

GNPHE/0810

Introduction à La Théorie Des Cordes: I

Adil Belhaj¹

Centre National de l'Energie, des Sciences et des Techniques Nucléaires, Rabat, Morocco,

Groupement National de Physique des Hautes Energies, Siège focal: FS, Rabat, Morocco

November 26, 2024

¹belhaj@unizar.es

Ce travail est une note de cours sur la théorie des supercordes que nous avons préparés pour les étudiants de doctorats de UFR-PHE Laboratoire de Physique des Hautes Energies de la faculté des Sciences de Rabat (2002, 2003, 2004, 2007, 2008). Ce sont des notes préliminaires destinées pour des jeunes chercheurs.

Remerciement

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements aux chercheurs suivant pour la discussion et l'aide scientifique qu'il m'ont accordé: M. Asorey, L. Boya, J. L. Cortes, P. Diaz, M. P. Garcia de Moral, C. Gomez, L. Ibanez, S. Montanez, S. Randjbar-Daemi, J. Rasmussen, E. Saidi, A. Sebbar, A. Segui, C. Vafa, A. Urange.

Enfin, j'adresse mes remerciements à ma famille, et tous mes amis au Canada, Espagne et USA.

Contents

Introduction Générale	7
1 Théorie de la corde Bosonique	13
1.1 Corde bosonique classique	14
1.1.1 Approche de Polyakov	14
1.1.2 Corde ouverte	17
1.1.3 Corde fermée	17
1.2 Quantification canonique de la corde bosonique	19
1.2.1 Corde ouverte quantique	19
1.2.2 Spectre de masse des états de la corde ouverte	20
1.2.3 Corde fermée quantique	20
1.2.4 Spectre des états	22
2 Modèles de supercordes	25
2.1 Corde fermionique	25
2.1.1 Corde fermionique classique	26
2.1.2 Supercordes hétérotiques classiques	29
2.1.3 Supercorde quantique	30
2.2 Classification des supercordes	34
2.2.1 Supercorde type IIA et IIB	34
2.2.2 Supercorde hétérotique $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$	36
2.2.3 Supercorde ouverte type I	37

3 Compactification des Modèles de Supercordes	41
3.1 Compactification toroïdale des supercordes	43
3.1.1 Compactification sur S^1	43
3.1.2 Compactification des modèles $N = 2$ sur T^d	44
3.1.3 Compactification des modèles $N = 1$ sur T^d	46
3.2 Variétés de Calabi-Yau	47
3.2.1 Surface K3	48
3.2.2 Espace des modules de K3	50
3.2.3 Variétés de Calabi-Yau de dimension 3	51
3.3 Compactification des Supercordes sur K3	52
3.3.1 Supercorde IIA sur K3	52
3.3.2 Supercorde IIB sur K3	53
3.3.3 Modèles de supercordes $N = 1$ sur K3	54
3.4 Compactifications sur des Calabi-Yau de dimension 3	55
3.4.1 Compactification des modèles $N = 2$	55
3.4.2 Compactification des modèles $N = 1$	57
4 Solitons en théories des supercordes	59
4.1 Branes et tenseurs antisymétriques	60
4.2 La physique D-branes	62
4.2.1 Action des p -branes	63
4.3 D-branes et les espaces de Calabi-Yau	65
5 Dualités en Théorie des Supercordes	67
5.1 Dualité en théorie des supercordes	67
5.2 Symétrie de dualité: Définitions	67
5.2.1 Dualité-T	68
5.2.2 Dualité-S	69
5.3 Dualité faible-fort couplage à dix dimensions	69
5.3.1 Auto-dualité du modèle IIB	69
5.3.2 Dualité type I- hétérotique SO(32)	70

CONTENTS

5

5.4	Dualité type II- hétérotique	71
5.4.1	Type IIA sur K3/ hétérotique sur T^4	71
5.4.2	Dualité hétérotique -type IIA à quatre dimensions	72

Introduction Générale

Un des objectifs de la physique des hautes énergies est d'élaborer une théorie quantique saine capable de décrire les quatres interactions fondamentales de l'univers. Alors que l'interaction électromagnétique (s'exerçant entre les particules chargées), l'interaction faible (responsable des désintégrations nucléaires) et l'interaction forte (permettant la cohésion des noyaux atomiques) sont adéquatement décrites dans le cadre des modèles de grande unification; la gravitation, responsable de l'attraction mutuelle entre les corps matériels, est cependant traitée à part. Les modèles de supercordes que nous allons présenter dans ces notes permettent de résoudre ce problème au détriment de la création d'autres [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

L'idée de base de la théorie de supercordes considère qu'au niveau quantique ($< 10^{-34}$ cm), les objets fondamentaux de la physique ne sont plus vus comme des particules ponctuelles de dimension nulle mais plutôt comme des objets étendus de dimension un et de tension T . Il existe plusieurs types de cordes: corde bosonique (ouverte ou fermée) ou fermionique (ouverte, fermée; chirale et non chirale). A l'échelle de Planck, les cordes bosoniques fermées sont assimilées à des cercles; ses excitations quantiques contiennent entre autres le graviton et un tenseur antisymétrique de rang deux jouant un rôle crucial en théorie des cordes. Quant aux cordes bosoniques ouvertes, elles sont assimilées à des petits segments avec des conditions aux bords de Dirichlet ou de Neumann; ses excitations quantiques contiennent naturellement les champs de jauge [1, 2, 3]. Les deux types de cordes, ouvertes et fermées, sont nécessaires pour la construction des modèles quantiques consistents.

Lors de son mouvement classique, la corde bosonique (ouverte et fermée) engendre dans l'espace-temps une surface bidimensionnelle (surface d'univers). Par suite, la théorie classique des cordes peut être vue comme une théorie des champs bidimensionnelle conforme. Au niveau quantique, les contraintes d'invariance conforme exigent que la dimension de l'espace-temps soit égale à $D = 26$ au lieu des (1+3) habituelles [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. Ce type de modèle est baptisé théorie de corde bosonique. Cette théorie n'est cependant pas consistante au niveau quantique en raison de:

- Absence des fermions nécessaires pour décrire la matière.
- Présence du tachyon (particule de masse carrée négative).

Le premier problème est résolu par la considération des théories de supercordes (cordes supersymétriques) qui vivent dans un espace-temps de dimension réduite à $D = 10$ et le deuxième est surmonté par la projection de Gliozzi, Sherk et Olive (**GSO**) [13, 14]. Les contraintes, permettant de compenser les anomalies gravitationnelle et de Yang-Mills, montrent qu'il n'existe pas une seule théorie à $D = 10$, mais plutôt cinq modèles de supercordes classés comme suit [3]

(a) *Supercordes ayant une supersymétrie d'espace-temps $N = 1$ à dix dimensions comprenant:*

- Supercorde de type I avec un groupe de jauge $SO(32)$
- Supercorde hétérotique $SO(32)$
- Supercorde hétérotique $E_8 \times E_8$

(b) *Supercordes ayant une supersymétrie d'espace-temps $N = 2$:*

- Supercorde non chirale type IIA
- Supercorde chirale type IIB

Le spectre des états non massifs de ces modèles contient le dilaton ϕ , dont $g_s = e^\phi$ est la constante de couplage de la théorie, le graviton de spin 2 et des tenseurs antisymétriques

de jauge généralisant la notion de potentiel vecteur A_μ à des tenseurs antisymétriques $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ à $p+1$ indices (($p+1$)-formes, $p = 1, 2, \dots$). Ces tenseurs se couplent à des objets étendus appelés p -branes qui généralisent la particule ponctuelle ($p = 0$) et la corde ($p = 1$). Les p -branes sont infiniment lourdes à faible couplage et occupent des hypersurfaces de $(p+1)$ dimensions dans l'espace-temps à dix dimensions. Il existe différents types de branes: **NS-NS** branes qui sont chargées sous l'action des tenseurs du secteur **NS-NS** et D-branes chargées sous les tenseurs **R-R** [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27]. Ces dernières sont stables et jouent un rôle important dans la description du régime non perturbatif des modèles de supercordes [3].

La théorie des supercordes peut être également définie dans des dimensions inférieures à $D = 10$ en utilisant la méthode de compactification [3, 28]. Cette dernière suppose que certaines des dix dimensions sont compactes et non observables à notre échelle. Les compactifications les plus étudiées en théorie des supercordes sont:

- Compactification toroidale qui préserve toutes les supercharges initiales [29].
- Compactification sur des variétés de Calabi-Yau préservant un certain nombre de supercharges à dix dimensions [30, 31, 32, 33].

Ces dernières restent les candidats les plus probables pour connecter les modèles de supercordes au notre monde réel.

Puisqu'il existe cinq types de modèles de supercordes consistents à dix dimensions, nous allons se trouver avec un grand nombre de théories de supercordes à des dimensions inférieures. Ces modèles sont différents de ceux des supercordes fondamentales à dix dimensions dont les états du vide sont déterminés par les valeurs moyennes des champs scalaires (appelées aussi modules) interprétées comme les coordonnées locales d'un espace communément appelé espace des modules.

La compactification est une méthode permettant non seulement de réduire la dimension de l'espace-temps mais offre aussi des possibilités de connecter les différents modèles de supercordes dans les dimensions inférieures par le biais des symétries de dualités. Des progrès récents conduisent à penser que ces différentes théories ne sont en fait que des cas limites d'une théorie unique, appelée théorie-M (M pour mère) [34]. Les symétries de

dualités relient des régimes de couplage différents généralisant ainsi la dualité électrique-magnétique observé par le passé dans le cadre des théories de jauge à quatre dimensions. L'exemple le plus simple de symétrie de dualité en théorie des supercordes est nulle doute la dualité-S de la théorie IIB à dix dimensions échangeant la constante de couplage g_{IIB} en $\frac{1}{g_{IIB}}$ [35]. Un autre exemple est donné par les supercordes de type I $SO(32)$ et hétérotique $SO(32)$ qui sont échangées moyennant la substitution $g_{het} = \frac{1}{g_I}$. La supercorde hétérotique peut être vue alors comme le soliton de la supercorde type I à dix dimensions. Ces arguments conduisent à considérer les modèles de type I $SO(32)$ et la supercorde hétérotique $SO(32)$ comme deux développements perturbatifs extrêmes, l'un à g_I faible et l'autre à $\frac{1}{g_I}$ faible d'une même théorie définie en toute valeur de g_I .

Les symétries de dualités, qui sont adéquatement décrite par la symétrie miroir introduite dans [3], existent également pour les modèles de supercordres dans des dimensions d'espace-temps inférieures à dix. A neuf dimensions par exemple, les espaces des modules des supercordes hétérotiques $E_8 \times E_8$ et $SO(32)$ sont perturbativement équivalents par la dualité-T après compactification sur un cercle. De même les modèles de supercordes de type IIA et type IIB sont isomorphes sous la dualité-T [3]. En pratique, il se trouve que le cas le plus important de dualité corde-corde est celui reliant la supercorde IIA sur une variété K3 et la supercorde hétérotique sur un tore T^4 [3, 34, 36, 37, 38, 40]. Ces deux modèles présentent le même espace des modules $\mathbf{R}^+ \times \frac{SO(20,4,\mathbf{R})}{SO(20) \times SO(4)}$ décrivant le dilaton (\mathbf{R}^+) et les modules du réseau pair auto-dual de Narain $\Gamma^{20,4}$ définissant la compactification de supercorde hétérotique sur T^4 ou encore la compactification de la théorie de supercorde de type IIA sur K3. Les états non massifs du spectre perturbatif correspondant au réseau de Narain $\Gamma^{20,4}$ sont identifiés avec les D-2branes de IIA sur K3 enroulées sur les 2-cycles d'aire nulles de l'homologie de K3. Autrement dit la symétrie de jauge perturbative des supercordes hétérotiques sur T^4 est identifiée avec les singularités ADE de K3 [38]. Ainsi à six dimensions, l'étude de la symétrie de jauge non abélienne dans le modèle de supercorde type IIA aux faibles énergies est rattachée à l'étude des singularités de K3 en présence des D-2branes enroulées sur les 2-cycles de K3. Cette idée a été développée C. Vafa et al pour étudier la limite des théories des champs à six et à quatre dimensions obtenues à partir de la supercorde IIA et de la théorie-F [39]. Cette

étude a donné naissance à l'approche dite *ingénierie géométrique* (geometric engineering) des théories des champs quantiques [40, 41]. Cette construction va au delà du célèbre modèle de Seiberg-Witten des théories de jauge supersymétriques $N = 2$ à quatre dimensions [42, 43] et offre une alternative à l'approche de Hanany-Witten des théories de jauge basée sur l'introduction des D-branes [44, 45]. Le succès de l'ingénierie géométrique est essentiellement du aux méthodes sophistiquées de la géométrie torique des variétés de Calabi-Yau locales et de la symétrie miroir. L'idée principale de l'ingénierie géométrique des théories quantiques des champs à partir des modèles de supercordes est de partir de la supercorde de type IIA, en présence des D2-branes, compactifiée sur des variétés de Calabi-Yau locales à trois dimensions complexes. Ceci donne naissance, à faible énergie, à des théories des champs supersymétriques $N = 2$ à quatre dimensions dont l'espace des modules physique \mathcal{M} contient l'espace des modules géométriques de Calabi-Yau à trois dimensions complexes. En fait, la compactification de la théorie IIA sur K3, en présence de D2-branes, conduit à des théories supersymétriques $N = 2$ à six dimensions; une deuxième compactification sur un espace de dimension 2, conduira alors à des modèles de type IIA à quatre dimensions.

Le but central de ces notes est de donner une revue sur les récents développements de la théorie supercordes; tout particulièrement leurs spectres d'états non massifs, classification des supercordes, compactification et dualités.

Dans le premier chapitre nous rappelons la théorie quantique des cordes bosoniques (ouvertes et fermées) vivant à 26 dimensions. Par suite nous introduisons dans le chapitre deux la théorie des supercordes généralisant la corde bosonique vers une théorie plus saine à $D = 10$. En utilisant la projection de Gliozzi, Sherk et Olive (**GSO**), nous construisons le spectre d'états non massifs de la théorie des supercordes à $D = 10$. Finalement nous donnons une classification des cinq modèles de supercordes ainsi que leurs spectres à $D = 10$.

Dans le chapitre 3, nous étudions les différentes compactifications des modèles de supercordes à $D = 10$ vers des dimensions inférieures. En premier temps, nous examinons trois exemples de compactification des supercordes: La compactification toroïdale sur un tore T^d , la compactification sur K3 de groupe d'holonomie $SU(2)$ et la compactification

sur des variétés de Calabi-Yau à trois dimensions complexes. Afin de mieux illustrer la compactification sur T^d , nous commençons tout d'abord par la compactification des supercordes sur un cercle S^1 . Ensuite nous donnons les compactifications des cinq modèles des supercordes sur la variété K3 (vue comme orbifold) ainsi que sur des variétés complexes de Calabi-Yau à trois dimensions. Après, nous montrons comment peut-on construire les modèles duals en utilisant la compactification. Cette étude montre que le régime non perturbatif des modèles de supercordes est basé sur l'étude des *D-branes* [3] dont on rappelle la physique dans le chapitre quatre. Nous profitons de cette étude pour prouver les symétries de dualités des modèles de superordres en utilisant comme argument de départ la dualité entre la supercorde hétérotique sur le tore T^4 et la supercorde de type IIA sur K3. Nous montrons, à partir de l'aspect singulier de K3, comment extraire de manière géométrique les symétries de jauge non abélienne dans le modèle de supercorde IIA. Après nous étendons cette dualité à quatre dimensions.

Chapter 1

Théorie de la corde Bosonique

Couronnée de succès pour la description des trois interactions électromagnétique, forte et faible dans le cadre du modèle standard, la théorie quantique des champs de particules élémentaires devrait cependant reconnaître son échec à décrire la force gravitationnelle au niveau quantique. La théorie des supercordes apparaît à l'heure actuelle comme le seul candidat convenable à l'unification quantique des quatre interactions fondamentales de la nature. La théorie des supercordes a été introduite dans les années 1970, mais son étude réelle n'a commencé qu'à partir des années 1980. Classiquement cette théorie décrit la dynamique relativiste d'un objet unidimensionnel balayant une surface d'univers au cours de sa propagation dans l'espace-temps; tout comme la trajectoire d'une particule élémentaire qui est une ligne d'univers. De cette propriété, il découle que la théorie des supercordes peut être vue comme une théorie des champs bidimensionnelle conforme. Il existe deux types de cordes: la corde ouverte et la corde fermée vues, à petite échelle, comme un interval ou un cercle respectivement. Les degrés de liberté (ddl) des secteurs gauche (L) et droit (R) de la corde fermée sont essentiellement indépendants. La corde ouverte possède alors la moitié des (ddl) de la corde fermée à cause des conditions au bords.

L'étude quantique de la théorie des cordes révèle la distinction de deux types de cordes: la corde bosonique et la corde fermionique ou supercorde. Cette dernière admet une surface d'univers supersymétrique. Ceci signifie qu'en plus des coordonnées bosoniques,

nous avons aussi des coordonnées fermioniques réalisant la supersymétrie de la surface d'univers. Les contraintes d'invariance conforme de la théorie quantique des cordes exigent que la dimension critique de l'espace-temps soit $D = 26$ pour la corde bosonique et $D = 10$ pour la supercorde. A première vue, ces dimensions d'espace-temps semblent étranges; elles sont cependant le prix à payer pour avoir une théorie quantique consistante capable de décrire l'unification des quatre interactions fondamentales de la nature. Dans chapitre 3, nous allons voir comment réduire ces dimensions à la dimension usuelle de l'espace-temps à notre échelle. Outre la dimension 26, la théorie quantique de la corde bosonique admet d'autres problèmes dus à la présence d'une particule de masse carrée négative (le tachyon) ainsi que de l'absence de degrés de liberté fermioniques dans l'espace-temps. Ces deux problèmes sont absents en théorie quantique des supercordes à dix dimensions. C'est la raison qui nous a poussé à concentrer notre attention sur l'étude des modèles de supercordes. Cependant il faudrait noter que malgré ses défauts, l'étude de la théorie quantique de la corde bosonique reste toujours un sujet de recherche d'actualité; en particulier en connection avec les récents développements sur la conjecture de Sen concernant le problème de condensation des tachyons [48, 49].

