

TABLE DES MATIÈRES

I	Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz	3
1	Introduction au gaz de bosons unidimensionnels	7
1.1	Motivations et contexte physique	7
1.2	Description du modèle de Lieb-Liniger	7
1.3	Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques	8
1.4	Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat	8
1.4.1	Équation de Gross-Pitaevskii	8
1.4.2	Transformation de Bogoliubov pour système homogène	8
2	Bethe Ansatz et solution exacte du modèle de Lieb-Liniger	9
2.1	Problème à deux corps	9
2.2	Problème à N corps	9
2.3	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz	9
II	Relaxation des systèmes quantiques isolés et phénomènes d'équilibre	11
3	Équilibre thermique et ensemble de Gibbs : chaos quantique	13
3.1	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	13
3.2	Excitations élémentaires à température nulle	13
3.3	Physique statistique de l'ensemble de Gibbs	13
3.4	Chaos quantique et brisure de l'intégrabilité	14
3.5	Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation	14
4	Équilibre non thermique et ensemble de Gibbs généralisé : ergodicité	15
4.1	Intégrabilité et charges conservées	15
4.2	Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés	15
4.3	Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables	15
4.4	Entropie de Yang-Yang généralisée	17
III	Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée	19
5	Hydrodynamique et régimes asymptotiques	21
5.1	Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques	21
5.2	Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité	21

5.3	Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)	21
6	Fluctuations et corrections à l'hydrodynamique généralisée	23
6.1	Fluctuations de la distribution de rapidité	23
6.2	Ordre 2 des corrections et rôle de l'entropie de Yang-Yang	25
6.3	Confrontation entre hydrodynamique classique et hydrodynamique généralisée	25

Première partie

Modèle de Lieb-Liniger et approche Bethe Ansatz

Les modèles mécaniques dans les dimensions espace-temps sont présentés dans cet article. Cette méthode a été suggérée pour la première fois par H. Bethe en 1931 [1] et est traditionnellement appelée l'Ansatz de Bethe. Par la suite, la méthode a été développée par Hulthen, Yang et Yang, Lieb, Sutherland, Baxter, Gaudin et d'autres (voir [2], [3], et [4]).

Nous commençons la présentation par l'Ansatz de Bethe en coordonnées, non seulement pour des raisons historiques, mais aussi en raison de sa simplicité et de sa clarté. La matrice de diffusion à plusieurs particules apparaît comme étant égale au produit des matrices à deux particules pour les modèles intégrables. Cette propriété de réductibilité à deux particules est d'une importance primordiale lors de la construction de la fonction d'onde de Bethe. L'une des caractéristiques importantes des modèles intégrables est qu'il n'y a pas de production multiple de particules hors des coquilles de masse. Cette propriété est étroitement liée à l'existence d'un nombre infini de lois de conservation dans de tels modèles ; cela sera expliqué dans la Partie II.

Quatre modèles principaux, à savoir le gaz de Bose unidimensionnel, le magnétisme de Heisenberg, le modèle de Thirring massif et le modèle de Hubbard, sont considérés dans la Partie I. Les fonctions propres des hamiltoniens de ces modèles sont construites. L'application des conditions aux limites périodiques mène à un système d'équations pour les valeurs permises des moments. Celles-ci sont connues sous le nom d'équations de Bethe. Ce système peut également être dérivé d'un certain principe variationnel, l'action correspondante étant appelée l'action de Yang-Yang. Elle joue un rôle important dans l'étude des modèles. Les équations de Bethe sont également utiles dans la limite thermodynamique. L'énergie de l'état fondamental, la vitesse du son, etc., peuvent être calculées dans cette limite. Les excitations au-dessus de l'état fondamental, c'est-à-dire les particules physiques, sont également étudiées. Pour définir leurs caractéristiques physiques, la technique des équations de "dressing" est introduite et étudiée. La thermodynamique du modèle est expliquée en détail.

