

# Quantum inverse scattering method and correlation functions

Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin

1<sup>er</sup> octobre 2024

La méthode de diffusion inverse quantique est un moyen de trouver des solutions exactes pour des modèles bidimensionnels en théorie quantique des champs et en physique statistique, tels que l'équation de sine-Gordon ou l'équation de Schrödinger non linéaire quantique. Ces modèles suscitent beaucoup d'attention parmi les physiciens et les mathématiciens.

Le présent texte est une introduction à ce domaine important et passionnant. Il se compose de quatre parties. La première traite de l'Ansatz de Bethe et du calcul de quantités physiques. Les auteurs donnent ensuite un exposé détaillé mais pédagogique de la méthode de diffusion inverse quantique avant de l'appliquer dans la deuxième moitié du livre au calcul des fonctions de corrélation. Il s'agit de l'une des applications les plus importantes de la méthode, et les auteurs ont apporté des contributions significatives à ce domaine. Ici, ils décrivent certaines des approches les plus récentes et générales et incluent quelques nouveaux résultats.

Ce livre sera une lecture essentielle pour tous les physiciens mathématiciens, au niveau de la recherche ou des études supérieures, travaillant en théorie des champs et en physique statistique.

TABLE DES MATIÈRES

<b>I</b>	<b>L'Ansatz de Bethe par coordonnées</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Le gaz de Bose unidimensionnel</b>	<b>13</b>
1.1	L'Ansatz de Bethe par coordonnées . . . . .	14
1.2	Conditions aux limites périodiques . . . . .	20
1.3	La limite thermodynamique à température nulle . . . . .	25
1.4	Excitations à température nulle . . . . .	28
1.5	Thermodynamics of the model . . . . .	29
<b>II</b>	<b>La Méthode Quantique de Diffusion Inverse (QISM)</b>	<b>31</b>
<b>2</b>	<b>La r-matrice Classique</b>	<b>35</b>
2.1	La Représentation de Lax . . . . .	36
2.2	La matrice r classique . . . . .	40



Ce livre est consacré aux solutions exactes des modèles de la théorie quantique des champs (dans une dimension spatiale et une dimension temporelle). Nous étudions également des modèles bidimensionnels de physique statistique classique, qui sont naturellement liés à ces problèmes. Les descriptions complètes des modèles solubles sont données par le Bethe Ansatz, découvert par H. Bethe en 1931 [?], lors de l'étude de l'antiferromagnétisme de Heisenberg. Le Bethe Ansatz a été très utile pour la résolution de divers problèmes [?, ?, ?, ?], [?], [?], et [?].

Certains modèles solubles par Bethe Ansatz ont des applications physiques directes. Un problème célèbre résolu par le Bethe Ansatz est le problème de Kondo (voir [?] et [?]). Un autre modèle est le modèle de Hubbard [?], qui est lié à la supraconductivité à haute température. Une application importante du Bethe Ansatz se trouve en optique non linéaire, où l'émission spontanée coopérative de radiation peut être décrite par un modèle quantique exactement soluble [?]. Le Bethe Ansatz est très utile en physique théorique moderne [?, ?]. Les fonctions de corrélation nous fournissent des informations dynamiques sur le modèle. Elles sont décrites en détail dans ce livre.

Les modèles solubles par Bethe Ansatz ne sont pas libres ; ils généralisent les modèles libres de la théorie quantique des champs dans le sens suivant. La dynamique à plusieurs corps des modèles libres peut être réduite à une dynamique à un corps. Avec le Bethe Ansatz, la dynamique à plusieurs corps peut être réduite à une dynamique à deux corps. La matrice de diffusion pour plusieurs particules est égale au produit de celles à deux particules. Cela conduit à la relation d'auto-consistance pour la matrice de diffusion à deux particules, connue sous le nom de l'équation de Yang-Baxter (un aperçu des articles peut être trouvé dans [?]), qui est le concept central des modèles exactement solubles. Le rôle de l'équation de Yang-Baxter va au-delà de la théorie des systèmes dynamiques. Elle est très importante dans la théorie des nœuds [?] et des groupes quantiques [?].

Les modèles quantiques exactement solubles sont étroitement liés à la théorie des équations différentielles complètement intégrables. La relation la plus simple est fournie par la limite quasiclassique. Les fonctions de corrélation quantiques sont décrites par des équations différentielles classiques. La méthode moderne pour résoudre ces équations, la méthode de diffusion inverse, a été fondée en 1967 par Gardner, Greene, Kruskal et Miura [?]. Ils ont étudié l'équation de Korteweg-de Vries. P. Lax a montré que cette équation peut être représentée comme une condition de commutativité pour deux opérateurs différentiels linéaires [?]. Il est intéressant de noter que la représentation de Lax est liée algébriquement à l'équation de Yang-Baxter [?].

La méthode de diffusion inverse a permis de résoudre une large classe d'équations différentielles non linéaires. Le réseau de Toda en est un exemple (voir [?], [?] et [?]). Ces équations ont des applications dans divers domaines de la physique : la physique des plasmas, l'optique non linéaire, les vagues océaniques non

linéaires, et d'autres. Il existe un certain nombre de livres très intéressants sur la méthode de diffusion inverse [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]. On doit également mentionner qu'il existe des équations différentielles complètement intégrables multidimensionnelles. La plus célèbre est l'équation de Yang-Mills autoduale [?]. D'autres exemples sont les équations de Davey-Stewartson [?] et de Kadomtsev-Petviashvili [?]. Les équations différentielles ordinaires complètement intégrables sont également extrêmement importantes; par exemple, les célèbres équations transcendentes de Painlevé (voir [?] et les références qui y sont citées). Elles apparaissent également en gravitation bidimensionnelle et dans les modèles matriciels (voir [?], [?], et [?]) ainsi que dans la description des fonctions de corrélation quantiques [?, ?, ?].

Le développement ultérieur de la méthode de diffusion inverse est lié à [?], où l'interprétation hamiltonienne a été comprise; L.D. Faddeev et V.E. Zakharov ont montré que la solution d'un modèle par la méthode de diffusion inverse peut être considérée comme une transformation en variables action-angle. Cela offre une opportunité pour la quantification quasiclassique. La théorie quantique des solitons a été construite dans [?, ?, ?, ?], où il a été montré qu'après quantification, les solitons apparaissent comme des particules élémentaires dans le spectre du Hamiltonien.

La méthode quantique de diffusion inverse a été découverte dans [?]. Elle offre une vue unifiée de la solution exacte des modèles classiques et quantiques. Elle combine les idées du Bethe Ansatz et de la méthode de diffusion inverse. Le premier modèle à être résolu par la méthode quantique de diffusion inverse était l'équation de Schrödinger non linéaire.

$$i\partial_t\Psi = -\partial_x^2\Psi + 2c\Psi^\dagger\Psi\Psi.$$

La représentation de Lax pour cette équation a été construite dans la référence [?]. Le Bethe Ansatz pour la version quantique de cette équation a été construit dans [?] et [?]. La méthode quantique de diffusion inverse a permis de reproduire les résultats du Bethe Ansatz en partant de la représentation de Lax. Un développement important de la méthode quantique de diffusion inverse est lié à l'étude des équations différentielles pour les fonctions de corrélation quantiques. Il a été montré dans [?] que les équations différentielles pour les fonctions de corrélation quantiques sont simplement reliées à l'équation différentielle originale qui a été quantifiée. Le langage correct pour la description des fonctions de corrélation est celui des fonctions  $\tau$ . Cela est décrit dans notre livre. Nous devons mentionner les articles [?] et [?] où les équations différentielles ont été obtenues pour la première fois pour les fonctions de corrélation du modèle d'Ising.

La méthode quantique de diffusion inverse est une méthode bien développée (voir les revues [?], [?], [?], [?], et [?]). Elle a permis de résoudre une large classe d'équations d'évolution non linéaires. Elle explique la nature algébrique du Bethe Ansatz. Notre livre explique cette méthode en détail. Un exemple important résolu par la méthode quantique de diffusion inverse est l'équation de sine-Gordon [?].

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta u = 0.$$

En relation avec ce modèle, nous souhaitons mentionner le nouveau livre de Smirnov [?]. L'Ansatz de Bethe algébrique est lié aux groupes quantiques [?]. Il est également profondément lié à la théorie des matrices  $S$  factorisées de Zamolodchikov [?] et à la théorie des modèles de réseaux exactement solvables en physique statistique classique (la meilleure revue de ces modèles est le livre de Baxter [?]) ainsi qu'à la théorie conforme des champs [?, ?].

Dans notre livre, nous essayons d'illustrer les énoncés généraux à travers quelques modèles simples. Notre principal exemple est l'équation de Schrödinger non linéaire (dans le cas quantique, il s'agit du modèle d'un gaz de Bose unidimensionnel avec répulsion  $\delta$ ). Nous considérons également le modèle de sine-Gordon, l'antiferromagnétisme de Heisenberg, et le modèle de Hubbard.

Notre livre est divisé en quatre parties, chacune ayant une introduction. La première partie explique l'Ansatz de Bethe en coordonnées. Nous évaluons l'énergie et l'impulsion des excitations ainsi que la matrice de diffusion dans la limite thermodynamique. Normalement, l'état fondamental du modèle est une sphère de Fermi (ou mer de Dirac). La thermodynamique du modèle est construite explicitement.

La deuxième partie explore la méthode de diffusion inverse quantique et l'Ansatz de Bethe algébrique. La classification des modèles exactement solvables y est donnée. Le concept important du déterminant quantique y est introduit (il est lié à l'antipode dans les groupes quantiques). La fonction de partition du modèle à six sommets est représentée comme un déterminant pour le réseau fini avec des conditions aux limites de paroi. Le principe de Pauli pour les bosons en interaction unidimensionnelle est également discuté. Des versions discrètes de modèles continus sont construites de manière à préserver les caractéristiques dynamiques les plus importantes.

Les troisième et quatrième parties décrivent la théorie des fonctions de corrélation. Dans la troisième partie, les fonctions de corrélation quantiques sont représentées comme des déterminants d'opérateurs intégraux (d'une forme très spéciale). La troisième partie commence par une étude algébrique des produits scalaires. Par exemple, il est prouvé que le carré de la norme de la fonction d'onde de Bethe est égal au déterminant de matrices très simples. Cela peut être obtenu par linéarisation des conditions aux limites périodiques (en forme logarithmique) près de la solution. Les fonctions de corrélation sont représentées comme des déterminants d'opérateurs intégraux spéciaux (de type Fredholm).