La présentation de ce chapitre est comme suit: Dans les sections 1 et 2, nous introduisons les grandes lignes de la théorie quantique bosonique. Là aussi nous donnons seulement les résultats fondamentaux. Plus de détails pourront être trouvés dans [1, 2, 3].

1.1 Corde bosonique classique

1.1.1 Approche de Polyakov

L'idée centrale de la théorie des cordes est de considérer les objets fondamentaux de la physique classique non plus comme des particules ponctuelles (de dimension 0) mais plutôt comme des objets de dimension 1, dotés d'une longueur très petite. Les différentes particules élémentaires que nous connaissons apparaîtraient alors comme différents modes de vibration de la corde. Le but essentiel de la théorie des cordes est alors la construction d'une mécanique quantique relativiste des objets étendus ayant une structure interne de

dimension 1. Pour mieux illustrer l'idée, il est intéressant de rappeler tout d'abord l'action classique d'une particule libre ponctuelle relativiste $X^\mu(\tau)$, de masse m [3, 8]:

$$S = -m \int d\tau \sqrt{\frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau}}, \quad (1.1.1)$$

où τ est le temps propre. Par analogie, l'action classique de la corde décrite par $X^\mu(\tau, \sigma)$, où σ est l'extension unidimensionnelle, est donnée par

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{|\det \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu|}, \quad (1.1.2)$$

où $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ est la tension de la corde et α' est un paramètre de dimension $[m]^{-2}$. (τ, σ) sont les coordonnées de la surface d'univers et (α, β) désignent les directions (τ et σ). Equation (1.1.2) dite l'action Nambu - Goto, est une action très difficile à manier à cause de la racine carrée. Pour dépasser cette difficulté technique, Poyakov a introduit une autre action, classiquement équivalente à l'action (1.1.2), possèdant les mêmes propriétés de symétrie mais à l'avantage d'être quadratique en les coordonnées $X^\mu(\tau, \sigma)$ [9, 10]:

$$S = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (1.1.3)$$

En plus de $X^\mu(\tau, \sigma)$, cette action contient un champ auxiliaire $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ décrivant la métrique de la surface d'univers. h est le déterminant de la matrice $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ et $h^{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ est l'inverse de $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$. L'action (1.1.3) admet plusieurs symétries locales:

- Le groupe de Poincaré dont les éléments (Λ_ν^μ, a^ν) agissant comme:

$$X^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu X^\nu + a^\nu \quad (1.1.4)$$

- Le groupe de la reparamétrisation (difféomorphisme) de la surface d'univers

$$\sigma \rightarrow \sigma'(\sigma, \tau) \quad (1.1.5)$$

$$\tau \rightarrow \tau'(\sigma, \tau) \quad (1.1.6)$$

- La symétrie de Weyl:

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow e^{f(\tau, \sigma)} h_{\alpha\beta}. \quad (1.1.7)$$

Les variations de l'action de Polyakov par rapport à la métrique $h^{\alpha\beta}$ et les champs X^μ conduisent aux équations suivantes

$$T_{\alpha\beta} = \sqrt{-h}(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu) - \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}h^{\lambda\sigma}\partial_\lambda X^\mu \partial_\sigma X_\mu \quad (1.1.8)$$

et

$$\partial_\alpha(\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu) = 0, \quad (1.1.9)$$

où $T^{\alpha\beta}$ est le tenseur énergie-implusion. C'est un tenseur symétrique conservé et de trace nulle, ce qui montre que (1.1.3) est une théorie des champs conforme à deux dimensions. En utilisant l'invariance sous les difféomorphismes de la surface d'univers, nous pouvons toujours ramener la métrique $h^{\alpha\beta}$ à la forme diagonale et pseudo-euclidienne sur la surface d'univers

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.10)$$

Ce choix de métrique, définissant la jauge conforme, ramène l'action (1.1.3) à

$$S = \frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (1.1.11)$$

Alors que les équations (1.1.8-9) deviennent respectivement comme suit

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \quad (1.1.12)$$

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu(\tau, \sigma) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu(\tau, \sigma) = 0. \quad (1.1.13)$$

La symétrie classique de Weyl est brisée au niveau quantique conduisant alors à une anomalie. Cette anomalie s'annule uniquement si la dimension de l'espace-temps est 26, (c'est la dimension critique de la théorie des cordes bosoniques)[1, 2, 3].

Pour fixer les idées nous prenons la dimension de l'espace-temps ($X^\mu, \mu = 0, 1, \dots, D-1$) égale à 26. La solution générale de l'équation de mouvement (1.1.13) s'écrit généralement comme la somme de deux composantes arbitraires X_L^μ et X_R^μ décrivant respectivement les vibrations gauches L (L pour left) et droites R (R pour right)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau - \sigma) + X_R^\mu(\tau + \sigma). \quad (1.1.14)$$

Ces modes sont indépendants pour le cas de la corde fermée mais pas pour la corde ouverte comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

1.1.2 Corde ouverte

Dans le cas de la corde ouverte, où la coordonnée σ varie entre 0 et π , les champs $X^\mu(\tau, \sigma)$ satisfont des conditions aux bords et par conséquent les degrés de liberté (ddl) du secteur gauche et droite sont liés. Ce qui restreint le nombre de degrés de liberté (ddl) de la théorie de corde ouverte à moitié. On distingue ainsi deux types d'extrémités pour les cordes ouvertes:

1- Celles qui obéissent à la condition aux limites de **Neumann**

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = 0, \pi) = 0. \quad (1.1.15)$$

2- Celles qui restent fixes dans un hyperplan et elles répondent à la condition aux limites de **Dirichlet**

$$\partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma = 0, \pi) = 0. \quad (1.1.16)$$

La solution générale de l'équation de mouvement pour la corde bosonique ouverte est donnée par:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + \ell^2 p^\mu \tau + i\ell \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (1.1.17)$$

où ℓ est une constante arbitraire avec une dimension de longueur. x^μ et p^μ sont deux constantes d'intégration qui correspondent à la coordonnée de centre de masse et à l'impulsion totale de la corde respectivement. Les α_n^μ sont les modes d'oscillations de la corde satisfaisant la condition de réalité:

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*. \quad (1.1.18)$$

1.1.3 Corde fermée

La corde fermée n'a pas d'extrémité et peut être vue comme un cercle. Ainsi les coordonnées $X^\mu(\tau, \sigma)$ doivent vérifier les conditions de périodicité suivantes:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi). \quad (1.1.19)$$

Dans ce cas, les degrés de libéreté des secteurs droit X_R^μ et gauche X_L^μ sont indépendants et ont pour forme explicite

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\tau - \sigma) &= \frac{x^\mu}{2} + \frac{1}{2}\ell^2 p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}\ell \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} \\ X_R^\mu(\tau + \sigma) &= \frac{x^\mu}{2} + \frac{1}{2}\ell^2 p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}\ell \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)}. \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Notons que nous avons ici deux ensembles des coordonnées d'oscillations α_n^μ et $\tilde{\alpha}_n^\mu$ satisfaisant:

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*, \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^*. \quad (1.1.21)$$

Les règles de commutation canonique des champs $X^\mu(\tau, \sigma)$ sont:

$$\begin{aligned} \{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')\} &= \frac{1}{T}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma') \\ \{P^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma)\} &= \{X^\nu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)\} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

où $P^\mu = T\frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu(\tau, \sigma)$. Partant des équations (1.1.20,22), nous obtenons les équations suivantes

$$\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = \{\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu\} = -im\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu} \quad (1.1.23)$$

$$\{\tilde{\alpha}_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = 0 \quad (1.1.24)$$

$$\{x^\mu, p^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \quad (1.1.25)$$

De même l'Hamiltonien pour la corde fermée

$$\mathcal{H} = \frac{T}{2} \int d\sigma \left(\frac{\partial X^2}{\partial \tau} + \frac{\partial X^2}{\partial \sigma} \right), \quad (1.1.26)$$

peut être récrit comme suit

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (\alpha_{-n}\alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n}\tilde{\alpha}_n). \quad (1.1.27)$$

Tandis que pour la corde ouverte, nous avons la forme suivante

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_{-n}\alpha_n. \quad (1.1.28)$$

L'étape suivante consiste à quantifier la théorie de la corde bosonique critique. Puisqu'il existe plusieurs méthodes de quantification covariantes et non covariantes, nous allons

nous concentrer sur l'étude de la quantification covariante canonique déduite immédiatement à partir des équations précédentes en remplaçant les crochets de poisson $\{, \}$ par les commutateurs

$$\{, \} \rightarrow -i[,], \quad (1.1.29)$$

1.2 Quantification canonique de la corde bosonique

1.2.1 Corde ouverte quantique

Nous étudions ci-dessous la quantification de la corde ouverte, ou également d'un secteur d'oscillation disons le secteur gauche de la corde fermée. Les résultats obtenus s'étendent immédiatement au secteur droit. A partir des équations (1.1.23-25), nous trouvons les règles de commutations suivantes:

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (1.2.1)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}, \quad \alpha_n^+ = \alpha_{-n}. \quad (1.2.2)$$

Il découle de ces équations que α_{-n} et α_n ($n > 0$) peuvent être vus comme les opérateurs de création et d'annihilation qui agissent sur le vide de l'espace de Fock $|0, p^\mu\rangle$ d'impulsion p^μ comme

$$\begin{aligned} \alpha_n^\mu |0, p^\mu\rangle &= 0, \quad n > 0 \\ p^\mu |0, p^\mu\rangle &= p^\mu |0, p^\mu\rangle. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Le mode zéro $\alpha_0^\mu = \alpha_0^{+\mu} = \frac{p^\mu}{2}$ correspond à l'impulsion totale de la corde ouverte. L'invariance de jauge sous les difféomorphismes de la surface d'univers imposant l'annulation du tenseur énergie-impulsion sur la surface d'univers se manifeste au niveau quantique par les conditions suivantes

$$\begin{aligned} L_n |0, p^\mu\rangle &= 0, \quad n > 0, \\ L_0 |0, p^\mu\rangle &= a |0, p^\mu\rangle, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

où L_n sont les modes de Fourier du tenseur énergie-impulsion gauche donnés par

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n} \alpha_n; \quad n \neq 0. \quad (1.2.5)$$

et vérifient l'algèbre de Virasoro

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n}, \quad (1.2.6)$$

ou c est la charge centrale. L_0 est donné par

$$L_0 = \mathcal{H} = -\frac{\alpha'}{4}p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n - a, \quad (1.2.7)$$

où a est une constante dite d'ordre normale qui est fixée à la valeur $a = 1$ en exigeant l'unitarité de la théorie quantique, c.à.d l'absence des états de norme négative. En particulier, l'annulation de L_0 implique que la formule de masse s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{2}{\alpha'}(N_L - 1) = -p^\mu p_\mu \\ &= \frac{2}{\alpha'}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n - 1\right), \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

où $N_L = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n$ désigne les nombres d'oscillations gauche et $\alpha' = \ell^2$ est relié à la tension de la corde ouverte.

1.2.2 Spectre de masse des états de la corde ouverte

Soit un état physique $|\psi\rangle$. Considérons les équations (1.2.7). Déterminons le spectre de masse des états de la corde bosonique:

- L'état fondamental $|0, p\rangle$ a une masse négative -2 .
- Le premier état excité $\alpha_{-1}^\mu|0, p\rangle$, construit par l'action de l'opérateur de création α_{-1}^μ sur l'état fondamental $|0, p\rangle$, possède une masse nulle. Afin d'éliminer les états de norme négative, nous introduisons les D vecteurs de polarisations $\zeta_\mu^{(\lambda)}$ $\mu, \lambda = 0, \dots, D - 1$, tels que $(\zeta_\mu^{(0)})^2 = -1$ et $(\zeta_\mu^{(i)})^2 = 1$, $i = 1, \dots, D - 1$. Les premiers états excités sont de normes égales à $(\zeta_\mu^{(\lambda)})^2$.

1.2.3 Corde fermée quantique

Concernant la théorie des cordes fermées, les résultats sont légèrement différents à cause de la présence simultanée des deux ensembles des oscillations. Rappelons que les excitations

quantiques de la corde fermée sont décrites par les modes d'oscillations α_m^μ et $\tilde{\alpha}_m^\mu$ de X_L^μ , X_R^μ et vérifient les relations de commutations suivantes

$$[\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu} \quad (1.2.9)$$

$$[\tilde{\alpha}_m^\mu, \alpha_n^\nu] = 0 \quad (1.2.10)$$

et

$$\alpha_n^{\mu+} = \alpha_{-n}^\mu, \quad \alpha_n^{\mu+} = \alpha_{-n}^\mu \quad (1.2.11)$$

$$\tilde{\alpha}_n^{\mu+} = \tilde{\alpha}_{-n}^\mu. \quad (1.2.12)$$

L'espace de Fock construit à partir de l'état de vide $|0\rangle = |0, p\rangle_L \otimes |0, p\rangle_R$ avec

$$\alpha_n|0\rangle = \tilde{\alpha}_n|0\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (1.2.13)$$

contient des états de la forme:

$$\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \alpha_{-n_i}^{\mu_i} \tilde{\alpha}_{-n_j}^{\mu_j} |0, k^\nu\rangle. \quad (1.2.14)$$

Comme dans le cas de la corde ouverte, l'invariance sous les difféomorphismes de la surface d'univers d'une corde fermée exige que

$$L_n|0\rangle = \tilde{L}_n|0\rangle = 0, \quad n > 1 \quad (1.2.15)$$

$$L_0|0\rangle = a|0\rangle, \quad \tilde{L}_0|0\rangle = a|0\rangle. \quad (1.2.16)$$

Les L_n et \tilde{L}_n sont les modes de Fourier des composantes gauches T_L et droites T_R du tenseur énergie-impulsion donnés par

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n} \alpha_n \quad (1.2.17)$$

$$L_0 = -\frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{m-n} \alpha_n - a \quad (1.2.18)$$

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \tilde{\alpha}_n \quad (1.2.19)$$

$$\tilde{L}_0 = -\frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \tilde{\alpha}_n - \tilde{a}, \quad (1.2.20)$$

où $a = \tilde{a} = 1$. La contrainte $L_0 = \tilde{L}_0$ implique que la formule de masse se réduite alors à

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N_L + N_R - 2), \quad (1.2.21)$$

où $N_L = \sum \alpha_{-n}\alpha_n$ et $N_R = \sum \tilde{\alpha}_{-n}\tilde{\alpha}_n$ désignent les nombres d'oscillations gauches et droites respectivement.

1.2.4 Spectre des états

L'analyse de l'équation (1.2.20) pour la corde bosonique montre que:

- L'état fondamental $|0\rangle$ ($N_L = N_R = 0$) de l'espace de Fock correspond à une particule de masse carrée négative $M^2 = -\frac{4}{\alpha'}$. C'est une particule scalaire appelée tachyon.
- L'état excité ($N_L = 1, N_R = 0$ ou $N_L = 0, N_R = 1$), décrivant une particule vectorielle, a aussi une masse carrée négative donc à éliminer dans tout modèle de corde consistante.
- L'état excité ($N_L = 1, N_R = 1$) correspond à des particules de masse nulle s'écrit sous la forme

$$\epsilon_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu\tilde{\alpha}_{-1}^\nu|0, k^\nu\rangle \quad (1.2.22)$$

dont le spin dépend du choix du tenseur de polarisation $\epsilon_{\mu\nu}$ [1, 2, 7, 8]. Physiquement ces états non massifs sont classés dans des représentations du sous groupe transverse $SO(24)$, obtenu après la décomposition du groupe de Lorentz $SO(1, 25)$

$$SO(1, 25) \rightarrow SO(24) \otimes SO(2)$$

en éliminant les (ddl) non physique, comme suit

$$\alpha_{-1}^i\tilde{\alpha}_{-1}^j|0\rangle = \alpha_{-1}^{[i}\tilde{\alpha}_{-1}^{j]}|0\rangle + [\alpha_{-1}^i\tilde{\alpha}_{-1}^j - \frac{1}{24}\delta^{ij}\alpha_{-1}^k\tilde{\alpha}_{-1}^k]|0\rangle + \frac{1}{24}\delta^{ij}\alpha_{-1}^i\tilde{\alpha}_{-1}^i|0\rangle, \quad (1.2.23)$$

où d'une façon équivalente

$$24_V \times 24_V = 1 \oplus 276 \oplus 299. \quad (1.2.24)$$

La partie symétrique de trace nulle décrit le graviton g_{ij} , le tenseur antisymétrique d'ordre 2 est représenté par le champ B_{ij} et la trace est interprétée comme le dilaton ϕ .

- Les états excités d'ordre supérieur ($N_L = N_R > 1$) ont tous des masses très grandes puisque $M \sim \frac{1}{\alpha'^2}$.

Chapter 2

Modèles de supercordes

2.1 Corde fermionique

La théorie des cordes bosoniques possède essentiellement deux problèmes [1, 2, 3]: L’existence de tachyon (particule non physique, qui apparaît très naturellement dans l’approche de la quantification covariante de la théorie de la corde bosonique) et l’absence des particules fermioniques nécessaires pour décrire la matière.

La théorie des supercordres résoud ces problèmes en ajoutant des champs fermioniques $\psi^\mu(\tau, \sigma)$ sur la surface d’univers. Cette augmentation par des spineurs donne lieu à une symétrie plus riche à savoir la symétrie superconforme. Notons que la supersymétrie demande autant de degrés de liberté fermioniques que bosoniques. De plus l’adjonction des champs fermioniques $\psi^\mu(\tau, \sigma)$ à la corde bosonique, qui sont à la fois des spineurs de Majorana à deux dimensions et des vecteurs de Lorentz, impliquent la réduction de la dimension critique de 26 à $D = 10$. Ces champs fermioniques peuvent être périodiques ou antipériodiques, définissant les secteurs de Neveu-Schwarz (**NS**) et de Ramond (**R**) respectivement. Pour construire une théorie consistante, nous introduisons de plus la projection de Gliozzi, Scherk et Olive (**GSO**) qui élimine en particulier le tachyon du spectre et garantit l’existence d’un nombre égal de particules bosoniques et fermioniques à chaque niveau d’excitation [13, 14].

