-temps est résolu dans le troisième chapitre. Cela est généralement appelé le modèle de Thirring massif, et est équivalent au modèle de sine-Gordon (dans le secteur de charge nulle). Dans le dernier chapitre de la Partie I, le modèle de Hubbard des fermions interactifs sur un réseau est brièvement abordé.



## CHAPITRE

# 1

# INTRODUCTION AU GAZ DE BOSONS UNIDIMENSIONNELS

## Contents

1.1	Motivations et contexte physique . . . . .	8
1.2	Description du modèle de Lieb-Liniger . . . . .	8
1.3	Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques . . . . .	8
1.4	Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat . . . . .	8
1.4.1	Équation de Gross-Pitaevskii . . . . .	8
1.4.2	Transformation de Bogoliubov pour système homogène . . . . .	8

Le gaz de Bose unidimensionnel avec interaction ponctuelle des particules (la variante quantique de l'équation de Schrödinger non linéaire) est l'un des modèles principaux et les plus importants qui peut être résolu par la méthode de l'Ansatz de Bethe [14], [15]. Ce modèle a été minutieusement étudié ([1], [5], [17], [21] et [22]). Nous commencerons par la construction des fonctions propres de l'Hamiltonien dans un volume fini. Les quantités intéressantes d'un point de vue physique (dans la limite thermodynamique à température nulle) sont considérées; la thermodynamique à température finie est également étudiée en détail. Un certain nombre d'idées essentielles qui seront appliquées à d'autres modèles sont introduites.

La construction des fonctions propres de l'Hamiltonien est expliquée dans la section 1. Leur forme explicite et, en particulier, la réductibilité à deux particules, sont des caractéristiques communes des modèles résolubles par la méthode de l'Ansatz de Bethe. Des conditions aux limites périodiques sont imposées à la fonction d'onde dans la section 2; les équations de Bethe pour les moments des particules sont introduites et analysées. Pris sous forme logarithmique, ces équations réalisent la condition d'extrémum d'un certain fonctionnel, l'action correspondante étant appelée l'action de Yang-Yang. La transition vers la limite thermodynamique est envisagée dans la section 3. Dans cette même section, l'état fondamental du gaz est construit. La densité de distribution des particules dans l'espace des moments et l'énergie de l'état fondamental sont calculées. La méthode de transition vers la limite thermodynamique décrite dans cette section est assez générale et peut être appliquée à tout modèle résoluble par l'Ansatz de Bethe. Dans la section 4, les excitations au-dessus de l'état fondamental sont construites et leurs principales caractéristiques (énergie, moment et matrice de diffusion) sont déterminées à l'aide des équations de "dressing". L'état fondamental du modèle est la mer de Dirac (également appelée sphère de Fermi).

La thermodynamique du modèle est présentée dans la section 5. L'approche par intégrale fonctionnelle est présentée. Elle permet de résoudre divers problèmes à température finie. Les équations de base décrivant l'état d'équilibre thermodynamique, l'équation de Yang-Yang en étant une d'entre elles, sont dérivées dans cette section. L'équation de Yang-Yang, qui est une équation intégrale non linéaire, est analysée dans la section 6. Le théorème montrant l'existence de solutions est prouvé. L'état d'équilibre thermodynamique avec température tendant vers zéro est étudié dans la section 7. En examinant cette limite, nous pouvons obtenir des informations plus détaillées sur l'état fondamental de l'Hamiltonien à température nulle. La limite de couplage fort (dans laquelle le modèle est équivalent au modèle de fermions libres) est discutée. Les équations

intégrales sont résolues exactement dans cette limite. Les excitations au-dessus de l'état d'équilibre thermodynamique sont étudiées et leur interprétation en termes de particules est donnée. Il est important de noter que la formule à température finie et à température nulle diffèrent uniquement par la mesure d'intégration. La thermodynamique des modèles exactement résolubles est tellement particulière qu'il est possible de construire des excitations stables à température finie, voir section 8. Les corrélations thermiques sont également discutées dans la section 8. Pour les modèles exactement résolubles, elles sont également très particulières : elles peuvent être représentées sous une forme similaire à celle à température nulle. Plus tard, dans la Partie IV (Chapitres XIII-XVI), cela sera utilisé pour l'évaluation explicite des fonctions de corrélation à température (même si elles dépendent du temps). La section 9 est consacrée à l'évaluation des corrections de taille finie à température nulle. Plus tard, elles seront utilisées pour le calcul des asymptotiques de longue distance des fonctions de corrélation à l'aide de la théorie des champs conformes.