Dans la quatrième partie, des équations différentielles pour les fonctions de corrélation sont dérivées. Tout d'abord, nous représentons les fonctions de corrélation comme des déterminants de Fredholm d'un certain opérateur intégral. Cet opérateur intégral a une structure très spéciale qui nous permet de le considérer comme un opérateur de Gel'fand-Levitan-Marchenko d'une autre équation différentielle. Cette dernière équation gouverne les fonctions de corrélation. Les asymptotiques des fonctions de corrélation sont évaluées explicitement, même les fonctions de corrélation dépendant du temps et de la température.

Une autre approche des fonctions de corrélation est également discutée. Elle est liée à la théorie conforme des champs quantiques et permet d'évaluer les asymptotiques à longue distance des fonctions de corrélation à température nulle. Les modèles considérés ici sont sans gap, et les fonctions de corrélation décroissent en fonction de la distance; la température nulle est le point de transition de phase. Ces puissances sont appelées exposants critiques. Elles dépendent de tous les paramètres du modèle et nous les évaluons explicitement. La méthode d'évaluation est liée aux corrections de taille finie. La charge centrale de l'algèbre de Virasoro décrivant les asymptotiques de nos modèles est généralement égale à un.

Les parties du livre sont divisées en chapitres. Les objectifs de chaque chapitre sont expliqués dans une introduction, et à la fin de chaque chapitre, il y a une conclusion qui donne un résumé et contient des commentaires bibliographiques. Les références sont listées par chapitre à la fin du livre.

Il y a une double numérotation des formules dans le livre. Le premier nombre correspond au numéro de la section et le second est le numéro de la formule dans la section. Lorsqu'on fait référence à une formule dans différents chapitres, on précède le numéro de l'équation par le numéro du chapitre. Si nous faisons référence à une section d'un autre chapitre, le numéro de la section sera précédé du numéro du chapitre. Les théorèmes sont numérotés séparément dans chaque chapitre. Les sections marquées d'un astérisque peuvent être omises lors d'une première lecture.

Ce livre a été commencé à Saint-Petersbourg, où nous avons bénéficié de discussions avec L.D. Faddeev, A.R. Its, N.A. Slavnov, E.K. Sklyanin, N.Yu. Reshetikhin, L.A. Takhtajan, V.E. Zakharov, P.P. Kulish, V.N. Popov, F.A. Smirnov et A.N. Kirillov. Le livre a été terminé à Stony Brook. Nous apprécions grandement l'atmosphère créative de l'Institut de Physique Théorique à Stony Brook. Nous avons bénéficié de discussions avec C.N. Yang, B. McCoy, B. Sutherland, M. Fowler, H. Thacker, H. Flaschka, A. Fokas, A. Newell, M. Ablowitz, J. Palmer, C. Tracy, L.L. Chau, R. Shrock, W. Weisberger, E. Melzer, F. Essler, D. Uglov, H. Frahm, K. Schoutens, F. Figuerido, E. Williams et S. Ray. Les auteurs tiennent à remercier

David A. Coker pour la relecture et ses suggestions pédagogiques.  
Nous remercions la NSF pour la subvention PHY-9107261.



Première partie

L'Ansatz de Bethe par coordonnées



Une méthode de solution pour plusieurs modèles de théorie quantique des champs et de mécanique statistique en deux dimensions espace-temps est présentée dans cette Partie. Cette méthode a été proposée pour la première fois par H. Bethe en 1931 [1] et est traditionnellement appelée l'Ansatz de Bethe\*. Plus tard, la méthode a été développée par Hulthen, Yang et Yang, Lieb, Sutherland, Baxter, Gaudin et d'autres (voir [2], [3] et [4]).

Nous commençons la présentation avec l'Ansatz de Bethe par coordonnées non seulement pour des raisons historiques, mais aussi en raison de sa simplicité et de sa clarté. La matrice de diffusion multiparticulaire se révèle être égale au produit de matrices à deux particules pour les modèles intégrables. Cette propriété de réductibilité à deux particules est d'une importance primordiale lors de la construction de la fonction d'onde de Bethe. Une caractéristique importante des modèles intégrables est qu'il n'y a pas de production multiparticulaire sur la coquille de masse. Cette propriété est étroitement liée à l'existence d'un nombre infini de lois de conservation dans ces modèles ; cela deviendra clair dans la Partie II.

Quatre modèles principaux, à savoir le gaz de Bose unidimensionnel, le magnétisme de Heisenberg, le modèle de Thirring massif et le modèle de Hubbard, sont étudiés dans la Partie I. Les fonctions propres des hamiltoniens de ces modèles sont construites. L'imposition de conditions aux limites périodiques conduit à un système d'équations pour les valeurs permises des moments. Ces équations sont connues sous le nom d'équations de Bethe. Ce système peut également être dérivé d'un certain principe variationnel, l'action correspondante étant appelée l'action de Yang-Yang. Elle joue un rôle important dans l'étude des modèles. Les équations de Bethe sont également utiles dans la limite thermodynamique. L'énergie de l'état fondamental, la vitesse du son, etc., peuvent être calculées dans cette limite. Les excitations au-dessus de l'état fondamental, c'est-à-dire les particules physiques, sont également étudiées. Pour définir leurs caractéristiques physiques, la technique des équations de renormalisation est introduite et étudiée. La thermodynamique du modèle est expliquée en détail.

Le matériel de cette Partie est organisé comme suit. La théorie du gaz de Bose unidimensionnel avec interaction répulsive ponctuelle entre les particules est présentée dans le premier chapitre. La solution du magnétisme de Heisenberg XXZ dans un champ magnétique externe est donnée dans le deuxième chapitre. Le modèle quantique du champ spinoriel avec interaction à quatre points dans deux dimensions espace-temps est résolu dans le troisième chapitre. Cela est généralement appelé le modèle de Thirring massif, et il est équivalent au modèle de sine-Gordon (dans le secteur de charge nulle). Dans le dernier chapitre de la Partie I, le modèle de Hubbard des fermions en interaction sur un réseau est brièvement étudié.



## Introduction

Le gaz de Bose unidimensionnel avec interaction ponctuelle entre les particules (la variante quantique de l'équation de Schrödinger non linéaire) est l'un des principaux et des plus importants modèles qui peuvent être résolus par le biais de l'Ansatz de Bethe [14, 15]. Ce modèle a été largement étudié [1, 15, 117, 21, et 22]. Nous commencerons par la construction des fonctions propres de l'hamiltonien dans un volume fini. Les quantités intéressantes d'un point de vue physique dans la limite thermodynamique à température nulle sont considérées ; la thermodynamique à des températures finies est également étudiée en détail. Un certain nombre d'idées essentielles, qui seront appliquées à d'autres modèles, sont introduites.

La construction des fonctions propres de l'hamiltonien est expliquée dans la section 1. Leur forme explicite et, en particulier, la réductibilité à deux particules sont des caractéristiques communes des modèles résolubles par l'Ansatz de Bethe. Des conditions aux limites périodiques sont imposées à la fonction d'onde dans la section 2 ; les équations de Bethe pour les moments des particules sont introduites et analysées. Prenant une forme logarithmique, ces équations réalisent la condition d'extrémum d'une certaine fonctionnelle, l'action correspondante étant appelée l'action de Yang-Yang. Le passage à la limite thermodynamique est abordé dans la section 3. Dans cette même section, l'état fondamental du gaz est construit. La densité de distribution des particules dans l'espace des moments et l'énergie de l'état fondamental sont calculées. La méthode de passage à la limite thermodynamique décrite dans cette section est assez générale et peut être appliquée à tout modèle résoluble par l'Ansatz de Bethe. Dans la section 4, les excitations au-dessus de l'état fondamental sont construites et leurs principales caractéristiques (énergie, moment et matrice de diffusion) sont déterminées grâce aux équations de renormalisation. L'état fondamental du modèle est la mer de Dirac (également appelée sphère de Fermi).

La thermodynamique du modèle est présentée dans la section 5. L'approche par intégrale fonctionnelle est introduite. Elle nous permet de résoudre divers problèmes à des températures finies. Les équations de base décrivant l'état d'équilibre thermodynamique, dont l'équation de Yang-Yang, sont dérivées dans cette section. L'équation de Yang-Yang, qui est une équation intégrale non linéaire, est analysée dans la section 6. Le théorème démontrant l'existence de solutions est prouvé. L'état d'équilibre thermodynamique avec une température tendant vers zéro est examiné dans la section 7. En étudiant cette limite, nous pouvons obtenir des informations plus détaillées sur l'état fondamental de l'hamiltonien à température nulle. La limite de couplage fort (dans laquelle le modèle est équivalent au modèle des fermions libres) est discutée. Les équations intégrales sont résolues exactement dans cette limite.

Les excitations au-dessus de l'état d'équilibre thermodynamique sont étudiées et leur interprétation en termes de particules est donnée. Il est important de noter que les formules à température finie et à température nulle ne diffèrent que par la mesure d'intégration. La thermodynamique des modèles exactement solubles est si spéciale qu'il est possible de construire des excitations stables à température finie, voir la section 8. Les corrélations de température sont également discutées dans la section 8. Pour les modèles exactement solubles, elles sont également très particulières : elles peuvent être représentées sous une forme similaire à celle à température nulle. Plus tard, dans la Partie IV (Chapitres XIII-XVI), cela sera utilisé pour l'évaluation explicite des fonctions de corrélation en fonction de la température (même si elles dépendent du temps). La section 9 est consacrée à l'évaluation des corrections de taille finie à température nulle. Plus tard, elles seront utilisées pour le calcul des asymptotiques à grande distance des fonctions de corrélation à l'aide de la théorie conforme des champs.

## 1.1 L'Ansatz de Bethe par coordonnées

Le gaz de Bose unidimensionnel est décrit par les champs de Bose quantiques canoniques  $\Psi(x, t)$  avec les relations de commutation canoniques à temps égal :

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(y, t)] &= \hat{\delta}(x - y) \\ [\hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}(y, t)] = [\hat{\Psi}^\dagger(x, t), \hat{\Psi}^\dagger(y, t)] &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Par la suite, l'argument  $t$  sera en général omis, car toutes les considérations de ce chapitre s'appliquent à un moment fixe dans le temps.

Le Hamiltonien du modèle est donné par

$$\hat{H} = \int dx \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x) + c \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \right] \quad (1.2)$$

où  $c$  est la constante de couplage. L'équation du mouvement correspondante

$$i\hat{\partial}_t \hat{\Psi} = -\hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi} + 2c \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \quad (1.3)$$

est appelée l'équation de Schrödinger non linéaire (NS).

Pour  $c > 0$ , l'état fondamental à température nulle est une sphère de Fermi. Seul ce cas sera considéré par la suite. Le vide de Fock  $|0\rangle$ , défini par

$$\forall x \in \mathbb{R} : \hat{\Psi}(x)|0\rangle = 0 \quad (1.4)$$

est d'une grande importance.