2.1.1 Corde fermionique classique

Rappelons que dans la jauge conforme, l'action de la corde bosonique est donnée par:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu.$$

Cette action peut être généralisée en introduisant les champs fermioniques libres $\psi^\mu(\tau, \sigma)$:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu), \quad (2.1.1)$$

décrivant l'action de la supercorde classique. $\psi_A^\mu = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix}$ est un spinor de Majorana à deux dimensions vérifiant l'équation de Dirac

$$\rho^\alpha \partial_\alpha \bar{\psi}_A^\mu = 0, \quad (2.1.2)$$

où $\bar{\psi} = \psi^+ \rho^0$ et les ρ^α satisfont l'algèbre de Clifford

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}. \quad (2.1.3)$$

Dans notre cas, les ρ^α ($\alpha = 0, 1$) sont des matrices 2×2

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Les champs $X^\mu(\tau, \sigma)$ et $\psi^\mu(\tau, \sigma)$ sont des vecteurs de Lorentz dans l'espace-temps à 10 dimensions. En plus de la symétrie conforme, l'action de la supercorde (2.1.1) est invariante par les transformations supersymétriques

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon} \psi^\mu \\ \delta \psi^\mu &= -i\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \epsilon, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

où ϵ est un spinor de Majorana. Cette transformation permet de relier les bosons aux fermions. La variation de l'action de supercorde conduit à

$$\delta S = \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha \bar{\epsilon}) J^\alpha, \quad (2.1.6)$$

où J^α est le supercourant de Noether conservé. Ce dernier est donné par

$$J^\alpha = \frac{1}{2} \rho^\beta \rho_\alpha \psi_\beta^\mu \partial_\beta X_\mu, \quad (2.1.7)$$

qui est un spinor à deux composantes vérifiant l'identité:

$$\rho_\alpha J^{\alpha A} = 0,$$

où $\rho_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha = 0$. Alors que le tenseur énergie impulsion s'écrit sous la forme:

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{4} \bar{\psi}^\mu \rho_\alpha \partial_\beta \psi_\mu + \frac{i}{4} \bar{\psi}^\mu \rho_\beta \partial_\alpha \psi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} T_\sigma^\sigma. \quad (2.1.8)$$

L'action de la supercorde possède une symétrie plus large que l'algèbre de Virasoro de la corde bosonique. C'est l'algèbre superconforme engendrée par les deux courants $T_{\alpha\beta}$ et J_α .

Conditions aux bords et les modes de Fourier

Comme dans le cas des champs bosoniques $X^\mu(\tau, \sigma)$, les champs fermioniques doivent satisfaire des conditions aux bords. Ces conditions aux limites du spinor de Majorana $\psi^\mu(\tau, \sigma)$ sont obtenues en variant l'action de la supercorde (2.1.1). Ceci donne lieu à l'équation de Dirac et à des termes de bords.

(i) Supercorde ouverte

Dans ce cas, nous avons

$$\delta S_F = \int d\tau [\psi_+^\mu \delta \psi_{\mu+} - \psi_-^\mu \delta \psi_{\mu-}]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}, \quad (2.1.9)$$

c'est une collection de quatre termes, puisque les deux extrémités de la supercorde sont indépendantes. Ainsi nous avons plusieurs façons d'annuler δS_F . Une façon de faire est de considérer

$$[\psi_+ = \pm \psi_-]_{\sigma=0,\pi} \quad (2.1.10)$$

et

$$[\delta \psi_+ = \pm \delta \psi_-]_{\sigma=0,\pi}. \quad (2.1.11)$$

Si nous posons $\psi_+(0, \tau) = \psi_-(0, \tau)$, nous aboutissons à deux secteurs distincts:

Secteur de Ramond (**R**) est défini par

$$\begin{aligned} \psi_+^\mu(\tau, 0) &= \psi_-^\mu(\tau, 0) \\ \psi_+^\mu(\tau, \pi) &= \psi_-^\mu(\tau, \pi). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Dans ce secteur, les oscillations fermioniques droite et gauche sont périodiques et se développent en modes normaux sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\psi_+^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \\ \psi_-^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}, n \in Z.\end{aligned}\quad (2.1.13)$$

Secteur de Neveu-Schwarz (**NS**) est défini par

$$\begin{aligned}\psi_+^\mu(\tau, 0) &= \psi_-^\mu(\tau, 0) \\ \psi_+^\mu(\tau, \pi) &= -\psi_-^\mu(\tau, \pi).\end{aligned}\quad (2.1.14)$$

Dans ce secteur, les oscillations fermioniques droites et gauches, sont antipériodiques et se développent en modes normaux de la façon suivante

$$\begin{aligned}\psi_+^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} b_r^\mu e^{ir(\tau+\sigma)} \\ \psi_-^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} b_r^\mu e^{ir(\tau-\sigma)}, \quad r \in Z + \frac{1}{2}.\end{aligned}\quad (2.1.15)$$

(ii) Supercorde fermée

Dans le cas des supercordes fermées, les conditions aux bords pour les fermions sont périodiques ou antipériodiques. Ceci conduit aux développements en modes suivants

♠ fermions périodiques

$$\begin{aligned}\psi_-^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in Z} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \\ \psi_+^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in Z} \tilde{d}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}\end{aligned}\quad (2.1.16)$$

♠ fermions antipériodiques

$$\begin{aligned}\psi_-^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in Z + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)} \\ \psi_+^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in Z + \frac{1}{2}} \tilde{b}_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}.\end{aligned}\quad (2.1.17)$$

Les conditions aux bords pour les modes à mouvement gauche et ceux à mouvement droit peuvent être choisies indépendamment. Par conséquent, l'espace de Fock total (secteur gauche \otimes secteur droit) de la supercorde fermée possède quatre secteurs:

secteur	
NS-NS	$\{b_r^\mu, \tilde{b}_s^\nu\} \quad r, s \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$
NS-R	$\{b_r^\mu, \tilde{d}_n^\nu\} \quad r \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}, n \in \mathbf{Z}$
R-NS	$\{d_m^\mu, \tilde{b}_s^\nu\} \quad s \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}, m \in \mathbf{Z}$
R-R	$\{d_m^\mu, \tilde{d}_n^\nu\} \quad m, n \in \mathbf{Z}$

2.1.2 Supercordes hétérotiques classiques

Nous avons exposé dans le paragraphe précédent des modèles où les deux secteurs d'oscillations gauche et droite sont essentiellement indépendants, et sont supersymétriques. Il se trouve qu'il est possible de combiner un secteur d'oscillations gauche non supersymétrique avec un secteur d'oscillations droit supersymétrique. Ce modèle définit la supercorde hétérotique [50]. Le secteur droit de cette théorie correspond à celui de la théorie de supercorde à $D = 10$. Les degrés de liberté sont alors :

♠ *secteur gauche*

$$\{X_L^\mu(\tau + \sigma), \mu = 0, 1, \dots, 9\} \cup \{X_L^I = X_L^I(\tau + \sigma)\}, \quad I = 10, \dots, 25. \quad (2.1.18)$$

♠ *secteur droit*

$$\{X_R^\mu = X^\mu(\tau - \sigma), \psi_-^\mu(\tau - \sigma), \quad \mu = 0, 1, \dots, 9\}. \quad (2.1.19)$$

Notons que la partie $\{X_L^\mu\}$ combinée à $\{X_R^\mu\}$ donne les dix composantes non compactes de l'espace-temps de la théorie des supercordes hétérotiques. Les 16 coordonnées supplémentaires $\{X_L^I\}$ de la partie bosonique sont interprétées comme les coordonnées compactes d'un tore T^{16} de dimension 16. Pour définir une théorie de supercorde supersymétrique, il est plus commode de fermioniser les 16 champs supplémentaires $\{X_L^I\}$ en 32 fermions droits $\lambda_+^A, A = 1, \dots, 32$. Dans cette formulation, l'action de la théorie de supercorde hétérotique s'écrit comme :

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma^2 (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - 2i\psi_-^\mu \partial_+ \psi_{\mu-} - 2i\lambda_+^A \partial \lambda_+^A), \quad (2.1.20)$$

et à l'avantage d'exhiber clairement le rôle des coordonnées internes. En effet selon la périodicité ou antipériodicité de chacun des 32 spineurs de Majorana-Weyl λ_+^A , nous distinguons deux théories de supercordes hétérotiques ayant des groupes de jauge dont les

rèseaux de racines des algèbres sont auto-duaux. Il s'agit de:

Supercorde hétérotique $SO(32)$

Dans ce cas, tous les λ_+^A , $A = 1, \dots, 32$ sont périodiques ou antipériodiques

$$\lambda_+^A(\pi + \sigma) = \pm \lambda_+^A(\sigma), A = 1, \dots, 32. \quad (2.1.21)$$

Les champs λ_+^A sont maintenant invariants sous les rotations du groupe $SO(32)$, nous obtenons alors une théorie avec une symétrie interne $SO(32)$ dite la théorie de supercorde hétérotique dont le groupe de jauge est $SO(32)$.

Supercorde hétérotique $E_8 \times E_8$

Les 32 champs fermioniques se scindent en deux groupes de 16 champs, sur lesquels nous imposons les mêmes conditions aux bords

$$\begin{aligned} \lambda_+^A(\pi + \sigma) &= \lambda_+^A(\sigma); & A &= 1, \dots, 16 \\ \lambda_+^A(\pi + \sigma) &= -\lambda_+^A(\sigma); & A &= 17, \dots, 32. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Les champs λ_+^A se transforment alors linéairement suivant les représentations $(\underline{16}, 1)$ ou $(1, \underline{16})$ du groupe $SO(16) \times SO(16)$. En réalité la symétrie interne est plutôt le groupe $E_8 \times E_8$. Cette théorie est appelée le modèle de la supercorde hétérotique ayant comme groupe de jauge $E_8 \times E_8$.

2.1.3 Supercorde quantique

L'existence des fermions **(NS)** et **(R)** conduit à un espace de Fock plus riche pour la théorie des supercordes. Pour le secteur **(NS)** de la théorie des supercordes ouvertes, les relations d'anticommutations des modes normaux des composantes fermioniques se propageant à droite et à gauche sont données par¹:

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s}$$

¹Plus les relations de commutation entre les α_n^μ pour la partie bosonique

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}$$

$$\{\tilde{b}_r^\mu, \tilde{b}_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r+s}, \quad (2.1.23)$$

où $b_{-r}^\mu(b_r^\mu)$ et $\tilde{b}_{-r}^\mu(\tilde{b}_r^\mu)$, $r > 0$ sont des oscillations de création (d'annihilation) gauche et droite respectivement.

Dans le secteur **NS**, les modes de Fourier L_n du tenseur énergie-implusion et du supercourant ont maintenant des contributions fermioniques et sont égaux

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_{m+n} + \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (r+m/2)b_r b_{m+r}. \quad (2.1.24)$$

$$G_r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n}b_{n+r}. \quad (2.1.25)$$

L'état fondamental de la supercorde **NS** est défini par

$$\alpha_n^\mu |0\rangle_{\text{NS}} = 0, b_r^\mu |0\rangle_{\text{NS}} = 0 \quad n, r > 0, \quad (2.1.26)$$

alors qu'un état générique à mouvement gauche s'écrit comme suit

$$|\psi\rangle = \Pi_i (\alpha_{-n_i})^{\mu_i} \Pi_j (b_{-r_j})^{\mu_j} |0\rangle_{\text{NS}}. \quad (2.1.27)$$

La formule de masse généralisant l'équation (1.2.8) est donnée par

$$M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_m + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b_{-r} b_r - \frac{1}{2}, \quad (2.1.28)$$

où $-\frac{1}{2}$ est la constante d'ordre normale du secteur (**NS**). Par analogie avec l'opérateur bosonique $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_m$, l'opérateur $\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b_{-r} b_r$ compte les états excités à un facteur r prés.

L'état fondamental $|0\rangle_{\text{NS}}$ dans ce secteur est encore un tachyon avec une masse carrée égale à $-\frac{1}{2}$. Le premier état excité est un vecteur de l'espace-temps non massif obtenu par l'action de $b_{-\frac{1}{2}}^\mu$ sur le vide $|0\rangle_{\text{NS}}$. Notons que le secteur de Neveu-Schwarz se comporte comme un secteur bosonique.

Dans le secteur de Ramond (**R**), les relations d'anticommutations canoniques s'écrivent comme:

$$\begin{aligned} \{d_m^\mu, d_n^\nu\} &= \eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \\ \{\tilde{d}_m^\mu, \tilde{d}_n^\nu\} &= \eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

Les générateurs de Virasoro et le supercourant dans ce secteur sont comme suit

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_{m+n} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n + 1/2m) d_r d_{m+n}, \quad (2.1.30)$$

$$F_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} d_{m+n}, \quad (2.1.31)$$

alors que l'opérateur de masse est:

$$M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \sum_{n=0}^{\infty} n d_{-n} b_n. \quad (2.1.32)$$

Dans ce cas, la constante d'ordre normale est nulle. Ceci signifie que l'état fondamental $|0\rangle_{\mathbf{R}}$ est un fermion non massif puisque nous pouvons agir sur lui plusieurs fois par d_0^μ sans changer sa masse. Signalons au passage que les modes d'oscillations d_0^μ satisfont les relations d'anticommutations suivantes

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \quad (2.1.33)$$

Ces opérateurs vérifient les relations d'anticommutations des matrices de Dirac à $D = 10$; ce sont des matrices 32×32 . Comme tous les états excités sont obtenus en agissant sur l'état fondamental par les opérateurs de création, ils sont de masse carrée positive et obéissent tous à l'équation de Dirac. Par conséquent, le secteur de Ramond est un secteur purement fermionique.

Projection GSO

Nous avons discuté les premiers états du spectre des deux secteurs (**NS**) et (**R**). Puisque l'état fondamental du secteur (**NS**) est un tachyon, la question qui se pose est comment l'éliminer. Il se trouve que dans le secteur (**NS**), le nombre d'oscillations fermioniques ($\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b_{-r} b_r$) peut être pair ($2N$) ou impair ($2N + 1$). La projection de Gliozzi-Scherk et Olive (**GSO**) dans le secteur **NS** consiste à ne retenir que les nombres impairs éliminant du coup le tachyon du spectre [13, 14]. Le nouveau état fondamental doit être alors un état excité non massif $b_{-\frac{1}{2}} |0\rangle_{\mathbf{NS}}$. En pratique, la projection **GSO** fixe la chiralité par le biais de l'opérateur $(-1)^F$

$$(-1)_{\mathbf{NS}}^F = -(-1)^{\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} b_{-r} b_r}, \quad (2.1.34)$$

qui agit sur les champs de la supercorde comme

$$\begin{aligned} (-1)_{\text{NS}}^F X^\mu &= X^\mu \\ (-1)_{\text{NS}}^F \psi^\mu &= -\psi^\mu. \end{aligned}$$

La projection **GSO** consiste alors à garder uniquement les états $|\psi\rangle$ invariants par

$$(-1)_{\text{NS}}^F |\psi\rangle = |\psi\rangle_{\text{NS}}. \quad (2.1.35)$$

Dans le secteur **R**, la projection **GSO** agit sur les états $|\psi\rangle$ du spectre de Ramond comme suit

$$(-1)_{\text{R}}^F |\psi\rangle = |\psi\rangle_{\text{R}}, \quad (2.1.36)$$

où

$$(-1)_{\text{R}}^F = \Gamma^{11} (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_n}. \quad (2.1.37)$$

Γ^{11} est l'opérateur de chiralité à dix dimensions, donné par

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0 \dots \Gamma^9, \quad (2.1.38)$$

satisfaisant les relations suivantes

$$\{\Gamma^{11}, \Gamma^\mu\} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 9, \quad (2.1.39)$$

$$(\Gamma^{11})^2 = 1. \quad (2.1.40)$$

L'opérateur $(-1)_{\text{R}}^F$ vérifie le commutateur

$$[(-1)_{\text{R}}^F, d_n] = 0.$$

La projection **GSO** assure que la théorie de supercorde ouverte est un modèle supersymétrique de l'espace-temps contenant la théorie de superYang-Mills à dix dimensions comme limite ($\alpha' \rightarrow 0$).

2.2 Classification des supercordes

Nous pouvons obtenir immédiatement le spectre de masse des particules pour une supercorde fermée à partir de celui de la supercorde ouverte. Il est essentiellement obtenu en prenant deux copies de l'espace d'Hilbert d'une supercorde ouverte avec la formule de masse donnée par (2.1.28) et (2.1.32). En appliquant la projection **GSO** séparément dans chacun des secteurs gauche et droit, nous obtenons différents modèles selon le choix du signe relatif de la projection **GSO** entre les deux secteurs et dépendent aussi de la supersymétrie de la surface d'univers. En général, nous distinguons 5 modèles de supercordes ayant une supersymétrie de l'espace-temps:

1- Modèles ayant une supersymétrie de l'espace-temps $N = 2$. Selon les valeurs propres η_L et η_R de l'opérateur **GSO** dans le secteur R, on distingue:

- (a) La théorie type IIA correspond $\eta_L = -\eta_R = \pm 1$ ayant une supersymétrie de l'espace-temps de type $(1, 1)$. C'est un modèle non chiral.
- (b) La théorie type IIB correspond $\eta_L = \eta_R = \pm 1$ ayant une supersymétrie de l'espace-temps de type $(0, 2)$ ou $(2, 0)$. C'est un modèle chiral.

2- Modèles ayant une supersymétrie de l'espace-temps $N = 1$:

- (c) Supercorde hétérotique $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$. Ce modèle a une supersymétrie hétérotique de la surface d'univers et une supersymétrie $N = 1$ de l'espace-temps.
- (d) La théorie type I $SO(32)$ ayant une supersymétrie de la surface d'univers et une supersymétrie $N = 1$ de l'espace-temps de type $(0, 1)$.