## **1.1 Motivations et contexte physique**

## **1.2 Description du modèle de Lieb-Liniger**

## **1.3 Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques**

## **1.4 Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat**

### **1.4.1 Équation de Gross-Pitaevskii**

### **1.4.2 Transformation de Bogoliubov pour système homogène**



## CHAPITRE

# 2

# BETHE ANSATZ ET SOLUTION EXACTE DU MODÈLE DE LIEB-LINIGER

## Contents

2.1	Problème à deux corps . . . . .	9
2.2	Problème à N corps . . . . .	9
2.3	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz . . . . .	9

## 2.1 Problème à deux corps

## 2.2 Problème à N corps

## 2.3 Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz



## Deuxième partie

# Relaxation des systèmes quantiques isolés et phénomènes d'équilibre



# ÉQUILIBRE THERMIQUE ET ENSEMBLE DE GIBBS : CHAOS QUANTIQUE

## Contents

3.1	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle . . . . .	13
3.2	Excitations élémentaires à température nulle . . . . .	13
3.3	Physique statistique de l'ensemble de Gibbs . . . . .	15
3.4	Chaos quantique et brisure de l'intégrabilité . . . . .	15
3.5	Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation . . . . .	15

## 3.1 Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle

## 3.2 Excitations élémentaires à température nulle

Nous allons d'abord considérer les excitations au-dessus du vide physique dans le secteur de charge physique nulle (c'est-à-dire les excitations où le nombre de particules  $N$  dans l'état excité est identique au nombre de particules dans l'état fondamental). Nous commencerons par des conditions aux limites périodiques (2.13).

L'état fondamental est décrit par un ensemble particulier d'entiers  $n_j$ , voir (2.26) et (3.2). Tous les autres ensembles de  $n_j$  (avec la contrainte que  $n_j \neq n_k$ ) correspondent à des états excités. Cela constitue une description complète de tous les états excités. Ces excitations sont obtenues en supprimant un certain nombre de particules ayant des moments  $-q < \lambda < q$  de la distribution du vide (c'est-à-dire en créant des trous avec des moments  $\lambda_h$ ) et en ajoutant un nombre égal de particules ayant des moments  $\lambda_p > q$ .

Nous allons d'abord construire l'état dans lequel une particule de moment  $\lambda_p > q$  diffuse avec un trou de moment  $-q < \lambda_h < q$ . La présence simultanée de la particule et du trou modifie les valeurs permises des moments des particules du vide :  $\lambda_j \rightarrow \lambda_j$ , de sorte que les équations de Bethe pour les particules du vide sont réécrites comme suit.

En soustrayant cette contribution de la distribution du vide (3.2) et en tenant compte du fait que  $\lambda_j - \lambda'_j = \mathcal{O}(1/L)$  et que  $\theta(\lambda + \Delta) - \theta(\lambda) = \mathcal{O}(\Delta)$ , on obtient :

En utilisant les équations (2.31), (3.5) et (3.7), on obtient :

On introduit maintenant la "fonction de décalage"  $F$  :

Dans la limite thermodynamique, on peut remplacer la somme dans (4.3) par une intégrale, ce qui donne : Ainsi, nous sommes en mesure de décrire la polarisation du vide causée par une particule et un trou. Cela permet le calcul des grandeurs observables (énergie, momenta, et matrice de diffusion) pour les excitations au-dessus de l'état fondamental. Ces grandeurs

observables sont obtenues en ajoutant les contributions de la polarisation du vide aux quantités "pures" correspondantes. Nous commençons par calculer l'énergie observable  $E$ , qui est égale à l'énergie de l'état excité moins l'énergie de l'état fondamental :

où  $E_0(\lambda) = \lambda^2 - h$ . De même, on a pour le moment observable (le moment "pur" est simplement égal à  $\lambda$ ) :

