



Les limites du refroidissement laser dans les mélasses optiques à une dimension

Yvan Castin

► To cite this version:

Yvan Castin. Les limites du refroidissement laser dans les mélasses optiques à une dimension. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1992. Français. NNT: . tel-00011882

HAL Id: tel-00011882

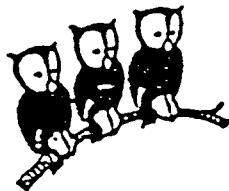
<https://theses.hal.science/tel-00011882>

Submitted on 9 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI
Spécialité : Physique Quantique

présentée par
Yvan CASTIN

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

**LES LIMITES DU REFROIDISSEMENT LASER
DANS LES MÉLASSES OPTIQUES À UNE DIMENSION**

Soutenue le 28 février 1992 devant le Jury :

M. C. COHEN-TANNOUDJI Président
Mme C. BRÉCHIGNAC
Mme C. LHUILLIER
M. J. DALIBARD
M. G. NIENHUIS
M. W.D. PHILLIPS

**DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE**

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI
Spécialité : Physique Quantique

présentée par
Yvan CASTIN

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

**LES LIMITES DU REFROIDISSEMENT LASER DANS LES MÉLASSES
OPTIQUES À UNE DIMENSION**

Soutenue le 28 février 1992 devant le Jury :

M. **C. COHEN-TANNOUDJI** Président
Mme **C. BRÉCHIGNAC**
Mme **C. LHUILLIER**
M. **J. DALIBARD**
M. **G. NIENHUIS**
M. **W.D. PHILLIPS**

Remerciements

Le travail qui fait l'objet de ce mémoire a été mené au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure, à partir de septembre 1988. Je remercie son Directeur, Jacques Dupont-Roc, de m'y avoir accueilli avec bienveillance.

J'ai eu la chance de travailler dans l'équipe de Claude Cohen-Tannoudji. J'admire en lui son approche très intuitive et très profonde de la physique, qui lui permet de décomposer rapidement un problème complexe en quelques arguments "simples" et imagés ; j'ai beaucoup appris au cours des nombreuses discussions qu'il a eu la gentillesse de m'accorder. Je trouve également son dynamisme, son enthousiasme et son ouverture d'esprit très communicatifs ; ce serait pour moi un grand plaisir de faire partie de son équipe.

Jean Dalibard a assuré la direction de cette thèse avec envergure, sans ménager son temps, ni sa peine. J'ai bénéficié de son esprit très imaginatif et très rapide, qui lui permet d'arriver directement au noeud des problèmes. Ses questions, ses remarques et ses conseils ont toujours été d'une grande pertinence, et m'ont fait souvent prendre conscience brutalement de voies d'approche et de possibilités nouvelles. Sa créativité et son sens de l'humour ont fait le bonheur de mes premières années de recherche.

Une partie (cf. chap. III) de ce travail a bénéficié d'une collaboration avec Klaus Mølmer de l'Université d'Aarhus. Cette collaboration a été très stimulante et illustre bien pour moi un des attraits de la recherche, qui est de partager sa passion avec autrui. Je souhaite qu'elle ne soit que le début d'un lien profond entre Aarhus et Paris.

Ma gratitude va également à tous les autres membres de l'équipe, dont le bon sens et la détermination sont pour moi un modèle. Je suis particulièrement reconnaissant à Christophe Salomon, Delphine Grison et Brahim Lounis d'avoir rendu moins désincarnées les considérations abstraites de mon chapitre IV ; ils ont été aidés en cela par Gilbert Grynberg, Philippe Verkerk et Jean-Yves Courtois, avec qui les discussions sont toujours passionnantes.

J'ai eu la chance, pendant ces trois années, de profiter de nombreux interlocuteurs, comme Hartmut Wallis (pour mes premiers calculs entièrement quantiques), André Clairon (à propos de mesures sur le piège magnéto-optique), et Bill Phillips, auquel je suis particulièrement reconnaissant d'avoir accepté d'être un de mes rapporteurs. Merci également à Catherine Bréchignac, Claire Lhuillier et Gérard Nienhuis de l'intérêt qu'ils ont bien voulu témoigner à mes travaux en acceptant de faire partie du jury.

Enfin, je remercie Michèle Sanchez qui a assuré la frappe de ce mémoire avec efficacité, rigueur et gentillesse. Ma reconnaissance va également à Melle Gazan et à M. Manceau pour la reproduction et la reliure de ce mémoire.

RÉSUMÉ

Les techniques de refroidissement d'atomes par laser dans les mélasses optiques conduisent à des "températures" minimales de quelques microkelvins. Dans ce régime ultra-froid, le mouvement des atomes n'est plus descriptible en termes d'une force de friction visqueuse et d'une diffusion en impulsions. Pour obtenir les limites du refroidissement, nous avons donc développé de nouvelles approches, dont la plus fructueuse traite quantiquement le mouvement atomique dans le potentiel créé par la lumière. Les mélasses sont étudiées pour les deux configurations laser modèles à une dimension, $\sigma_+ - \sigma_-$ et $Ox - Oy$. Les atomes ont alors une impulsions quadratique moyenne minimale d'environ $6\hbar k$, où $\hbar k$ est la quantité de mouvement d'un photon laser.

ABSTRACT

Laser cooling can lead to extremely low kinetic "temperatures", in the microkelvin range. In this coldest regime, one can no longer describe the atomic motion in terms of a damping force linear with velocity and a momentum diffusion coefficient. New approaches are described in the present work. The most fruitful one is based on a quantum treatment of atomic motion in the optical wells created by the laser light. In the case of $1D$ molasses, the two laser configurations $\sigma_+ - \sigma_-$ and $Ox - Oy$ are investigated. The minimum r.m.s. atomic momenta are found to be of the order of 6 single-photon momenta.

MOTS CLEFS

Quantification du mouvement — Potentiels périodiques — Approximation séculaire — Pompage optique — Gradients de polarisation — Forces radiatives — Diffusion en impulsion — Equation de Fokker-Planck

**TABLE
DES MATIÈRES**

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE I - VUE D'ENSEMBLE SUR LES NOUVEAUX MÉCANISMES	
Introduction	13
1 - Refroidissement par effet Sisyphe à basse intensité	15
a) Description du modèle	15
b) Dynamique atomique dans l'état fondamental	17
c) Dynamique atomique externe. Mécanisme de refroidissement pour une énergie initiale au-dessus des puits de potentiel	21
d) L'approche semi-classique traditionnelle. Rappel de ses résultats et démonstration de ses insuffisances	27
e) Comment aller plus loin et obtenir l'optimum du refroidissement Sisyphe ?	36
2 - Configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, dite en "tire-bouchon"	45
a) Description de la configuration étudiée	45
b) Dynamique interne pour un atome de vitesse v	46
c) Force moyenne à nouveaux mécanismes subie par un atome de vitesse v	49
d) Etude simple de la diffusion en impulsion	53
e) Problèmes liés à l'établissement d'un traitement semi-classique du refroidissement	60
Appendice A _I - Modèle probabiliste de la diffusion en impulsion	73

CHAPITRE II - LES ÉQUATIONS QUANTIQUES FONDAMENTALES.

APPLICATION AU CAS D'UN ATOME DE VITESSE IMPOSÉE

Introduction	81
0 - Démarche générale suivie dans ce chapitre II	83
a) Equations d'évolution de la matrice densité atomique	83
b) Adapter les équations d'évolution à l'étude du refroidissement	84
c) L'approche semi-classique traditionnelle	87
1 - Obtention des équations de Bloch optiques généralisées	93
a) Hamiltonien du système atome+champ quantique	93
b) Relaxation de l'atome en l'absence de champ laser	99
c) Evolution de la matrice densité atomique en présence de champ laser	109
2 - Approximation semi-classique de l'équation pilote. Force et diffusion en impulsion pour un atome de vitesse imposée. Cas limite d'un atome très lourd	121
a) Passage en représentation de Wigner et forme semi-classique	121
b) Evolution de l'impulsion pour un atome de vitesse v_0	124
c) Développement asymptotique de l'équation pilote pour un atome très lourd	133
Appendice A _{II} - Transformation de Mollow et passage dans le référentiel tournant	151
Appendice B _{II} - Régimes forcés à la vitesse v_0	155

CHAPITRE III - REFROIDISSEMENT DANS LA CONFIGURATION LASER $\sigma_+ - \sigma_-$ POUR DES TRANSITIONS ATOMIQUES $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$

Introduction	165
1 - Propriétés de symétrie pour la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$: la méthode des familles	167
a) Evolution temporelle en l'absence d'émission spontanée	167
b) Prise en compte de l'émission spontanée	169
c) Interprétation géométrique de la méthode des familles et forme des équations quantiques	171
2 - Résolution numérique des équations quantiques pour la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$	177
a) La méthode de calcul	177
b) Les résultats pour le refroidissement sur raies larges très peu saturées	181
c) Recherche numérique de l'optimum absolu du refroidissement sur une raie large	187
3 - Analyse semi-classique du refroidissement. Application à la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$	195
a) Equations générales pour la force moyenne $F(v)$ et le coefficient de diffusion $D(v)$	195
b) Contributions à $F(v)$ et $D(v)$ des nouveaux mécanismes de refroidissement	202
c) Equation de Fokker-Planck sur la distribution en impulsion	213
4 - Etude entièrement quantique du refroidissement pour une transition $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$ arbitraire	235
a) Résolution numérique des équations quantiques complètes	235
b) Réduction des équations quantiques au voisinage de l'optimum du refroidissement	239
Appendice AIII - Equivalence des représentations de Wigner et des familles pour le calcul de $F(v)$ et $D(v)$	253
Appendice BIII - Force et diffusion dues aux nouveaux mécanismes pour $ \delta \gg \Gamma$ sur $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$	255