Le matériel de cette Partie est organisé comme suit. La théorie du gaz de Bose unidimensionnel avec une interaction répulsive ponctuelle entre les particules est présentée dans le premier chapitre. La solution du magnétisme de Heisenberg $X X Z$ dans un champ magnétique externe est donnée dans le deuxième chapitre. Le modèle quantique du champ spinor avec une auto-interaction à quatre points dans deux dimensions espace-temps est résolu dans le troisième chapitre. Cela est généralement appelé le modèle de Thirring massif, et est équivalent au modèle de sine-Gordon (dans le secteur de charge nulle). Dans le dernier chapitre de la Partie I, le modèle de Hubbard des fermions interactifs sur un réseau est brièvement abordé.

CHAPITRE

1

INTRODUCTION AU GAZ DE BOSONS UNIDIMENSIONNELS

Contents

1.1 Motivations et contexte physique	7
1.2 Description du modèle de Lieb-Liniger	7
1.3 Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques	8
1.4 Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat	8
1.4.1 Équation de Gross-Pitaevskii	8
1.4.2 Transformation de Bogoliubov pour système homogène	8

1.1 Motivations et contexte physique

1.2 Description du modèle de Lieb-Liniger

Le gaz de Bose unidimensionnel avec interaction ponctuelle des particules (la variante quantique de l'équation de Schrödinger non linéaire) est l'un des modèles principaux et les plus importants qui peut être résolu par la méthode de l'Ansatz de Bethe [14], [15]. Ce modèle a été minutieusement étudié ([1], [5], [17], [21] et [22]). Nous commencerons par la construction des fonctions propres de l'Hamiltonien dans un volume fini. Les quantités intéressantes d'un point de vue physique (dans la limite thermodynamique à température nulle) sont considérées; la thermodynamique à température finie est également étudiée en détail. Un certain nombre d'idées essentielles qui seront appliquées à d'autres modèles sont introduites.

La construction des fonctions propres de l'Hamiltonien est expliquée dans la section 1. Leur forme explicite et, en particulier, la réductibilité à deux particules, sont des caractéristiques communes des modèles résolubles par la méthode de l'Ansatz de Bethe. Des conditions aux limites périodiques sont imposées à la fonction d'onde dans la section 2; les équations de Bethe pour les moments des particules sont introduites et analysées. Pris sous forme logarithmique, ces équations réalisent la condition d'extrémum d'un certain fonctionnel, l'action correspondante étant appelée l'action de Yang-Yang. La transition vers la limite thermodynamique est envisagée dans la section 3. Dans cette même section, l'état fondamental du gaz est construit. La densité de distribution des particules dans l'espace des moments et l'énergie de l'état fondamental sont calculées. La méthode de transition vers la limite thermodynamique décrite dans cette section est assez générale et peut être appliquée à tout modèle résoluble par l'Ansatz de Bethe. Dans la section 4, les excitations au-dessus de l'état fondamental sont construites et leurs principales caractéristiques (énergie, moment et matrice de diffusion) sont déterminées à l'aide des équations de "dressing". L'état fondamental du modèle est la mer de Dirac (également appelée sphère de Fermi).

La thermodynamique du modèle est présentée dans la section 5. L'approche par intégrale fonctionnelle est présentée. Elle permet de résoudre divers problèmes à température finie. Les équations de base décrivant l'état d'équilibre thermodynamique, l'équation de Yang-Yang en étant une d'entre elles, sont dérivées dans cette section. L'équation de Yang-Yang, qui est une équation intégrale non linéaire, est analysée dans la section 6. Le théorème montrant l'existence de solutions est prouvé. L'état d'équilibre thermodynamique avec température tendant vers zéro est étudié dans la section 7. En examinant cette limite, nous pouvons obtenir des informations plus détaillées sur l'état fondamental de l'Hamiltonien à température nulle. La limite de couplage fort (dans laquelle le modèle est équivalent au modèle de fermions libres) est discutée. Les équations intégrales sont résolues exactement dans cette limite. Les excitations au-dessus de l'état d'équilibre thermodynamique sont étudiées et leur interprétation en termes de particules est donnée. Il est important de noter que la formule à température finie et à température nulle diffèrent uniquement par la mesure d'intégration. La thermodynamique des modèles exactement résolubles est tellement particulière qu'il est possible de construire des excitations stables à température finie, voir section 8. Les corrélations thermiques sont également discutées dans la section 8. Pour les modèles exactement résolubles, elles sont également très particulières : elles peuvent être représentées sous une forme similaire à celle à température nulle. Plus tard, dans la Partie IV (Chapitres XIII-XVI), cela sera utilisé pour l'évaluation explicite des fonctions de corrélation à température (même si elles dépendent du temps). La section 9 est consacrée à l'évaluation des corrections de taille finie à température nulle. Plus tard, elles seront utilisées pour le calcul des asymptotiques de longue distance des fonctions de corrélation à l'aide de la théorie des champs conformes.