It will be called the pseudovacuum and it is to be distinguished from the physical vacuum which is the ground state of the Hamiltonian (the Dirac sea). The dual pseudovacuum  $\langle 0|$  is defined as  $\langle 0| = |0\rangle^\dagger$  and satisfies the relations ... where the dagger denotes Hermitian conjugation. The number of particles operator  $\hat{Q}$  and momentum operator  $\hat{P}$  are

Il sera appelé le pseudovacuum et doit être distingué du vide physique, qui est l'état fondamental de l'Hamiltonien (la mer de Dirac). Le pseudovacuum dual  $\langle 0|$  est défini comme  $\langle 0| = |0\rangle^\dagger$  et satisfait les relations

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \langle 0 | \hat{\Psi}^\dagger(x) = 0, \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (1.5)$$

où la dague ( $^\dagger$ ) désigne la conjugaison hermitienne.

L'opérateur du nombre de particules  $\hat{Q}$  et l'opérateur de moment  $\hat{P}$  sont définis comme

$$\hat{Q} = \int \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) dx \quad (1.6)$$

$$\hat{P} = -\frac{i}{2} \int \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\partial}_x \hat{\Psi}(x) - \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \right\} dx \quad (1.7)$$

Ce sont des opérateurs hermitiens et ils constituent des intégrales du mouvement

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = [\hat{H}, \hat{P}] = 0. \quad (1.8)$$

Il convient de noter que dans la Partie II, nous allons construire un nombre infini d'intégrales du mouvement. Nous pouvons maintenant chercher les fonctions propres communes  $|\psi_N\rangle$  des opérateurs  $\hat{H}$ ,  $\hat{Q}$ , et  $\hat{P}$  :

$$|\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle. \quad (1.9)$$

Ici,  $\chi_N$  est une fonction symétrique de toutes les variables  $z_j$ . L'équation aux valeurs propres

$$\hat{H}|\psi_N\rangle = E_N|\psi_N\rangle, \quad \hat{P}|\psi_N\rangle = p_N|\psi_N\rangle, \quad \hat{Q}|\psi_N\rangle = q_N|\psi_N\rangle, \quad (1.10)$$

conduit au fait que  $\chi_N$  est une fonction propre à la fois de l'Hamiltonien mécanique quantique  $\hat{\mathcal{H}}_N$  et de l'opérateur du moment mécanique quantique  $\hat{\mathcal{P}}_N$  :

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{H}}_N = \sum_{j=1}^N -\hat{\partial}_{z_j}^2 + 2c \sum_{1 \leq k < j \leq N} \hat{\delta}(z_j - z_k) \\ \hat{\mathcal{P}}_N = \sum_{j=1}^N -i \hat{\partial}_{z_j} \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_N \chi_N = E_N \chi_N. \quad (1.12)$$

Cela peut être expliqué en utilisant l'opérateur du moment  $\hat{P}$  (2.7) comme exemple. Tout d'abord, nous intégrons (2.7) par parties pour représenter  $\hat{P}$  sous la forme :

$$\hat{P} = i \int \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) dx$$

Agir avec cet opérateur sur la fonction propre (1.9) donne

$$\begin{aligned} \hat{P}|\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle &= \frac{i}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \left[ \hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \\ &\quad \times \sum_{k=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_k)] \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \end{aligned}$$

où l'équation (2.4) a été utilisée. La formule (2.1) donne une fonction delta pour le commutateur, qui peut ensuite être intégrée pour donner

$$\begin{aligned}\hat{P}|\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle &= \frac{i}{\sqrt{N!}} \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N \mid \lambda_1, \dots, \lambda_N) \\ &\times \sum_{k=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \left[ \hat{\partial}_{z_k} \hat{\Psi}^\dagger(z_k) \right] \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle.\end{aligned}$$

Nous intégrons maintenant par parties par rapport à  $z_k$  pour obtenir

$$\begin{aligned}\hat{P}|\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \left\{ -i \sum_{k=1}^N \hat{\partial}_{z_k} \chi_N(z_1, \dots, z_N \mid \lambda_1, \dots, \lambda_N) \right\} \\ &\times \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons prouvé que l'action de l'équation (2.7) sur l'équation (1.9) est équivalente à l'action de  $\hat{P}_N$  sur  $\chi_N$ . La construction de l'Hamiltonien mécanique quantique est assez similaire.

Le problème de la théorie quantique des champs est donc réduit à un problème de mécanique quantique. L'Hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}_N$  décrivant  $N$  particules bosoniques est répulsif pour  $c > 0$ . En raison de la symétrie de  $\chi$  par rapport à toutes les  $z_i$ , il est suffisant de considérer le domaine suivant  $T$  dans l'espace des coordonnées :

$$T : z_1 < z_2 < \cdots < z_N. \quad (1.13)$$

Dans ce domaine, la fonction  $\chi_N$  est une fonction propre de l'Hamiltonien libre.

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{H}}_N^0 &= - \sum_{j=1}^N \hat{\partial}_{z_j}^2 \\ \hat{\mathcal{H}}_N^0 \chi_N &= E_N \chi_N \end{cases} \quad (1.14)$$

Les conditions aux limites suivantes doivent être satisfaites :

$$(\hat{\partial}_{z_{j+1}} - \hat{\partial}_{z_j} - c) \chi_N = 0, \quad z_{j+1} = z_j + 0. \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{P_{x \rightarrow X}} \begin{pmatrix} z_j \\ z_{j+1} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} z_j \\ z_{j+1} \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{X \rightarrow x} = P_{x \rightarrow X}^{-1}} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}, \\ \hat{\partial} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{\hat{\partial} x \rightarrow \hat{\partial} X} = P_{x \rightarrow X}^{-1}} \hat{\partial} \begin{pmatrix} z_j \\ z_{j+1} \end{pmatrix}, & \hat{\partial} \begin{pmatrix} z_j \\ z_{j+1} \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}}_{P_{\hat{\partial} X \rightarrow \hat{\partial} x} = P_{\hat{\partial} x \rightarrow \hat{\partial} X}^{-1}} \hat{\partial} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



L'équation (1.14) et la condition aux limites (1.15) sont équivalentes à l'équation (1.12). En effet, le potentiel dans (1.11) est égal à zéro dans le domaine  $T$ . En intégrant l'équation (1.12) sur la variable  $(z_{j+1} - z_j)$  dans la petite région  $|z_{j+1} - z_j| < \epsilon$ , en considérant tous les autres  $z_k$  ( $k \neq j, j+1$ ) comme fixes dans  $T$ , on obtient exactement la condition (1.15).

Une fonction satisfaisant (1.14) et (1.15) peut être construite comme suit. Considérons la fonction propre de l'Hamiltonien (1.14) dans le domaine  $T$  donnée comme le déterminant de la matrice  $N \times N$   $\exp\{i\lambda_j z_k\}$

$$\det[\exp\{i\lambda_j z_k\}] \quad (1.16)$$

avec des nombres arbitraires  $\lambda_j$ . Cette fonction est égale à zéro sur la frontière du domaine  $T$  en raison de son antisymétrie par rapport à  $z_k$ . Il est alors facile de voir que la fonction  $\chi_N$  donnée par

$$\chi_N \propto \left[ \prod_{1 \leq k < j \leq N} (\partial_{z_j} - \partial_{z_k} + c) \right] \det[\exp\{i\lambda_j z_k\}] \quad (1.17)$$

satisfait les équations (1.14) et (1.15). Pour vérifier, par exemple, l'égalité

$$(\partial_{z_2} - \partial_{z_1} + c) \chi_N = 0, \quad z_2 = z_1 + 0. \quad (1.18)$$

réécrivons  $\chi_N$  comme

$$\chi_N = (\partial_{z_2} - \partial_{z_1} + c) \tilde{\chi}_N \quad (1.19)$$

où

$$\tilde{\chi}_N \propto \prod_{j=3}^N (\partial_{z_j} - \partial_{z_1} + c) (\partial_{z_j} - \partial_{z_2} + c) \times \left[ \prod_{3 \leq k < j \leq N} (\partial_{z_j} - \partial_{z_k} + c) \right] \det[\exp\{i\lambda_j z_k\}]. \quad (1.20)$$

Cette fonction est antisymétrique par rapport à  $z_1 \leftrightarrow z_2$ ,

$$\tilde{\chi}_N(z_1, z_2) = -\tilde{\chi}_N(z_2, z_1) \quad (1.21)$$

et elle est égale à zéro lorsque  $z_1 = z_2$ . En revenant à l'équation (1.18),

$$[(\partial_{z_2} - \partial_{z_1})^2 - c^2] \tilde{\chi}_N = 0, \quad z_2 = z_1 \quad (1.22)$$

nous voyons que le membre de gauche change de signe lorsque  $z_1 \leftrightarrow z_2$ , et donc l'égalité (2.22) est correcte. Nous pouvons de la même manière vérifier les autres conditions aux limites. Ainsi,  $\chi_n$  dans (1.17) est la fonction propre souhaitée de l'Hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}_N$  (1.11). Le déterminant dans (1.17) peut être écrit comme une somme sur toutes les permutations  $\mathcal{P}$  des nombres  $1, 2, \dots, N$  :

$$\det[\exp\{i\lambda_j z_k\}] = \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{\mathcal{P}(n)} \right\} \quad (1.23)$$

où  $[\mathcal{P}]$  désigne la parité de la permutation. On obtient, dans le domaine  $T$  (1.13) :

$$\begin{aligned} \chi_N &= \left\{ N! \prod_{k < j} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2] \right\}^{-1} \\ &\times \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{\mathcal{P}(n)} \right\} \prod_{k < j} [\lambda_{\mathcal{P}(j)} - \lambda_{\mathcal{P}(k)} - ic] \end{aligned} \quad (1.24)$$

avec la constante spécifiée. Continuons maintenant  $\chi_N$  par symétrie à l'ensemble de  $\mathbb{R}^N$  :

$$\begin{aligned} \chi_N &= \left\{ N! \prod_{k < j} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2] \right\}^{-1} \\ &\times \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{\mathcal{P}(n)} \right\} \prod_{k < j} [\lambda_{\mathcal{P}(j)} - \lambda_{\mathcal{P}(k)} - ic\epsilon(z_j - z_k)] \end{aligned} \quad (1.25)$$

où  $\epsilon(x)$  est la fonction signe. La méthode décrite ci-dessus a apparemment été suggérée par M. Gaudin [9]. Une autre manière utile d'écrire  $\chi_N$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \chi_N &= \frac{(-i)^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\sqrt{N!}} \left\{ \prod_{1 \leq k < j \leq N} \epsilon(z_j - z_k) \right\} \\ &\times \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^N z_k \lambda_{\mathcal{P}(k)} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{1 \leq k < j \leq N} \epsilon(z_j - z_k) \theta(\lambda_{\mathcal{P}(j)} - \lambda_{\mathcal{P}(k)}) \right\} \end{aligned} \quad (1.26)$$

où

$$\theta(x) = i \ln \left( \frac{ic + x}{ic - x} \right).$$

La formule (1.26) détermine la fonction d'onde de Bethe ; cette fonction est réductible à deux particules. Il convient de mentionner que les fonctions d'onde de tous les modèles résolubles par l'Ansatz de Bethe ont une forme similaire à (1.26). Discutons maintenant des propriétés de la fonction d'onde  $\chi_N$ . La fonction  $\chi_N$  est une fonction symétrique des variables  $z_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) et une fonction continue de chacune d'elles. Ces propriétés deviennent évidentes si l'on réécrit la représentation (1.26) sous la forme suivante :

$$\chi_N = \frac{\prod_{k < j} (\lambda_j - \lambda_k)}{\sqrt{N! \prod_{k < j} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2]}} \sum_{\mathcal{P}} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{\mathcal{P}(n)} \right\} \\ \times \prod_{k < j} \left[ 1 - \frac{ic\epsilon(z_j - z_k)}{(\lambda_{\mathcal{P}(j)} - \lambda_{\mathcal{P}(k)})} \right] \quad (1.27)$$