CHAPITRE IV - CONFIGURATION LASER À POLARISATIONS LINÉAIRES ORTHOGONALES

Introduction	265
1 - Forme générale du traitement quantique	269
2 - Approche semi-classique sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$	273
a) Obtenir une équation sur $\Pi(z, p, t)$	273
b) Etude du régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$	282
3 - L'approche quantique adaptée au régime oscillant	293
a) Introduction	293
b) Etude de la partie réactive sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$	296
c) Présentation de l'approximation séculaire sur $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$	307
d) Analyse des différents taux de transition pour $j_g = 1/2$	314
e) Loi de variation des populations des premières bandes "liées"	323
f) Etude numérique des propriétés de l'état stationnaire pour $j_g = 1/2$	327
g) Approximation séculaire sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$	339
Appendice A _{IV} - The Limits of Sisyphus cooling	359
Appendice B _{IV} - Groupe de symétrie pour la configuration $Ox - Oy$ et applications	379
Appendice C _{IV} - Quelques propriétés de $S(\varepsilon)$	385
Appendice D _{IV} - Quantization of Atomic Motion in Optical Molasses	387
Appendice E _{IV} - Estimation des taux $\gamma_{- \rightarrow +}$ par WKB	393
Appendice F _{IV} - Discrétisation et résolution numérique des équations quantiques séculaires	401
CONCLUSION GÉNÉRALE	409
RÉFÉRENCES	415

INTRODUCTION GÉNÉRALE

En 1988, les premières mesures précises [1-6] de la vitesse des atomes dans les “mélasses optiques” ont montré que les techniques de refroidissement d’atomes libres par laser permettaient d’atteindre des températures beaucoup plus basses que celles qui étaient prévues [7-12]. Les “mélasses” les plus froides réalisées actuellement correspondent à des températures de l’ordre du microkelvin [13] ; ce sont les températures cinétiques les plus basses qui aient jamais été observées, ce qui offre la perspective d’applications prometteuses, comme la réalisation d’horloges atomiques plus précises [105,106]. L’objectif du présent travail est d’essayer de rendre compte quantitativement de tels résultats expérimentaux, au moyen de modèles simples à une dimension. Dans cette introduction, nous rappelons d’abord, en un bref historique, les différentes étapes qui ont marqué le développement du refroidissement d’atomes par laser [109]. Nous soulignons ensuite les insuffisances des traitements théoriques qui existaient au commencement de notre travail de recherche, et nous donnons un aperçu des différentes voies que nous avons explorées pour tenter de remédier à ces insuffisances. Nous présentons enfin l’organisation générale de ce mémoire.

Un bref historique

Dans la proposition initiale de Hänsch et Schawlow [7], et dans les modèles qui ont suivi et prévalu jusqu’en 1988, le mécanisme physique mis en jeu dans le refroidissement radiatif à faible intensité laser est simplement l’effet Doppler. Les atomes sont considérés comme des systèmes à deux niveaux, sans structure dans l’état fondamental. Quand la pulsation laser ω_L est choisie inférieure à la pulsation de résonance atomique ω_A :

$$\delta = \omega_L - \omega_A < 0 \quad (1)$$

l’atome absorbe préférentiellement des photons laser d’impulsion $\hbar\mathbf{k}$ opposée à sa vitesse, de façon que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ soit négatif. En effet, ces photons ont pour l’atome une fréquence apparente, décalée par effet Doppler, plus proche de résonance que celle des photons d’impulsion $-\hbar\mathbf{k}$ (voir fig. 1).

Lorsque la masse M de l’atome est assez élevée ou, ce qui revient au même, lorsque

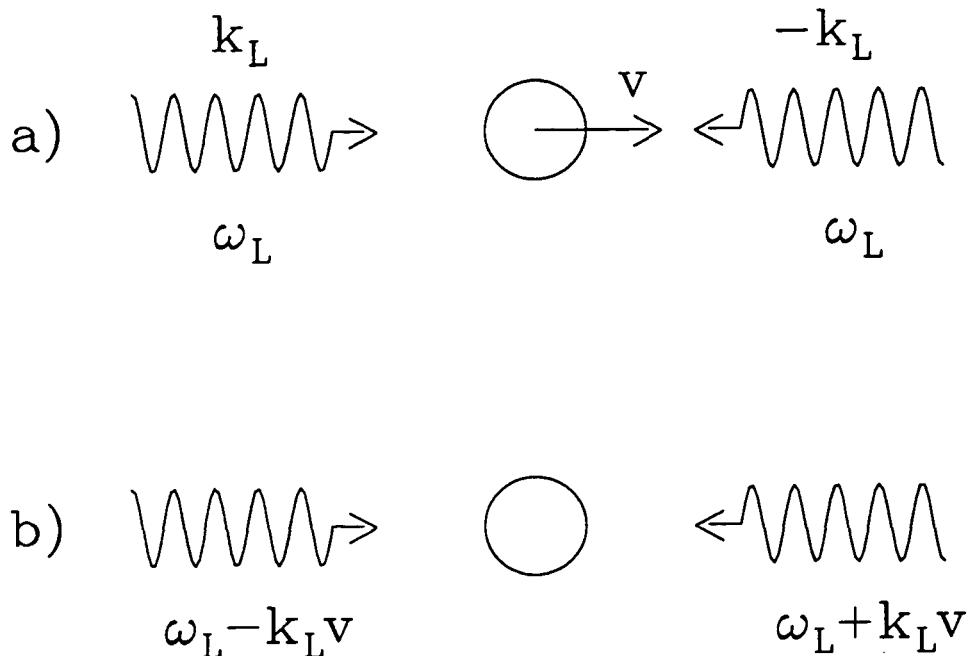


Fig. 1 : Dans le cadre du refroidissement Doppler, les ondes laser dans le référentiel du laboratoire (a) et telles qu'elles sont vues dans son référentiel propre par un atome de vitesse v (b).

la largeur naturelle Γ de l'état excité est assez grande :

$$M\Gamma \gg \hbar k^2 \quad (2)$$

hypothèse que nous supposons réalisée dans toute la suite [14], on montre que la description du refroidissement Doppler présente beaucoup d'analogies avec celle du mouvement brownien. L'effet de la lumière sur le mouvement des atomes apparaît en effet comme équivalent à celui d'une force aléatoire, dont la moyenne est une force de friction linéaire en vitesse, de la forme $F = -\alpha v$, et dont les fluctuations, dues au caractère aléatoire des processus d'émission spontanée, sont responsables d'une diffusion en impulsions des atomes caractérisée par le coefficient de diffusion D . Les équations sur lesquelles repose une telle description sont obtenues par élimination adiabatique de l'état atomique interne au profit des variables dites externes qui décrivent le mouvement du centre de masse de l'atome. Ceci est légitime si le temps de relaxation T_{int} des variables internes est court devant le temps de relaxation T_{ext} de la vitesse atomique. Rappelons les ordres de grandeur de ces différentes échelles de temps dans ce modèle d'atomes à deux niveaux :

$$T_{\text{int}} = \frac{1}{\Gamma} \quad (3a)$$

$$T_{\text{ext}} = \frac{M}{\alpha} \sim \frac{M}{\hbar k^2 s} \quad (3b)$$

Dans (3a), T_{int} n'est autre que la durée de vie radiative de l'état excité. Dans (3b), nous avons introduit s , paramètre de saturation de la transition atomique par le laser. Comme nous sommes à faible intensité lumineuse ($s \ll 1$), on constate que la condition d'élimination de l'état interne $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$ est en fait toujours remplie, dès que l'inégalité (2) est vérifiée. La température optimale prédicta par ce modèle de refroidissement Doppler vaut alors :

$$k_B (T_D)_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \hbar \Gamma \quad (4)$$

Elle est atteinte pour un désaccord entre la pulsation laser et la pulsation atomique $\delta = \omega_L - \omega_A = -\Gamma/2$.

Dans la quasi-totalité des expériences réalisées, les hypothèses (1) et (2) sont remplies. Aussi la surprise fut-elle grande quand les premières mesures précises mirent en évidence des températures plus basses de plusieurs ordres de grandeur que les prédictions (4) ! Qui plus est, on trouva que les mélasses optiques les plus froides étaient obtenues à grand désaccord ($|\delta| \gg \Gamma$) au lieu de $\delta = -\Gamma/2$.