1.3 Propriétés fondamentales et régimes asymptotiques

1.4 Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat

1.4.1 Équation de Gross-Pitaevskii

1.4.2 Transformation de Bogoliubov pour système homogène

CHAPITRE

2

BETHE ANSATZ ET SOLUTION EXACTE DU MODÈLE DE LIEB-LINIGER

Contents

2.1	Problème à deux corps	9
2.2	Problème à N corps	9
2.3	Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz	9

2.1 Problème à deux corps

2.2 Problème à N corps

2.3 Condition aux bords périodiques et équation de Bethe Ansatz

Deuxième partie

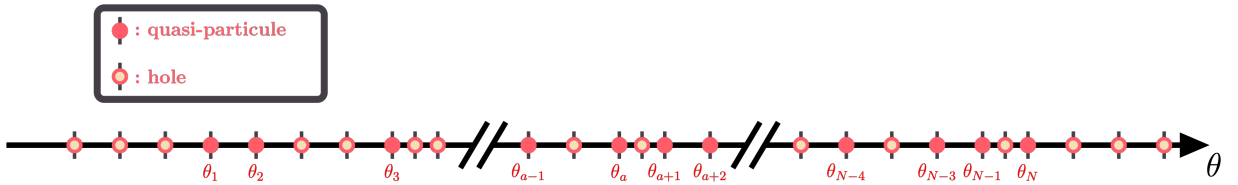
Relaxation des systèmes quantiques isolés et phénomènes d'équilibre

ÉQUILIBRE THERMIQUE ET ENSEMBLE DE GIBBS : CHAOS QUANTIQUE

Contents

3.1	Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle	13
3.2	Excitations élémentaires à température nulle	13
3.3	Physique statistique de l'ensemble de Gibbs	13
3.4	Chaos quantique et brisure de l'intégrabilité	14
3.5	Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation	14

- 3.1 Thermodynamique du gaz de Lieb-Liniger à température nulle
- 3.2 Excitations élémentaires à température nulle
- 3.3 Physique statistique de l'ensemble de Gibbs



On écrit l'observable énergie et nombre :

$$\hat{\mathcal{N}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N 1 \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (3.1)$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|, \quad (3.2)$$

avec $\sum_{a=1}^N 1 \equiv \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{N}} | \{\theta_a\} \rangle$ et $\sum_{a=1}^N \varepsilon(\theta_a) \equiv \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \doteq \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{E}} | \{\theta_a\} \rangle$.
La probabilité que le système soit dans configuration $\{\theta_a\}$ est

$$P_{\{\theta_a\}} = \frac{e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})}}{Z_{thermal}} = \frac{e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}}{Z_{thermal}} \quad (3.3)$$

avec la fonction de partition $Z_{thermal} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}})} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)}$

$$\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \Bigg|_T, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \mu^2} \Bigg|_T = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \mu} \Bigg|_T \quad (3.4)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu}, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \Bigg|_{\mu} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}} \rangle}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu} \quad (3.5)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu} \right] \ln Z, \quad \Delta_{\hat{\mathcal{E}}}^2 = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu} \right]^2 \ln Z = \left[\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \Bigg|_T - \frac{\partial}{\partial \beta} \Bigg|_{\mu} \right] \langle \hat{\mathcal{E}} \rangle \quad (3.6)$$

La matrice densité thermique est :

$$\hat{\rho}_{thermal} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z_{thermal}}, \quad (3.7)$$

$$e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\beta \sum_{a=1}^N (\varepsilon(\theta_a) - \mu)} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (3.8)$$