On peut également voir à partir de cette formule que  $\chi_N$  est une fonction antisymétrique des  $\lambda_j$  :

$$\chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_N) = -\chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N). \quad (1.28)$$

Ainsi,  $\chi_N = 0$  si  $\lambda_j = \lambda_k$ ,  $j \neq k$ . C'est la base du **principe d'exclusion de Pauli** pour les bosons en interaction en une dimension, qui joue un rôle fondamental dans la construction de l'état fondamental, appelé **mer de Dirac**. La démonstration complète du principe de Pauli est donnée dans la section VII.4.

Il est connu que le théorème reliant le spin et les statistiques ne s'applique pas dans des dimensions  $1 + 1$  de l'espace-temps. Par conséquent, certains modèles de bosons sont équivalents à des modèles de fermions. Par exemple, le **modèle de sine-Gordon** est équivalent au **modèle de Thirring massif**, tandis que le gaz de bosons unidimensionnel pour  $c = \infty$  est équivalent au modèle de fermions libres.

Nous avons déjà construit les fonctions propres communes  $\chi_N$  (équations (1.26), (1.9)) des opérateurs  $\hat{H}$ ,  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$ , les valeurs propres correspondantes étant données par

$$E_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2; \quad P_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j^1; \quad Q_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j^0 = N \quad (1.29)$$

Considérons maintenant les fonctions propres dans tout l'espace des coordonnées  $\mathbb{R}^N$  :  $-\infty < z_j < \infty$  (avec  $j = 1, \dots, N$ ). La normalisation dans ce cas a été calculée dans [?] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^N z \chi_N^*(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \chi_N(z_1, \dots, z_N | \mu_1, \dots, \mu_N) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^N \delta(\lambda_j - \mu_j). \quad (1.30)$$

Les moments  $\{\lambda\}$  et  $\{\mu\}$  sont supposés être ordonnés :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N, \quad \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_N \quad (1.31)$$

Dans le même livre [?], la complétude du système  $\chi_N$  est également prouvée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^N \lambda \chi_N^*(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \chi_N(y_1, \dots, y_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^N \delta(z_j - y_j). \quad (1.32)$$

$$z_1 < z_2 < \dots < z_N, \quad y_1 < y_2 < \dots < y_N. \quad (1.33)$$

## 1.2 Conditions aux limites périodiques

Pour analyser les différentes propriétés du gaz de Bose et notamment pour construire la thermodynamique du modèle, il est pratique d'imposer des conditions aux limites périodiques sur les fonctions d'onde. Considérons un système dans une boîte périodique de longueur  $L$ . La fonction d'onde  $\chi_N$  doit alors être périodique en chaque  $z_j$ , avec toutes les autres  $z_k$  (où  $k \neq j$ ) fixées :

$$\chi_N(z_1, \dots, z_j + L, \dots, z_N \mid \lambda_1, \dots, \lambda_N) = \chi_N(z_1, \dots, z_j, \dots, z_N \mid \lambda_1, \dots, \lambda_N). \quad (1.34)$$

Les conditions imposées par les limites périodiques conduisent au système d'équations suivant pour les valeurs permises des moments  $\lambda_j$  (voir équation (1.26)) :

$$\exp\{i\lambda_j L\} = - \prod_{k=1}^N \frac{\lambda_j - \lambda_k + ic}{\lambda_j - \lambda_k - ic}, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.35)$$

Ces équations sont connues sous le nom d'équations de Bethe. Le système d'équations de Bethe est d'une importance primordiale, et ses principales propriétés sont étudiées en détail par la suite.

### **Théorème 1.1**

Toutes les solutions  $\lambda_j$  du système (1.35) avec  $c > 0$  sont des nombres réels.

*Démonstration.* Utilisons les propriétés suivantes de  $\exp(i\lambda L)$  et  $\frac{\lambda+ic}{\lambda-ic}$  :

$$\begin{cases} |\exp\{i\lambda L\}| \leq 1 & \text{lorsque } \Im(\lambda) \geq 0 \\ |\exp\{i\lambda L\}| \geq 1 & \text{lorsque } \Im(\lambda) \leq 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} \left| \frac{\lambda + ic}{\lambda - ic} \right| \geq 1 & \text{lorsque } \Im(\lambda) \geq 0, \\ \left| \frac{\lambda + ic}{\lambda - ic} \right| \leq 1 & \text{lorsque } \Im(\lambda) \leq 0, \end{cases} \quad (1.37)$$

Considérons l'ensemble des nombres complexes  $\{\lambda_j\}$  qui satisfont l'équation (1.35). Désignons par  $\lambda_{\max}$  avec la partie imaginaire maximale, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Im(\lambda_{\max}) \geq \Im(\lambda_j), & j = 1, \dots, N, \\ \lambda_{\max} \in \{\lambda_j\}. \end{cases} \quad (1.38)$$

Si plusieurs moments ont cette même propriété, on en prend un d'eux. Prenons le module des deux côtés de l'équation pour  $\lambda_j = \lambda_{\max}$  dans (1.35) et utilisons l'estimation (1.37) pour le côté droit, obtenant ainsi :

$$|\exp(i\lambda_{\max} L)| = \left| \prod_k \frac{\lambda_{\max} - \lambda_k + ic}{\lambda_{\max} - \lambda_k - ic} \right| \geq 1. \quad (1.39)$$

D'après (1.36), cela implique que  $\Im(\lambda_{\max}) \leq 0$ , et, par conséquent, selon (1.38) :

$$\Im(\lambda_j) \leq 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.40)$$

Définissons maintenant  $\lambda_{\min}$  comme le moment avec la partie imaginaire minimale :  $\Im(\lambda_{\min}) \leq \Im(\lambda_j)$ . De manière similaire, on prouve que  $\Im(\lambda_{\min}) \geq 0$ . La seule possibilité restante est donc que  $\Im(\lambda_j) = 0$  pour tous  $j = 1, \dots, N$ .

Le théorème est ainsi prouvé. □

**Existence des solutions de (1.35) :** Transformons maintenant le système en forme logarithmique :

$$\varphi_j = 2\pi\tilde{n}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.41)$$

où  $\tilde{n}_j$  est un ensemble arbitraire d'entiers. Les variables  $\varphi(\lambda_j - \lambda_k)$  sont définies comme :

$$\varphi_j = \lambda_j L + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \varphi(\lambda_j - \lambda_k) \quad (1.42)$$

où

$$\varphi(\lambda) = i \ln \left( \frac{\lambda + ic}{\lambda - ic} \right); \quad -2\pi < \varphi(\lambda) < 0, \quad \Im(\lambda_j) = 0. \quad (1.43)$$

Il est plus pratique d'utiliser la fonction antisymétrique  $\theta(\lambda)$  au lieu de  $\varphi(\lambda)$  :

$$\begin{cases} \theta(\lambda) = \varphi(\lambda) + \pi, & \theta(\lambda) = -\theta(-\lambda) \\ \theta(\lambda) = i \ln \left( \frac{ic + \lambda}{ic - \lambda} \right). \end{cases} \quad (1.44)$$

Cette fonction est strictement croissante en  $\lambda$  :

$$\begin{cases} \theta(\lambda_2) > \theta(\lambda_1), & \text{quand } \lambda_2 > \lambda_1 \quad \theta(\pm\infty) = \pm\pi \\ \theta'(\lambda) = \frac{2c}{\lambda^2 + c^2} \end{cases} \quad (1.45)$$

Récrivons les équations (1.41) et (1.42) sous la forme suivante :

$$\lambda_j L + \sum_{k \neq j} \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi n_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.46)$$

où les nombres  $n_j$  sont des entiers ou des demi-entiers.

$$n_j = \tilde{n}_j + \frac{N-1}{2}. \quad (1.47)$$

Ce système d'équations est équivalent au système (1.35). Les équations (1.46) sont également appelées les équations de Bethe.

## Théorème 1.2

Les solutions des équations de Bethe (1.46) existent et peuvent être paramétrées de manière unique par un ensemble de nombres entiers (ou demi-entiers)  $n_j$ .

*Démonstration.* La preuve est basée sur le fait que les équations (1.46) peuvent être obtenues à partir d'un principe variationnel. L'action correspondante a été introduite par C.N. Yang et C.P. Yang (22) :

$$S = \frac{1}{2}L \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - 2\pi L \sum_{j=1}^N n_j \lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k}^N \theta_1 \lambda_j - \lambda_k \quad (1.48)$$

où  $\theta_1(\lambda) = \int_0^\lambda \theta(\mu) d\mu$ . Les équations (1.46) sont les conditions d'extrémum pour  $S$  ( $\partial S / \partial \lambda_j = 0$ ), cet extrémum étant un minimum. Pour prouver cela, il suffit d'établir que la matrice des dérivées secondes  $\partial^2 S / \partial \lambda_j \partial \lambda_k$  est définie positive (tous les valeurs propres sont positives). On a :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_\ell} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda_\ell} = \varphi'_{j\ell} = \delta_{j\ell} \left[ L + \sum_{m=1}^N K(\lambda_j, \lambda_m) \right] - K(\lambda_j, \lambda_\ell) \quad (1.49)$$

où

$$K(\lambda, \mu) = \varphi'(\lambda - \mu) = \theta'(\lambda - \mu) = \frac{2c}{(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2}, \quad (1.50)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_\ell} v_j v_\ell = \sum_{j=1}^N L v_j^2 + \sum_{1=\ell < j}^N K(\lambda_j, \lambda_\ell) (v_j - v_\ell)^2 \geq L \sum_{j=1}^N v_j^2 > 0 \quad (1.51)$$

pour tout vecteur  $v_j$  à composantes réelles. La matrice des dérivées secondes est donc définie positive : l'action est effectivement convexe. Ainsi,  $S$  possède un unique minimum qui définit les solutions des équations de Bethe.