Les premières explications des températures observées ne tardèrent pas [2,3,15,16]. Elles reposent sur la structure en sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental, et sur la dépendance spatiale de la polarisation du champ électrique laser. La dynamique atomique interne est alors beaucoup plus riche que dans le modèle de l'atome à deux niveaux : les divers sous-niveaux subissent des déplacements lumineux différents, d'ordre de grandeur $\hbar \delta s$, et sont couplés entre eux par des processus de pompage optique, avec des taux typiques de l'ordre de Γs . Deux mécanismes distincts de refroidissement ont été identifiés dans des modèles à une dimension [16]. Le premier intervient par exemple en polarisations linéaires croisées. Dans cette configuration laser, les déplacements lumineux dépendent de la position ; ils ont, sur le mouvement des atomes, l'effet de potentiels périodiques, fonctions de l'état atomique interne, et dont la modulation spatiale est de l'ordre de grandeur de $\hbar \delta s$. Le refroidissement repose alors sur l'effet "Sisyphe", analogue à celui déjà étudié pour un atome à deux niveaux [72] ou à plusieurs sous-niveaux [108] dans une onde stationnaire très intense : les corrélations existant entre les modulations spatiales des déplacements lumineux et les modulations spatiales des taux de pompage optique sont telles que l'atome en mouvement monte plus de collines qu'il n'en descend dans son diagramme d'énergie.

Le second mécanisme de refroidissement se manifeste en polarisations circulaires σ_+ et σ_- , configuration laser dans laquelle ni les déplacements lumineux ni les taux de pompage ne dépendent de la position. Ce mécanisme repose simplement sur un déséquilibre entre les pressions de radiation de chaque onde ; ce déséquilibre, nul pour un atome au repos, atteint sa valeur maximale à des vitesses atomiques beaucoup plus faibles que dans le cas du refroidissement Doppler ($kv \sim \delta s$ au lieu de $kv \sim \delta$).

Pour l'étude de ces deux mécanismes de refroidissement, l'approche de type "mouvement brownien" précédemment évoquée peut être utilisée lorsque $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$ [17]. Sous cette condition, on peut procéder à nouveau à une élimination adiabatique des variables internes au profit des variables externes décrivant le mouvement du centre de masse. Cependant, des différences notables apparaissent par rapport à la théorie du refroidissement Doppler d'atomes à deux niveaux. En effet, le temps de relaxation des variables internes T_{int} correspond maintenant à un temps de pompage optique :

$$T_{\text{int}} \sim \frac{1}{\Gamma s} \quad (5)$$

et peut être spectaculairement allongé par rapport à celui donné en (3a), lorsqu'on est à faible saturation de la transition par le laser. Le "retard" avec lequel les variables internes suivent les variations du champ laser vu par l'atome en mouvement est alors beaucoup plus important. Ceci entraîne une augmentation de la force de friction aux faibles vitesses et rend les nouveaux mécanismes de refroidissement beaucoup plus efficaces que le refroidissement Doppler. Il s'ensuit un raccourcissement du temps de relaxation associé aux variables externes, qui devient indépendant de l'intensité lumineuse et qui s'écrit :

$$T_{\text{ext}} \sim \frac{M}{\hbar k^2} \quad (6)$$

à un facteur fonction de $\frac{\delta}{\Gamma}$ près. Les températures prédites pour les deux nouveaux mécanismes de refroidissement envisagés à une dimension correspondent finalement à une énergie cinétique moyenne de l'ordre de grandeur des déplacements lumineux :

$$k_B T \sim -\hbar \delta s \quad (7)$$

lorsqu'on est à grand désaccord ($|\delta| \gg \Gamma$). Elles sont donc proportionnelles à l'intensité lumineuse des ondes laser, ce qui est qualitativement conforme aux mesures expérimentales pour des intensités pas trop faibles et constitue en soi un beau succès de ce modèle.

Les insuffisances des traitements antérieurs

En dépit de cette réussite, les premières théories simples des nouveaux mécanismes de refroidissement précédemment évoquées ne permettent pas de déterminer la température la plus basse accessible. La relation (7) donne certes l'impression que l'on peut obtenir des mélasses optiques aussi froides que l'on veut en diminuant suffisamment l'intensité lumineuse. N'oublions pas cependant que cette relation a été obtenue sous l'hypothèse $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$. Or, le temps de relaxation des variables internes (5) devient très long lorsque l'intensité diminue, alors que le temps de relaxation des variables externes (6) ne varie pas ; ces dépendances en le paramètre de saturation s des diverses échelles de temps, très différentes de celles rencontrées dans le refroidissement Doppler, rendent l'hypothèse $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$ irréaliste et donc le résultat (7) incorrect à très basse intensité.

Les résultats expérimentaux [4,13] confirment l'analyse sommaire que nous venons d'effectuer : ils mettent en évidence à très faible intensité un comportement de la température réellement différent de (7). On observe ainsi que la température diminue jusqu'à un optimum puis se met à augmenter, lorsqu'on abaisse l'intensité. Les températures optimales obtenues correspondent toutes à des énergies cinétiques de l'ordre de quelques énergies de recul $\frac{(\hbar k)^2}{2M}$, pour des atomes aussi différents que le césium, le sodium ou le rubidium.

Le point très positif à retenir de ces considérations est que la recherche de la température optimale pose un nouveau problème théorique fort intéressant, celui de la description du refroidissement par laser lorsque les variables atomiques internes varient plus lentement que la vitesse des atomes !

Mentionnons enfin une autre insuffisance des descriptions théoriques existantes : elles prêtent peu d'attention à la distribution spatiale des atomes dans les mélasses optiques. Or, le mécanisme de refroidissement par effet Sisyphe conduit nécessairement à une accumulation des atomes au voisinage des minima des déplacements lumineux, puisque les températures prévues (7) sont de l'ordre de grandeur de ces déplacements lumineux. La localisation des atomes à l'échelle de la longueur d'onde optique qui en résulte semble d'ailleurs avoir été mise en évidence expérimentalement [18,86]. Aussi nous a-t-il semblé important d'étudier plus en détail ces caractéristiques spatiales de l'effet Sisyphe.

Les diverses voies que nous avons explorées

Un premier moyen d'étude, précis et général, du refroidissement des atomes par laser consiste à décrire quantiquement tous les degrés de liberté atomiques, aussi bien internes qu'externes, et à résoudre numériquement les équations d'évolution qui en résultent. L'avantage de ce traitement numérique brutal est d'identifier le régime le plus intéressant pour le refroidissement. Nous avons pu ainsi prévoir que les distributions en impulsion les plus froides sont obtenues à faible saturation de la transition par le laser. Nous avons également montré qu'à valeur fixée des déplacements lumineux ($\delta s = \text{cte}$), les températures sont les plus basses à $|\delta| \gg \Gamma$, ce qui ne peut être déduit de (7).

L'identification ainsi faite du régime optimal pour le refroidissement permet alors d'effectuer d'importantes simplifications sur les équations d'évolution entièrement quantiques de la matrice densité atomique. Tout d'abord, la faiblesse du paramètre de saturation permet une élimination adiabatique de l'état excité, ce qui conduit à des équations d'évolution portant seulement sur la matrice densité atomique dans l'état fondamental. La structure de ces équations fait apparaître deux types de termes : d'une part, des termes d'évolution hamiltonienne, le hamiltonien \mathcal{H} correspondant étant la somme de l'énergie cinétique des atomes $\frac{P^2}{2M}$ et d'un potentiel de couplage atome-laser, que nous appellerons "réactif" car à l'origine des déplacements lumineux $\hbar\delta s$; d'autre part, des termes de relaxation, que nous appellerons "dissipatifs" et qui décrivent les transferts par pompage optique d'un sous-niveau à l'autre avec des taux Γ_s . Une autre simplification importante des équations intervient à la limite $|\delta| \gg \Gamma$ suggérée par l'approche numérique. Les termes hamiltoniens sont alors prépondérants devant les termes dissipatifs, et ces derniers peuvent être traités perturbativement.

Nous sommes parvenus ainsi à un nouveau traitement simplifié mais entièrement quantique du refroidissement d'atomes neutres par laser [19]. L'idée est de décrire d'abord de façon exacte l'influence de la partie réactive du rayonnement à la fois sur l'état interne et le mouvement du centre de masse des atomes. Pour cela, on diagonalise le hamiltonien \mathcal{H} contenant l'énergie cinétique et les déplacements lumineux, ce qui revient à introduire la base de ses états propres $|E_\mu\rangle$. Il est ensuite facile, dans cette base, de prendre en compte de façon perturbative la partie dissipative du couplage atome-rayonnement, en évaluant les taux des transitions qu'elle permet entre les différents états $|E_\mu\rangle$ et $|E_{\mu'}\rangle$. L'évolution des populations Π_μ des niveaux $|E_\mu\rangle$ est alors régie par de simples équations de taux, que l'on résout dans l'état stationnaire. Cette démarche fournit une nouvelle image du refroidissement, analogue dans le cas de l'effet Sisyphe à celle que l'on donne pour les ions

piégés [8,20-24], et qui a l'avantage d'en contenir l'optimum.