Toutes les excitations dans le secteur à charge nulle peuvent être construites comme un état de diffusion constitué de nombres égaux de particules et de trous. L'énergie et le moment de ces excitations sont égaux à la somme des énergies et des moments des particules et des trous individuels. L'excitation à une particule et un trou construite ci-dessus est un état à deux corps. Dans l'ensemble canonique grand, nous pouvons changer le nombre de particules. Construisons une excitation à une particule avec énergie :

et le moment  $k(p)$  égal à :

(voir (3.7)). Il s'agit d'une excitation topologique (nous devons changer les conditions aux frontières en antipériodiques). La valeur  $\lambda_p$  doit être en dehors de la sphère de Fermi,  $|\lambda_p| > q$ ,  $\text{Im } \lambda_p = 0$ . On peut également construire une autre excitation topologique (trou élémentaire) avec une énergie égale à  $-e(h)$  et un moment égal à :

où  $-q < \lambda < q$ . Cela montre que les états excités dans le secteur neutre construits ci-dessus sont constitués de deux excitations élémentaires (comparer les formules (4.19) et (4.20) avec (4.16)). Pour construire ces excitations topologiques, il faut changer les conditions aux frontières pour qu'elles soient antipériodiques lors de l'introduction d'une excitation.

Cette excitation topologique a une nature fermionique. Pour les bosons implacables, cela est explicitement montré dans l'Appendice 1. Ainsi, nous allons introduire une autre particule dans l'état fondamental et changer les conditions aux frontières. Dans l'état excité, il y a  $N+1$  particules avec des moments  $\tilde{\lambda}_j; j = 1, \dots, N+1$ . Les équations de Bethe correspondantes sont :

L'état excité est caractérisé par l'ensemble de  $N+1$  nombres  $\{n_j, j = 1, \dots, N+1\}$ ; les  $N$  premiers nombres correspondent à l'état fondamental (2.26). Notons  $\lambda_{N+1}$  par  $\lambda_p$ . Il est commode d'introduire une fonction de décalage  $F$  similaire à celle de (4.4) :

Dans la limite thermodynamique, la fonction de décalage satisfait l'équation intégrale suivante :

où  $|\lambda_p| > q$ . La fonction  $F(\mu|\lambda)$  est définie pour  $|\mu| < q$ ; cependant, à l'aide de l'équation (4.25),  $F$  peut être prolongée analytiquement sur tout l'axe réel.

Avec l'aide de la fonction de décalage, nous pouvons calculer les quantités observables dans la limite thermodynamique (énergie, moment et matrice de diffusion). La fonction de décalage décrit le nuage de particules virtuelles qui entoure la particule  $p$  ou, en d'autres termes, la polarisation du vide due à la particule nue  $p$ . Des calculs similaires à ceux du début de cette section montrent que l'énergie d'une particule est  $\varepsilon(\lambda_p)$  (voir (4.9)) et que le moment est donné par (4.19).

Une excitation de "trou" peut être traitée de manière similaire. Le nombre de particules dans cette excitation est égal à  $N-1$  et la charge observable est égale à  $-1$ . La fonction d'onde  $X_N$  doit à nouveau être antipériodique. Cet état est caractérisé par l'ensemble de nombres entiers  $\{n_j\}$  obtenu en éliminant un nombre de l'ensemble du vide. La fonction de décalage satisfait l'équation

où  $|\lambda_h| < q$  est le moment de la particule nue du trou. Avec l'aide de cette fonction, l'énergie et le moment peuvent être obtenus :

Cette fonction peut être remplacée par  $-k_h(\lambda_h)$  trouvé dans (4.19). Les excitations arbitraires sont construites à partir de plusieurs particules et trous. L'énergie et le moment de telles excitations sont simplement la somme des contributions des excitations élémentaires individuelles. Ainsi, l'énergie et le moment sont donnés par :