2.2.1 Supercorde type IIA et IIB

Rappelons que dans la jauge du cône de lumière, l'état fondamental du secteur **(NS)** correspond à un vecteur 8_V du groupe de Lorentz $SO(8)$ alors que l'état fondamental du secteur **(R)** correspond à un spineur 8_S ou 8_C . Le spectre total du supercorde type II est obtenu par le produit tensoriel des représentations gauche et droite ayant $16 \times 16 = 256$ états non massifs $8 \times 8 = 64$ pour chaque secteur

$$256 = (8_V \oplus 8_S) \otimes (8_V \oplus 8_S).$$

Secteur bosonique de la théorie de type IIA (B)

Il existe deux types:

(α) Bosons du secteur NS- NS

Ces bosons sont obtenus par le produit tensoriel suivant

$$8_V \otimes 8_V = 1 \oplus 35 \oplus 28, \quad (2.2.1)$$

qui contient 64 degrés de liberté répartis en un dilaton ϕ , un graviton $g_{\mu\nu}$ et un tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$ respectivement. Notons que IIA et IIB ont les mêmes bosons **NS-NS**

(β) Bosons R-R

Ces bosons dépendent du choix de chiralité relative des spineurs S ou C gauche et droit, c'est à dire:

$$\begin{aligned} (-1)^F_{\mathbf{R}} |S\rangle &= |S\rangle \\ (-1)^F_{\mathbf{R}} |C\rangle &= -|C\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Dans le cas de la théorie IIA, le produit de deux spineurs de chiralité opposée ($S \otimes C$) donne une théorie non chirale dont les degrés de liberté

$$8_S \otimes 8_C = 8_V + 56, \quad (2.2.3)$$

décrivant un vecteur de jauge A^μ et un tenseur 3-forme $C^{\mu\nu\rho}$ antisymétrique. Dans le cas de la théorie de type IIB, nous obtenons plutôt une théorie chirale dont les degrés de liberté

$$8_S \otimes 8_S = 1 \oplus 28 \oplus 35, \quad (2.2.4)$$

sont répartis en un champ scalaire χ (axion), une 2-forme $\tilde{B}_{\mu\nu}$ antisymétrique et une 4-forme $D_{\mu\nu\rho\sigma}$ antisymétrique auto-duale.

Secteur fermionique de la théorie de type IIA(B)

Les deux secteurs fermioniques **R- NS** et **NS- R** sont identiques et contiennent un fermion et un gravitino comme le montre la décomposition suivante

$$8_V \otimes 8_S = 8_C + 56_C. \quad (2.2.5)$$

Ces degrés de liberté constituent les partenaires supersymétriques des secteurs bosoniques **NS-NS** et **R-R**. Notons au passage que les bosons **NS-NS** et **R-R** sont très différents; les premiers se couplent à la corde fondamentale alors que les seconds sont liés à des objets solitoniques connus sous le nom de D_p -branes.

2.2.2 Supercorde hétérotique $\text{SO}(32)$ et $E_8 \times E_8$

Rappelons que les degrés de liberté du secteur d'oscillations gauche sont constitués par celui de la corde bosonique à $D = 26$ dimensions, alors que celui du secteur droit est formé par celui de la supercorde à dix dimensions. Les deux secteurs ne sont couplés que par les modes zéro des oscillations bosoniques qui donnent naissance aux impulsions (P_L, P_R) . Evidemment l'égalité $(P_L = P_R)$ n'est plus vérifiée du fait que le P_L est à 26 dimensions, alors que (P_R) est à dix dimensions. Il est alors commode de décomposer (P_L) en deux blocs de composantes $10 + 16$ comme suit

$$\begin{aligned} SO(1, 25) &\rightarrow SO(1, 9) \otimes SO(16), \\ \underline{26} &\rightarrow (\underline{10}, \underline{1}) \oplus (\underline{1}, \underline{16}), \\ P_L^{26} &\rightarrow P_L^{10} \oplus P_R^{16}, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

où P_L^{10} est identifiée avec P_R . Les 16 degrés de liberté P_L^{16} supplémentaires sont interprétés comme les générateurs d'une algèbre torique maximale d'une algèbre de Lie. L'invariance modulaire restreint cet algèbre à $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$. Dans la jauge de cône de lumière, les conditions de masses s'écrivent

$$M^2 = \frac{1}{2}P_A^2 + N_L - 1 = N_R - a_R, \tag{2.2.7}$$

où N_L et N_R sont les modes d'oscillations gauche et droit, P_A est l'impulsion interne et a_R est la constante d'ordre normal ($a_R = \frac{1}{2}$ pour **(NS)** et $a_R = 0$ pour **(R)**). Les états non massifs dans le secteur de propagation droite de la théorie des supercordes hétérotiques sont comme pour la supercorde de type II à savoir:

$$\underline{V} \oplus \underline{S}, \tag{2.2.8}$$

où $\underline{V} = \underline{10}$ est un vecteur de $SO(1, 9)$ et \underline{S} est un spineur de $SO(10)$ de chiralité bien définie:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{S}_+ \oplus \underline{S}_- \\ \underline{16} &= \underline{8}_+ \oplus \underline{8}_-.\end{aligned}\quad (2.2.9)$$

Alors que les états de masse nulle du secteur gauche proviennent de deux possibilités:

1- $N_L = 1$ et $P_A^2 = -m^2 = 0$:

Dans cette situation, les états $\underline{16} \oplus \underline{V}$, correspondent aux champs de jauge du groupe de jauge $U(1)^{16}$. Ces états sont donnés par $\alpha_{-1}^A |0\rangle$.

2- $N_L = 0$ et $P_A^2 = 2$:

Ce cas correspond aux poids non nuls de la représentation adjointe du groupe G ($G = E_8 \times E_8$ ou $SO(32)$). En combinant les deux cas $N_L = 1$ et $P_A^2 = 2$, nous obtenons $\underline{480} + \underline{16} = \underline{496}$ états se transformant suivant la représentation adjointe du groupe G ($E_8 \times E_8$ ou $SO(32)$). Ceci conduit aux états

$$\underline{V} \oplus \underline{\text{adj}}G. \quad (2.2.10)$$

Le produit tensoriel des propagations gauche et droite donnera les états non massifs suivants

$$(\underline{V} \oplus \underline{\text{adj}}G) \otimes (\underline{V} \oplus \underline{S}). \quad (2.2.11)$$

Les états bosoniques, obtenus par le produit tensoriel $(\underline{V} \oplus \underline{\text{adj}}G) \otimes \underline{V}$, sont donnés par

$$(g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi) + A_\mu (A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad a = 1, \dots, \dim \text{de } SO(32) (\text{ou } E_8 \times E_8)). \quad (2.2.12)$$

Alors que la partie fermionique est obtenue par le produit $(\underline{V} \oplus \underline{\text{adj}}G) \otimes \underline{S}$, qui fournit le gravitino et le jaugino, partenaires supersymétriques du graviton et du champ de jauge respectivement, dans la représentation adjointe du groupe de jauge. Grâce à la découverte de la théorie des supercordes hétérotiques, il est devenu possible de construire des modèles phénoménologiques reproduisant les trois générations de matière chirale.

2.2.3 Supercorde ouverte type I

Nous avons jusqu'à présent décrit le spectre des états non massifs de la théorie des supercordes fermées. Nous complétons cette étude par la description du spectre de la su-

percorde type I. Ce spectre est obtenu à partir des supercordes fermées de type IIB. Pour cela, considérons l'opérateur Ω qui change la direction de la corde, ainsi que les modes d'oscillations droite et gauche

$$\Omega : \quad \sigma \rightarrow 2\pi - \sigma, \quad \Omega^2 = 1, \quad (2.2.13)$$

où d'une façon équivalente

$$X_L^\mu \rightarrow X_R^\mu, \quad (2.2.14)$$

$$\Omega \alpha_n^\mu \Omega^{-1} = \tilde{\alpha}_n^\mu. \quad (2.2.15)$$

Nous allons garder uniquement les états $|\Phi\rangle$ de l'espace d'Hilbert qui sont invariants par Ω :

$$\Omega |\Phi\rangle = |\Phi\rangle. \quad (2.2.16)$$

Ces états représentent la projection de l'espace d'Hilbert sur le sous espace invariante par l'opérateur de projection $P = \frac{1}{2}(1 + \Omega)$. En pratique, ceci revient à prendre le quotient par involution $z \rightarrow \bar{z}$, avec $z = \tau + i\sigma$, $z = \tau - i\sigma$, inversant l'orientation de la surface d'univers. Dans le cas des théories de type II, cette opération doit être combinée avec une involution $(-1)^F$ sur l'espace de Fock des états fermioniques en échangeant les fermions gauches et droites. Ce qui n'est possible qu'en théorie type IIB où les fermions ont la même chiralité. Notons au passage que cette projection élimine la moitié des charges supersymétriques de la théorie de type IIB conduisant ainsi à une théorie du type I. Nous allons étudier seulement le spectre bosonique de la théorie de type IIB qui reste après projection.

Dans le secteur **NS-NS**, nous avons

$$\Omega \alpha_n^\mu \tilde{\alpha}_n^\nu \Omega^{-1} = \tilde{\alpha}_n^\nu \alpha_n^\mu, \quad (2.2.17)$$

ceci montre que seulement la partie symétrique du produit tensoriel **NS-NS** qui est invariante sous Ω

$$\mathbf{NS} - \mathbf{NS} \longrightarrow (8_V \otimes 8_V)_{sym} = (\phi, g_{\mu\nu}). \quad (2.2.18)$$

Dans le secteur **R-R**, comme les degrés de liberté sont fermioniques, nous obtenons dans chaque partie (gauche, droite) un signe (-) supplémentaire échangeant les états

d'oscillations gauches et droites. Ceci signifie que nous devons prendre uniquement la partie antisymétrique du produit tensoriel

$$\mathbf{R} - \mathbf{R} \longrightarrow (8_V \otimes 8_V)_{antisym} = (\tilde{B}_{\mu\nu}). \quad (2.2.19)$$

Dans le but de construire une théorie consistante, nous devons introduire un secteur contenant des supercordes ouvertes. Rappelons que dans le cas de la théorie de corde ouverte, l'opérateur Ω est donné par

$$\Omega : \sigma \rightarrow \pi - \sigma, \quad (2.2.20)$$

ainsi le champ bosonique de la forme suivante

$$X^\mu = \sum_n \alpha_n^\mu \cos n\sigma.$$

Par conséquent, l'action Ω sur les oscillations α_n^μ peut être écrite comme suit

$$\Omega \alpha_n^\mu \Omega^{-1} = (-1)^n \alpha_n^\mu. \quad (2.2.21)$$

Nous pouvons facilement voir que l'état non massif $\alpha_{-1}^\mu |0, k\rangle$, qui correspond aux champs de jauge, n'est pas invariant par Ω à cause d'un signe (-). Ce problème peut être surmonté grâce à l'existence des bords permettant le couplage à un champ de jauge par l'intermédiaire des charges ponctuelles dites de *Chan-Paton*. Dans le cas des cordes ouvertes non orientées, ceci est en accord avec l'existence d'un champ de jauge dans le spectre des états de masses nulles. Dans ce cas, le secteur de jauge fournit un champ A_μ^{ij} avec deux indices supplémentaires provenant des extrémités (i, j) de la supercorde ouverte:

$$A_{ij}^\mu = \alpha_{-1}^\mu |0, k\rangle \times |ij\rangle. \quad (2.2.22)$$

Encore la projection Ω transforme cet état à un signe (-) près mais en changeant l'indice i en j

$$\Omega \alpha_{-1}^\mu |0, k, i, j\rangle \Omega^{-1} = -\alpha_{-1}^\mu |0, k, j, i\rangle, \quad (2.2.23)$$

où d'une façon équivalente

$$A_\mu^{ij} = -A_\mu^{ji}, \quad (2.2.24)$$

et par conséquent la partie antisymétrique qui est invarante. Le critère d'élimination des anomalies dans la théorie de supergravité de type I restreint le groupe de jauge à $SO(32)$. Nous obtenons alors la théorie des supercordes de type I dont le spectre de masse nulle correspond au dilaton ϕ , graviton $g_{\mu\nu}$ du secteur de **NS-NS** de la théorie de type IIB, le tenseur antisymétrique $\tilde{B}_{\mu\nu}$ du secteur **R-R** des supercordes fermées, les champs de jauge $SO(32)$ du secteur des cordes ouvertes et leurs partenaires fermioniques sous la supersymétrie $N = 1$ à dix dimensions. La partie bosonique de ce modèle est donnée par

$$(g_{\mu\nu}, \tilde{B}_{\mu\nu}, \phi) + A_\mu (A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad a = 1, \dots, \dim SO(32)). \quad (2.2.25)$$

Finalement, nous signalons que la théorie de supercorde de type I a un spectre identique à celui de la théorie de supercorde hétérotique de type $SO(32)$.

Chapter 3

Compactification des Modèles de Supercordes

A ce stade, nous avons vu qu'il existe cinq modèles de supercordes consistants: les deux modèles de supercordes fermées IIA et IIB, le modèle de supercorde de type I ayant un groupe de jauge $SO(32)$, contenant les cordes ouvertes et fermées, et les deux supercordes fermées hétérotiques $E_8 \times E_8$ et $SO(32)$. Ces cinq modèles de supercordes vivent cependant dans un espace-temps à dix dimensions non compact. Pour ramener ces théories au monde réel, nous avons besoin de les définir dans notre espace habituel à 1+3 dimensions. De ce fait, il faudrait compactifier les six coordonnées d'espace supplémentaires. Ainsi nous devons considérer des géométries où l'espace de Minkowski à dix dimensions M_{10} se décompose en une variété non compacte correspondante à l'espace-temps de Minkowski usuel M_4 et une variété compacte \tilde{X}_6 de dimension 6, et de volume très petit devant notre échelle d'observation,

$$M_{1,9} \rightarrow M_{1,3} \times \tilde{X}_6.$$

C'est le scénario de compactification des supercordes se propageant dans $M_{1,9}$ à des supercordes se propageant dans des espaces de type $M_{1,3} \times \tilde{X}_6$. Comme nous le verrons plus tard, nous allons au delà de ce scénario en considérant des compactifications non seulement à quatre dimensions mais à des espaces-temps arbitraires $M_{1,9} \rightarrow M_{1,9-d} \times \tilde{X}_d$. Ces espaces compacts \tilde{X}_d sont choisis de sorte que les supercordes se propagent dans

un espace-temps de dimension $(10 - d)$ préservant un certain nombre de supersymétrie d'espace-temps. Puisque un spineur à dix dimensions se décompose en un spineur sur l'espace \tilde{X}_d et un spineur à $(10 - d)$, il en résulte que le nombre de supersymétrie préservé à $(10 - d)$ dimensions de l'espace-temps dépend du groupe d'holonomie de \tilde{X}_d . Cette propriété permet de classer les différentes variétés \tilde{X}_d qui conduisent à des modèles de supercordes à $(10 - d)$ dimensions [1, 2, 3].

Dans ce chapitre, nous étudions trois exemples de compactification des supercordes préservant 16 ou 8 charges supersymétriques parmi les 32 supercharges originales. Il s'agit de:

- La compactification toroidale sur le tore T^d ayant un groupe d'holonomie trivial. Le modèle résultant aura alors 32 supercharges.
- La compactification sur l'hypersurface $\tilde{X}_4 = \text{K3}$ de groupe d'holonomie $SU(2)$.
- La compactification sur des variétés de Calabi-Yau à six dimensions (trois complexes) $\tilde{X}_6 = Y_3$ ayant un groupe d'holonomie $SU(3)$.

Par ailleurs, puisqu'il existe cinq types de modèles de supercordes constants à 10 dimensions et différent choix possibles de variétés compactes \tilde{X}_d , nous allons nous trouver avec un grand nombre de modèles de supercordes de divers dimensions qui ont un nombre de supersymétrie d'espace-temps différent et un nombre de degrés de liberté aux faibles énergies différents. Les états du vide de ces modèles de supercordes de dimension inférieures sont différents de ceux à dix dimensions. Ces vides sont déterminés par les valeurs moyennes des champs scalaires de masse nulle dits champs de module. L'ensemble de ces scalaires constitue une variété souvent dénommée espace des modules (moduli space).

La compactification offre les possibilités de:

- Réduire le nombre de charges supersymétriques.
- Décrire les modèles de supercordes à divers dimensions.
- Donner naissance à des connections entre différents modèles de supercordes.

Cette dernière propriété sera considérée lorsqu'on étudiera les symétries de dualités dans le chapitre cinq. Ces dernières permettent de résoudre partiellement le problème de l'absence

de la symétrie de jauge non abélienne en théorie perturbative des supercordes de type II. Ainsi il indique l'existence de l'aspect non perturbatif des modèles de supercordes basé sur l'étude des objets étendus appelés *branes* dont les masses augmentent proportionnellement avec $\frac{1}{g^2}$, et ils échappent donc au spectre perturbatif. Le cas le plus intéressant de ces compactifications est observé à six dimensions de la supercorde hétérotique sur le tore T^4 ou la supercorde de type IIA sur la surface K3. Ces deux modèles, de supersymétrie $N = 2$ à six dimensions, possèdent le même espace des modules. Cette propriété est confirmée par l'étude des solutions solitoniques qui fournissent le spectre des états non perturbatifs (Dp -branes)[3].

3.1 Compactification toroidale des supercordes

Afin de mieux comprendre la compactification toroidale, nous commençons par le cas simple du cercle S^1 de rayon R .

3.1.1 Compactification sur S^1

Dans ce cas, la coordonnée compacte de la corde est donnée par

$$X(\sigma + 2\pi, \tau) = X(\sigma, \tau) + 2\pi mR, \quad (3.1.1)$$

où $m \in \mathbf{Z}$. Après la compactification sur S^1 , le spectre comporte des états de masse $M = \frac{m}{R}$ correspondant aux excitations des champs portant un moment interne $P = \frac{m}{R}$ suivant la direction compacte. Il contient également des états d'enroulement de masse $M = \frac{nR}{\alpha'} (n \in \mathbf{Z})$ correspondant à une supercorde enroulée n fois autour du cercle S^1 . Dans la construction de l'espace de Hilbert pour S^1 nous devons relâcher la condition $P_L = P_R$. Cette égalité n'est plus valable du fait que la supercorde fermée $X(\tau, \sigma)$ peut tourner autour du cercle S^1 sans revenir nécessairement à sa position initiale. Les moments (P_L, P_R) sont donnés par

$$(P_L, P_R) = \left(\frac{m}{2R} + nR, \frac{m}{2R} - nR \right). \quad (3.1.2)$$

Notons que nous avons les propriétés typiques suivantes:

$$P_L \neq P_R,$$

$$P_d^2 - P_g^2 = 2mn \in 2\mathbf{Z},$$

contrairement au cas des variétés non compactes.