Nous effectuons également une étude du mouvement atomique dans la limite "semi-classique", c'est-à-dire quand la longueur de cohérence spatiale des atomes $\Delta\xi \sim \hbar/\Delta p$ est petite devant la longueur d'onde optique λ :

$$k\Delta\xi \sim \frac{\hbar k}{\Delta p} \ll 1 \quad (8)$$

Sous cette condition, qui est en fait assez bien satisfaite même pour les situations de mélasses les plus froides, on peut faire un développement jusqu'au second ordre en puissances de $\hbar k \partial_p$, des équations donnant l'évolution entièrement quantique de la matrice densité atomique en point de vue de Wigner $W(z, p, t)$. On obtient alors un ensemble d'équations aux dérivées partielles couplées entre les différents $W_{ij}(z, p, t)$, éléments de matrice de $W(z, p, t)$ entre deux états internes i et j . On est ensuite confronté au problème de l'élimination de l'état interne : il s'agit de réduire cet ensemble d'équations à une seule, portant sur $f(z, p, t) = Tr_{int}[W(z, p, t)]$, quasi-probabilité de trouver l'atome au point z avec l'impulsion p indépendamment de son état interne. Dans le cas où $T_{int} \ll T_{ext}$, comme nous l'avons déjà mentionné, il est bien connu que l'on peut obtenir une équation de Fokker-Planck pour $f(z, p)$. C'est ce que nous appelons "approche semi-classique traditionnelle". Notre apport à ce problème a été de montrer que l'on peut également obtenir une équation réduite en dehors de l'hypothèse $T_{int} \ll T_{ext}$; le prix à payer dans ce cas est l'abandon de la simplicité de l'équation de Fokker-Planck, avec ou bien l'introduction de nouvelles variables lentes autres que z et p , ou bien l'apparition dans l'équation réduite de termes non locaux en z et p .

Organisation générale de notre mémoire

Au chapitre I est effectuée une description essentiellement qualitative des nouveaux mécanismes de refroidissement pour les deux configurations laser envisagées ici : les configurations à polarisations linéaires $Ox - Oy$ au §1 (refroidissement par effet Sisyphe) et à polarisations circulaires $\sigma_+ - \sigma_-$ au §2. L'approche semi-classique traditionnelle, en termes de coefficient de friction α et de coefficient de diffusion en impulsion D , est rappelée. Ses conditions de validité et ses prédictions sont énoncées, ses limites et ses insuffisances sont soulignées. On trouvera également, dans les §1e et §2e, une présentation rapide de l'ensemble de notre travail, avec l'exposé des méthodes nouvelles employées et des résultats obtenus pour chacune des deux configurations laser.

Le chapitre II est consacré aux équations quantiques fondamentales et à quelques

résultats généraux que l'on peut déduire de leur limite semi-classique. Nous rappelons au §1 la forme des équations de Bloch optiques sur la matrice densité atomique lorsque le mouvement du centre de masse est quantifié, et nous précisons leur condition de validité. Est effectuée ensuite la réduction des équations quantiques dans l'état fondamental pour une configuration laser arbitraire, ce qui est une approximation légitime lorsqu'on se limite à de faibles saturations ($s \ll 1$) et que l'on considère seulement des atomes de faible vitesse ($kv \ll \Gamma$). Au §2, nous présentons la forme semi-classique des équations quantiques. Une exploitation simple en est l'étude des changements d'impulsion d'un atome de vitesse v supposée pratiquement constante mais arbitraire, ce qui conduit à des expressions explicites pour la force moyenne $F(z, v)$ et le coefficient de diffusion en impulsion $D(z, v)$. Finalement, nous formulons l'approche semi-classique traditionnelle comme un développement au second ordre de l'état stationnaire des équations quantiques en fonction d'un petit paramètre ϵ que nous précisons. Une telle formulation ramène le calcul de la distribution stationnaire $f(z, p)$ à l'ordre 0 en ϵ à une simple quadrature, avec prise en compte de la dépendance spatiale des coefficients de friction $\alpha(z)$ et de diffusion $D(z)$.

Les deux derniers chapitres exploitent les propriétés de symétrie de deux configurations laser particulières. Il nous a semblé en effet plus intéressant d'illustrer les nouvelles approches théoriques explorées dans ce travail sur des problèmes concrets plutôt que d'essayer de présenter un traitement général, nécessairement plus abstrait.

La configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$ est analysée dans le chapitre III. Le §1 précise la propriété particulière de cette configuration (la redistribution cohérente de photons est limitée entre les deux ondes) et l'exploite sous la forme d'une transformation unitaire. La simplification des équations quantiques qui en résulte permet leur résolution numérique au §2, sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$; la part est faite entre les contributions du refroidissement Doppler et à nouveaux mécanismes, et l'on trouve que l'optimum absolu sur l'énergie cinétique moyenne est atteint à faible saturation et lorsque $|\delta| \gg \Gamma$. Nous cherchons à retrouver les résultats quantiques au §3 par une approche semi-classique : après étude des propriétés de la force moyenne $F(v)$ et de la diffusion $D(v)$, ces quantités sont intégrées comme coefficients d'une équation de Fokker-Planck, dont la forme précise, rendue non évidente par la dépendance en vitesse de D , est soigneusement établie. L'examen des conditions de validité de l'équation de Fokker-Planck montre son incapacité à prédire l'optimum du refroidissement pour des transitions à moment cinétique élevé, car celui-ci se trouve alors dans un régime de marche au hasard en p à grands pas. Nous mettons donc en œuvre, dans le §4, une méthode de réduction des équations quantiques dans la limite

$|\delta| \gg \Gamma$, valable pour un moment cinétique arbitraire, et qui traite perturbativement la partie dissipative du couplage atome-rayonnement.

Le dernier chapitre IV étudie la configuration laser $Ox - Oy$, qui donne naissance à du refroidissement par effet Sisyphe : les déplacements lumineux sont modulés spatialement, avec une période $\frac{\lambda}{2}$. Les atomes sont susceptibles d'osciller dans les puits de potentiel correspondants, avec une pulsation Ω_{osc} , avant de changer de sous-niveau interne au bout d'un temps typique de pompage optique τ_p . On trouve au §1, par une résolution numérique des équations quantiques, que les distributions en impulsion les plus froides sont obtenues dans le régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$. On peut certes étudier ce régime, qui est à l'extrême opposé du domaine habituel $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$, en décrivant classiquement le mouvement des atomes ; nous présentons ainsi, au §2 et sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, une méthode originale de réduction des équations semi-classiques, lorsque $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$, ce qui conduit à des résultats analytiques simples. Cependant, la description quantique de ce nouveau régime, au §3, nous semble particulièrement fascinante, car elle suggère que la quantification du mouvement des atomes serait observable dans les mélasses optiques. L'idée est d'introduire les états propres du hamiltonien \mathcal{H} qui décrit le mouvement des atomes dans les puits de potentiel lumineux. On trouve que le spectre de \mathcal{H} est constitué d'une alternance de bandes d'énergie permises et interdites, ce qui est typique des potentiels périodiques. Les bandes d'énergie fondamentales sont bien résolues lorsque $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$, puisque leur séparation en énergie $\hbar\Omega_{\text{osc}}$ est beaucoup plus grande que leur "largeur" radiative $\frac{\hbar}{\tau_p}$. Dans ce cas limite, dit séculaire, l'évolution des populations des divers niveaux quantiques peut être décrite seulement par des équations de taux. Nous donnons ainsi une nouvelle image de l'effet Sisyphe, qui est l'accumulation de l'essentiel des atomes dans les bandes d'énergie les plus profondes. Nous en déduisons avec précision les distributions en position et en impulsion des atomes sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$. Afin de prouver la généralité de cette méthode, nous l'appliquons aussi à la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$.

Concluons par quelques considérations d'ordre pratique. Afin de faciliter et d'alléger la lecture du présent mémoire, nous avons reporté en appendice l'exposé de nombreux points techniques et de quelques-unes de nos publications. Par ailleurs, les chapitres III et IV peuvent être lus de façon indépendante, et ils n'utilisent chacun que les résultats essentiels du chapitre II, auxquels il est fait référence de façon précise aux endroits nécessaires.

CHAPITRE I

VUE D'ENSEMBLE SUR LES NOUVEAUX MÉCANISMES

INTRODUCTION DU CHAPITRE I

Cette première partie est consacrée à une présentation générale des nouveaux mécanismes de refroidissement dans des mélasses optiques à une dimension, formées par deux ondes laser se propageant en sens contraire et de polarisations orthogonales.

Pour cela, il convient tout d'abord de rappeler les résultats essentiels qui étaient établis au moment où nous avons commencé notre travail [15,16]. Deux mécanismes de refroidissement avaient été identifiés. Dans le premier (§1), mis en évidence en polarisations linéaires croisées, la modulation spatiale des déplacements lumineux des sous-niveaux atomiques et la dépendance spatiale des taux de pompage optique entre ces sous-niveaux sont corrélées de façon telle qu'un atome en mouvement est contraint à monter plus de collines de potentiel qu'il n'en descend dans son diagramme d'énergie ; c'est ce que l'on a appelé l'"effet Sisyphe", par allusion à la mythologie grecque ; le second mécanisme de refroidissement (§2), présent en polarisations circulaires $\sigma_+ - \sigma_-$, consiste en un déséquilibre entre les pressions de radiation de chaque onde d'une très grande sensibilité à la vitesse atomique.

