ChatGPT

\section{Cadre sans potentiel vecteur}

Dans une jauge quelconque du champ électromagnétique, l'équation de Schrödinger pour une particule de charge q et de masse m s'écrit \begin{equation} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = \left[\frac{1}{2m}\bigl(-i\hbar\nabla - q\vec{A}(\vec{r},t)\bigr)^2 + q\,\Phi(\vec{r},t) \right] \Psi(\vec{r},t). \end{equation} Les dérivées covariantes associées au champ électromagnétique sont définies par

$$D_0 = \partial_t + i\frac{q}{\hbar}\Phi \quad \text{et} \quad D_k = \partial_{x_k} - i\frac{q}{\hbar}A_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Sous une transformation de jauge locale $\chi(\vec{r},t)$, les potentiels se transforment selon

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi, \qquad \Phi' = \Phi - \partial_t\chi,$$

et la fonction d'onde selon

$$\Psi'(\vec{r}, t) = e^{i\frac{q}{\hbar}\chi(\vec{r},t)}\Psi(\vec{r}, t).$$

Le tenseur électromagnétique de Faraday, défini par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

reste invariant sous cette transformation, assurant ainsi l'invariance des champs physiques $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par changement de jauge.

\section{Hamiltonien simplifié}

Pour simplifier le Hamiltonien, on applique une transformation de jauge appropriée visant à éliminer explicitement le potentiel vecteur. Plus précisément, on introduit l'opérateur unitaire $T_\chi = \exp\bigl(i\frac{q}{\hbar}\chi(\vec{r},t)\bigr)$ qui agit sur la fonction d'onde comme $\Psi' = T_\chi\Psi$ et modifie les potentiels selon les règles mentionnées ci-dessus. Sous cette transformation unitaire, l'Hamiltonien se transforme en

$$H' = T_\chi H T_\chi^{-1} + i\hbar(\partial_t T_\chi)T_\chi^{-1},$$

où $H=(\vec{p}-q\vec{A})^2/(2m) + q\Phi$ est l'Hamiltonien d'origine. En choisissant la fonction de jauge $\chi(\vec{r},t)$ de manière adéquate (par exemple $\chi(\vec{r},t) = -\int^t \vec{r}\cdot \vec{E} *\perp(\tau)\,d\tau$ pour un champ électrique transverse $\vec{E}*\perp$ homogène), on peut faire disparaître le potentiel vecteur du Hamiltonien. Le nouvel Hamiltonien s'écrit alors

$$H' = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + q\,\Phi(\vec{r}, t) - \vec{D}\cdot\vec{E}_\perp(t),$$

avec l'opérateur dipolaire $\vec{D} = q\,\vec{r}$. Le couplage de la particule au champ électrique transverse apparaît ainsi sous la forme d'un terme dipolaire $-\vec{D}\cdot \vec{E}*perp$ (dans lequel $ \vec{E}*\perp = -\partial_t \vec{A}$ dans la jauge choisie), ce qui justifie le caractère « dipolaire » de l'Hamiltonien obtenu.