Le spectre de toutes les valeurs permises de (P_L, P_R) est invariant par la transformation $R \rightarrow \frac{1}{2R}$ et $n \rightarrow m$. Cette symétrie est une conséquence de ce qu'on appelle la dualité-T. Elle admet une extension remarquable dans le cas des compactifications toroidales sur un tore de dimension supérieure. En effet, étant donné un tore $T^d = (S^1)^{\otimes d}$ de dimension d , tous les autres tores sont alors obtenus en faisant une transformation de boost du groupe $SO(d, d)$ sur les vecteurs (P_L, P_R) . Puisque la rotation du couple (P_L, P_R) par une transformation de $O(d) \times O(d)$ ne change pas le spectre des états de la supercorde et que les transformations de Boost $O(d, d, \mathbf{Z})$ ne changent pas le réseau, il en découle que l'espace des choix des tores T^d inéquivalents est un espace homogène de dimension d^2 donné par

$$\frac{SO(d, d)}{SO(d) \times SO(d) \times SO(d, d, \mathbf{Z})}. \quad (3.1.3)$$

Le groupe $SO(d, d, \mathbf{Z})$ généralise la dualité-T considérée dans le cas de S^1 pour une compactification sur T^d . Plus généralement, la dualité-T s'étend aux compactifications sur des espaces de Calabi-Yau: c'est la symétrie miroir. Cette dernière d'interêt primordial dans la nouvelle étude des modèles de supercordes sera traitée dans ce chapitre. Dans ce paragraphe nous allons préciser comment la dualité-T se manifeste sur les champs de Fermi.

3.1.2 Compactification des modèles $N = 2$ sur T^d

Dans cette étude nous allons voir que la compatification des modèles IIA et IIB sur un cercle de rayon R ont les mêmes degrés de liberté aux faibles énergies. En fait, IIA et IIB compactifiées sur S^1 sont équivalentes puisqu'elles sont interchangées par la dualité-T qui agit comme R en $\frac{1}{R}$. Cette symétrie agit aussi sur les fermions le long de la direction

compacte S^1 :

$$\begin{aligned}\psi_L^9 &\rightarrow -\psi_L^9 \\ \psi_R^9 &\rightarrow +\psi_R^9.\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

Cette équation montre que le produit des fermions gauches $\psi_L^0\psi_L^1\dots\psi_L^9$, déterminant la chiralité d'espace-temps, se transforme en son opposé. Ceci implique que sous la projection **GSO**, nous aboutissons à une chiralité opposée à celle qu'on avait auparavant et ainsi les spineurs 8_S et 8_C du secteur gauche s'interchangent.

Dans la compactification sur T^d , les éléments du groupe de dualité $O(d, d, \mathbf{Z})$ qui changent les modèles IIA et IIB sont ceux qui n'appartiennent pas au groupe $SO(d, d, \mathbf{Z})$. Cela signifie que le groupe $SO(d, d, \mathbf{Z})$ est une symétrie de IIA et de IIB séparément. Par contre, les éléments discrets de $O(d, d, \mathbf{Z})$ ne le sont pas.

Dans la compactification toroïdale des modèles de supercordes de type II, les d^2 scalaires paramètrent l'espace quotient $\frac{SO(d,d)}{SO(d)\times SO(d)}$ correspondant aux choix de la métrique g_{ij} , ($\frac{d(d+1)}{2}$ degrés de liberté), et celui du champ antisymétrique B_{ij} , ($\frac{d(d-1)}{2}$ degré de libertés), sur le tore T^d respectivement. Notons que le dilaton ainsi les valeurs moyennes des tenseurs antisymétriques de jauge du secteur de Ramond fournissent aussi des modules supplémentaires de la théorie compactifiée sur laquelle la dualité-T doit encore agir.

Exemple 1: IIA/ T^4

A titre d'exemple, étudions la compactification du modèle IIA sur T^4 . Nous avons 16 paramètres, spécifiant l'espace $\frac{SO(4,4,R)}{SO(4)\times SO(4)}$, paramétrisant respectivement les valeurs moyennes des champs g_{ij} et B_{ij} sur le tore T^4 . En plus de ces paramètres provenant du secteur **NS-NS**, nous avons aussi 8 ($C_4^1 + C_4^3 = 4 + 4$) paramètres spécifiant le choix des champs de Ramond A_μ et $C_{\mu\nu\lambda}$ respectivement. Il faut encore ajouter un scalaire qui correspond au dilaton donnant lieu à 25 scalaires définissant l'espace totale des modules IIA sur T^4 .

$$\frac{SO(5,5)}{SO(5) \times SO(5)}.\tag{3.1.5}$$

Notons au passage que cet espace des modules peut être aussi obtenu à partir de la compactification de la théorie de supergravité $N = 1$ à onze dimensions sur le tore T^5 [3].

3.1.3 Compactification des modèles $N = 1$ sur T^d

Rappelons qu'à dix dimensions, nous avons trois modèles de supercordes ayant une supersymétrie $N = 1$. Ce sont les modèles hétérotiques $E_8 \times E_8$ et $SO(32)$ et type I $SO(32)$. Par exemple, dans le cas de la supercorde hétérotique, les bosons de jauge à 10 dimensions fournissent après compactification toroidale sur T^d ($16 \times d$) modules associés aux lignes de Wilsons brisant la symétrie de jauge de rang 16 par le mécanisme de Hosotani. Nous devons ajouter à ces modules le choix de la métrique g_{ij} , le dilaton ainsi que le champ antisymétrique B_{ij} sur T^d dont les modules forment le même espace quotient que celui du secteur **NS-NS** de la théorie de type II discuté auparavant ($\frac{SO(d,d)}{SO(d) \times SO(d)}$). La structure de l'espace des modules total est donnée par

$$\frac{SO(d+16, d)}{SO(d) \times SO(d+16)} \times SO(1, 1), \quad (3.1.6)$$

modulo le groupe de la dualité-T étendu $O(d+16, d, \mathbf{Z})$. La construction de l'espace de Hilbert dans ce cas ne diffère de celle de type II à D=10 que par le fait que (P_L, P_R) appartient maintenant à un réseau de Lorentz pair et auto-dual de signature $(d+16, d)$ appelé réseau de Narain $\Gamma^{d+16, d}$ [29]. Notons aussi que lorsque le réseau $\Gamma^{d+16, d}$ est factorisé en $\Gamma^{d, d} \oplus \Gamma^{16}$, pour des lignes de Wilson nulles, nous retrouvons la symétrie de jauge $SO(32)$ (ou $E_8 \times E_8$) de la théorie à dix dimensions. Il découle de l'unicité du réseau de Narain $\Gamma^{d+16, d}$ dans la compactification toroidale que les théories hétérotiques $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$ sont isomorphes par la dualité-T.

Exemple 2: Hétérotique sur T^6

A titre d'exemple, considérons la compactification sur T^6 donnant une théorie $N = 4$ à $D = 4$. Nous avons $6 \times 6 = 36$ paramètres spécifiant la métrique g_{ij} , le champs B_{ij} et le dilaton ϕ . En plus de ces paramètres, il faut ajouter $16 \times 6 = 96$ paramètres provenant des lignes de Wilsons du champ de jauge du groupe $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$. L'espace des

modules de la supercorde hétérotique sur T^6 est donné par

$$\frac{SO(22, 6, \mathbf{R})}{SO(22, \mathbf{R}) \times SO(6, \mathbf{R})} \times \frac{Sl(2, \mathbf{R})}{SO(2, \mathbf{R})}. \quad (3.1.7)$$

où $\frac{Sl(2, \mathbf{R})}{SO(2, \mathbf{R})}$ correspond au champ complexe dilaton-axion. Finalement notons que pour la théorie de type I, la partie locale de son espace des modules sur T^d est vue comme celle de la supercorde hétérotique et admet le même groupe de la dualité-T $SO(d+16, d, \mathbf{Z})$.

3.2 Variétés de Calabi-Yau

La compactification toroidale que nous avons exposé jusqu'à présent préserve la totalité des charges supersymétriques de la théorie non compactifiée [3, 29]. Cependant, les modèles résultants à quatre dimensions, par exemple les supercordes hétérotiques, ont la supersymétrie d'espace-temps et n'ont pas de fermions chiraux. La brisure partielle de la supersymétrie $N = 4$ vers $N = 1$ est parmi les exigences fondamentales pour construire des modèles de supercordes semi-réalistes. Dans le but de remplir ces exigences, il faudrait compactifier les supercordes sur une variété complexe compacte de Calabi-Yau $\tilde{X}_6 = CY_3$ avec une courbure de Ricci nulle et ayant un groupe d'holonomie $SU(3)_H$ [28, 37, 31]. Ainsi cette compactification permet de briser le groupe de jauge de la supercorde hétérotique en identifiant la connexion de spin du groupe $SU(3)_H$ de X_3 avec la connexion de jauge d'un sous groupe $SU(3)_{YM}$ de l'un des deux facteurs E_8 de la théorie $E_8 \times E_8$ à dix dimensions. Le modèle résultant à quatre dimensions a pour groupe de jauge $E_6 \times E_8$.

En général, les variétés de Calabi-Yau de dimension n sont des espaces complexes, Kahlériens, compacts ayant un tenseur de Ricci nul et un groupe d'holonomie $SU(n)$. Il existe différentes façons de construire ces variétés. Nous citons:

- Orbifolds de T^{2n} .
- Fibration elliptique sur une variété complexe B_{n-1} de dimension $n-1$.
- Hypersurfaces dans les espaces projectifs, où plus généralement dans les variétés toriques.

3.2.1 Surface K3

K3 est une variété Kahlérienne compacte de dimension réelle 4. Elle est simplement connexe, de courbure de Ricci nulle et a un groupe d'holonomie $SU(2)$ assurant l'existence des spineurs covariantiquement constants [52, 53, 54, 55, 56]. Elle a la moitié du nombre de spineurs covariantiquement constants de T^4 . La compactification sur K3 préserve la moitié des charges supersymétriques de celles de la compactification sur T^4 . Cette compactification joue un rôle centrale dans les conjectures de dualités des supercordes, dans la construction géométrique des théories des champs supersymétriques développée par S. Katz, P. Mayr et C. Vafa dans [41]. Avant de considérer la compactification des différents modèles de supercordes sur K3, nous commençons tout d'abord par fixer une réalisation géométrique de K3. Nous considérons ici la réalisation de $\frac{T^4}{Z_2}$ avec $T^4 = \frac{R^4}{Z_4}$ paramétrisé par les coordonnées réelles x_i (où $i = 1, \dots, 4$):

$$x_i \equiv x_i + 1. \quad (3.2.1)$$

En coordonnées complexes $z_1 = x_1 + ix_2$ et $z_2 = x_3 + ix_4$, le tore T^4 peut être vu comme le plan complexe \mathbf{C}^2 quotienté par la symétrie Z_4 :

$$z_k \equiv z_k + 1, \quad z_k \equiv z_k + i, \quad k = 1, 2. \quad (3.2.2)$$

L'espace $\frac{T^4}{Z_2}$ est obtenu à partir de T^4 en imposant la symétrie

$$Z_2 : z_i \rightarrow -z_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.2.3)$$

renversant les deux coordonnées complexes z_i du tore T^4 . L'espace résultant dit orbifold, présente 16 points singuliers correspondant aux points fixes de la symétrie Z_2 . Ce sont les points $(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}); k = 1, \dots, 4$ avec $z_i^{(k)} = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Au voisinage de chaque point singulier, K3 se comporte comme l'espace $\frac{\mathbf{C}^2}{Z_2}$ de coordonnées complexes (z_1, z_2) [57, 58, 59]. En effet, au voisinage d'un point fixe $(z_1, z_2) \equiv (-z_1, -z_2)$, nous pouvons choisir des coordonnées complexes u, v et w qui sont invariantes sous la symétrie Z_2

$$u = z_1^2, \quad v = z_2^2, \quad w = z_1 z_2. \quad (3.2.4)$$

Cette nouvelle paramétrisation décrit un modèle local singulier, connu sous le nom de singularité A_1 dans la classification des singularités des surfaces complexes:

$$uv = w^2. \quad (3.2.5)$$

Cette équation complexe peut aussi s'écrire, par un choix convenable des variables complexes u, v et w , sous la forme

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0. \quad (3.2.6)$$

La partie réelle de cette équation n'est autre que une sphère S^2 (2-cycle) de rayon zéro, donc d'aire nulle. Cette singularité peut être résolue par une déformation des structures de Kahler ou complexe en changeant l'équation (3.2.6) par

$$u^2 + v^2 + w^2 = \chi. \quad (3.2.7)$$

Géométriquement ceci correspond à donner à la sphère précédente une aire finie déterminée par la partie réelle de χ . Notons au passage que cette étude admet une extension remarquable en termes des singularités de type ADE. Ils sont classés comme suit

$$\begin{aligned} A_n : \quad & x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0 \\ D_n : \quad & y^2 + x^2z + z^{n-1} = 0 \\ E_6 : \quad & y^2 + x^3 + z^4 = 0 \\ E_7 : \quad & y^2 + x^3 + xz^4 = 0 \\ E_8 : \quad & y^2 + x^3 + z^5 = 0. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

La homologie du $\frac{T^4}{Z_2}$ contient les formes non twistées qui correspondent aux formes de l'espace initial préservant la symétrie Z_2 . Il y a 8 éléments répartis comme suit

1	$h^{0,0}=1$
$dz_1 \wedge dz_2$	$h^{2,0} = 1$
$d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$	$h^{0,2} = 1$
$dz_i \wedge d\bar{z}_j$	$h^{1,1} = 4$
$dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$	$h^{2,2} = 1$
Total	8

où $h^{p,q}$ représente le nombre des formes (p, q) sur K3, p, q entiers appartenant à la classe homologique (p, q) . En plus de ces formes, nous avons 16 2-formes non triviales correspondant aux 2-cycles non triviales qui résolvent les 16 singularités de l'orbifold. Ces formes de type $H^{1,1}$ (K3) affectent uniquement $h^{1,1}$ par un facteur additif 16 de sorte que $h^{1,1} = 4 + 16 = 20$. La cohomologie totale de K3 est alors donnée par le diamant de Hodge suivant [3, 60, 61, 62]:

$$\begin{array}{ccccc} h^{0,0} & & & 1 \\ h^{1,0} & h^{0,1} & & 0 & 0 \\ h^{2,0} & h^{1,1} & h^{0,2} = & 1 & 20 & 1. \\ h^{2,1} & h^{1,2} & & 0 & 0 \\ h^{2,2} & & & & 1 \end{array} \quad (3.2.9)$$

3.2.2 Espace des modules de K3

L'orbifold K3 a $h^{1,1} = 20$ déformations de Kahler réelles et 20 déformations complexes (40 paramètres réels) [60, 61, 63, 62, 64]. Ces dernières sont spécifiées par le choix de la 2-forme holomorphe Ω_2 de K3. Tenant compte du fait que pour chaque métrique de Ricci plate de K3, nous pouvons fixer un paramètre complexe, il reste alors $58 = 2 \times 19 + 20$ paramètres réels. Le choix de la métrique sur K3 est donc paramétrisé par l'espace des modules géométriques

$$M^{geo} = \frac{SO(19, 3, \mathbf{R})}{SO(19, \mathbf{R}) \times SO(3, \mathbf{R})} \times \mathbf{R}^+, \quad (3.2.10)$$

où $\frac{SO(19, 3, \mathbf{R})}{SO(19, \mathbf{R}) \times SO(3, \mathbf{R})}$ est un réseau pair autodual du type $\Gamma^{19,3}$, que l'on a rencontré lors de la compactification toroidale des supercordes hétérotiques sur T^3 [3]. \mathbf{R}^+ correspond à un facteur d'échelle global de la métrique de K3, qui peut être vu comme le volume de K3. Dans le cas où la variété K3 est réalisée comme une fibration elliptique de la sphère S^2 , qui peut être vue localement comme

$$K3 = T^2 \times S^2, \quad (3.2.11)$$

l'espace des modules est de dimension complexe 18 plus 2 paramètres réels correspondant aux classes de Kahler de la base et de la fibre. Cet espace est isomorphe à

$$M^{geo} = \frac{SO(18, 2, \mathbf{R})}{SO(18, \mathbf{R}) \times SO(2, R)} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+. \quad (3.2.12)$$

Les modules géométriques de K3 ne suffisent cependant pas à décrire la compactification de la théorie des supercordes sur cet espace. Il faut ajouter les valeurs moyennes du tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$ du secteur **NS – NS**, celles des tenseurs antisymétriques de **R – R** dans le cas des modèles type II, et celles des champs de jauge dans le cas de la théorie de type I et les supercordes hétérotiques, ainsi le dilaton qui correspond à la constante de couplage de la supercorde $g_s = e^\phi$.

3.2.3 Variétés de Calabi-Yau de dimension 3

Ce sont des espaces complexes ayant un groupe d'holonomie $SU(3)$ préservant le quart ($\frac{1}{4}$) du nombre initial des charges supersymétriques à dix dimensions [1, 2, 3]. Ces variétés sont compactes de dimension trois complexes qui restent les candidats les plus probables pour connecter les modèles de supercordes à notre échelle d'observation à quatre 4 dimensions. Comme pour K3, ces variétés admettent aussi une construction comme orbifold de T^6 . L'idée de cette construction est de considérer T^6 comme le produit $T^2 \times T^2 \times T^2$ et quotienter ensuite par une transformation Z_3 simultanée sur chaque T^2 comme suit:

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &\rightarrow w_1(x_1 + ix_2), \\ x_3 + ix_4 &\rightarrow w_2(x_3 + ix_4), \\ x_5 + ix_6 &\rightarrow w_3(x_5 + ix_6), \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

où $w_i, i = 1, 2, 3$ sont des éléments de Z_3 satisfaisant $w_i^3 = 1$. L'espace résultant est une variété de Calabi-Yau avec $3^3 = 27$ points fixes. Ces points singuliers doivent être résolus afin de rendre la variété de Calabi-Yau régulièr. Notons que dans cette réalisation, le nombre de Hodge $h^{1,1}$ égal à 36 ($h^{1,1} = 36$) réparti comme suit: une contribution $h_{nt}^{1,1} = 9$ provenant du secteur non twisté et correspond au choix de la forme $dz_i \wedge d\bar{z}_j$. L'autre

contribution $h_t^{1,1} = 27$ provient du secteur twisté. Ce nombre 27 correspond aux essoufflements des point fixes par des sphères S^2 de contribution $h^{1,1} = 1 \times 27 = 27$.

Notons qu'il existe deux autres façons pour réaliser une variété de Calabi-Yau de dimension trois CY_3 .