Nous décrivons aussi en détail de manière plus quantitative les résultats obtenus dans l'étude de ces configurations par nos prédécesseurs, et nous précisons quelques notions très utiles pour la suite. Nous qualifions ainsi l'approche qu'ils ont utilisée de "semi-classique traditionnelle". Semi-classique, parce qu'elle suppose que la longueur de cohérence spatiale des atomes reste petite devant la longueur d'onde optique λ . Traditionnelle, parce qu'elle élimine l'état atomique interne sous l'hypothèse que la position z et la vitesse v des atomes changent très peu pendant le temps de relaxation T_{int} des variables internes, donc sous la condition "habituelle" $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$ (où T_{ext} est le temps typique d'évolution des variables externes). Cette hypothèse conduit à une description du mouvement atomique en termes d'une équation de Fokker-Planck avec une force de friction linéaire en vitesse. Une telle description permet de rendre compte du comportement des mélasses à faible désaccord en fréquence entre atome et laser ou à relativement grande intensité, mais elle ne fournit pas l'optimum en température. Les raisons de cette insuffisance sont analysées pour les deux mécanismes de refroidissement. Dans le cas de l'effet Sisyphe, nous montrons que l'existence d'un temps externe très court associé à l'oscillation des atomes au fond des trous de potentiel rend la condition $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$ trop contraignante. Dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, les déplacements lumineux ne dépendent pas de la position et le problème précédent disparaît ; c'est alors l'exigence d'une dépendance linéaire en vitesse de la force de

friction qui est trop restrictive.

Nous terminons cette première partie par une description brève, mais complète, des méthodes nouvelles que nous avons dû mettre en œuvre pour obtenir l'optimum du refroidissement. Nous exposons tout d'abord une extension des méthodes semi-classiques à un régime sinon complémentaire de celui de l'approche semi-classique traditionnelle (régime $T_{\text{int}} \gg T_{\text{ext}}$ au §1e), du moins défini par des hypothèses beaucoup moins contraignantes (calcul d'une force de friction $F(v)$ et d'un coefficient de diffusion en impulsions $D(v)$ pour une vitesse atomique arbitraire, au §2e). Nous exposons également des méthodes décrivant quantiquement le mouvement des atomes. Ces méthodes se placent dans la limite "séculaire", qui permet de traiter perturbativement la partie dissipative du couplage atome-rayonnement et qui contient dans tous les cas (§1e et §2e) les distributions en impulsions les plus froides.

1 - REFROIDISSEMENT PAR EFFET SISYPHE A BASSE INTENSITÉ

a) Description du modèle

(i) Configuration laser

Dans la situation la plus simple, qui est celle que nous avons étudiée, le champ laser est obtenu par superposition de deux ondes progressives selon Oz , de même intensité, de vecteurs d'onde opposés $k\mathbf{e}_z$ et $-k\mathbf{e}_z$, et polarisées linéairement selon Ox et Oy respectivement. L'amplitude du champ électrique total en z est donnée, pour un choix de phase approprié, par :

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(z) e^{-i\omega_L t} + \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(z) e^{i\omega_L t} \quad (\text{I1a - 1a})$$

$$\vec{\mathcal{E}}^{(+)}(z) = \mathcal{E}_0 [\mathbf{e}_x e^{ikz} - i\mathbf{e}_y e^{-ikz}] \quad (\text{I1a - 1b})$$

Introduisons la base des polarisations circulaires, σ_+ et σ_- , selon Oz :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y] \\ \mathbf{u}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y] \end{cases} \quad (\text{I1a - 2})$$

L'amplitude du champ de fréquence positive, $\vec{\mathcal{E}}^{(+)}(z)$, se développe ainsi sur cette base :

$$\vec{\mathcal{E}}^{(+)}(z) = \mathcal{E}_+^{(+)}(z)\mathbf{u}_+ + \mathcal{E}_-^{(+)}(z)\mathbf{u}_- \quad (\text{I1a - 3a})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mathcal{E}_+^{(+)}(z) = -\sqrt{2}\mathcal{E}_0 i \sin kz \\ \mathcal{E}_-^{(+)}(z) = \sqrt{2}\mathcal{E}_0 \cos kz \end{cases} \quad (\text{I1a - 3b})$$

Avec le choix de phase précédent, le champ électrique est donc polarisé σ_- en $z = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$, σ_+ en $z = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$, linéairement selon $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)$ en $z = \frac{\lambda}{8}, \frac{5\lambda}{8}, \frac{9\lambda}{8}, \dots$, et elliptiquement pour une position z quelconque (cf. fig. I-1). Notons que l'intensité moyenne totale ne dépend pas de la position, car les deux ondes progressives superposées ont des polarisations orthogonales.

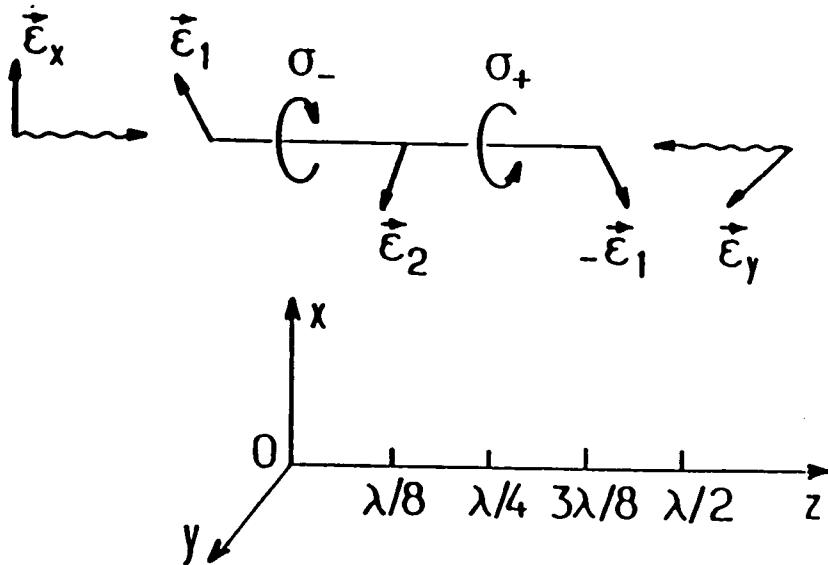


Fig. I-1 : Champ électrique dans la configuration $Ox - Oy$.

(ii) Transition atomique

Nous avons choisi également la transition atomique de type $j \rightarrow j + 1$ la plus simple possible donnant naissance aux nouveaux mécanismes, soit $j = 1/2$. Les atomes, dans ce modèle, possèdent donc deux sous-niveaux dans l'état fondamental ; nous les choisissons de moment cinétique $m\hbar$ bien défini selon Oz , soit $|m = +1/2\rangle$ et $|m = -1/2\rangle$.

Les amplitudes de transition par absorption d'un photon laser dépendent de la polarisation du photon absorbé (σ_+ ou σ_-) et de l'état atomique initial dans l'état fondamental ($m = \pm 1/2$). Cette dépendance est prise en compte par les coefficients de Clebsch-Gordan représentés sur la fig. I-2. Ces amplitudes d'absorption sont de plus proportionnelles à l'amplitude du champ laser $\mathcal{E}_{+/-}^{(+)}(z)$ selon $\sigma_{+/-}$ au point considéré et au moment dipolaire électrique de l'atome. Pour caractériser ce couplage entre l'atome et la lumière laser, nous introduisons la pulsation de Rabi Ω par onde progressive, définie par :

$$\Omega = -\frac{2d\mathcal{E}_0}{\hbar} \quad (\text{IIa - 4})$$

Ainsi, par exemple, l'amplitude de transition de l'état fondamental $|g + 1/2\rangle$ vers l'état excité $|e - 1/2\rangle$ vaut au point z : $-d \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \mathcal{E}_-^{(+)}(z) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Omega \cos kz$.