Le Théorème est donc prouvé. □

Dans le chapitre ??? , nous verrons que le carré de la norme de la fonction d'onde dans la boîte périodique est égal au déterminant de la dérivée seconde de l'action de Yang-Yang évaluée sur les solutions des équations de Bethe :

$$\int_0^L d^N z |\chi_N|^2 = \det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_\ell} \right). \quad (1.52)$$

L'antisymétrie de  $\theta(\lambda)$  conduit à l'égalité suivante :

$$P_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j = \frac{2\pi}{L} \sum_{j=1}^N n_j, \quad (1.53)$$

où  $P_N$  est l'impulsion du système (voir l'équation ??).

La solution du système (1.46) possède la propriété importante suivante :

### Théorème 1.3

Si  $n_j > n_k$ , alors  $\lambda_j > \lambda_k$ . Si  $n_j = n_k$ , alors  $\lambda_j = \lambda_k$ .

*Démonstration.* Substituons l'équation  $k$ -ème du système à l'équation  $j$ -ème :

$$L(\lambda_j - \lambda_k) + \sum_{l=1}^N [\theta(\lambda_j - \lambda_l) - \theta(\lambda_k - \lambda_l)] = 2\pi(n_j - n_k). \quad (1.54)$$

En raison de l'augmentation monotone de la fonction  $\theta(\lambda)$  par rapport à  $\lambda$ , le côté gauche est du même signe que son premier terme. Le théorème est ainsi prouvé.  $\square$

En particulier, si  $n_j = n_k$ , alors  $\lambda_j = \lambda_k$ , ce qui implique que la fonction d'onde est nulle en vertu du principe de Pauli. Ainsi, seuls les  $n_j \neq n_k$  (avec  $j \neq k$ ) doivent être pris en compte. Puisque la fonction d'onde est antisymétrique par rapport aux  $\lambda$ , on peut toujours ordonner les  $\lambda_j > \lambda_k$  lorsque  $j > k$ , d'où :

$$n_j > n_k \quad \text{lorsque} \quad j > k. \quad (1.55)$$

Pour passer à la limite thermodynamique, nous aurons besoin des propriétés suivantes :

1. Les différentes solutions  $\lambda_j$  du système (1.46) sont séparées par un certain intervalle :

$$\frac{2\pi(n_j - n_k)}{L} \geq |\lambda_j - \lambda_k| \geq \frac{2\pi(n_j - n_k)}{L(1 + \frac{2D}{c})} \geq \frac{2\pi}{L(1 + \frac{2D}{c})}; \quad j \neq k \quad (1.56)$$

où  $D = N/L$  est la densité du gaz de Bose. Cette estimation découle de l'équation (??) si l'on utilise les inégalités :

$$0 < K(\lambda, \mu) < \frac{2}{c}; \quad \lambda = \mu = 0 \quad (1.57)$$

et

$$\theta(\lambda) - \theta(\mu) = \int_{\mu}^{\lambda} K(\nu, 0) d\nu \leq \frac{2}{c}(\lambda - \mu), \quad \lambda = \mu. \quad (1.58)$$

2. La fonctionnelle d'énergie  $\sum_{j=1}^N \lambda_j^2$  dans le secteur avec un nombre de particules  $N$  fixé, sous la condition que  $\{\lambda_j\}$  sont des solutions des équations de Bethe (1.46), est minimisée par l'ensemble suivant de nombres  $n_j$ , qui sont des entiers (pour  $N$  impair) ou des demi-entiers (pour  $N$  pair) :

$$n_j = -\frac{N-1}{2} + j - 1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.59)$$

(C'est évident lorsque  $c \rightarrow \infty$ .)

3. Définissons une fonction  $\lambda(x)$  (où  $x \in \mathbb{R}^1$ ) qui est étroitement liée à la solution  $\{\lambda_j\}$  des équations de Bethe (1.46). Cette fonction est définie par la relation suivante :

$$L\lambda(x) + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda(x) - \lambda_k) = 2\pi Lx. \quad (1.60)$$

En introduisant une action  $S$  similaire à (??) :

$$S = \frac{1}{2}L\lambda^2(x) + \sum_{j=1}^N \theta_1(\lambda(x) - \lambda_k) - 2\pi Lx\lambda(x) \quad (1.61)$$

on peut facilement prouver qu'une valeur unique  $\lambda(x)$  existe pour chaque  $x$  réel, et que  $\lambda(x)$  est une fonction strictement croissante et bijective de  $x$ . La valeur de la fonction  $\lambda(x)$  à  $x = n_j/L$  correspond à  $\lambda_j$  de la solution des équations de Bethe (1.46) :

$$\lambda\left(\frac{n_j}{L}\right) = \lambda_j \quad \text{avec} \quad n_j \in \{n_k\}. \quad (1.62)$$

Les valeurs  $\lambda_j$  seront appelées les moments des particules présentes dans l'état  $\chi_N$  (voir équation (1.26)). Prenons maintenant le nombre  $m \in \{n_j\}$  (où  $m$  est entier pour  $N$  impair et demi-entier pour  $N$  pair). On peut appeler la valeur correspondante de  $\lambda(x)$  :

$$\lambda_m = \lambda\left(\frac{m}{L}\right) \quad (1.63)$$

le moment  $\lambda_m$  du trou. Ainsi, chaque nombre  $n$  (entier ou demi-entier), avec  $n \bmod 1 = [(N-1)/2]$ , définit une « vacance ». Une vacance remplie correspond à une particule, et une vacance libre correspond à un trou. Le nombre total de particules et de trous donne le nombre complet de vacances. La quantité  $\rho_t(\lambda)$ , ou sous forme logarithmique :

$$\rho_t(\lambda(x)) = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}, \quad (1.64)$$

est la densité de vacances. En différenciant l'équation (??) par rapport à  $\lambda$ , on obtient :

$$1 + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^N K(\lambda(x), \lambda_k) = 2\pi\rho_t(\lambda(x)), \quad (1.65)$$

où  $K(\lambda(x), \lambda_k)$  est un terme de couplage.

Il est parfois utile de considérer des conditions aux limites antipériodiques :

$$\chi_N(z_j + L) = -\chi_N(z_j), \quad (1.66)$$

au lieu des conditions périodiques (??). Cette condition élimine le signe moins du côté droit des équations de Bethe (1.35). Les considérations ultérieures restent les mêmes.

Faisons quelques remarques sur le cas où  $c \rightarrow \infty$ . Il est facile de voir que les équations de Bethe (1.35) deviennent :

$$e^{iL\lambda_j} = (-1)^{N+1}. \quad (1.67)$$

ou dans la forme logarithmique

$$L\lambda_j = 2\pi\tilde{n}_j \quad (1.68)$$

Cette équation décrit des particules non-interagissantes et, en raison du principe d'exclusion de Pauli (voir chapitre VII.4), le modèle dans cette limite est équivalent au modèle des fermions libres [?], [?], et [?]. Voir l'Appendice ??? pour plus de détails.



### 1.3 La limite thermodynamique à température nulle

Dans la limite thermodynamique, le nombre de particules  $N$  et le volume (ici la longueur de la boîte  $L$ ) tendent vers l'infini, de sorte que leur rapport, la densité  $D = N/L$ , reste constant :

$$N \rightarrow \infty, \quad L \rightarrow \infty, \quad \text{avec} \quad D = \frac{N}{L} = \text{constante.} \quad (1.69)$$

Considérons maintenant le système à température nulle. Rappelons que l'état avec la plus basse énergie dans le secteur à nombre de particules fixé correspond aux solutions  $\lambda_j$  des équations de Bethe suivantes :

$$\lambda_j L + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi \left[ j - \left( \frac{N+1}{2} \right) \right], \quad j = 1, \dots, N \quad (1.70)$$

où les nombres  $n_j$  sont choisis conformément à l'équation (??). Dans la limite thermodynamique, les valeurs  $\lambda_j$  se condensent ( $\lambda_{j+1} - \lambda_j = O(1/L)$ , voir (??)), et remplissent l'intervalle symétrique  $[-q, q]$ . En théorie des champs quantiques, cet état est appelé la mer de Dirac, et en physique de l'état solide, la sphère de Fermi, où

$$q = \lim \lambda_N. \quad (1.71)$$

Désignons par  $\rho(\lambda)$  la densité de particules dans l'espace des moments (voir (??), (??) et le théorème ??) de la manière suivante :

$$\rho(\lambda) = \lim \frac{1}{L(\lambda_{k+1} - \lambda_k)} > 0. \quad (1.72)$$

Comme toutes les vacantes à l'intérieur de l'intervalle  $[-q, q]$  sont occupées, on a (voir (??)) :

$$\rho(\lambda) = \rho_t(\lambda) = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} > 0, \quad -q \leq \lambda \leq q. \quad (1.73)$$

Par définition,  $\rho(\lambda)$  est positive. La quantité  $L \int \rho(\lambda) d\lambda$  est égale au nombre de particules dans l'intervalle  $[-q, q]$ .

Revenons maintenant à l'équation (??), en remplaçant la somme par une intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^N K(\lambda(x), \lambda_l) &= \int_{-N/2L}^{+N/2L} K(\lambda(x), \lambda(y)) dy \\ &= \int_{-q}^{+q} K(\lambda(x), \mu) \rho(\mu) dy, \end{aligned} \quad (1.74)$$

cela conduit à l'équation intégrale linéaire pour  $p(\lambda)$  :

$$\rho(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \rho(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} \quad (1.75)$$

Cette équation a été obtenue pour la première fois dans [?]; nous l'appellerons l'équation de Lieb. Dans la méthode de diffusion inverse quantique,  $\lambda$  est le paramètre spectral additif et  $q$  est la valeur du paramètre spectral à la frontière de la sphère de Fermi. (Une définition plus complète de  $q$  est donnée dans la section 9.) À partir de la définition de  $\rho(\lambda)$ , on a :

$$D = \frac{N}{L} = \int_{-q}^q \rho(\lambda) d\lambda. \quad (1.76)$$

Avec l'aide de cette équation et de l'équation (??), nous pouvons calculer l'impulsion de Fermi comme une fonction unique de  $D$ .

