

Annexe A

Action de \hat{P} et \hat{H} sur $|\{\theta_a\}\rangle$

L'état $|\{\theta_a\}\rangle$ s'écrit :

$$|\{\theta_a\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx_1 \cdots dx_N \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(x_N) |\emptyset\rangle. \quad (\text{A.1})$$

A.1 Action de \hat{P} sur $|\{\theta_a\}\rangle$

A.1.1 Utilisation de la définition de \hat{P} intégrée par parties

Cela peut être expliqué en utilisant l'opérateur du moment \hat{P} (1.30) comme exemple. Tout d'abord, nous intégrons (1.30) par parties pour représenter \hat{P} sous la forme (avec $\hbar = m = 1$) :

$$\hat{P} = i \int [\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x)] \hat{\Psi}(x) dx \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Application à l'état à N particules

On fait agir \hat{P} de (A.2) sur l'état $|\{\theta_a\}\rangle$ de (A.1) :

$$\hat{P} |\{\theta_a\}\rangle = \frac{i}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) [\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x)] \quad (\text{A.3})$$

$$\times \sum_{k=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_k)] \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad (\text{A.4})$$

En utilisant les règles de commutation (1.17) il vient que

$$\hat{P} |\{\theta_a\}\rangle = \frac{i}{\sqrt{N!}} \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \quad (\text{A.5})$$

$$\times \sum_{k=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots [\hat{\partial}_{z_k} \hat{\Psi}^\dagger(z_k)] \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle. \quad (\text{A.6})$$

Nous intégrons maintenant par parties par rapport à z_k pour obtenir

$$\hat{P} |\{\theta_a\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \left\{ -i \sum_{k=1}^N \hat{\partial}_{z_k} \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \right\} \times \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Action de \hat{H} sur $|\{\theta_a\}\rangle$

A.2.1 Réécriture de l'hamiltonien

L'hamiltonien (A.39) se réécrit avec $\hbar = 2m = 1$ et $c = g/2$:

$$\hat{H} = \int dx \left[-\left[\hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) + c \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \right]. \quad (\text{A.8})$$

A.2.2 Application à l'état à N particules

On fait agir \hat{H} définie en (A.8) sur l'état $|\{\theta_a\}\rangle$ de (A.1) :

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \left[\hat{\partial}_x^2 \hat{\Psi}^\dagger(x) \right] \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \hat{H} |\{\theta_a\}\rangle &= \\ &+ \frac{c}{\sqrt{N!}} \int dx \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Les règles de commutations (1.17) impliquent que

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] &= \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\delta}(x - z_i) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \\ \left[\hat{\partial}_x \hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(z) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

En utilisant ces dernières règles de commutations et la définition d'état de Fock (1.16), la première partie de l'application de l'hamiltonien sur l'état $|\{\theta_a\}\rangle$, (A.10) de simplifie en

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \sum_{i=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \left[\hat{\partial}_{z_i}^2 \hat{\Psi}^\dagger(z_i) \right] \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.12})$$

Et en faisant deux intégrations par parties selon la variable z_i , cette première partie devient

$$-\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i}^2 \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |0\rangle \quad (\text{A.13})$$

Pour la seconde partie, en remarquant que les règles de commutations (1.17) impliquent que

$$[\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z)] = 2 \hat{\Psi}(x) \hat{\delta}(x - z) \quad (\text{A.14})$$

et en remplaçant $\hat{\Psi}(x)$ par $\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x)$ dans (A.11) il vient que

$$[\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] = 2 \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}(x) \hat{\delta}(x - z_i) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \quad (\text{A.15})$$

et en injectant (A.11), (A.15) devient

$$[\hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N)] = \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\delta}(x - z_i) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \hat{\Psi}(x) \\ + 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \cdots \hat{\delta}(x - z_i) \hat{\Psi}^\dagger(z_{i+1}) \cdots \hat{\delta}(x - z_j) \cdots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

En utilisant la règle de commutation (A.16) et la définition de l'état de Fock (1.16), la seconde partie de (A.10) devient

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \ 2c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad (\text{A.17})$$

en utilisant (A.13) et (A.17), (A.13) devient

$$\hat{\mathbf{H}} |\{\theta_a\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \left[\hat{\mathcal{H}}_N \varphi_{\{\theta_a\}}(\{x_a\}) \right] \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(z_N) |\emptyset\rangle \quad (\text{A.18})$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}}_N = - \sum_{i=1}^N \hat{\partial}_{z_i}^2 + 2c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\delta}(z_i - z_j) \quad (\text{A.19})$$