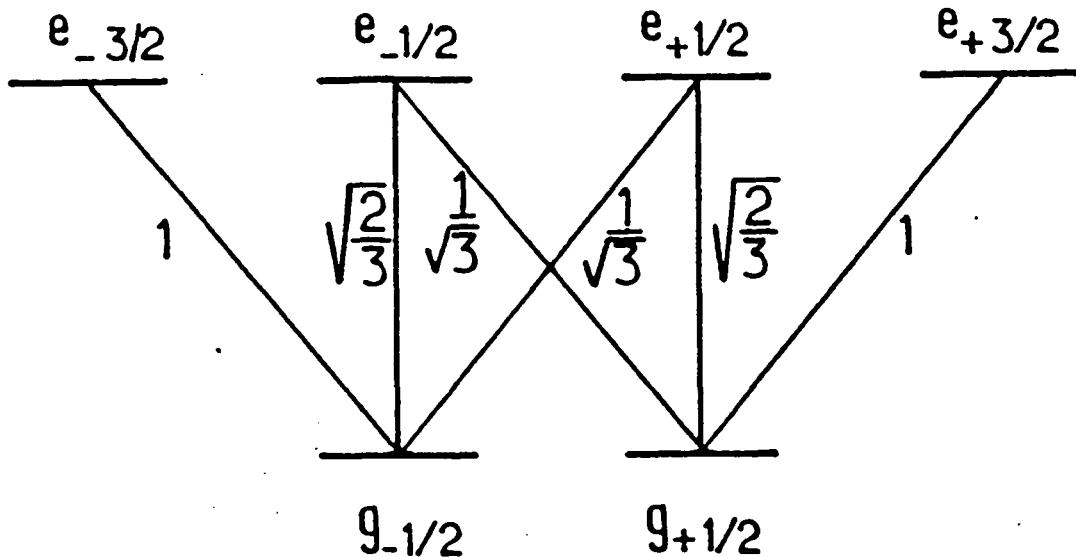


Fig. I-2 : Transition atomique $1/2 \rightarrow 3/2$ et coefficients de Clebsch-Gordan.

b) Dynamique atomique dans l'état fondamental

(i) Simplification à la limite des faibles intensités

Nous envisageons ici seulement le cas où les atomes passent en moyenne très peu de temps dans l'état excité. Ceci s'exprime numériquement par la petitesse du paramètre de saturation s_0 de la transition par le laser :

$$s_0 = \frac{\frac{\Omega^2}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \ll 1 \quad (\text{I1b - 1})$$

Dans cette expression définissant s_0 , $\delta = \omega_L - \omega_A$ est le désaccord entre la pulsation laser ω_L et la pulsation propre ω_A de la transition atomique. Γ désigne le taux de désexcitation par émission spontanée ; c'est donc également la largeur naturelle de l'état excité. Rapelons que ce paramètre s_0 , lorsqu'il est faible, donne l'ordre de grandeur (c'est-à-dire à un facteur numérique près) de la fraction d'atomes dans l'état excité en régime stationnaire.

La dynamique atomique interne peut alors être ramenée dans l'état fondamental, d'autant plus facilement que la faiblesse de la vitesse atomique ($k|v| \ll \Gamma$) nous permet de négliger le déplacement du centre de masse atomique pendant le temps que passe l'atome dans l'état excité [16]. Cette dynamique dans l'état fondamental est constituée de la succession de cycles absorption d'un photon laser-émission stimulée dans un mode laser

et absorption d'un photon laser-émission spontanée dans un mode initialement vide du champ.

Les premiers cycles contribuent à la partie dite réactive du couplage de l'atome au champ : les niveaux atomiques voient leur énergie modifiée par le laser, ces changements d'énergie constituant les déplacements lumineux. Les seconds cycles donnent une durée de vie finie aux niveaux fondamentaux ; ils contribuent à la partie dissipative du couplage atome-champ. Les transitions réelles, avec émission de photons de fluorescence, qu'ils permettent entre les niveaux, sont appelées processus de pompage optique, processus dont le caractère aléatoire joue un rôle important dans la suite.

(ii) Déplacements lumineux

Comme le champ électrique laser ne comporte aucune composante de polarisation selon Oz , il modifie le moment cinétique atomique interne de $\pm\hbar$ à l'issue d'une interaction, de 0 ou $\pm 2\hbar$ à l'issue de deux interactions, etc. Il ne couple donc dans l'état fondamental que des sous-niveaux dont la différence des nombres quantiques m est paire. Dans le cas de la transition $1/2 \longrightarrow 3/2$ étudiée ici, les sous-niveaux $m = +1/2$ et $m = -1/2$ ne sont pas couplés entre eux par des processus absorption-émission stimulée. Les états correspondants, $|+ 1/2\rangle$ et $| - 1/2\rangle$, sont donc des états propres du potentiel de couplage atome-laser, et l'on note E_+ et E_- , les énergies propres (déplacements lumineux) associées^(*). Les grandeurs E_+ et E_- se déduisent aisément des composantes du champ laser selon σ_+ et σ_- . Comme le processus stimulé suivant l'absorption d'un photon σ_+ (ou σ_-) consiste nécessairement en l'émission d'un photon de même polarisation σ_+ (ou σ_-), il suffit d'additionner indépendamment les déplacements lumineux induits par $\mathcal{E}_+^{(+)}$ et $\mathcal{E}_-^{(+)}$, proportionnels à $|\mathcal{E}_+^{(+)}|^2$ et $|\mathcal{E}_-^{(+)}|^2$, avec des facteurs d'intensité donnés par le carré des amplitudes de la fig. I-2.

Le point crucial est alors que ces déplacements lumineux dépendent de la position de l'atome selon l'axe Oz . Par exemple, en $z = 0$, la lumière laser est purement σ_- : elle agit sur le niveau $m = -1/2$ avec une amplitude $\sqrt{3}$ fois plus grande (donc avec une intensité 3 fois plus grande) que sur le niveau $m = +1/2$. On doit donc avoir $E_-(z = 0) = 3E_+(z = 0)$. En $z = \frac{\lambda}{4}$, la situation est inversée : la lumière est purement

(*) Nous utilisons E_\pm plutôt que la notation plus correcte $E_{\pm 1/2}$ afin d'alléger l'écriture. Cette simplification est effectuée également dans la suite sur les populations des sous-niveaux et les taux de pompage entre sous-niveaux.

σ_+ et l'on attend $E_+ \left(\frac{\lambda}{4} \right) = 3E_- \left(\frac{\lambda}{4} \right)$. Finalement, en $z = \frac{\lambda}{8}$, où la lumière est polarisée linéairement, donc comporte la même teneur en σ_+ et σ_- , les deux déplacements lumineux doivent coïncider. Notons bien que cette variation spatiale des déplacements lumineux n'est pas due à une modulation spatiale de l'intensité lumineuse (l'intensité, ici, est la même en tout point) mais bien à une variation spatiale de la polarisation du champ électrique laser et à la grande sensibilité de l'atome envers la nature de cette polarisation.

Un calcul simple de $E_+(z)$ et $E_-(z)$ donne les résultats suivants, qui vérifient effectivement les contraintes énoncées en $z = 0$, $\frac{\lambda}{8}$ et $\frac{\lambda}{4}$:

$$\begin{cases} E_+(z) = -\frac{3}{2}U_0 + U_0 \cos^2 kz \\ E_-(z) = -\frac{3}{2}U_0 + U_0 \sin^2 kz \end{cases} \quad (\text{I1b - 2})$$

U_0 est la profondeur des puits correspondant à $E_+(z)$ et $E_-(z)$:

$$U_0 = -\frac{2}{3}\hbar\delta s_0 \quad (\text{I1b - 3})$$

Une démonstration de ces résultats est exposée dans le chapitre IV. Nous allons voir que le refroidissement Sisyphe dans l'état fondamental n'est présent que si $U_0 > 0$, ce qui impose le choix du désaccord négatif ($\omega_L < \omega_A$).

(iii) Pompage optique

Les processus de pompage les plus intéressants sont ceux qui changent l'état atomique interne. Celui permettant la transition de $m = -1/2$ vers $m = +1/2$, par exemple, correspond à l'absorption d'un photon laser polarisé σ_+ et à l'émission d'un photon de fluorescence π (polarisé linéairement selon Oz). Il est caractérisé par le taux de pompage γ_{--+} proportionnel au carré de l'amplitude du champ laser selon σ_+ et au carré du coefficient de Clebsch-Gordan de la transition π . Nous obtenons ainsi les expressions suivantes, en accord avec l'approche systématique du chapitre IV :

$$\begin{cases} \gamma_{--+}(z) = \frac{2}{9}\Gamma s_0 \sin^2 kz \\ \gamma_{+-+}(z) = \frac{2}{9}\Gamma s_0 \cos^2 kz \end{cases} \quad (\text{I1b - 4})$$

Nous constatons effectivement que le taux de transition $\gamma_{--+}(z)$ de $m = -1/2$ à $m = +1/2$ est maximal lorsque $z = \frac{\lambda}{4}$ (la lumière laser est purement σ_+), alors qu'il s'annule en $z = 0$ (point où le champ laser est purement σ_-), ces conclusions étant inversées pour $\gamma_{+-+}(z)$.

D'autre part, il ne faut pas omettre les processus de pompage optique qui laissent l'état atomique interne inchangé. Ils correspondent à l'absorption d'un photon laser σ_+ ou σ_- et à l'émission d'un photon de fluorescence de même polarisation. Le taux de ces processus à partir d'un sous-niveau interne donné ne s'annule jamais : quelle que soit la position atomique z selon Oz , il n'existe pas d'état interne fondamental non couplé au rayonnement, comme ce serait le cas pour une transition $1/2 \rightarrow 1/2$ par exemple. Nous verrons que ces processus jouent un rôle important aux points où $\gamma_{+-+}(z)$ ou $\gamma_{--+}(z)$ s'annulent.