3.4 Chaos quantique et brisure de l'intégrabilité

3.5 Entropie de Yang-Yang et principe de maximisation

ÉQUILIBRE NON THERMIQUE ET ENSEMBLE DE GIBBS GÉNÉRALISÉ : ERGODICITÉ

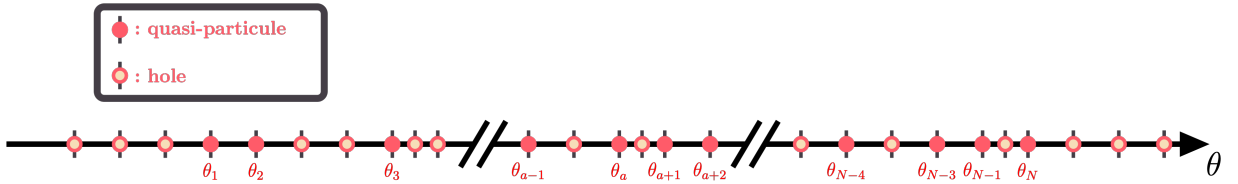
Contents

4.1	Intégrabilité et charges conservées	15
4.2	Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés	15
4.3	Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables	15
4.4	Entropie de Yang-Yang généralisée	17

4.1 Intégrabilité et charges conservées

4.2 Dynamique hors équilibre et relaxation des systèmes isolés

4.3 Physique statistique appliquée aux systèmes intégrables



On peut commence à généraliser avec l'opérateur :

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}| \quad (4.1)$$

$\hat{\mathcal{O}}_i \in \{\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{E}} - \mu \hat{\mathcal{N}}\}$ tel que $\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \beta \left(\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} - \mu \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \right)$ et pour simplifier ici $Z \equiv Z_{thermal}$:

Point clé n° 1. Sa moyenne , variance et écartype de l'observable :

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{\overbrace{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}^{P_{\{\theta_a\}}}}{Z} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \quad (4.2)$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{\mathcal{O}}_i}^2 &= \left\langle \left(\hat{\mathcal{O}}_i - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_i^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_{j \neq i}} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \right) \Big|_{\beta_{j \neq i}} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta_i^2} \Big|_{\beta_{j \neq i}} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_{j \neq i}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = -\beta\mu$ et si $\hat{\mathcal{O}}_i = \hat{\mathcal{E}} - \mu\hat{\mathcal{N}}$ alors $\beta_i = \beta$.

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle = \sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}}_i | \{\theta_a\} \rangle \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z}, \quad (4.5)$$

$$= \sum_{\{\theta_b\}} \langle \{\theta_b\} | \hat{\mathcal{O}}_i \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} | \{\theta_b\} \rangle, \quad (4.6)$$

$$= \text{Tr}(\hat{\mathcal{O}}_i \hat{\rho}) \quad (4.7)$$

avec $\hat{\rho} = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} |$ et $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_i \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}$ tel que $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$

La matrice densité GGE avec $Z \equiv Z_{GGE}$ est :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}}}{Z} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} |. \quad (4.8)$$

Dans le cas thermique, on peut remarquer que $\langle \hat{\mathcal{N}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^0$ et $\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle_{\{\theta_a\}} \propto \sum_{a=1}^N \theta_a^2$. On peut donc réécrire $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{a=1}^N \theta_a^i \quad (4.9)$$

et pour chaque $a \in \llbracket 1, N \rrbracket$: $\sum_i \alpha_i \theta_a^i$ converge donc on peut échanger les deux sommes soit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \langle \hat{\mathcal{O}}_i \rangle_{\{\theta_a\}} = \sum_{a=1}^N f(\theta_a) \quad (4.10)$$

avec $f(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \theta^i$. Et on peut réécrire la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{GGE}[f] = \frac{e^{-\hat{Q}[f]}}{Z_{GGE}}, \quad (4.11)$$

$$e^{-\hat{Q}[f]} = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} | \{\theta_a\} \rangle \langle \{\theta_a\} | \quad (4.12)$$

pour une certaine fonction f relié à la charge $\hat{Q}[f] = \sum_{\{\theta_a\}} \left(\sum_{a=1}^N f(\theta_a) \right) |\{\theta_a\}\rangle \langle \{\theta_a\}|$. Et on peut réécrire la probabilité de la configuration $\{\theta_a\}$: $P_{\{\theta_a\}} = \langle \{\theta_a\} | \hat{\rho}_{GGE}[f] | \{\theta_a\} \rangle = e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)} / Z$ avec $Z = \sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}$.