La matrice de diffusion à plusieurs corps est simplement le produit des matrices de diffusion à deux corps. D'abord, la matrice de diffusion pour deux particules sera évaluée. L'ajout de deux particules ( $\lambda_2 > \lambda_1 > q$ ) au vide déplace les valeurs des moments des particules du vide :  $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}_j$  (pour  $j = 1, \dots, N$ ). La fonction de décalage

est égale à la somme des fonctions de décalage à une particule données par (4.25) :

Maintenant, considérons la matrice de diffusion de deux particules possédant des moments  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  avec  $\lambda_2 > \lambda_1 > q$ , comme ci-dessus. Dans ce cas, la matrice de diffusion est simplement un facteur numérique de module unitaire; ainsi, elle peut être écrite comme

Le phase  $\delta$  est réelle et est donnée par

où  $\varphi_2$  est la phase complète que la deuxième particule acquiert lorsqu'elle traverse l'ensemble de la boîte dans le cas où la première particule est absente :

La phase  $\varphi_{21}$  est la phase complète que la deuxième particule acquiert lorsqu'elle traverse l'ensemble de la boîte en présence de la première :

En utilisant les équations (4.34) et (4.35), la phase de diffusion est donnée par

En changeant la somme en une intégrale dans la limite thermodynamique et en utilisant (4.31), on obtient

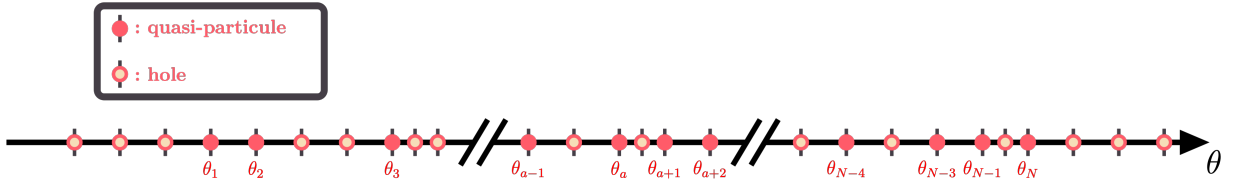
et à partir de (4.25)

Ainsi, la phase de diffusion satisfait l'équation intégrale suivante :

Nous avons démontré que les excitations physiques au-dessus de la mer de Dirac sont obtenues à partir des excitations "nues" au-dessus du vide de Fock  $|0\rangle$  (qui sont décrites par les fonctions d'onde de Bethe) à travers les équations de "dressing". Ces équations linéaires intégrales de dressing sont des équations universelles. Pour le voir, il suffit de comparer les équations de dressing pour l'énergie (4.9), la phase de diffusion (4.39) et la densité (3.7). Les équations de dressing sont également très utiles pour l'étude des fonctions de corrélation et des corrections de taille finie, comme nous le verrons dans les sections suivantes.

La diffusion de deux trous ayant des momenta nues  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , avec  $-q \leq \lambda_{1,2} \leq q$ , est également égale à  $\exp(i\varphi(\lambda_2, \lambda_1))$  où  $\varphi$  est défini par (4.39). La matrice de diffusion de la particule  $\lambda_p$  avec le trou  $\lambda_h$  est égale à

### 3.3 Physique statistique de l'ensemble de Gibbs



On écrit l'observable énergie et nombre :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (3.1)$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (3.2)$$

avec  $\sum_{a=1}^N 1 \equiv \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{N}} | \{\theta_a\} \rangle$  et  $\sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \equiv \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{E}} | \{\theta_a\} \rangle$ . La probabilité que le système soit dans configuration  $\{\theta_a\}$  est

$$P_{\{\theta_a\}} = \frac{e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})}}{Z_{thermal}} = \frac{e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}}{Z_{thermal}} \quad (3.3)$$

avec la fonction de partition  $Z_{thermal} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}$

$$\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \bigg|_T, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \mu^2} \bigg|_T = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \bigg|_T \quad (3.4)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \bigg|_\mu, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \bigg|_\mu = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \bigg|_\mu \quad (3.5)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \bigg|_\mu \right] \ln Z, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}}}^2 = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \bigg|_\mu \right]^2 \ln Z = \left[ \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \bigg|_\mu \right] \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle \quad (3.6)$$