Pour étudier de manière plus quantitative le pompage optique, nous décrivons l'état atomique interne par l'opérateur densité σ restreint dans l'état fondamental. Dans la base $|m = \pm 1/2\rangle$, les éléments de matrice diagonaux de σ constituent les populations Π_+ et Π_- des sous-niveaux $m = +1/2$ et $m = -1/2$, et les éléments non diagonaux constituent les cohérences entre ces sous-niveaux. Comme nous l'avons déjà dit à propos des déplacements lumineux, la lumière laser, n'ayant nulle part de composante de polarisation selon Oz , ne peut pas, en l'absence de processus d'émission spontanée, coupler les sous-niveaux $m = \pm 1/2$ entre eux. La prise en compte des processus d'émission spontanée fait certes apparaître des transferts par pompage optique entre $m = \pm 1/2$, mais ceux-ci correspondent, dans l'évolution de σ , à une alimentation des populations par les seules populations et à une alimentation des cohérences par les seules cohérences. Les équations de Bloch optiques donnant l'évolution temporelle de σ prennent donc la forme simple suivante pour les populations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Pi_+ = -\gamma_{+-+}(z)\Pi_+(t) + \gamma_{--+}(z)\Pi_-(t) \\ \frac{d}{dt}\Pi_- = -\frac{d}{dt}\Pi_+ \end{cases} \quad (\text{IIb - 5})$$

Quant aux cohérences, elles relaxent vers 0 puisqu'elles ne sont pas alimentées par les populations.

Pour donner aux équations de Bloch optiques une tournure plus suggestive, éliminons $\Pi_-(t)$ au profit de $\Pi_+(t)$ et vice versa en utilisant la conservation de la population to-

tale $\Pi_+(t) + \Pi_-(t) = 1$. Nous faisons apparaître ainsi la somme des taux de pompage $\gamma_{+-}(z) + \gamma_{--}(z) = \frac{2}{9}\Gamma s_0(\cos^2 kz + \sin^2 kz)$. Cette somme qui, remarquablement, ne dépend pas de la position de l'atome, est identifiée comme étant $\frac{1}{\tau_p}$ où τ_p est ce que nous appelons le temps de pompage optique :

$$\frac{2}{9}\Gamma s_0 \tau_p = 1 \quad (\text{I1b - 6})$$

Les équations de Bloch optiques prennent finalement la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Pi_+(t) = -\frac{1}{\tau_p}(\Pi_+(t) - \Pi_+^{\text{st}}(z)) \\ \frac{d}{dt}\Pi_-(t) = -\frac{1}{\tau_p}(\Pi_-(t) - \Pi_-^{\text{st}}(z)) \end{cases} \quad (\text{I1b - 7a})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Pi_+^{\text{st}}(z) = \sin^2 kz \\ \Pi_-^{\text{st}}(z) = \cos^2 kz \end{cases} \quad (\text{I1b - 7b})$$

Les grandeurs $\Pi_{\pm}^{\text{st}}(z)$, fonctions seulement de la position z , représentent l'état stationnaire interne d'un atome maintenu immobile en z , l'écart à cet état stationnaire décroissant avec le temps en e^{-t/τ_p} . τ_p s'impose donc comme le temps de relaxation typique des variables atomiques internes. Notons que l'état stationnaire obtenu est fortement modulé spatialement, ce qui joue un rôle important que nous explicitons au §1d.

c) Dynamique atomique externe. Mécanismes de refroidissement pour une énergie initiale au-dessus des puits de potentiel

Montrons maintenant comment les déplacements lumineux et les processus de pompage optique contrôlent la dynamique externe de l'atome.

(i) Problème physique équivalent

Nous décrivons le mouvement du centre de masse atomique par l'évolution de sa position $z(t)$ et de sa vitesse $v(t)$ en fonction du temps. Dans ce point de vue classique, l'atome est soumis à une force aléatoire de la part de la lumière, force dont les fluctuations proviennent du caractère non déterministe de l'émission spontanée et sont responsables d'un chauffage que nous discutons plus loin. La vitesse atomique est gouvernée par la

force radiative subie par l'atome : cette force dépend de l'état atomique interne et l'on peut montrer qu'elle est la somme de deux contributions [25-27,56].

La première contribution, dite réactive, est donnée simplement par l'opposé du gradient spatial du potentiel décrivant la partie réactive du couplage atome-champ. Nous avons vu que ce potentiel est diagonal dans la base $|\pm 1/2\rangle$ et que ses énergies propres sont les déplacements lumineux $E_{\pm}(z)$. Cette force, appelée stimulée, vaut donc $-\frac{dE_+}{dz}(z)$ (ou $-\frac{dE_-}{dz}(z)$) pour un atome dans l'état interne $|+1/2\rangle$ (ou $| -1/2\rangle$). Sa valeur moyenne est la moyenne des deux forces précédentes $-\frac{d}{dz}E_{\pm}(z)$ pondérées par les probabilités d'occupation Π_{\pm} des deux sous-niveaux $\pm 1/2$.

La seconde contribution à la force, dite dissipative, provient des changements moyens d'impulsion liés aux cycles absorption d'un photon laser-émission spontanée ; elle correspond à la pression de radiation exercée par la lumière. Il est facile de se convaincre qu'ici, les pressions de radiation moyennes associées à chaque onde laser se compensent en fait exactement. Si l'on ne considère que la valeur moyenne des forces radiatives, seule la première contribution intervient donc et conduit à l'expression suivante pour la force totale moyenne subie par l'atome :

$$\langle F(t) \rangle = - \left[\Pi_+(t) \frac{dE_+}{dz}(z(t)) + \Pi_-(t) \frac{dE_-}{dz}(z(t)) \right] \quad (\text{IIc - 1})$$

Les pressions de radiation n'influent donc sur le mouvement de l'atome que par leurs fluctuations ; nous les négligeons dans un premier temps, pour ne retenir que la première contribution aux forces radiatives subies par l'atome, qui est celle des gradients de déplacements lumineux. Notre problème est alors équivalent à l'étude du mouvement d'une particule se déplaçant dans un bipotentiel $(E_+(z), E_-(z))$ et effectuant des sauts aléatoires d'un potentiel à l'autre avec des taux $\gamma_{+-}(z)$ et $\gamma_{--+}(z)$. Entre deux sauts, l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}Mv^2 + E_{\pm}(z)$ associée au potentiel suivi reste constante, la particule ayant un mouvement oscillatoire pour $E < -\frac{1}{2}U_0$ et un mouvement non borné pour $E > -\frac{1}{2}U_0$. Cette alternative introduit, comme échelle de vitesse importante, v_0 telle que :

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = U_0 \quad (\text{IIc - 2})$$

La suite va montrer l'importance d'une autre échelle en vitesse, v_c , telle qu'un atome dont la vitesse serait maintenue constante et égale à v_c se déplace de $\frac{\lambda}{2\pi}$ pendant le temps

moyen nécessaire pour que l'atome change de sous-niveau dans l'état fondamental. Ce temps moyen est estimé par la moyenne spatiale uniforme du taux de pompage d'un sous-niveau vers l'autre ; il vaut $2\tau_p$ puisque $\langle \gamma_{-\rightarrow+}(z) \rangle = \langle \gamma_{+\rightarrow-}(z) \rangle = \frac{1}{9}\Gamma s_0$. Nous posons alors par définition :

$$kv_c = \frac{1}{9}\Gamma s_0 \quad (\text{I1c - 3})$$

Les deux situations $v_0 \gg v_c$ et $v_0 \ll v_c$ peuvent être rencontrées physiquement, et le rapport sans dimension $\frac{v_0}{v_c}$ va jouer un grand rôle dans la suite (voir (I1d - 6b) et (I1d - 3)).

(ii) Perte moyenne d'énergie potentielle par effet Sisyphe pour un atome d'énergie initiale élevée

Nous allons examiner ici le cas d'une particule suffisamment rapide pour que sa vitesse v vérifie la double contrainte :

$$|v| \gg v_0 \quad (\text{I1c - 4a})$$

$$|v| \gg v_c \quad (\text{I1c - 4b})$$

où les vitesses v_0 et v_c sont définies selon (I1c - 2) et (I1c - 3). La première condition rend très faible la modulation de la vitesse v avec la position. Comme de plus $|v| \gg v_c$, l'atome parcourt plusieurs longueurs d'onde avant d'être pompé dans l'autre niveau ; si l'atome est initialement dans l'état $| - 1/2 \rangle$, ce pompage se produit avec le taux maximal aux points $z = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$. Ces points correspondent aussi aux sommets des collines du potentiel $E_-(z)$, pour le choix $U_0 > 0$ donc $\delta < 0$. Ainsi (voir fig. I-3), les processus de pompage optique font le plus probablement sauter l'atome du haut d'une colline de potentiel dans le fond d'une vallée, ce qui est à l'origine de l'appellation "Sisyphe quantique" et constitue l'essentiel du mécanisme de refroidissement. Nous supposons pour l'instant que la transition $+1/2 \longleftrightarrow -1/2$ se fait sans changement de vitesse atomique ; nous considérons seulement la variation moyenne d'énergie potentielle lors d'un saut, obtenue, puisque nous sommes dans le régime $|v| \gg v_0$, par pondération spatiale uniforme, ce qui conduit à :

$$\langle \Delta U_{\text{pot}} \rangle = \frac{\langle \gamma_{-\rightarrow+}(z)(E_+(z) - E_-(z)) \rangle}{\langle \gamma_{-\rightarrow+}(z) \rangle} = -\frac{1}{2}U_0 < 0 \quad (\text{I1c - 5})$$

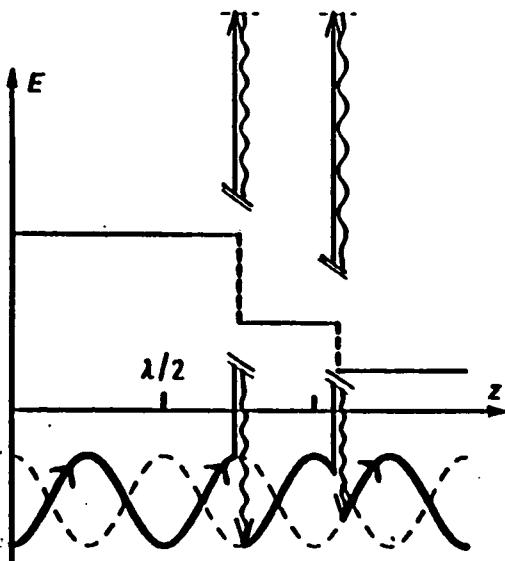


Fig. I-3 : Mouvement typique d'un atome dans la configuration Sisyphe. E désigne l'énergie mécanique $\frac{1}{2}Mv^2 + E_{\pm}(z)$.