(1) Elle peut être définie comme une hypersurface dans l'espace projectif \mathbf{P}^4 de coordonnées homogènes $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$. La condition de Calabi-Yau exige que l'équation algébrique de CY_3 est donnée par un polynôme homogène $W_5(z_i)$ de degré cinq

$$W_5(z_i) = a_1 z_1^5 + a_2 z_2^5 + a_3 z_3^5 + a_4 z_4^5 + a_5 z_5^5 + a_6 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 + \dots \quad (3.2.14)$$

Les déformations complexes sont données par les coefficients complexes a_i dont le nombre est donné par les 126 paramètres moins les 25 paramètres de la symétrie $U(5)$, qui est en accord avec $h^{2,1} = 126 - 25 = 101$. Quant aux déformations de Kahler, nous avons une seule ($h^{1,1} = 1$) qui correspond au volume de X_3 . (2) CY_3 peut être vue comme la fibration elliptique sur une base complexe de dimension deux B_2 paramétrisée par deux coordonnées complexes (z_1, z_2) . Localement nous avons

$$X_3 = T^2 \times B_2. \quad (3.2.15)$$

L'équation algébrique de ce modèle est donnée par

$$y^2 = x^3 + f(z_1, z_2)x + g(z_1, z_2), \quad (3.2.16)$$

où (x, y) sont deux variables complexes paramétrisant la courbe elliptique T^2 . Notons que l'espace des paramètres de ce modèle dépend de la base B_2 . Ce type de variétés sont étudiées dans le cadre de la compactification de la théorie -F [39].

3.3 Compactification des Supercordes sur K3

3.3.1 Supercorde IIA sur K3

Dans la compactification du supercorde de type IIA sur K3, nous obtenons une théorie supersymétrique $N = 2$ à 6 dimensions. Puisque $b_1(K3) = b_3(K3) = 0$, les champs de

Ramond ne génèrent pas des degrés de liberté supplémentaires sur K3. Alors que les valeurs moyennes du tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$ peuvent être mesurées par $b_2(K3) = 22$, où $b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$. Le spectre complet des états non massifs de cette théorie est donné par l'espace des modules [3]

$$M^{IIA} = \frac{SO(19, 3, \mathbf{R})}{SO(19, \mathbf{R}) \times SO(3, \mathbf{R})} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^{22} \times R^+, \quad (3.3.1)$$

qui peut être écrit sous la forme

$$M^{IIA} = \frac{SO(20, 4, \mathbf{R})}{SO(4, \mathbf{R}) \times SO(20, \mathbf{R})} \times SO(1, 1) \quad (3.3.2)$$

où $SO(1, 1)$ correspond au dilaton. Cet espace des modules est identique à celui de la supercorde hétérotique compactifiée sur un tore T^4 [29]. Cette coïncidence n'est pas forfuite c'est une première indication de l'existence d'une dualité entre la supercorde IIA et celles hétérotiques. Nous reviendrons sur cette connection entre ces modèles de supercordes dans le dernier paragraphe de ce chapitre. La symétrie $O(20, 4, \mathbf{Z})$ contient la symétrie géométrique $O(19, 3, \mathbf{Z})$ de K3. Elle décrit des dualités perturbatives des théories de supercordes analogues à la dualité-T des compactifications toroidales.

3.3.2 Supercorde IIB sur K3

Dans le cas du modèle IIB, le secteur **NS-NS** donne les mêmes modules que la théorie IIA, par contre le secteur **R-R** donne des modules supplémentaires [3]. Le nombre total de ces modules est résumé dans le tableau suivant:

Métrique	58
Champ B	22
Dilaton	1
Axion	1
2-forme	22
4-forme	1
Total	105

Ces champs scalaires se combinent pour donner l'espace total des modules de IIB sur K3

$$M^{IIB} = \frac{SO(21, 5, \mathbf{R})}{SO(21, \mathbf{R}) \times SO(5, \mathbf{R})}. \quad (3.3.3)$$

Cet espace admet une identification sous les transformations du groupe $SO(21, 5, \mathbf{Z})$.

Notons que les compactifications de type II sur K3 permettent de réduire la dimension de l'espace-temps à 6 dimensions tout en conservant la moitié des charges supersymétriques. Les modèles de ces théories à $D = 4$ peuvent être obtenus par une compactification supplémentaire sur un espace de dimension deux. Par exemple dans le cas de la compactification sur un tore T^2 , on obtient une théorie supersymétrique $N = 4$ à quatre dimensions [?, ?].

3.3.3 Modèles de supercordes $N = 1$ sur K3

Rappelons que les secteurs bosoniques de ces modèles $N = 1$ sont $g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, ϕ et $A^\mu = A_a^\mu T^a$, où $\{T^a\}$ sont les générateurs du groupe de jauge $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$. Pour les champs $g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ et ϕ , nous avons la même situation que pour la compactification du secteur **NS-NS** des modèles de type II sur K3. Concernant le champ de jauge A^μ , nous pouvons choisir une configuration non nulle sans briser la supersymétrie. Le point est que si l'on considère des configurations des champs de jauge sur la surface K3 satisfaisant la condition d'auto-dualité:

$$F = *F, \quad (3.3.4)$$

alors elles préservent le même nombre de charges supersymétriques que la métrique sur K3. Ces configurations, qui correspondent aux instantons standards de la théorie de jauge, doivent être prises en considération car dans théories $N = 1$, nous devons satisfaire l'équation suivante

$$dH = Tr F \wedge F - Tr R \wedge R, \quad (3.3.5)$$

où $H = dB$ est le champ fort du champ antisymétrique $B_{\mu\nu}$. Notons qu'en l'absence de singularité pour le champ H , nous avons la contrainte suivante

$$\int_{K3} dH = 0. \quad (3.3.6)$$

Dans ce cas, le nombre des instantons de jauge, qui est relié à la caractéristique d’Euler $\chi(K3)$, est 24. Pour le groupe de jauge $E_8 \times E_8$, ce nombre peut être réparti entre les deux facteurs E_8 comme $(12 + n, 12 - n)$. Notons qu’il est possible de considérer aussi des configurations de vide telles que

$$\int_{K3} dH = m. \quad (3.3.7)$$

Dans ce cas, nous avons $24 - m$ instantons. L’espace des modules complet de la compactification des théories $N = 1$ contient les modules déterminant la géométrie de la surface K3, les valeurs moyennes du champ antisymétrique $B_{\mu\nu}$, le dilaton ainsi les modules décrivant le choix du fibré de jauge, qui peut être vu comme l’espace des modules des instantons sur la surface K3 [3].

3.4 Compactifications sur des Calabi-Yau de dimension 3

3.4.1 Compactification des modèles $N = 2$

La compactification des modèles de supercordes de type II sur n’importe quelles variétés de Calabi-Yau à trois dimensions complexes conduit à une théorie supersymétrique $N = 2$ à 4 dimensions [65, 66, 67, 68, 69, 70]. Dans cette théorie, nous avons trois types de supermultiplets contenant les champs scalaires non massifs:

- Un multiplet vectoriel $N = 2$ contenant deux scalaires réels, deux fermions de Weyl et un boson vecteur $(0^2, \frac{1}{2}^2, 1)$.
- Un hypermultiplet $N = 2$ contenant quatre scalaires réels et deux fermions de Weyl $(0^4, \frac{1}{2}^2)$.
- Un supermultiplet gravitationnel $(g_{\mu\nu}, A_\mu, \psi_{A\mu}, \psi_A)$.

En général, l’espace des modules des théories supersymétriques $N = 2$ se factorise en un produit

$$\mathcal{M}_V \otimes \mathcal{M}_H, \quad (3.4.1)$$

où \mathcal{M}_V est une variété Kahlérienne de dimension $2N_V$ paramétrisée par les scalaires des N_V multiplets vectoriels et \mathcal{M}_H est une variété hyper-Kahlérienne de dimension $4N_H$, correspondante aux N_H hypermultiplets.

Dans le cas du modèle IIA sur une variété de Calabi-Yau CY_3 , nous avons:

- $h_{1,1}(CY_3)$ paramètres complexes spécifiant la structure de Kahler de CY_3 ainsi le choix du champ antisymétrique $B_{\mu\nu}$ du secteur **NS-NS**.
- $h_{2,1}(CY_3)$ modules complexes déterminant la déformation de la structure complexe de CY_3 .
- $h_{2,1}(CY_3)$ paramètres complexes correspondant aux choix de la 3-forme $C_{\mu\nu\rho}$.
- $h_{0,3} + h_{3,0} = 2$ paramètres réels provenant du champ 3-forme $C_{\mu\nu\rho}$, plus 2 modules réels correspondant au dilaton et un champ scalaire dual du champ antisymétrique $B_{\mu\nu}$ à quatre dimensions.

Ces quatre champs scalaires forment un hypermultiplet supplémentaire. Par conséquent, nous avons:

$$\begin{aligned} h_{1,1}(CY_3) &\quad \text{multiplets vectoriels} \\ h_{2,1}(CY_3) + 1 &\quad \text{hypermultiplets.} \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Si nous considérons la supercorde IIB sur une variété CY_3^* , au lieu de la supercorde IIA sur CY_3 , nous avons $2h_{1,1}(CY_3^*)$ paramètres complexes spécifiant la déformation de Kahler de CY_3^* et le champ $B_{\mu\nu}^{\text{NS}}$ et $\tilde{B}_{\mu\nu}^{\text{R}}$ respectivement, 2 modules réels provenant du dilaton et l'axion de la théorie IIB. Nous avons aussi $h_{2,1}(CY_3^*)$ paramètres complexes paramétrisant la structure complexe de CY_3^* . Alors que la 4-forme $D_{\mu\nu\rho\lambda}$ donne $h_{2,1}(CY_3^*)$ bosons vectoriels. Ces modules peuvent être arrangés comme suit:

$$\begin{aligned} h_{2,1}(CY_3^*) &\quad \text{multiplets vectoriels} \\ h_{1,1}(CY_3^*) + 1 &\quad \text{hypermultiplets.} \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Nous remarquons que les rôles des structures complexes et de Kahler des variétés de Calabi-Yau CY_3 et CY_3^* sont interchangées :

$$\begin{aligned} h_{2,1}(CY_3) &\rightarrow h_{1,1}(CY_3^*) \\ h_{1,1}(CY_3) &\rightarrow h_{2,1}(CY_3^*). \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Cette symétrie est connue sous symétrie miroir. Sous cette transformation, le modèle type IIA sur CY_3 est équivalente au modèle type IIB sur la variété miroir CY_3^* [3]. Notons au passage que cette symétrie est utilisée dans la construction géométrique des théories supersymétriques à quatre dimensions, notamment dans la détermination des solutions exactes de la branche de Coulomb du modèle type IIA[41, 47]

3.4.2 Compactification des modèles $N = 1$

La compactification des supercordes $N = 1$ (hétérotiques $E_8 \times E_8$, $SO(32)$ et type I) sur des Calabi-Yau de dimension trois conduit à différents modèles $N = 1$ à quatre dimensions. Comme pour la compactification des supercordes $N = 1$ sur la surface K3, nous devons choisir une configuration des champs de jauge de sorte que

$$Tr F \wedge F = -\frac{1}{2} Tr R \wedge R. \quad (3.4.5)$$

Il se trouve qu'il y a plusieurs façons de satisfaire cette contrainte. Une façon particulièrement intéressante est de faire coïncider un sous groupe $SU(3)_{YM}$ du groupe de jauge G avec le groupe d'holonomie $SU(3)_H$ de la variété de Calabi-Yau tridimensionnelle. Pour un des deux facteurs E_8 de la théorie de supercorde $E_8 \times E_8$, nous avons la brisure suivante:

$$E_8 \longrightarrow E_6 \times SU(3). \quad (3.4.6)$$

La représentation adjointe 248, du groupe E_8 se décompose en termes des représentations (m, n) de $E_6 \times SU(3)_K$ de la manière suivante:

$$248 = (78, 1) + (1, 8) + (27, \bar{3}) + (\bar{27}, 3). \quad (3.4.7)$$

La matière chargée est dans les représentations 27 et $\bar{27}$. Le nombre 27 est donné par $h^{(1,1)}$ et celui de $\bar{27}$ est donné par $h^{(1,2)}$. Notons qu'il existe aussi plusieurs champs neutres qui correspondent à la déformation de la structure de Kahler (complexe) de la variété de Calabi-Yau tridimensionnelle. En plus de ces champs scalaires neutres, nous avons d'autres paramétrisant l'espace des modules de la connexion de jauge sur la variété de Calabi-Yau tridimensionnelle.

Chapter 4

Solitons en théories des supercordes

Afin de mieux illustrer l'aspect non perturbatif de la théorie des supercordes, nous commençons tout d'abord par rappeler certains résultats concernant la théorie des champs hors du régime perturbatif. A quatre dimensions, les phénomènes non perturbatifs peuvent être obtenus par la recherche des solutions non triviales des équations de mouvement des champs classiques. Ces méthodes non perturbatives ont connus un développement remarquable après la découverte des instantons de t'Hooft et de Belavin et al [71, 72]. Ces instantons concernent les solutions auto-duales et antiauto-duales des équations de Yang-Mills dans un espace Euclidien à quatre dimensions.

$$F = \pm * F, \quad (4.0.1)$$

où F est la courbure de la connexion de jauge.

Les instantons contribuent aux différentes quantités physiques par des termes en $e^{-\frac{1}{g^2}}$, g étant la constante de couplage, et correspondent à des transitions par effet tunnel entre les vides classiques de la théorie.

Un deuxième type de configuration des champs jouant un rôle important en physique non perturbative correspond aux solutions statiques à énergie finie des équations de mouvement. Ces solutions, dites solitons, sont au contraire indépendantes du temps et localisées dans l'espace. Leurs masses varient comme $\frac{1}{g^2}$, et échappent donc au spectre perturbatif ($g \rightarrow 0$). En théorie des champs non perturbative, ces solutions correspondent à des nouvelles particules qui ne sont pas créées par les champs fondamentaux de la théorie.

Ayant discuté les solitons en théorie des champs nous retournons maintenant à étudier l'analogue de ces objets en théorie des supercordes. Pour commencer notons que l'étude du spectre des états solitoniques dans les théories de supergravité à 10 dimensions révèle l'existence des objets étendus à p dimensions spatiales appelés p -branes [73]. Ces objets chargés sous des tenseurs antisymétriques $(p+1)$ -formes apparaissent de façon naturelle en théorie des supercordes et jouent un rôle considérable dans la compréhension des dualités des modèles de supercordes [3, 73, 74, 75, 76, 77, 78].

4.1 Branes et tenseurs antisymétriques

Avant de donner une description explicite des p -branes, il est intéressant de rappeler que le spectre des états de masse nulle des théories de supercordes se compose de: le dilaton ϕ , dont la valeur moyenne définit la constante de couplage de la supercorde $g_s = e^{-\phi}$, le graviton $g_{\mu\nu}$ de spin 2 et un certain nombre de tenseurs antisymétriques de jauge dépendant du modèle de supercorde en question. Ces tenseurs antisymétriques généralisent la notion du potentiel vecteur A_μ à un tenseur antisymétrique à $p+1$ indice A_{p+1} , (où $(p+1)$ -forme),

$$A_{p+1} = A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_{p+1}}. \quad (4.1.1)$$

Ce champ est invariant sous la transformation de jauge suivante

$$A_{p+1} \longrightarrow A_{p+1} + d\lambda_p, \quad (4.1.2)$$

où d est la dérivation extérieure ($d^2 = 0$) et λ_p est une p -forme. Le champ fort invariant de jauge est donné par

$$F_{p+2} = dA_{p+1}, \quad (4.1.3)$$

satisfaisant l'équation de Maxwell

$$d^* F_{p+2} = 0. \quad (4.1.4)$$

Les objets chargés sous ces tenseurs antisymétriques de jauge A_{p+1} sont appelés p -branes. Pour mieux illustrer la chose, nous rappelons que la dynamique d'une particule ponctuelle couplée à une 1-forme A_μ implique le couplage:

$$S_A = \int d\tau A_\mu \frac{dX^\mu}{d\tau}. \quad (4.1.5)$$

La charge électrique associée à un champ de jauge A_μ dans un espace de dimension d est mesurée par le flux du champ électrique à travers une sphère S^{d-2}

$$Q_E = \int_{S^{d-2}} *F_d, \quad (4.1.6)$$

où $F_d = dA$. La charge magnétique est déterminée de manière identique à l'aide de la dualité de Poincaré $dA \longrightarrow *dA$ par

$$Q_M = \int_{S^d} F. \quad (4.1.7)$$

De manière analogue on associe à chaque champ de jauge $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$, à $p + 1$ indices, un objet étendu à p dimensions spatiales et dont le chemin au cours du temps occupe un volume de dimension $p + 1$ dans l'espace-temps. Cet objet appelé p -brane généralise la notion de particule ponctuelle ($p = 0$) et la corde ($p = 1$) à des objets de dimension interne d'ordre supérieur $p > 1$ [3]. Par conséquent une p -brane se couple à $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ par un couplage

$$\int A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} dx^1 \dots dx^{p+1} \quad (4.1.8)$$

généralisant les lignes de Wilson des théories de jauge et nous avons les résultats suivants réalisés dans un espace-temps à d dimensions:

(i) La charge électrique associée au champ A à $p + 1$ indices est mesurée par:

$$Q_E = \int_{S^{d-(p+2)}} *dA. \quad (4.1.9)$$

(ii) La charge magnétique est définie à l'aide de la dualité de Poincaré par:

$$Q_M = \int_{S^{p+2}} dA. \quad (4.1.10)$$

(iii) La dualité électrique -magnétique en dimension d change donc une p -brane en une q -brane avec

$$p + q = d - 4 \quad (4.1.11)$$

En particulier pour une 3-forme couplée à 2-brane nous avons

$$S_{A_3} = \int d^3 \sigma \xi^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \partial_\gamma X^\rho. \quad (4.1.12)$$

L'étude des supercordes à dix dimensions montre qu'il existe deux types de branes: **NS-NS**-branes chargées sous les tenseurs de jauge du secteur **NS-NS**, et D_p -branes chargées sous les champs antisymétriques du secteur **R-R**. Nous avons la classification suivante de type de D-branes que l'on rencontre en théorie des supercordes

	Type IIB	Type IIA	Hétérotique $E_8 \times E_8$	Hétérotique $SO(32)$	Type I
Type de corde	fermée	fermée	fermée	fermée	ouverte (et fermée)
Supersymétrie de l'espace-temps	$N = 2$ chirale	$N = 2$ non chiral	$N = 1$	$N = 1$	$N = 1$
Symétrie de jauge	-	-	$E_8 \times E_8$	$SO(32)$	$SO(32)$
D-branes	-1,1,3,5,7	0,2,4,6	-	-	1,5,9