La matrice densité thermique est :

$$\hat{\rho}_{thermal} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z_{thermal}}, \quad (3.7)$$

$$e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (3.8)$$

### 3.4 Chaos quantique et brisure de l'intégrabilité

### 3.5 Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation





# ÉQUILIBRE NON THERMIQUE ET ENSEMBLE DE GIBBS GÉNÉRALISÉ : ERGODICITÉ

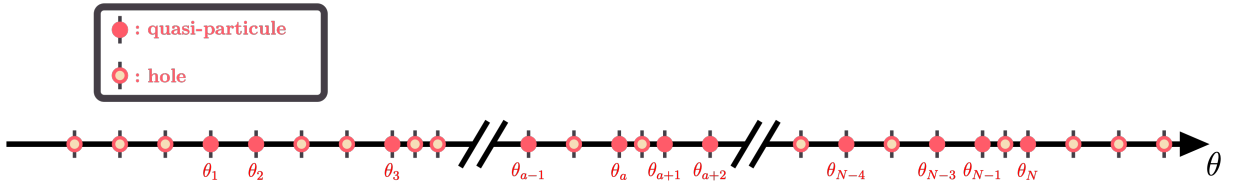
## Contents

4.1	Intégrabilité et charges conservées . . . . .	17
4.2	Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés . . . . .	17
4.3	Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables . . . . .	17
4.4	Entropie de Yang-Yang généralisée . . . . .	19

## 4.1 Intégrabilité et charges conservées

## 4.2 Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés

## 4.3 Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables



On peut commence à généraliser avec l'opérateur :

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (4.1)$$

$\hat{\mathcal{O}}_i \in \{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}\}$  tel que  $\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \beta \left( \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \right)$  et pour simplifier ici  $Z \equiv Z_{thermal}$  :

**Point clé n° 1.** Sa moyenne , variance et écartype de l'observable :

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{\overbrace{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}^{P_{\{\theta_a\}}}}{Z} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \quad (4.2)$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \quad (4.3)$$

$$\Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 = \left\langle \left( \hat{\mathcal{O}}_i - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_{j \neq i}} - \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \right)^2 \quad (4.4)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \right) \Big|_{\beta_{j \neq i}} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_{j \neq i}} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \quad (4.4)$$

si  $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{N}}$  alors  $\beta_i = -\beta\mu$  et si  $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{E}} - \mu\hat{\mathcal{N}}$  alors  $\beta_i = \beta$ .

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}}_i | \{\theta_a\} \rangle \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}, \quad (4.5)$$

$$= \sum_{\{\theta_b\}} \langle \{\theta_b\} | \hat{\mathcal{O}}_i \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} | \{\theta_b\} \rangle, \quad (4.6)$$

$$= \text{Tr}(\hat{\mathcal{O}}_i \hat{\rho}) \quad (4.7)$$

avec  $\hat{\rho} = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} |$  et  $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}$  tel que  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$

La matrice densité GGE avec  $Z \equiv Z_{GGE}$  est :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} |. \quad (4.8)$$

Dans le cas thermique, on peut remarquer que  $\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^0$  et  $\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^2$ . On peut donc réécrire  $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{a=1}^N \theta_a^i \quad (4.9)$$

et pour chaque  $a \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :  $\sum_i \alpha_i \theta_a^i$  converge donc on peut échanger les deux sommes soit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^N f(\theta_a) \quad (4.10)$$

avec  $f(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i$ . Et on peut réécrire la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \frac{e^{-\hat{Q}[f]}}{Z_{GGE}}, \quad (4.11)$$

$$e^{-\hat{Q}[f]} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} | \quad (4.12)$$

pour une certaine fonction  $f$  relié à la charge  $\hat{Q}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \left( \sum_{a=1}^N f(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$ . Et on peut réécrire la probabilité de la configuration  $\{\theta_a\}$  :  $P_{\{\theta_a\}} = \langle \{\theta_a\} | \hat{\rho}_{GGE}[f] | \{\theta_a\} \rangle = e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} / Z$  avec  $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}$ .