Nous aimerions calculer les valeurs d'attente par rapport à cette matrice de densité, par exemple La moyenne GGE d'un observable s'écrit ,

Point clé n° 2.

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{GGE} \doteq \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} \hat{\rho}_{GGE}[f])}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{GGE}[f])} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathcal{O}} e^{-\hat{Q}[f]})}{\text{Tr}(e^{-\hat{Q}[f]})} = \frac{\sum_{\{\theta_a\}} \langle \{\theta_a\} | \hat{\mathcal{O}} | \{\theta_a\} \rangle e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}}{\sum_{\{\theta_a\}} e^{-\sum_{a=1}^N f(\theta_a)}} \quad (4.13)$$

pour une certaine observable $\hat{\mathcal{O}}$.

4.4 Entropie de Yang-Yang généralisée

Troisième partie

Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée

CHAPITRE

5

HYDRODYNAMIQUE ET RÉGIMES ASYMPTOTIQUES

Contents

5.1	Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques	21
5.2	Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité	21
5.3	Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)	21

5.1 Hydrodynamique classique des systèmes chaotiques

5.2 Hydrodynamique des systèmes intégrables et distribution de rapidité

5.3 Équation d'hydrodynamique généralisée (GHD)

FLUCTUATIONS ET CORRECTIONS À L'HYDRODYNAMIQUE GÉNÉRALISÉE

Contents

6.1	Fluctuations de la distribution de rapidité	23
6.2	Ordre 2 des corrections et rôle de l'entropie de Yang-Yang	25
6.3	Confrontation entre hydrodynamique classique et hydrodynamique généralisée	25

6.1 Fluctuations de la distribution de rapidité

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux fluctuations de la distribution de rapidité $\delta\Pi$ autour d'une distribution de référence Π^c , qui maximise la contribution à la fonction de partition des états, exprimée comme une fonctionnelle de la distribution Π :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\Pi} \exp(-\mathcal{A}(\Pi)).$$

Dans la section **Entropie de Yang-Yang** (??), l'action $\mathcal{A}(\Pi)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}(\Pi) \doteq -S_{YY}(\Pi) + \int f(\theta)\Pi(\theta) d\theta,$$

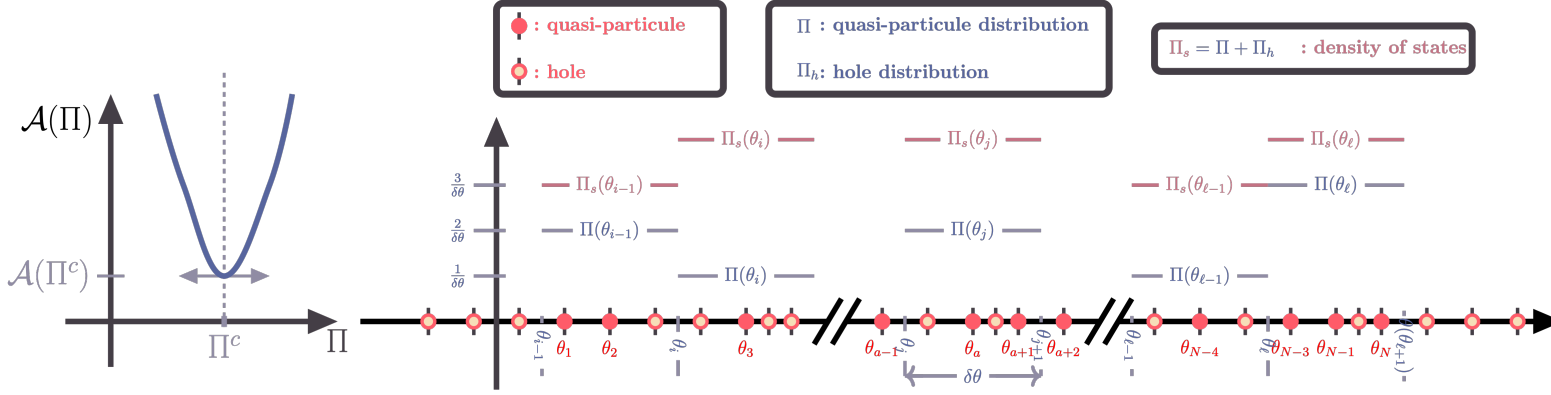
où S_{YY} est la fonctionnelle d'entropie de Yang-Yang, définie dans (??), et f est la fonction paramétrant les charges, introduite dans (??).