4.2 La physique D-branes

Les D_p -branes peuvent être vues comme des hypersurfaces de dimension p imergées dans l'espace-temps, ils apparaissent comme des objets infiniment massifs à faible couplage et leurs masses $m = \frac{1}{g_s^2}$, où g_s est la constante de couplage de corde. En régime du couplage fort ($g_s \rightarrow \infty$), ces objets deviennent non massifs et dominent la dynamique non perturbative de la théorie. De point de vue théorie des supercordes, les D p -branes sont des hypersurfaces sur lesquelles des supercordes ouvertes sont attachées [2, 7]. La notion de D p -brane, traduit le fait que les extrémités des supercordes ouvertes satisfont les conditions de bords de **Dirichlet**:

$$\partial_\tau X^\mu(\sigma = 0, \pi) = 0, \quad \mu = p + 1, \dots, 9. \quad (4.2.1)$$

suivant les directions transverses; ainsi elles répondent aux conditions de **Neumann** sur les $(p + 1)$ directions longitudinales, c.à.d

$$\partial_\sigma X^\mu(\sigma = 0, \pi) = 0, \quad \mu = 0, \dots, p. \quad (4.2.2)$$

Contrairement à la théorie des supercordes ouvertes libres où les modes se propagent dans l'espace-temps à dix dimensions, la symétrie de Lorentz $SO(1, 9)$ à dix dimensions

se brise en $SO(1, p) \times SO(9-p)$ sur le volume d'univers de la p -brane. Les fluctuations des champs des supercordes ouvertes décrivent alors la dynamique de la Dp -brane. De plus les modes de masse nulle des supercordes ouvertes attachées à la D-brane correspondent aux degrés de liberté de la Dp -brane. Puisque le spectre de masse nulle des supercordes ouvertes correspond au potentiel vecteur A^μ , la condition d'attachement sur les Dp -branes implique que ce champ se propage uniquement sur le volume d'univers de dimension ($p+1$):

$$A^\mu = \alpha_{-1}^\mu |0, k>, \quad \mu = 0, \dots, p, \quad (4.2.3)$$

en présence des $9 - p$ champs scalaires A_i , du point de vue du volume d'univers de la Dp -brane,

$$A^i = \alpha_{-1}^i |0, k>, \quad i = p + 1, \dots, 9. \quad (4.2.4)$$

4.2.1 Action des p -branes

En présence du champ de jauge A^μ , l'action décrivant la dynamique de la Dp -brane est donnée par l'action de Born -Infeld [2]

$$\mathcal{S}_{BI} = \int d^{p+1}e^{-\frac{\phi}{2}} \sqrt{\det(g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})}, \quad (4.2.5)$$

où $F = dA$ est la courbure du champ de jauge A et g représente la métrique induite sur le volume d'univers. La tension de la Dp -brane est donnée par

$$T_p = \frac{e^{-\phi}}{(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}. \quad (4.2.6)$$

En présence d'un champ antisymétrique $B_{\mu\nu}$ du secteur de **NS-NS**, l'action de Born -Infeld peut être généralisée de la manière suivante

$$\mathcal{S}_{BI} = -T_p \int d^{p+1}e^{-\frac{\phi}{2}} \sqrt{\det(g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' \mathcal{F}_{\mu\nu})} - iT_p \int A_{p+1}, \quad (4.2.7)$$

où $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ est la courbure généralisée donnée par

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2\pi\alpha' F_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} = 2\pi\alpha' (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - B_{\mu\nu}. \quad (4.2.8)$$

Cette action peut être complétée par l'adjonction des fermions dans le but d'avoir une théorie supersymétrique sur le volume d'univers. Si nous considérons que la D p -brane est

approximativement plate, la dynamique de ses fluctuations est décrite par une théorie de Maxwell ordinaire $U(1)$ à $(p+1)$ dimensions avec $9-p$ champs scalaires. Après cette addition des champs fermioniques ψ , l'action à faible énergie peut être évaluée explicitement par la réduction dimensionnelle de la théorie de Maxwell $U(1)$ supersymétrique $N=1$ à dix dimensions

$$S = \frac{1}{g_{YM}^2} \int d^{10}x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu \partial_\mu \psi \right) \quad (4.2.9)$$

vers une théorie à $(p+1)$ dimensions. Cependant cette théorie, invariante sous la moitié des charges supersymétriques, décrit la dynamique d'une seule Dp -brane.

Une généralisation de cette analyse peut être étendue au cas de plusieurs Dp -branes parallèles. Ceci conduit à la théorie de Yang-Mills supersymétrique. Pour une configuration des supercordes ouvertes attachées sur deux Dp -branes différentes, la masse des états fondamentaux de ces supercordes ouvertes est donnée par

$$M = \frac{L}{\alpha'}, \quad (4.2.10)$$

qui est proportionnelle à leur élongation L . Ces états deviennent non massifs lorsque les deux Dp -branes coïncident ($L=0$). Dans le cas de N Dp -branes confondus, nous avons N^2 champs de jauge des supercordes ouvertes A_{ij}^μ . Ceci conduit à une théorie de Yang-Mills non abélienne $U(N)$ sur le volume d'univers de dimension $p+1$ dont l'action est définie par

$$\mathcal{S}_p^N = T_p \text{ str} \int_{W_{p+1}} d^{p+1}e^{-\frac{\phi}{2}} (F_{\mu\nu}^2 + 2F_{\mu I}^2 + F_{IJ}^2) \quad (4.2.11)$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, $F_{\mu I} = \partial_\mu X_I + [A_\mu, X_I]$ et $F_{IJ} = [X_I, X_J]$ avec A_μ , X_I sont des matrices de $U(N)$ ¹. Notons que dans le cas où le potentiel est nul

$$\text{Tr} [X^I, X^J]^2 = 0, \quad (4.2.12)$$

les matrices de position commutent et peuvent être simultanément diagonalisées. Dans ce cas nous avons la version abélienne et nous retrouvons la notion de position individuelle de chaque brane.

¹Nous signalons qu'il y a d'autres extensions associées avec les groupes SO et SP

4.3 D-branes et les espaces de Calabi-Yau

Partant de p -branes nous pouvons réduire certaines de ses dimensions internes en les enroulant autour des directions compactes. L'enroulement d'une Dp -brane sur des cycles compacts (C_r) de dimension r signifie que son volume d'univers contient r directions compactifiées conduisant à une $D(p-r)$ -brane dans l'espace-temps non compact. En fait, on peut décomposer le potentiel de jauge A_{p+1} en produit de deux potentiels l'un dans les directions compactes de dimension r et l'autre $(p+1-r)$ -forme dans les directions non compactes; soit alors

$$A^{p+1} \rightarrow w_r \wedge A^{p+1-r}, \quad (4.3.1)$$

où w_r est une r -forme harmonique sur la variété compacte [3].

Dans la compactification sur des variétés de Calabi-Yau, l'enroulement d'une Dp -brane sur un cycle arbitraire brise toutes les supersymétries, ces cycles sont dites supersymétriques. On distingue deux catégories des cycles supersymétriques dans une variété de Calabi-Yau CY_d de dimension complexe d :

- (i) Les cycles de type A, de dimension réelle d , sont tels que la forme holomorphe $(d, 0)$ est proportionnelle à la forme volume induite par la métrique de la variété CY_d sur les cycles compactes. La compactification sur ces cycles conduit à des D p -branes de type A.
- (ii) Les cycles de type B sont les sous variétés complexes holomorphes de la variété CY_d . Ils conduisent à D p -branes de type B.

Dans le contexte de la compactification des théories de supercordes II vers les dimensions inférieures, nous distinguons deux cas particuliers intéressants:

- ♠ Dp -brane enroulée sur un p -cycle C_p de dimension réelle p et de volume V_p donne une particule ($p-p=0$ -brane) chargée sous un champ de jauge 1-forme (A_μ), obtenu par la décomposition de $(p+1)$ -forme en terme d'une p -forme harmonique w_p sur C_p , dans l'espace-temps non compact

$$\int_{C_p} A^{p+1} \rightarrow \int d\tau A. \quad (4.3.2)$$

La masse M de D0-brane résultante est proportionnelle au volume V_p

$$M \sim V_p. \quad (4.3.3)$$

Dans la limite où V_p tend vers zéro nous obtenons un nouveau état non perturbatif de masse nulle. Cette idée est à la base de la construction géométrique des théories de superYang-Mills à partir de la théorie des supercordes II [40].

♠ D p -brane avec un volume d'univers enclidien de dimension $(p+1)$ enroulée sur un $(p+1)$ -cycle conduit à des instantons de la théorie des supercordes. Ces objets génèrent des corrections non perturbatives par une action e^S , où $S = \text{tension(brane)} \times \text{volume d'univers}$.

Chapter 5

Dualités en Théorie des Supercordes

5.1 Dualité en théorie des supercordes

La symétrie de dualité a conduit à une révolution dans la conception des théories de supercordes puisqu'elle a permis de voir les cinq modèles de supercordes comme des manifestations d'une seule théorie [34], dite théorie-M. En général, une dualité entre deux théories est une transformation reliant leurs états [3]. La dualité a également la propriété de transformer un problème difficile à résoudre dans une théorie en problème facile à résoudre dans la théorie duale, en particulier elle permet de transposer l'étude de la limite du couplage fort d'une théorie de supercordes à celle du couplage faible dans la théorie duale, comme c'est le cas des théories hétérotiques et type I.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la dualité entre la supercorde hétérotique et la supercorde type IIA à six et à quatre dimensions. Ces dualités ont à la base de plusieurs résultats obtenus durant les quelques dernières années.

5.2 Symétrie de dualité: Définitions

Nous avons cinq modèles de supercordes critiques à 10 dimensions: IIA, IIB, type I $SO(32)$, hétérotique $SO(32)$ et hétérotique $E_8 \times E_8$. La compactification de ces modèles donne plusieurs modèles de supercordes dans les dimensions inférieures. Chacune de ces

modèles possède un espaces des modules paramétrisé par les modules suivants:

- La constante de couplage de la supercorde $g_s = e^{<\phi>}$, où $<\phi>$ est la valeur moyenne du dilaton dans le vide.
- Les modules géométriques de la variété compacte X dont le nombre provient des différents choix possibles de la métrique. Pour un espace de Calabi-Yau de dimensions n , Ce nombre est donné par les déformations de Kahler $h^{1,1}(CY_n)$ et les déformations complexes $h^{n-1,1}(CY_n)$ de CY_n .
- Les valeurs moyennes des champs antisymétriques des secteurs **NS-NS**, **R-R** et des champs de jauge.

Ces trois types de valeurs moyennes paramètrent l'espace des modules de la théorie compactifiée [3] sur une variété X . Dans la région de l'espace des modules où la constante de couplage est faible, la théorie perturbative est relevante. Alors que dans la région où la constante de couplage est forte, c'est plutôt le régime non perturbatif qui est dominant. Un exemple de symétrie de dualité est celle qui transforme une région perturbative d'une théorie à une région non perturbative d'autre théorie et vice versa. Quand la symétrie de dualité relie les deux régions de la même théorie, nous disons que la théorie est auto-duale (par example, modèle IIB). Pour faciliter la lecture, nous avons jugé utile de revoir brièvement les types de symétries des dualités que nous rencontrons en théorie des supercordes.

5.2.1 Dualité-T

Comme nous avons vu dans la compactification des modèles de supercordes sur un cercle de rayon R . La dualité-T consiste à faire la transformation $R \longrightarrow \frac{\alpha'}{R}$. Cette symétrie se généralise vers le groupe $SO(d, d, \mathbf{Z})$ lors de la compactification toroïdale sur le tore T^d . Cette dualité relie la région de faible couplage de deux théories différentes. Par exemple, le modèle IIA sur un cercle de rayon R est dual au modèle IIB sur un cercle de rayon $\frac{1}{R}$. De la même façon les deux modèles de supercordes hétérotiques sont équivalentes à neuf dimensions. A cause de cette symétrie de dualité, les cinq modèles de supercordes à

dix dimensions se réduisent à trois modèles distincts à neuf dimensions: type II, type I et supercorde hétérotique. Il est naturel de chercher d'autres relations entre ces trois modèles de supercordes. Sachant que la dualité-T intervient dans une limite perturbative. Nous nous attendons à retrouver un lien entre ces trois modèles de manière à étendre la dualité perturbative vers une dualité non perturbative. Pour cela nous allons étudier autre type de dualité.

5.2.2 Dualité-S

C'est une transformation de dualité reliant deux régimes de couplages différents. Elle est donnée par l'inversion du couplage g_s ,

$$g_s \longrightarrow \frac{1}{g_s}. \quad (5.2.1)$$

Cette dualité nous permet de décrire le couplage fort (faible) d'une théorie à l'aide du régime à couplage faible (fort) de sa théorie duale. La dualité-S va au delà de la dualité électrique-magnétique apparaissant en théorie de Yang-Mills à quatre dimensions. Notons qu'il existe un autre type de dualité dite *dualité-U*. Cette dernière est une combinaison de la dualité-T et la dualité-S.

5.3 Dualité faible-fort couplage à dix dimensions

Dans ce paragraphe, nous décrivons deux exemples à dix dimensions: Le premier correspond à la dualité-S ($Sl(2, Z)$) de la théorie de type IIB, tandis que le deuxième exemple est celui de la dualité hétérotique $SO(32)$ -type I $SO(32)$.

5.3.1 Auto-dualité du modèle IIB

Rappelons que le supermultiplet gravitationnel du modèle type IIB à 10 dimensions contient le graviton $g_{\mu\nu}$, deux gravitino $\psi_{\mu,\alpha}^{\dot{\alpha}}$ deux tenseurs antisymétriques $B_{\mu\nu}$, $\tilde{B}_{\mu\nu}$, un champ scalaire complexe $\tau = \chi + ie^{-\phi}$, dont la partie imaginaire est identifiée avec la

constante de couplage de la théorie des supercordes et une quatre forme $D_{\mu\nu\rho\lambda}$ auto-duale $dD = *dD$. La dualité-S est une transformation particulière du groupe $Sl(2, \mathbf{Z})$ agissant sur le paramètre $\tau = \chi + ie^{-\phi}$ comme [34, 35, 79]

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad ad - bc = 1, \quad (5.3.1)$$

où χ correspond à la valeur moyenne de l'axion de **R-R** du modèle type IIB. D'autre part la paire $(B_{\mu\nu}, \tilde{B}_{\mu\nu})$ se transforme sous la symétrie $Sl(2, \mathbf{Z})$ comme un doublet

$$\begin{pmatrix} B_{\mu\nu} \\ \tilde{B}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\mu\nu} \\ \tilde{B}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (5.3.2)$$

alors que la métrique et la quatre forme restent invariantes. Dans le cas $\chi = 0$, nous voyons que $g \rightarrow \frac{1}{g}$ et $B \rightarrow \tilde{B}$ et $\tilde{B} \rightarrow -B$ c'est la symétrie de dualité-S. Cette symétrie échange la supercorde fondamentale chargée sous $B_{\mu\nu}$ en D1-brane (D-corde) chargée sous $\tilde{B}_{\mu\nu}$. Une façon de voir cette équivalence est au niveau de leurs actions sur la surface d'univers. En effet, la partie bosonique de la supercorde fondamentale du modèle type IIB

$$S_F = \frac{1}{\alpha'} \int d\sigma^2 (\partial_a X^i)^2, \quad (5.3.3)$$

peut être identifiée avec l'action de la D-corde. Cette action est décrite dans la jauge du cône de lumière par un champ de jauge A_α et huit champs scalaires X^i à deux dimensions. En particulier, elle est obtenue par la réduction dimensionnelle de la théorie de super Yang-Mills à dix dimensions vers deux dimensions

$$S_D = \frac{1}{g_s \alpha'} \int d\sigma^2 \{ F_{\alpha\beta}^2 + (\partial_a X^i)^2 \}, \quad (5.3.4)$$

où $F_{\alpha\beta}^2$ est le champ fort de A_α . Ce dernier ne contenant pas des degrés de liberté de jauge et qui conduit par suite à l'équivalence ci-dessus mentionnée. Notons au passage que la NS5-brane est également identifiée à la D5-brane du secteur de **R-R** du modèle type IIB alors la D3-brane est invariante.

5.3.2 Dualité type I- hétérotique $SO(32)$

A dix dimensions, la théorie super Yang Mills avec la symétrie de jauge $SO(32)$ a deux réalisations différentes l'un provenant du modèle de type I et l'autre de la supercorde

hétérotique $SO(32)$. Quoique, ces deux modèles ont le même spectre des états de masse nulle ($g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi, A_\mu$), elles ne peuvent être reliées trivialement à cause de leurs propriétés perturbatives complètement différentes. Ce qui nous amène à conjecturer l'existence d'une dualité faible-fort couplage:

$$g_{H\text{et}} \longrightarrow \frac{1}{g_I}.$$

Cette transformation identifie le tenseur $B_{\mu\nu}$ de la supercorde hétérotique $SO(32)$ avec le tenseur $\tilde{B}_{\mu\nu}$ du modèle type I, $SO(32)$. Donc la supercorde hétérotique, chargée sous $B_{\mu\nu}$, peut être identifiée avec la D1-brane du modèle type I, chargée sous $\tilde{B}_{\mu\nu}$. Les champs de jauge associés à la symétrie $SO(32)$ de la supercorde hétérotique correspondent précisément aux champs de la surface d'univers de la D1-brane. En particulier, ces champs correspondent aux modes de masses nulles des supercordes ouvertes dont les extrémités sont attachées à la D1-brane. Finalement la **NS** 5-brane hétérotique peut être également identifiée à la D5-brane du modèle type I [79].

Dans cette section, nous avons décrit deux exemples de la dualité faible-fort couplage. Connaissant le régime à faible couplage, nous pouvons alors déterminer la limite de couplage fort des modèles IIB, type I et hétérotique $SO(32)$. Une question naturelle qui se pose à ce niveau: Quelle est la dynamique à fort couplage des théories IIA et la supercorde hétérotique $E_8 \times E_8$? Il se trouve que la dynamique à fort couplage de ces deux dernières a une origine différente et son interprétation nécessite d'aller au delà de la dimension dix d'espace-temps, vers onze dimensions [34].