Nous aimerions calculer les valeurs d'attente par rapport à cette matrice de densité, par exemple La moyenne GGE d'un observable s'écrit ,

**Point clé n° 2.**

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} \doteq \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} \hat{\rho}_{GGE}[f])}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{GGE}[f])} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} e^{-\hat{Q}[f]})}{\text{Tr}(e^{-\hat{Q}[f]})} = \frac{\sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}}{\sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}} \quad (4.13)$$

pour une certaine observable  $\hat{\mathcal{O}}$ .

## 4.4 Entropie de Yang-Yang généralisée



## Troisième partie

# Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée



## CHAPITRE

# 5

# HYDRODYNAMIQUE ET RÉGIMES ASYMPTOTIQUES

## Contents

5.1	Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques . . . . .	23
5.2	Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité . . . . .	23
5.3	Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD) . . . . .	23

5.1 Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques

5.2 Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité

5.3 Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)





# FLUCTUATIONS ET CORRECTIONS À L'HYDRODYNAMIQUE GÉNÉRALISÉE

## Contents

6.1	Fluctuations de la distribution de rapidité . . . . .	25
6.2	Ordre 2 des corrections et rôle de l'entropie de Yang-Yang . . . . .	27
6.3	Confrontation entre hydrodynamique classique et hydrodynamique généralisée . . . . .	27

## 6.1 Fluctuations de la distribution de rapidité

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux fluctuations de la distribution de rapidité  $\delta\Pi$  autour d'une distribution de référence  $\Pi^c$ , qui maximise la contribution à la fonction de partition des états, exprimée comme une fonctionnelle de la distribution  $\Pi$  :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\Pi} \exp(-\mathcal{A}(\Pi)).$$

Dans la section **Entropie de Yang-Yang** (??), l'action  $\mathcal{A}(\Pi)$  s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}(\Pi) \doteq -S_{YY}(\Pi) + \int f(\theta)\Pi(\theta) d\theta,$$

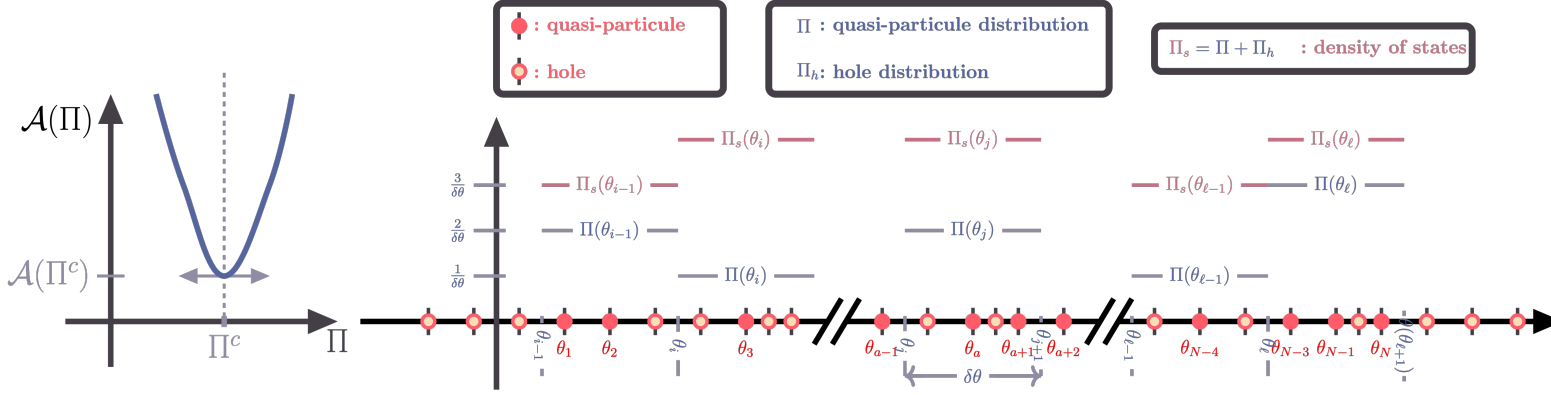
où  $S_{YY}$  est la fonctionnelle d'entropie de Yang-Yang, définie dans (??), et  $f$  est la fonction paramétrant les charges, introduite dans (??).