Il est pratique d'introduire l'opérateur linéaire  $\hat{K}$  avec noyau positif  $K(\lambda, \lambda')$ . Cet opérateur agit sur la fonction  $\rho(\lambda)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (\hat{K}p)(\lambda) &= \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \rho(\mu) d\mu. \\ K(\lambda, \mu) &= \frac{2c}{c^2 + (\lambda - \mu)^2} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Le fait que l'équation (??) ait une solution unique découle de la non-dégénérescence de l'opérateur  $1 - \frac{\hat{K}}{2\pi}$ . En prenant la limite thermodynamique  $(??)N \rightarrow \infty$  (voir (??), (??)), on a

$$\int_{-q}^q d\lambda v(\lambda)^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q d\lambda \int_{-q}^q d\mu K(\lambda, \mu) v(\lambda) v(\mu) \geq \int_{-q}^q \frac{v(\lambda)^2}{2\pi \rho(\lambda)} \geq 0 \quad (1.78)$$

pour toute fonction réelle  $v(\lambda)$ . Ainsi, l'opérateur  $1 - \frac{\hat{K}}{2\pi}$  est en effet non dégénéré, et ses valeurs propres sont positives, étant séparées de zéro par une lacune  $(2\pi\rho_{\max})^{-1}$ , où  $\rho_{\max}$  est la valeur maximale de  $\rho(\lambda)$  sur l'intervalle  $-q \leq \lambda \leq q$ .

On obtient à partir de (??) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2\frac{D}{c} \right) &\geq \rho_{\max} \geq \rho(\lambda) \geq \frac{1}{2\pi} \\ 0 &< \frac{1}{2\pi} K \leq \frac{2D}{2D + c} < 1 \end{aligned} \quad (1.79)$$

où  $K$  est une valeur propre de l'opérateur  $\hat{K}$ . La positivité de  $\hat{K}$  est prouvée dans [?]. Lorsque  $c \rightarrow \infty$ , le noyau  $K(\lambda, \mu) \rightarrow 0$  et toutes les équations peuvent être résolues exactement. Le modèle est alors équivalent au modèle des fermions libres au point  $c = \infty$  (voir Annexe 1) avec

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}, & \text{lorsque } |\lambda| \leq q; \\ \rho(\lambda) &= 0, & \text{lorsque } |\lambda| > q. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Ainsi, l'état fondamental  $|\Omega\rangle$  du système à  $T = 0$  est construit. Il est décrit par les équations (??), (??). Nous avons considéré l'ensemble microcanonique puisque l'état fondamental construit est une fonction propre de l'Hamiltonien. L'énergie de cet état est

$$\frac{\langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} = E_L = L \int_{-q}^q \lambda^2 \rho(\lambda) d\lambda. \quad (1.81)$$

Discutons maintenant d'une autre approche, celle de l'ensemble grand canonique. On modifie l'Hamiltonien  $\hat{H}$  en

$$\hat{H}_h = \hat{H} - h\hat{Q}, \quad (1.82)$$

où  $\hat{Q}$  (voir (2.6)) est l'opérateur du nombre de particules et  $h$  est le potentiel chimique. Un potentiel chimique positif ( $h > 0$ ) correspond à une densité positive du gaz à température nulle, et un potentiel chimique négatif correspond à une densité nulle à température nulle (voir section 7). Le nombre de particules  $N$  n'est maintenant plus fixé ; il dépend de la valeur du potentiel chimique, ainsi que de l'énergie de l'état fondamental. Nous rappelons que  $[\hat{H}, \hat{Q}] = 0$ , et dans la section 1, les fonctions propres communes de  $\hat{H}$  et  $\hat{Q}$  ont été construites. Les valeurs propres de  $\hat{H}$  sont

$$E_N^h = \sum_{j=1}^N (\lambda_j^2 - h). \quad (1.83)$$

Dans le cadre de l'ensemble grand canonique, nous pouvons considérer des excitations avec un nombre de particules différent de celui de l'état fondamental. De cette manière, nous allons construire des excitations à une particule. Comme l'énergie des particules avec de petits moments  $\lambda_j$  est négative, l'état fondamental de l'Hamiltonien correspond au même ensemble de nombres, (??) et (??). Dans la limite thermodynamique, on obtient à nouveau l'équation de Lieb (??), mais la densité  $D$  et le paramètre  $q$  sont maintenant définis par la valeur du potentiel chimique. Nous définissons la fonction  $\epsilon(\lambda)$  comme la solution de l'équation intégrale linéaire

$$\epsilon(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \epsilon(\mu) d\mu = \lambda^2 - h = \epsilon_0(\lambda), \quad (1.84)$$

en imposant que

$$\epsilon(q) = \epsilon(-q) = 0 \quad (1.85)$$

Cette condition définit de manière unique la dépendance de  $q$  par rapport à  $h$ . La densité  $D$ , également définie par  $h$ , est donnée par (??).

Dans les sections suivantes, nous examinerons la thermodynamique du modèle à température non nulle. Les équations (??) et (??) seront obtenues naturellement dans la limite de température nulle (voir section 7), prouvant ainsi l'existence et l'unicité des deux équations (??) et (??). Il sera également montré que la fonction  $\epsilon(\lambda)$  possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \epsilon'(\lambda) > 0 & \text{si } \lambda > 0 \\ \epsilon(\lambda) = \epsilon(-\lambda) \end{cases} \quad (1.86)$$

$$\epsilon(\lambda) < 0 \text{ si } \lambda \in ]-q, q[ \quad (1.87)$$

$$\epsilon(\lambda) > 0 \text{ si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus ]-q, q[ \quad (1.88)$$

La signification de la fonction  $\epsilon(\lambda)$  sera clarifiée. Il s'agit de l'énergie d'excitation d'une particule au-dessus de l'énergie de l'état fondamental. L'équation (??) découle de l'équilibre et montre qu'il n'y a pas de gap dans le spectre d'énergie.

La densité  $D$  est une fonction strictement croissante (donc bijective) du potentiel chimique sur la demi-droite  $h > 0$  (voir section 7) :

$$\frac{\partial D}{\partial h} > 0, \quad D|_{h=0} = 0, \quad D|_{h=\infty} = \infty. \quad (1.89)$$

Pour des potentiels chimiques négatifs ( $h < 0$ ), la densité est nulle ( $D = 0$ ). Nous verrons que même la thermodynamique diffère de manière essentielle pour des valeurs positives et négatives du potentiel

chimique  $h$ . Dans la Partie IV, les fonctions de corrélation à température sont évaluées, et elles dépendent qualitativement du signe de  $h$ . L'inégalité  $\frac{\partial D}{\partial h} > 0$  correspond à la condition de stabilité thermodynamique à température nulle.

Nous avons construit l'état fondamental  $|\Omega\rangle$  (le vide physique). L'énergie de l'état fondamental de l'Hamiltonien (??) est :

$$\frac{\langle \Omega | \hat{H}_h | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} = E_L^h = L \int_{-q}^q (\lambda^2 - h) \rho(\lambda) d\lambda = \frac{L}{2\pi} \int_{-q}^q \epsilon(\lambda) d\lambda. \quad (1.90)$$

La dérivation de cette dernière égalité est donnée en Annexe 4, voir les formules (??)-(??).

Nous avons construit l'état fondamental du gaz de Bose à température nulle avec une densité positive  $D$ . Comment peut-on se le représenter ? Les particules dans l'état fondamental se déplacent de manière brownienne. Quelle est la probabilité que sur un certain intervalle d'espace il n'y ait aucune particule ? Cette caractéristique importante montre la relation entre le vide nu (densité nulle) et le vide habillé (véritable état fondamental à densité positive). Elle est calculée dans [12] (voir la formule (9.11) dans cet article).

## 1.4 Excitations à température nulle

Nous allons d'abord considérer les excitations sur le vide physique dans le secteur avec une charge physique nulle (c'est-à-dire des excitations où le nombre de particules  $N$  dans l'état excité est le même que le nombre de particules dans l'état fondamental). Commençons avec des conditions aux limites périodiques (équation (1.46)) :

$$L\lambda_j + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi n_j.$$

L'état fondamental est décrit par un ensemble spécial d'entiers  $n_j$ , voir (??) et (??). Tous les autres ensembles de  $\{n_j\}$  (ils doivent être différents,  $n_j \neq n_k$ ) donnent des états excités. C'est la description complète de tous les états excités. Ces excitations sont obtenues en retirant un certain nombre de particules ayant des moments  $-q < \lambda_h < q$  de la distribution de particules du vide (c'est-à-dire en créant des trous avec des moments  $\lambda_h$ ) et en ajoutant un nombre égal de particules avec des moments  $|\lambda_p| > q$ . Tout d'abord, nous allons construire l'état où une particule ayant un moment  $\lambda_p > q$  se propage avec un trou ayant un moment  $-q < \lambda_h < q$ . La particule et le trou étant maintenant présents, les valeurs permises des moments des particules du vide sont modifiées :  $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}_j$ , de sorte que les équations de Bethe pour les particules du vide sont réécrites comme

$$L\tilde{\lambda}_j + \sum_k \theta(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k) + \theta(\tilde{\lambda}_j - \lambda_p) - \theta(\tilde{\lambda}_j - \lambda_h) = 2\pi \left( j - \frac{N+1}{2} \right). \quad (1.91)$$

En soustrayant ceci de la distribution du vide (??) et en prenant en compte que  $\lambda_j - \tilde{\lambda}_j = O(L-1)$ ,  $\theta(\lambda + \Delta) - \theta(\lambda) = O(\Delta)$ , on obtient

$$L(\lambda_j - \tilde{\lambda}_j) - \theta(\lambda_j - \lambda_p) + \theta(\lambda_j - \lambda_h) + (\lambda_j - \tilde{\lambda}_j) \sum_k K(\lambda_j, \lambda_k) - \sum_k K(\lambda_j, \lambda_k)(\lambda_k - \tilde{\lambda}_k) = 0 \quad (1.92)$$

## 1.5 Thermodynamics of the model

Considérons l'ensemble canonique et calculons la fonction de partition  $Z$  du modèle :

$$Z = \text{tr} \left( e^{-\hat{H}/T} \right) = e^{-F/T}. \quad (1.93)$$

Ici,  $\hat{H}$  est le hamiltonien donné par (2.2) et  $T$  est la température. L'énergie libre  $F$  est donnée par (1.93). Rappelons que nous étudions la limite thermodynamique ( $L \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ ) avec la densité du gaz restant fixe :

$$D = \frac{N}{L} = \text{const} \quad (1.94)$$

Dans la limite thermodynamique, les vacants, particules et trous (ceux définis dans la section 2, voir (??), (??)) ont des densités de distribution finies  $\rho_p(\lambda)$ ,  $\rho_h(\lambda)$  et  $\rho_t(\lambda)$  dans l'espace des impulsions, qui sont définies comme suit :

$$L\rho_p(\lambda)d\lambda = \text{nombre de particules dans } [\lambda, \lambda + d\lambda] \quad (1.95)$$

$$L\rho_h(\lambda)d\lambda = \text{nombre de trous dans } [\lambda, \lambda + d\lambda], \quad (1.96)$$

$$L\rho_t(\lambda)d\lambda = \text{nombre de vacants dans } [\lambda, \lambda + d\lambda]. \quad (1.97)$$

Le nombre de vacants étant simplement la somme du nombre de particules et de trous :

$$\rho_t(\lambda) = \rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda) \quad (1.98)$$

Par vacants, nous entendons les positions potentielles dans l'espace des impulsions qui peuvent être occupées par des particules ou des trous. Dans la limite thermodynamique, la somme de l'équation (??) se transforme en une intégrale impliquant la densité  $\rho_p(\lambda)$ , et on obtient :

$$2\pi\rho_t(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, \mu)\rho_p(\mu)d\mu \quad (1.99)$$



## Deuxième partie

# La Méthode Quantique de Diffusion Inverse (QISM)





La méthode quantique de diffusion inverse relie l'Ansatz de Bethe à la théorie des équations différentielles classiques complètement intégrables. Ces équations sont parfois appelées équations de soliton. La méthode moderne pour les résoudre est appelée méthode classique de diffusion inverse. En un sens, cela constitue une généralisation non linéaire de la transformation de Fourier.