5.4 Dualité type II- hétérotique

5.4.1 Type IIA sur K3/ hétérotique sur T^4

Après compactification sur un cercle, la dualité ne laisse que trois modèles de supercordes apparemment distinctes: type II (IIA est équivalente IIB), modèle type I $SO(32)$ et la supercorde hétérotique ($SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$). De plus les deux modèles $SO(32)$ sont aussi identifiées par la dualité faible-fort couplage. La question qui se pose à ce niveau et de voir s'il existe également une description duale dans laquelle les théories $N = 1$ et

$N = 2$ soient reliées?. La réponse est positive; en effet, le cas le plus étudié est donné par la dualité de la théorie de type IIA sur la surface complexe K3 et la théorie hétérotique sur T^4 [36, 37, 3, 8]. Ces deux théories présentent le même espace des modules:

$$SO(1, 1) \times \frac{SO(20, 4, \mathbf{R})}{SO(20, \mathbf{R})SO(4, \mathbf{R})}, \quad (5.4.1)$$

où $SO(1, 1)$ correspond à la constante de couplage de la corde, et le quotient $\frac{SO(20, 4, \mathbf{R})}{SO(20, \mathbf{R})SO(4, \mathbf{R})}$ correspond à l'espace des modules du réseau pair auto-dual de Narain $\Gamma_{20,4}$, définissant la compactification de la supercorde hétérotique sur T^4 , ou encore aux modules de la compactification de la supercorde type IIA sur K3. Notons que la théorie des supercordes hétérotiques possèdent une symétrie de jauge non abélienne, alors que la théorie de type IIA sur K3 ne possède que des champs de jauge abéliens provenant du secteur R-R. Ces champs correspondent soit au champ de jauge 1- forme (D0-branes), soit à la réduction du tenseur antisymétrique 3- forme (D2-branes) sur les deux cycles de K3. Quoique, ces deux théories ont des groupes de jauge différents, la conjecture de dualité IIA sur K3 et hétérotique sur T^4 a passée avec succès plusieurs tests en particulier en utilisant les D-branes. La symétrie non abélienne de la supercorde hétérotique est associée en IIA à la symétrie des points singuliers de l'espace des modules de K3. Lorsqu'un ou plusieurs 2-cycles s'annulent, les D2-branes de la théorie de type IIA enroulées autour d'eux génèrent des particules de jauge de masse nulle portant une symétrie de jauge non abélienne déterminée par la matrice d'intersection des 2-cycles de K3 [80, 81, 82, 83]. De plus, les singularités de K3 ont été classées par les singularités de type ADE. De cette propriété, il en découle entre autre que l'on peut identifier les états de la supercorde hétérotique tels que ceux du spectre $(P_L^2, P_R^2) = (0, 2)$ du réseau de Narain avec le réseau d'homologie de la variété K3 singulière ¹.

5.4.2 Dualité hétérotique -type IIA à quatre dimensions

La dualité $N = 2$ hétérotique -type IIA à six dimensions que nous venons de décrire peut être étendue à quatre dimensions tout en conservant la totalité ou la moitié des

¹On associe à chaque racine simple des algèbres de Lie ADE un 2-cycle de K3. Ainsi les matrices d'intersections des 2-cycles de K3 aux celles de Cartan des algèbres de Lie.

supersymétries à six dimensions [84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92]. Cette étude est basée sur l'argument adiabatique de Vafa et Witten [93]. Ce dernier consiste à faire une compactification des deux théories sur un même espace de dimension réelle deux.

Argument adiabatique.

En général partant d'une théorie A compactifiée sur une variété K^A duale à une théorie B compactifiée sur une variété K^B ,

$$A \text{ sur } K^A \sim B \text{ sur } K^B,$$

et compactifions ces deux théories sur un même espace \tilde{M} , nous produisons une nouvelle paire des théories duales dans des dimensions inférieures:

$$A \text{ sur } (K^A \times \tilde{M}) \sim B \text{ sur } (K^B \times \tilde{M}).$$

Ce programme qui est connu sous l'argument adiabatique stipule que la dualité entre les théories ci-dessus peut être vu comme étant une dualité entre les fibres K en tout point de l'espace \tilde{M} . Considérant la dualité hétérotique - type IIA à six dimensions et utilisant l'argument adiabatique on peut déduire d'autres dualités à 4 dimensions en prenant $\tilde{M}_2 = T^2$ ou S^2 avec $N = 4$ et $N = 2$ respectivement.

Bibliography

- [1] M. Green, J. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, vol 1 and 2, Cambridge University Press, 1987.
- [2] J. Polchinski, *String theory*, vol and 2, Cambridge University Press, 1999.
- [3] C. Vafa, *Lectures on Strings and Dualities*, [hep-th/9702201](#).
- [4] S. Randjbar-Daemi, *Introduction to Chiral Anomalies*, lectures presented at Introductory School on String Theory, ICTP, Trieste, Italy, (1998).
- [5] K. S. Narain, *Toroidal compactification and heterotic string*, lectures presented at Introductory School on String Theory, ICTP, Trieste, Italy (1998).
- [6] C. Gomez and R. Hernandez, *Fields, strings and branes*, [hep-th/9711102](#).
C. Gomez, lectures presented at the Workshop on Noncommutative Geometry, Superstrings and Particle Physics. Rabat -Morocco, (May 11-12 2001).
- [7] J. Polchinski, *What is String Theory?*, [hep-th/9411028](#).
- [8] E. Kiritsis, *Introduction to Superstring Theory*, [hep-th/9709062](#).
E. Kiritsis, *Introduction to Non-perturbative string theory*, [hep-th/9708130](#).
- [9] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B103**(1981)207-211.
- [10] A. M. Polyakov, Phys. Scr. **15** (1987)191.
- [11] P. Ramond, *Dual Theory for fermions*, Phys. Rev. D3(1971)2415.
A. Neveu, J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B31** 86.

- [12] G. Veneziano, *An introduction to dual models of strong interactions and their physical motivations*, Phys. Rep. **C9** 199.
 - J. H. Schwarz, *Dual resonance theory*, Phys. Rep. **C8**(1973)269.
 - A. Neveu, J. Schwarz, Nucl. Phys. **B31**(1971)86.
 - P. Ramond, Phys. Rev. **D3** (1971)2415.
- [13] F. Glözzi, J. Scherk and D. Olive, Phys. Lett **B65**(1976)282.
- [14] F. Glözzi, J. Scherk and D. Olive, Nucl. Phys. **B122** (1977)282.
- [15] A.A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, J. Stat. Phys. **34**, (1984), 763; Nucl. Phys. **B241**(1984)333.
- [16] D. Friedan, Z. Qiu and S. Shenker, Phys. Rev. Lett.**52**(1984)1575.
- [17] S. Fubini and G. Veneziano, Ann. Phys. **63**(1970)12.
- [18] A. Neveu, J. H. Schwarz and C. B. Thorn, Nucl. Phys. **B35**(1971)529.
- [19] M. O'Loughlin, K.S. Narain, *Non-Perturbative Aspects Of Supersymmetric String Theories*, lectures presented at Introductory School on String Theory, ICTP, Trieste, Italy (1998).
- [20] B. M. Grenne, *Aspects of D- Geometry*, lectures presented at Spring school on superstring theories and related matters, ICTP, Trieste, Italy, (1999).
- [21] P. D. Vecchia, *Large N gauge theories and ADS/CFT Correspondence*, lectures presented at Spring school on superstring theories and related matters, ICTP, Trieste, Italy, (1999).
- [22] I. Antoniadis, *Mass Scales in String and M-Theory*, lectures presented at Spring school on superstring theories and related matters, ICTP, Trieste, Italy, (1999).
- [23] J. Maldacena, *ADS/CFT Correspondence*, lectures presented at Spring school on superstring theories and related matters, ICTP, Trieste, Italy, (1999).

- [24] S. Kachru, *Warped Brane Worlds and Hierarchy Problems*, lectures presented at Spring School on superstrings and related matters , ICTP, Trieste, Italy, (2000).
- [25] J. Maldacena, *The large N limit of Field Theories and Gravity*, lectures presented at Spring school on superstring theories and related matters, ICTP, Trieste, Italy, (2000).
- [26] J. Maldacena, *The Gravity /Field theory Correspondance*, lectures presented at Spring school on superstring theories and related matters, ICTP, Trieste, Italy, (2000).
- [27] D. Kutasov, *Introduction to little string theory*, lectures presented at Spring school on superstring theories and related matters, ICTP, Trieste, Italy, (2001).
- [28] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, *Vacuum configurations for superstrings*, Nucl. Phys **B258** (1985) 46.
- [29] K. Narain, M. H. Sarmadi, E. Witten, *Note on the Toroidal compactification of Heterotic string Theory*, Nucl. Phys **B279** (1987) 369-379.
- [30] S-. Yau *Calabi Yau Conjecture and Somme New results in Algebraic Geometry* Pro. Natl.Acad.Sci **B74** (1977) 1798-1799.
- [31] B. R. Grenne, *String Theory on Calabi Yau Manifolds*, **TASI lectures 1996**, hep-th/9702155.
- [32] S. Theisen, *Introduction to Calabi-Yau manifolds*, Lectures presented at Spring school on superstring theories and related matters, ICTP, Trieste, Italy, (2001).
- [33] M. Douglas, lectures presented at Spring school on superstring theories and related matters, ICTP, Trieste, Italy, (2001).

- [34] E. Witten, *String Theory Dynamics in Various Dimensions*, Nucl. Phys. **443**(1995)184, hep-th/9507121.

- [35] J. H. Schwarz, *An $SL(2, \mathbb{Z})$ Multiplet of Type IIB Superstrings*, Phys. Lett. **B360** (1995) 13-18, [hep-th/9508143](#).
- [36] C. Hull and P. Townsend, *Unity of Superstring Dualities*, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109–137, [hep-th/9410167](#).
- [37] L. J. Dixon, V. Kaplunovsky, and C. Vafa, *On Four-Dimensional Gauge Theories from Type-II Superstrings*, Nucl. Phys. **B294** (1987) 43-82.
- [38] A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr , C. Vafa, N. Warner, Nucl. Phys **B477**(1996)746.
- [39] C. Vafa, *Evidence for F-Theory*, Nucl.Phys. **B469** (1996)403-418, [hep-th/9602022](#).
- [40] S. Katz,A. Klemm and C. Vafa, Nucl. Phys **B497**(1997) 173-195.
- [41] S. Katz, P. Mayr and C. Vafa, *Mirror symmetry and exact solution of 4d $N=2$ gauge theories I*, Adv, Theor. Math. Phys **1**(1998)53.
- [42] N. Seiberg and Witten, *Electric-Magnetic duality, Monopole Condensation and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills Theory*, Nucl. Phys. **B 426** (1994) 19.
- [43] N. Seiberg and E.Witten, *Monopole, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $N=2$ Supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. **B 431** (1994) 484.
- [44] A. Hanany and E. Witten, Nucl. Phys **B492** (1997)152-190, [hep-th/9611230](#).
- [45] E. Witten, Nucl. Phys **B500**(1997)3-42, [hep-th/9703166](#).
- [46] A. Belhaj, *On Geometric Engineering of Supersymmetric Gauge Theories*, the proceedings of the Workshop on Noncommutative Geometry, Superstrings and Particle Physics. Rabat -Morocco, (16-17 June 2000), [hep-ph/0006248](#).
- [47] A. Belhaj, E.H Saidi, *Toric Geometry, Enhanced non Simply laced Gauge Symmetries in Superstrings and F-theory Compactifications*, [hep-th/0012131](#).
- [48] N. Berkovits, A. Sen, B. Zwiebach, *Tachyon Condensation in Superstring Field Theory*, Nucl.Phys. **B587** (2000) 147-178, [hep-th/0002211](#).

- [49] A. Sen, B. Zwiebach, *Tachyon condensation in string field theory*, JHEP **0003** (2000) 002, [hep-th/9912249](#).
- [50] D. Gross, J. Harvey, E. Martenich and R. Rohm, Nucl. Phys. **B256**(1985)253.
- [51] B. Grenne, *String theory on Calabi-Yau manifolds*, [hep-th/9702155](#).
- [52] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [53] W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer, 1984.
- [54] C. Borcea, *Diffeomorphisms of a K3 surface*, Math. Ann. **275** (1986) 1-4.
- [55] T. Matumoto, *On Diffeomorphisms of a K3 Surface*, in M. Nagata et al, editor, “Algebraic and Topological Theories — to the memory of Dr. Takehiko Miyaka”, pages 616–621, Kinokuniya, Tokyo, 1985.
- [56] S. K. Donaldson, *Polynomial Invariants for Smooth Four-Manifolds*, Topology **29** (1990) 257-315.
- [57] I. Satake, *On a Generalization of the Notion of Manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42** (1956) 359-363.
- [58] L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa, and E. Witten, *Strings on Orbifolds*, Nucl. Phys. **B261** (1985) 678-686, and **B274** (1986) 285–314.
- [59] R. Kobayashi, *Einstein-Kähler V-Metrics on Open Satake V-Surfaces with Isolated Quotient Singularities*, Math. Ann. **272** (1985) 385-398.
- [60] A. Todorov, *Applications of Kähler-Einstein-Calabi-Yau Metric to Moduli of K3 Surfaces*, Inv. Math. **61** (1980) 251-265.
- [61] D. R. Morrison, *Some Remarks on the Moduli of K3 Surfaces*, in K. Ueno, editor, *Classification of Algebraic and Analytic Manifolds*, Progress in Math. **39**, pages 303-332, Birkhäuser, 1983.

- [62] P. Aspinwall, *K3 surfaces and String Duality*, [hep-th/961117](#).
- [63] N. Seiberg, *Observations on the Moduli Space of Superconformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B303** (1988) 286-304.
- [64] B. R. Greene and M. R. Plesser, *Duality in CY Moduli Space*, Nucl. Phys. **B338** (1990) 15-37.
- [65] A. Sen, *Strong-Weak Coupling Duality in Four-Dimensional String Theory*, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994) 3707-3750, [hep-th/9402002](#).
- [66] E. Witten, *New Issues in Manifolds of $SU(3)$ Holonomy*, Nucl. Phys. **B 268** (1986) 79-112.
- [67] P. Candelas and X. De La Ossa, *Moduli space of Calabi-Yau Manifolds*, Nucl. Phys. **B 355** (1991) 455-481.
- [68] P. Candelas, R. Gremm and M. Hubsc, *Connected Calabi -Yau Compactifications*, (World Scientific , Singapore).
- [69] A. Sen, *Heterotic string theory and Calabi Yau manifolds in the Green Schwarz Formalism*, Nucl. Phys. **B355** (1987) 423.
- [70] K. S. Narain, M. H. Sarmadi, and C. Vafa, *Asymmetric Orbifolds*, Nucl. Phys. **B288** (1987)551-577.
- [71] A. M. Polyakov, *particle spectrum in the quantum field theory*, JETP. Lett. **20** (1974)494-195.
- [72] G.'t Hooft, Computation of the quatum effects due to a four dimensional pseudoparticle, Phys. Rev **D14** (1976)3432-3450.
- [73] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724-4727, [hep-th/9510017](#).
- [74] E. Witten, Bound States of Strings and p-Branes, Nucl. Phys. **460** (1996) 335, [hep-th/9510135](#).

- [75] M. Bershadsky, V. Sadov and C. Vafa, *D-srtings on D- Manifols*, Nucl. Phys. **463** (1996) 398.
- [76] M. Bershadsky, V. Sadov and C. Vafa, *D-branes and topological field theories*, Nucl. Phys. **463** (1996) 420.
- [77] M. Douglas, D. Kobat, P. Pouliot and S. Shenker, *D- branes and Short Distances in String Theory*, hep-th/9608024.
- [78] N. Seiberg, E. Witten, *The D1/D5 System And Singular CFT*, JHEP 9904 (1999) **017**, hep-th/9903224.
- [79] J. Pochinski and E. Witten, *Evidence for Heterotic- type I String Duality*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 525, hep-th/9510169.
- [80] P. S. Aspinwall, *Enhanced Gauge Symmetries and K3 Surfaces*, Phys. Lett. **B357** (1995) 329-334, hep-th/9507012.
- [81] P. S. Aspinwall, Phys. Lett **357**(1995) 329.
- [82] M. Bershadsky et al., *Geometric Singularities and Enhanced Gauge Symmetries*, Nucl. Phys. **B481** (1996) 215-252, hep-th/9605200.
- [83] S. Katz, D. R. Morrison, and M. R. Plesser, *Enhanced Gauge Symmetry in Type II String Theory*, Nucl. Phys. **B477** (1996) 105-140, hep-th/9601108.
- [84] C. Hull and P. Townsend, *Enhanced Gauges Symmetries and K3 surfaces*, Phys. Lett. **B 347** (1995)313.
- [85] G. Aldazabal, A. Font, L. E. Ibáñez, and F. Quevedo, *Chains of N=2, D=4 Heterotic/Type II Duals*, Nucl. Phys. **B461** (1996) 85-100, hep-th/9510093.
S. Chaudhuri and D. A. Lowe, *Type IIA-Heterotic Duals with Maximal Supersymmetry*, Nucl. Phys. **B459** (1996) 113-124, hep-th/9508144.
- [86] S. Kachru et al., *Nonperturbative Results on the Point Particle Limit of N=2 Heterotic String Compactifications*, Nucl. Phys. **B459** (1996) 537-558, hep-th/9508155.

- [87] A. Klemm, W. Lerche, and P. Mayr, *K3–Fibrations and Heterotic-Type II String Duality*, Phys. Lett. **357B** (1995)313-322, hep-th/9506112.
- [88] A. Klemm et al., *Self-Dual Strings and N=2 Supersymmetric Field Theory*, Nucl. Phys. **B477** (1996)746-766, hep-th/9604034.
- [89] V. Kaplunovsky, J. Louis, and S. Theisen, *Aspects of Duality in N=2 String Vacua*, Phys. Lett. **357B** (1995)71–75, hep-th/9506110.
- [90] H. Ooguri, C. Vafa, *All Loop N=2 String Amplitudes*, Nucl.Phys. **B451** (1995)121-161, hep-th/9505183.
- [91] A. Sen, C. Vafa, *Dual Pairs of Type II String Compactification*, Nucl.Phys. **B455** (1995)165, hep-th/9508064.
- [92] A. Sen, *An introduction to Non-perturbative string theory*, hep-th/9802051.
- [93] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phy. Proc. Supp **46** (1996)225.