Dans cette même section **Entropie de Yang-Yang** (??), nous avons établi un lien entre  $f$  et  $\Pi^c$ .

Nous poursuivons à présent avec cette définition de l'action de classe  $\mathcal{C}^2$  et admetant une distribution critique  $\Pi^c$  tel que sa différentielle en ce point critique soit nulle  $d\mathcal{A}_{\Pi^c} = 0$  (??) de sorte que d'après la formule de Taylor-Young

$$\mathcal{A}(\Pi^c + \delta\Pi) \underset{\delta\Pi \rightarrow 0}{=} \mathcal{A}(\Pi^c) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi^2} \Big|_{\Pi^c} (\delta\Pi)^2 + \mathcal{O}((\delta\Pi)^3),$$

une expression quadratique pour l'action à l'ordre dominant en  $\delta\Pi$  avec  $\left. \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi^2} \right|_{\Pi^c}$  la forme quadratique définie positive (Fig (??)).



On discrétise l'axe des rapidités en petite cellule de rapidité  $[\theta, \theta + \delta\theta]$ , qui contient  $\Pi(\theta)\delta\theta$  rapidités. Avec ces petites tranches, la forme quadratique s'écrit :

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi^2} \right|_{\Pi^c} (\delta\Pi) = \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta\Pi(\theta_a) \partial \delta\Pi(\theta_b)} (\Pi^c) \delta\Pi(\theta_b).$$

Les fluctuations s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \langle \delta\Pi(\theta) \delta\Pi(\theta') \rangle &= \frac{\int d\delta\Pi \delta\Pi(\theta) \delta\Pi(\theta') \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta\Pi(\theta_a) \partial \delta\Pi(\theta_b)} (\Pi^c) \delta\Pi(\theta_b) \right)}{\int d\delta\Pi \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta\Pi(\theta_a) \partial \delta\Pi(\theta_b)} (\Pi^c) \delta\Pi(\theta_b) \right)} \\ &= (\mathbf{A}^{-1})_{\theta, \theta'} \end{aligned}$$

La matrice hessienne  $\mathbf{A}_{\theta, \theta'} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \delta\Pi(\theta) \partial \delta\Pi(\theta')} (\Pi^c)$ , au point critique  $\Pi^c$ , s'écrit

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta \hat{\mathbf{V}}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{\theta, \theta'}^{(0)} &= \left( \frac{(\Pi^c / \Pi_s^c)^{-1}}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta) \delta\theta \delta_{\theta, \theta'}, \\ V_{\theta, \theta'} &= \left\{ - \left[ \left( \frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta) + \left( \frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta') \right] \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} + \int d\theta'' \left( \frac{\Pi^c / \Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta'') \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi} \right\} \delta\theta \end{aligned}$$

**Point clé n° 3.** Donc une a l'ordre un en  $\delta\theta(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1} \hat{\mathbf{V}}$

$$\langle \delta\Pi(\theta) \delta\Pi(\theta') \rangle = ((\Pi_s^c - \Pi^c) \Pi^c / \Pi_s^c) (\theta) \delta_{\theta, \theta'} / \delta\theta + \mathcal{F}(\theta, \theta'),$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\theta, \theta') &= [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta) + (\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} \\ &\quad - [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta)(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \int d\theta'' \left( \frac{\Pi^c/\Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta'') \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi}\end{aligned}$$

## 6.2 Ordre 2 des corrections et rôle de l'entropie de Yang-Yang

## 6.3 Confrontation entre hydrodynamique classique et hydrodynamique généralisée