

Annexe B

Réduction GHD → transport d'Euler lorsque le *dressing* est l'identité

Point de départ : équation GHD. L'équation GHD s'écrit, pour la distribution de rapidité $\rho(x, \theta, t)$,

$$\partial_t \rho + \partial_x (v^{\text{eff}} \rho) + \partial_\theta (a^{\text{eff}} \rho) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Les vitesses/accélérations *effectives* sont obtenues par habillage.

Hypothèse “sans interactions” : $^{\text{dr}} = \text{Id}$. Si l'opérateur d'habillage est l'identité (*no dressing*),

$$v = 2\pi\rho, \quad v^{\text{eff}}(\theta) \rightarrow \partial_\theta h(x, \theta), \quad a^{\text{eff}}(\theta) \rightarrow -\partial_x h(x, \theta),$$

où $h(x, \theta)$ est l'hamiltonien *nu* (par exemple $h = \varepsilon(\theta) + V(x)$). L'équation (B.1) devient alors une équation de transport collisionless (type Vlasov) :

$$\partial_t \rho + \partial_x (\partial_\theta h \rho) - \partial_\theta (\partial_x h \rho) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Hiérarchie des moments (charges nues). Pour toute fonction test $f(\theta)$, définissons

$$q_{[f]}(x, t) = \int d\theta f(\theta) \rho(x, \theta, t), \quad j_{[f]}(x, t) = \int d\theta f(\theta) \partial_\theta h \rho(x, \theta, t).$$

En multipliant (B.2) par $f(\theta)$ et en intégrant en θ , on obtient

$$\partial_t q_{[f]} + \partial_x j_{[f]} = - \int d\theta f'(\theta) \partial_x h \rho = -\partial_x V(x) \int d\theta f'(\theta) \rho, \quad (\text{B.3})$$

où la dernière égalité vaut si $h(\theta, x) = \varepsilon(\theta) + V(x)$.

Trois premiers moments (“masse”, “momentum”, “énergie”). En choisissant $f(\theta) = 1, \theta, \theta^2/2$, on obtient respectivement :

$$(\text{Continuité}) \quad \partial_t n + \partial_x (nu) = 0, \quad n \equiv q_{[1]}, \quad nu \equiv j_{[1]}, \quad (\text{B.4})$$

$$(\text{Quantité de mouvement}) \quad \partial_t (nu) + \partial_x (q_{[\theta^2]}) = -n \partial_x V, \quad q_{[\theta^2]} = \int d\theta \theta^2 \rho, \quad (\text{B.5})$$

$$(\text{Énergie cinétique}) \quad \partial_t q_{[\theta^2/2]} + \partial_x (j_{[\theta^2/2]}) = -(\partial_x V) q_{[\theta]}, \quad j_{[\theta^2/2]} = \int d\theta \frac{\theta^2}{2} \partial_\theta h \rho. \quad (\text{B.6})$$

Remarque : pour $h = \frac{\theta^2}{2} + V(x)$, on a $\partial_\theta h = \theta$, d'où $j_{[\theta^2/2]} = \int d\theta \frac{\theta^2}{2} \theta \rho$.

Lien (et limite) avec les équations d'Euler classiques. Les équations (B.4)–(B.6) ont la structure des lois de conservation d'Euler (masse, quantité de mouvement, énergie). Cependant, **le système n'est pas fermé en l'état** : par exemple, $\partial_t(nu)$ fait intervenir $q_{[\theta^2]}$, qui requiert une relation de fermeture (*équation d'état*) pour être exprimé en fonction de n et u (p. ex. hypothèse de *local Maxwell–Boltzmann* menant à une pression \mathcal{P}).

Conclusion. Lorsque $^{\text{dr}} = \text{Id}$, la GHD se réduit à une cinétique collisionless dont les moments reproduisent *formellement* les équations d'Euler. La véritable différence entre hydrodynamique classique et GHD complète réside donc dans le *dressing* : dès que $^{\text{dr}} \neq \text{Id}$, les vitesses et charges deviennent *effectives* et la dynamique s'écarte des lois d'Euler classiques.

Encadré : fermeture et équations d'Euler fermées. Pour obtenir un système d'équations d'Euler *fermées* à partir de la hiérarchie (B.4)–(B.6), il faut fournir une *relation de fermeture* (ou *équation d'état*) reliant les moments d'ordre supérieur aux variables hydrodynamiques de base (n, u) .

Un choix simple et classique, valable pour une cinétique collisionless de type Vlasov (système *classique*), est d'hypothétiser une *distribution locale thermique* (Maxwellienne) :

$$\rho(x, \theta, t) = n(x, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi T_{\text{loc}}(x, t)}} \exp\left(-\frac{(\theta - u(x, t))^2}{2T_{\text{loc}}(x, t)}\right),$$

où $T_{\text{loc}}(x, t)$ est la température locale (unités choisies telles que $k_B = 1$). Sous cette hypothèse on obtient les moments

$$q_{[\theta]} = nu, \quad q_{[\theta^2]} = n(u^2 + T_{\text{loc}}).$$

On définit alors la pression cinétique comme la partie convective soustraite au second moment :

$$\mathcal{P} = q_{[\theta^2]} - \frac{q_{[\theta]}^2}{n} = n T_{\text{loc}}.$$

Dans le cas d'un gaz classique 1D idéal la contribution interne par particule vaut $e_{\text{int}} = \frac{1}{2}T_{\text{loc}}$ (pour $k_B = 1$).

En remplaçant ces expressions dans (B.4)–(B.6) on obtient des équations d'Euler *fermées* avec les sources dues au potentiel externe :

$$\begin{aligned} \partial_t n + \partial_x(nu) &= 0, \\ \partial_t(nu) + \partial_x(nu^2 + \mathcal{P}) &= -n \partial_x V, \\ \partial_t E + \partial_x(u(E + \mathcal{P})) &= -nu \partial_x V, \end{aligned}$$

où l'énergie volumique totale s'écrit

$$E(x, t) = \frac{1}{2}nu^2 + nV + ne_{\text{int}},$$

et le terme $-nu \partial_x V$ à droite de l'équation d'énergie représente le travail du champ externe (force \times vitesse).

Forme vectorielle compacte. En posant l'état vectoriel $U = (n, nu, E)^\top$ et le flux $F(U) = (nu, nu^2 + \mathcal{P}, u(E + \mathcal{P}))^\top$, les équations s'écrivent

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = S(U),$$

où la source $S(U)$ regroupe les termes dus au potentiel externe, par exemple

$$S(U) = (0, -n\partial_x V, -nu \partial_x V)^\top.$$

Remarque importante. L'hypothèse d'une Maxwellienne locale est une approximation *classique* de fermeture : elle est justifiée pour des gaz classiques proches d'un équilibre local. Pour des gaz quantiques (par exemple le modèle de Lieb–Liniger), la distribution locale d'équilibre n'est pas une Maxwell–Boltzmann

mais plutôt un état thermique quantique (Gibbs) ou, dans le cas d'un système intégrable, un état *GGE* local ; de plus les effets d'interaction et le *dressing* modifient les relations entre moments. Par conséquent, dans le contexte de la GHD complète, la fermeture ne résulte pas automatiquement d'une hypothèse simple de type Maxwell–Boltzmann : il faut soit adopter une hypothèse adaptée (p.ex. fermeture empirique, développement en moments), soit utiliser le formalisme du dressing/du TBA pour exprimer exactement les relations entre moments et vitesses effectives.