Dans cette partie, la méthode quantique de diffusion inverse est exposée. Les principales déclarations de la méthode classique de diffusion inverse nécessaires à la quantification sont fournies au Chapitre V, où la représentation de Lax est introduite. La structure hamiltonienne des modèles intégrables est également discutée, ainsi que le nombre infini d'intégrales de mouvement. La méthode la plus pratique pour analyser la structure hamiltonienne repose sur la *r-matrice* classique. Certains modèles concrets seront considérés. Le Chapitre VI est consacré en particulier à la méthode quantique de diffusion inverse. La R-matrice, qui est l'objet principal de cette méthode, est introduite. L'équation de Yang-Baxter pour la R-matrice est discutée. Les principales déclarations de la méthode sont fournies et plusieurs exemples sont présentés. La formulation algébrique de l'Ansatz de Bethe, l'une des principales réalisations de la méthode quantique de diffusion inverse, est présentée au Chapitre VII. La notion de déterminant de la matrice de transition dans le cas quantique est introduite dans ce chapitre. (Ceci est étroitement lié au concept d'antipode dans les groupes quantiques.)

Les modèles intégrables de la théorie quantique des champs sur le réseau sont présentés au Chapitre VIII. La méthode quantique de diffusion inverse fournit un mécanisme pour transférer des modèles continus de la théorie quantique des champs au réseau tout en préservant la R-matrice. Pour les modèles classiques, cela signifie que la structure des variables d'action-angle reste la même. Dans le cas quantique, cela conduit à la conservation de la matrice de diffusion et des exposants critiques qui déterminent l'asymptotique à longue distance des fonctions de corrélation. Pour les modèles relativistes de la théorie des champs (comme le modèle de sine-Gordon), la variante sur le réseau fournit une solution rigoureuse au problème des divergences ultraviolettes. Nous pouvons étudier des modèles continus comme des modèles de réseau condensés (c'est-à-dire avec l'espacement du réseau  $A \rightarrow 0$ ). Notre construction garantit qu'il n'y aura pas de transition de phase. La forme explicite de l'opérateur L permet la classification de tous les modèles intégrables ayant une R-matrice donnée.

La relation étroite de la méthode quantique de diffusion inverse avec d'autres méthodes de la physique mathématique contemporaine mérite d'être mentionnée. Tout d'abord, elle est liée aux groupes quantiques et à la théorie des nœuds. Elle est également associée à la méthode utilisée en physique statistique classique pour résoudre des modèles de réseau bidimensionnels. Nous abrègerons le nom « méthode quantique de diffusion inverse » par QISM. Nous devons noter que les caractéristiques physiques des particules - l'énergie habillée, le moment et la matrice S - sont toutes calculées dans le cadre de la QISM, exactement comme

pour l'Ansatz de Bethe en coordonnées.

Il est intéressant de mentionner qu'ultérieurement dans le livre, nous obtiendrons des équations différentielles complètement intégrables pour les fonctions de corrélation quantiques. Nous les étudierons sous un angle différent. Le problème le plus important dans ce cas est de déterminer l'asymptotique à longue distance des fonctions de corrélation. Nous ferons cela par le biais du problème de Riemann-Hilbert.

## Introduction

La méthode moderne de résolution des équations aux dérivées partielles est appelée la méthode inverse de diffusion classique (CISM). On peut la considérer comme une généralisation non linéaire de la transformation de Fourier. De nos jours, la méthode inverse de diffusion classique est une branche bien développée de la physique mathématique (voir la préface, références (1), (19), (10), (11), (18), (21)-(24), (29), (37), (45)).

Dans ce chapitre, nous donnerons uniquement les informations nécessaires à la quantification qui sera effectuée dans le chapitre suivant. Les concepts de la représentation de Lax, de la matrice de transition et des identités de trace sont énoncés dans la section 1. Les équations aux dérivées partielles complètement intégrables apparaîtront à nouveau dans ce livre. Dans les chapitres XIV et XV, nous les dériverons pour les fonctions de corrélation quantiques. Dans ces chapitres, nous étudierons les équations différentielles complètement intégrables sous un angle différent. Nous appliquerons le problème de Riemann-Hilbert afin d'évaluer les asymptotiques.

La matrice  $r$ , qui permet de calculer les crochets de Poisson entre les éléments de matrice de la matrice de transition et également de construire les variables d'action-angle, est introduite dans la section 2. Comme expliqué là, l'existence de la matrice  $r$  garantit l'existence de la représentation de Lax. La matrice  $r$  satisfait une certaine relation bilinéaire (la relation de Yang-Baxter classique). L'existence de la matrice  $r$  garantit également l'existence d'un nombre infini de lois de conservation qui restreignent de manière essentielle la dynamique du système. Dans le chapitre suivant, la notion de la matrice  $r$  sera généralisée au cas quantique. Dans les deux premières sections de ce chapitre, des énoncés généraux sont démontrés par l'exemple de l'équation de Schrödinger non linéaire, qui est le modèle dynamique le plus simple (il convient de mentionner que dans le cas classique, ce nom est plus naturel que celui de gaz de Bose unidimensionnel). D'autres modèles (l'équation de sine-Gordon, le modèle de Mikhailov-Shabat-Zhiber) sont considérés dans la section 3. La notation tensorielle, dont l'application simplifie considérablement les calculs tant dans les cas classique que quantique, est discutée dans l'appendice de ce chapitre.

Si le lecteur trouve ce chapitre trop bref, nous recommandons l'excellent livre de L.D. Faddeev et L.A. Takhtajan (voir [18] dans les références de la préface), qui décrit la CISM en détail explicite.

## 2.1 La Représentation de Lax

Considérons une équation évolutive hamiltonienne non linéaire classique dans un espace-temps bidimensionnel. Le hamiltonien correspondant sera noté  $H$ . Nous étudions le système sur un intervalle périodique de longueur  $L$  ( $0 < x < L$ ). La base traditionnelle pour l'application de la méthode de diffusion inverse (ISM) à cette équation est qu'elle peut être représentée sous la forme de Lax :

$$[\partial_t U(x|\lambda), \partial_x + V(x|\lambda)] = 0, \quad (2.1)$$

qui est valide pour tout  $\lambda$ . Ici,  $U$  et  $V$  sont des matrices  $k \times k$  (l'entier  $k$  dépend de l'équation considérée) qui dépendent d'un paramètre spectral complexe  $\lambda$  et des variables dynamiques du problème. La matrice  $V(x|\lambda)$  est appelée le potentiel et  $U(x|\lambda)$  est l'opérateur d'évolution temporelle. La condition (1.1) doit être valide pour tout  $\lambda$  et peut être considérée comme la condition de cohérence pour les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi(x, t) = U(x|\lambda) \Phi(x, t), \\ \partial_x \Phi(x, t) = -V(x|\lambda) \Phi(x, t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Ici,  $\Phi(x, t)$  est une fonction vectorielle inconnue qui dépend également de  $\lambda$ . Dans le livre [5], la similarité avec les champs de Yang-Mills est expliquée. La condition (2.1) joue le rôle de la condition de courbure nulle, avec  $U$  et  $V$  jouant le rôle de champs de jauge. Dans les chapitres XIV et XV, nous dériverons des équations différentielles partielles non linéaires pour les fonctions de corrélation quantiques, à partir de la représentation de Lax. Cela donnera des exemples intéressants d'équations différentielles complètement intégrables.

Il est utile de considérer la translation de la solution du système (2.2),  $\Phi$ , le long de la direction  $x$  (à temps fixe  $t$ ) :

$$\Phi(x) = T(x, y|\lambda) \Phi(y). \quad (2.3)$$

(Ici, nous avons supprimé l'argument temporel.) La matrice  $T(n, y|\lambda)$  est appelée la matrice de transition. Ci-dessous, nous discuterons en détail de cette matrice  $k \times k$ . Mais d'abord, discutons de la représentation de Lax pour les modèles sur réseau (avec temps continu). Nous utiliserons des versions en réseau des modèles de théorie quantique des champs pour résoudre le problème des divergences ultraviolettes. Pour la quantification, nous avons également besoin de la représentation de Lax sur le réseau périodique avec  $M$  sites et un espacement de réseau  $\Delta$  :

$$\partial_t L(n|\lambda) = U(n+1|\lambda) L(n) - L(n) U(n|\lambda). \quad (2.4)$$

Ici,  $L$  et  $U$  sont des matrices  $k \times k$  qui dépendent du paramètre spectral et des variables dynamiques. L'égalité (2.4) est une conséquence de la condition de cohérence pour le problème suivant sur le réseau :

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi(n, t) &= U(n|\lambda) \Phi(n, t), \\ \Phi(n+1, t) &= L(n|\lambda) \Phi(n, t), \end{aligned}$$

où  $n$  est le numéro du site du réseau. Pour étudier les modèles continus, il est pratique de considérer le réseau infinitésimal ( $\Delta \rightarrow 0$ ). La coordonnée du  $n$ -ème site du réseau ainsi obtenu est  $x_n = n\Delta$  (où  $n = 1, \dots, M$  et  $M = \frac{L}{\Delta}$ ). Pour un tel réseau, nous avons

$$L(n|\lambda) = I - V(x_n|\lambda)A + O(\Delta^2), \quad (2.5)$$

où  $I$  est la matrice unité  $k \times k$ .