Dans cette même section **Entropie de Yang-Yang** (??), nous avons établi un lien entre f et Π^c .

Nous poursuivons à présent avec cette définition de l'action de classe \mathcal{C}^2 et admetant une distribution critique Π^c tel que sa différentielle en ce point critique soit nulle $d\mathcal{A}_{\Pi^c} = 0$ (??) de sorte que d'après la formule de Taylor-Young

$$\mathcal{A}(\Pi^c + \delta\Pi) \underset{\delta\Pi \rightarrow 0}{=} \mathcal{A}(\Pi^c) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \Pi^2} \Big|_{\Pi^c} (\delta\Pi)^2 + \mathcal{O}((\delta\Pi)^3),$$

une expression quadratique pour l'action à l'ordre dominant en $\delta\Pi$ avec $\left.\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi^2}\right|_{\Pi^c}$ la forme quadratique définie positive (Fig (??)).



On discrétise l'axe des rapidités en petite cellule de rapidité $[\theta, \theta + \delta\theta]$, qui contient $\Pi(\theta)\delta\theta$ rapidités. Avec ces petites tranches, la forme quadratique s'écrit :

$$\left.\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\Pi^2}\right|_{\Pi^c}(\delta\Pi) = \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a) \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta_a)\partial\delta\Pi(\theta_b)}(\Pi^c) \delta\Pi(\theta_b).$$

Les fluctuations s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \langle \delta\Pi(\theta) \delta\Pi(\theta') \rangle &= \frac{\int d\delta\Pi \delta\Pi(\theta) \delta\Pi(\theta') \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a) \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta_a)\partial\delta\Pi(\theta_b)}(\Pi^c) \delta\Pi(\theta_b)\right)}{\int d\delta\Pi \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{a,b|\text{tranche}} \delta\Pi(\theta_a) \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta_a)\partial\delta\Pi(\theta_b)}(\Pi^c) \delta\Pi(\theta_b)\right)} \\ &= (\mathbf{A}^{-1})_{\theta,\theta'} \end{aligned}$$

La matrice hessienne $\mathbf{A}_{\theta,\theta'} \equiv \frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\delta\Pi(\theta)\partial\delta\Pi(\theta')}(\Pi^c)$, au point critique Π^c , s'écrit

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^{(0)} + \delta\theta \hat{\mathbf{V}}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{\theta,\theta'}^{(0)} &= \left(\frac{(\Pi^c/\Pi_s^c)^{-1}}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta) \delta\theta \delta_{\theta,\theta'}, \\ V_{\theta,\theta'} &= \left\{ - \left[\left(\frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta) + \left(\frac{1}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta') \right] \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} + \int d\theta'' \left(\frac{\Pi^c/\Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta'') \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi} \right\} \delta\theta \end{aligned}$$

Point clé n° 3. Donc une a l'ordre un en $\delta\theta(\hat{\mathbf{A}}^{(0)})^{-1}\hat{\mathbf{V}}$

$$\langle \delta\Pi(\theta) \delta\Pi(\theta') \rangle = ((\Pi_s^c - \Pi^c)\Pi^c/\Pi_s^c)(\theta) \delta_{\theta,\theta'} / \delta\theta + \mathcal{F}(\theta, \theta'),$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\theta, \theta') &= [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta) + (\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \frac{\Delta(\theta' - \theta)}{2\pi} \\
&\quad - [(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta)(\Pi_s^c - \Pi^c)(\theta')] \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta) \frac{\Pi^c}{\Pi_s^c}(\theta') \int d\theta'' \left(\frac{\Pi^c / \Pi_s^c}{\Pi_s^c - \Pi^c} \right) (\theta'') \frac{\Delta(\theta'' - \theta)}{2\pi} \frac{\Delta(\theta'' - \theta')}{2\pi}
\end{aligned}$$

6.2 Ordre 2 des corrections et rôle de l'entropie de Yang-Yang

6.3 Confrontation entre hydrodynamique classique et hydrodynamique généralisée