Étudions maintenant la matrice de transition  $T(x, y|\lambda)$  (2.3), qui joue un rôle important dans la méthode d'inversion de diffusion (ISM). Dans le cas continu, cette matrice  $k \times k$  est définie sur l'intervalle  $[y, x]$  ( $x \geq y$ ), par les exigences suivantes :

$$\begin{aligned} [\partial_x + V(x|\lambda)]T(x, y|\lambda) &= 0, \\ T(y, y|\lambda) &= I. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Parfois, il est utile d'écrire une solution formelle de cette équation :

$$T(x, y|\lambda) = \text{P exp} \left\{ - \int_y^x V(z|\lambda) dz \right\}, \quad (2.7)$$

où  $\text{P}$  désigne l'ordonnancement de chemin des facteurs non commutatifs.

La matrice de transition possède la propriété suivante semblable à un groupe : si  $z$  est un point intérieur dans l'intervalle  $[y, x]$ , alors

$$T(x, z|\lambda)T(z, y|\lambda) = T(x, y|\lambda) \quad (x \geq z \geq y).$$

Le côté gauche ici est le produit de deux matrices  $k \times k$ . La matrice de transition pour l'ensemble de l'intervalle périodique  $[0, L]$  est appelée la matrice de monodromie  $T(L, 0|\lambda)$ .

La matrice de transition du  $m$ -ième site au  $(n+1)$ -ième site peut être représentée comme le produit de  $(n-m+1)$  matrices :

$$T(n, m|\lambda) = L(n|\lambda)L(n-1|\lambda) \cdots L(m|\lambda), \quad n \geq m, \quad (2.8)$$

où  $L(k|\lambda) \equiv T(k, k|\lambda)$  est la matrice de transition élémentaire pour un site de réseau. La matrice de transition pour la longueur totale du réseau,  $T(M, 1|\lambda)$ , est appelée la matrice de monodromie. La matrice  $L(k|\lambda)$  est appelée l'opérateur  $L$ .

La trace de la matrice de monodromie, tant dans les cas continu que sur réseau, joue un rôle particulièrement important :

$$\tau(\lambda) = \text{tr } T(L, 0|\lambda); \quad \tau(\lambda) = \text{tr } T(M, 1|\lambda). \quad (2.9)$$

Dans la section suivante, nous verrons que  $\tau(\lambda)$  est indépendante du temps. L'Hamiltonien de l'équation évolutive initiale est exprimé en termes de dérivées logarithmiques de  $\tau(\lambda)$  au moyen d'identités de trace.

Comme exemple, nous considérerons l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i\partial_t \Psi = -\partial_x^2 \Psi + 2c\Psi^* \Psi \Psi, \quad (2.10)$$

avec l'Hamiltonien

$$H = \int_0^L dx (\partial_x \Psi^* \partial_x \Psi + c\Psi^* \Psi^* \Psi \Psi), \quad (2.11)$$

et les crochets de Poisson des champs  $\Psi$  et  $\Psi^*$  donnés par

$$\{\Psi(x), \Psi^*(y)\} = i\delta(x - y). \quad (2.12)$$

La charge (nombre de particules)  $Q$  et l'impulsion  $P$  sont données par

$$Q = \int_0^L \Psi^* \Psi dx; \quad P = -i \int_0^L \Psi^* \partial_x \Psi dx. \quad (2.13)$$

Ces quantités commutent avec  $H$  :  $\{H, Q\} = \{H, P\} = 0$  Ce modèle est la limite classique de l'équation quantique de Schrödinger non linéaire étudiée en détail dans le Chapitre I. L'équation de Schrödinger non linéaire peut être représentée sous la forme de Lax (2.1) ; les matrices  $V$  et  $U$   $2 \times 2$  sont données par

$$V(x|\lambda) = i\frac{\lambda}{2}\sigma_z + \Omega(x), \quad (2.14)$$

$$U(x|\lambda) = i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_z + \lambda\Omega(x) + i\sigma_z(\partial_x\Omega + c\Psi^*\Psi), \quad (2.15)$$

Ici,  $\sigma_z$  est la matrice de Pauli  $\sigma_z = \text{diag}(1, -1)$  et la matrice  $\Omega$  est donnée par

$$\Omega(x) = -\sqrt{c}(\Im(\Psi(x)\sigma_x + \Re(\Psi(x)\sigma_y)) = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{c}\Psi^*(x) \\ -i\sqrt{c}\Psi(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \& \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de transition possède les propriétés suivantes :

$$\det T(x, y|\lambda) = 1; \quad (2.17)$$

$$\sigma_x T^*(x, y|\lambda^*) \sigma_x = T(x, y|\lambda); \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

L'opérateur  $L$  correspondant sur le réseau infime est donné par :

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - i\frac{\lambda\Delta}{2} & -i\sqrt{c}\Psi_n^*\Delta \\ i\sqrt{c}\Psi_n\Delta & 1 + i\frac{\lambda\Delta}{2} \end{pmatrix} + O(\Delta^2), \quad (2.19)$$

$$\Psi_n = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \Psi(x) dx; \quad \{\Psi_n, \Psi_m^*\} = \frac{i}{\Delta} \delta_{n,m}. \quad (2.20)$$

Les identités de trace pour ce modèle sont les suivantes (voir (1.9), (1.11), (1.13)) :

$$\ln [e^{i\lambda L/2} \tau(\lambda)] \xrightarrow{\lambda \rightarrow i\infty} ic [\lambda^{-1}Q + \lambda^{-2}P + \lambda^{-3}H + O(\lambda^{-4})] . \quad (2.21)$$

Dérivons cette formule. En prenant  $\lambda \rightarrow i\infty$ , le potentiel  $V$  dans (1.14) devient proche de la diagonale, et on peut représenter la matrice de transition comme suit :

$$T(x, y|\lambda) = G(x|\lambda)D(x, y|\lambda)G^{-1}(y|\lambda). \quad (2.22)$$

Ici,  $D$  est une matrice diagonale, et la matrice  $G$  est choisie sous la forme suivante :

$$G(x|\lambda) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} G_k(x) \quad (2.23)$$

où  $I$  est la matrice unité et les  $G_k$  sont des matrices antidiagonales. La signification de la représentation (2.22) est que la matrice de transition peut être diagonalisée par une transformation de jauge. L'équation différentielle (2.6) aboutit à l'équation suivante pour  $D$  :

$$[\partial_x + W(x|\lambda)]D(x, y|\lambda) = 0; \quad D(y, y|\lambda) = I \quad (2.24)$$

où le potentiel  $W$  est égal à

$$W(x|\lambda) = G^{-1}(x)\partial_x G(x) + i\frac{\lambda}{2}G^{-1}(x)\sigma_z G(x) + G^{-1}(x)\Omega(x)G(x). \quad (2.25)$$

Les matrices  $G_k$  sont définies par la condition que le potentiel  $W$  soit une matrice diagonale. Il est facile de montrer que

$$G_1 = i\sigma_z\Omega; \quad G_2 = -\partial_x\Omega; \quad G_3 = i\sigma_z(-\partial_x^2\Omega + \Omega^3). \quad (2.26)$$

Ainsi, le potentiel  $W$  est donné par

$$W = i\frac{\lambda}{2}\sigma_z + \lambda^{-1}W_1 + \lambda^{-2}W_2 + \lambda^{-3}W_3 + O(\lambda^{-4}) \quad (2.27)$$

où

$$\begin{cases} W_1 &= -i\sigma_z\Omega^2 \\ W_2 &= -\Omega\partial_x\Omega \\ W_3 &= i\sigma_z[\Omega\partial_x^2\Omega - \Omega^4] \end{cases} \quad (2.28)$$

En raison de la diagonale de la matrice  $W$ , l'équation (??) peut être résolue explicitement :

$$D(x, y|\lambda) = \exp\left\{-\int_y^x W(z|\lambda) dz\right\}. \quad (2.29)$$

Prenons maintenant  $y = 0$  et  $x = L$ . Les conditions aux limites périodiques impliquent que  $G(L) = G(0)$ . En utilisant (1.17) et (2.22), on a que  $\det D(L, 0) = 1$ . Ainsi,

$$D(L, 0|\lambda) = \exp\{\sigma_z Z(X)\} \quad (2.30)$$

où  $Z(X)$  est une fonction scalaire. Il est facilement montré à partir de (??)-(??) que

$$Z(\lambda) = -i\frac{\lambda L}{2} + ic[\lambda^{-1}Q + \lambda^{-2}P + \lambda^{-3}H + O(\lambda^{-4})] \quad (2.31)$$

En raison des conditions aux limites périodiques, nous avons

$$\tau(\lambda) = \text{tr } T(L, 0|\lambda) = \text{tr } D(L, 0|\lambda) \quad (2.32)$$

Pour  $\lambda \rightarrow i\infty$ , nous avons  $D_{11}(L, 0|\lambda) \gg D_{22}(L, 0|\lambda)$ . En utilisant (??)-(??), nous pouvons calculer  $\ln \tau(\lambda)$  et obtenir (??). En réalité, les termes d'ordre supérieur dans (??) sont également intéressants :

$$\ln [e^{i\lambda L/2}\tau(\lambda)] \xrightarrow{\lambda \rightarrow i\infty} ic \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} I_n \quad (2.33)$$

Dans la section suivante, nous verrons que chaque  $I_n$  est indépendant du temps. Ainsi, les  $\{I_n\}$  constituent l'ensemble infini des lois de conservation que possèdent les modèles exactement résolubles.

Écrivons la première loi de conservation non triviale :

$$\int dx \left\{ \Psi^* \Psi_{xxx} - \frac{3c}{2} \Psi^{*2} (\Psi^2)_x \right\}. \quad (2.34)$$

## 2.2 La matrice r classique

Pour construire les variables action-angle, il est nécessaire de calculer les crochets de Poisson (PB) entre les éléments de matrice de la matrice de transition (voir [5]). Il existe une méthode efficace pour effectuer de tels calculs, basée sur la matrice r classique. Nous utiliserons la notation suivante pour les produits tensoriels. Le produit tensoriel de deux matrices  $k \times k$ ,  $A$  et  $B$ , sera noté  $A \otimes B$  (une matrice  $k^2 \times k^2$ ). La matrice de permutation  $\sqcap$  de taille  $k^2 \times k^2$  possède la propriété suivante :

$$\sqcap(A \otimes B)\sqcap = B \otimes A \quad (2.35)$$

Cette égalité est valide pour toutes les matrices numériques  $A$  et  $B$ . La dimension minimale de  $\sqcap$  est  $4 \times 4$  ; dans ce cas, elle peut être écrite sous la forme :

$$\sqcap = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

**Définition 2.2.1.** Les crochets de Poisson du produit tensoriel  $\{A \otimes B\}$  sont une matrice  $k^2 \times k^2$ , dont les éléments de matrice sont égaux au crochet de Poisson de certains éléments de matrice de  $A$  avec certains éléments de matrice de  $B$ . La numérotation des éléments de la matrice  $\{A \otimes B\}$  est la même que pour la matrice  $A \otimes B$ . (La notation tensorielle est discutée en détail dans l'Annexe 1.)