Notons bien que cette diminution moyenne de l'énergie totale de l'atome survenue à l'issue d'un cycle de fluorescence, entraîne une augmentation moyenne de l'énergie du champ quantique, égale au surcroît d'énergie du photon de fluorescence émis par rapport au photon laser absorbé. La dissipation d'énergie dans le refroidissement Sisyphe est donc assurée par des processus de diffusion Raman anti-Stokes.

Nous avons ajouté, à la contrainte $\frac{1}{2}Mv^2 \gg U_0$, l'hypothèse $|v| \gg v_c$. Or, il est possible que l'atome ait une vitesse v très inférieure à la vitesse critique v_c , tout en gardant une énergie cinétique bien supérieure à la profondeur des puits (cas $v_0 \ll |v| \ll v_c$). L'image précédente du refroidissement ne convient alors plus, l'atome pouvant effectuer plusieurs transitions internes $+1/2 \longleftrightarrow -1/2$ avant d'avoir parcouru une longueur d'onde. Ce régime, au cours duquel l'état atomique interne varie beaucoup plus rapidement que la vitesse du centre de masse, fait l'objet du traitement bien connu, que nous appelons approche semi-classique traditionnelle, et dont nous exposons les prédictions quantitatives au §1d. Nous n'en parlons pas pour l'instant.

Terminons cette section consacrée à la dynamique des atomes ayant une énergie cinétique très supérieure à U_0 , par une discussion des phénomènes de chauffage, dont l'existence impose un seuil de fonctionnement pour le refroidissement Sisyphe.

(iii) Gain moyen d'énergie cinétique dû au recul des photons émis et absorbés

Précédemment, nous avons en effet négligé complètement les fluctuations temporelles des forces subies par l'atome de la part de la lumière, pour ne raisonner que sur la force moyenne. Examinons maintenant au cours d'un cycle absorption d'un photon laser-émission spontanée, la variation de la quantité de mouvement de l'atome. D'une part, le photon laser absorbé, que l'on choisit par exemple polarisé σ_+ , a une impulsion $+\hbar k \mathbf{e}_z$ ou $-\hbar k \mathbf{e}_z$ selon qu'il vient de l'onde polarisée selon Ox ou Oy , ce qui constitue une première source de fluctuations. Le photon de fluorescence émis, d'autre part, a une impulsion de direction aléatoire. Le changement d'impulsion à l'issue du cycle, nul en moyenne comme nous l'avons dit, est donc responsable d'une diffusion en impulsion de l'atome, qui existe que l'atome change de niveau interne ou non. Cette diffusion se traduit par un taux moyen d'augmentation de l'énergie cinétique atomique $\frac{1}{2} M v^2$ de l'ordre d'une énergie de recul $E_R = \frac{(\hbar k)^2}{2M}$ par cycle, ce qui agit sur l'énergie E à contresens de la diminution moyenne d'énergie potentielle permise par les transitions $+1/2 \longleftrightarrow -1/2$. Rappelons que, par définition, la valeur précise de ce taux moyen est $\frac{D}{M}$, où D est appelé coefficient de diffusion en impulsion.

Indiquons rapidement comment prendre en compte quantitativement les changements d'énergie cinétique atomique intervenant dans le chauffage [28]. Supposons que l'atome ait accompli N cycles de fluorescence. Il s'agit d'abord de déterminer, pour chaque composante de polarisation suivant Oz , σ_+ , σ_- et π , le nombre moyen de photons de fluorescence émis. En utilisant l'expression des composantes du champ laser selon σ_+ et σ_- et en introduisant les facteurs d'intensité donnés par les carrés des coefficients de la fig. I-2, nous obtenons, pour un atome dans l'état $| + 1/2 \rangle$ et parcourant plusieurs arches de potentiel pendant le temps de pompage τ_p , les taux moyens pour les cycles (σ_+, σ_+) (absorption d'un photon laser polarisé σ_+ et émission d'un photon de fluorescence polarisé σ_+), (σ_-, σ_-) et (σ_-, π) , soit $\Gamma s_0 \langle \sin^2 kz \rangle$, $\Gamma s_0 \langle \cos^2 kz \rangle \cdot \frac{1}{9}$ et $\Gamma s_0 \langle \cos^2 kz \rangle \cdot \frac{2}{9}$.

D'une part, on en déduit par addition le nombre moyen de cycles de fluorescence par unité de temps :

$$\frac{d\langle N \rangle}{dt} = \frac{2}{3} \Gamma s_0 \quad (\text{I1c - 6})$$

D'autre part, sur 6 photons de fluorescence, en moyenne 5 sont σ_+ ou σ_- (il n'y a alors pas changement de l'état atomique interne à l'issue du cycle), alors qu'un seul est polarisé

π (il y a alors diminution en moyenne de l'énergie potentielle de $-\frac{1}{2}U_0$, puisque l'état interne a changé à l'issue d'un tel cycle). Si $\hbar k_s$ désigne l'impulsion selon Oz du photon de fluorescence, l'impulsion de l'atome selon Oz passe après émission spontanée de p à $p - \hbar k_s$. La variation moyenne d'énergie cinétique selon Oz vaut alors pour l'atome :

$$\langle \Delta E_c \rangle = \left\langle \frac{(p - \hbar k_s)^2}{2M} - \frac{p^2}{2M} \right\rangle = \left\langle \frac{(\hbar k_s)^2}{2M} \right\rangle \quad (\text{I1c - 7})$$

Le terme en $\hbar k_s p$ a une moyenne nulle, puisque l'émission spontanée se produit avec la même probabilité selon 2 directions opposées. L'émission spontanée a de plus un diagramme de rayonnement dipolaire, ce qui conduit à $\langle (\hbar k_s)^2 \rangle = \frac{2}{5}(\hbar k)^2$ pour une émission σ_+ ou σ_- , et $\langle (\hbar k_s)^2 \rangle = \frac{1}{5}(\hbar k)^2$ pour une émission π (voir II§1c). Après N cycles de fluorescence, la variation moyenne d'énergie cinétique atomique associée à l'émission de photons de fluorescence est donc donnée par :

$$\langle (\Delta E_c)_{\text{spont}} \rangle = NE_R \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \right] = \frac{11}{30} \cdot NE_R \quad (\text{I1c - 8})$$

Le dernier effet à prendre en compte est le gain moyen d'énergie cinétique pour l'atome, dû à l'absorption de photons laser au début de chaque cycle de fluorescence. En effet, après N cycles, N_x photons ont disparu de l'onde laser progressive polarisée selon Ox , et $N_y = N - N_x$ photons ont disparu de l'onde laser progressive polarisée selon Oy . La variation moyenne d'impulsion atomique correspondante, soit $\langle \Delta p \rangle = \langle N_x - N_y \rangle \hbar k$, qui correspond à la pression de radiation moyenne exercée par les faisceaux laser, est nulle, comme nous l'avons déjà signalé ($\langle N_x \rangle = \langle N_y \rangle$). L'accès à sa variance, qui nous intéresse ici, nécessite la connaissance de $\langle (N_x - N_y)^2 \rangle$. Nous allons faire l'hypothèse, raisonnable à faible saturation de la transition et à vitesse atomique élevée, qu'il n'y a pas de corrélation entre les impulsions des photons laser absorbés. Cette hypothèse conduit à $\langle (N_x - N_y)^2 \rangle = \langle N_x + N_y \rangle = N$, de sorte que le gain moyen d'énergie cinétique dû à l'absorption de N photons laser vaut :

$$\langle (\Delta E_c)_{\text{absorption}} \rangle = NE_R \quad (\text{I1c - 9})$$

Si l'on utilise le fait qu'un cycle de fluorescence sur 6 entraîne une transition $+1/2 \longleftrightarrow -1/2$, ce qui diminue en moyenne l'énergie potentielle de $-\frac{1}{2}U_0$, nous obtenons finalement la variation moyenne d'énergie totale de l'atome après N cycles :

$$\langle \Delta E \rangle = N \left[\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}U_0 \right) + \frac{11}{30}E_R + E_R \right] \quad (\text{I1c - 10})$$

(iv) Existence d'un seuil pour le refroidissement

La prise en compte du détail des processus intervenant dans le chauffage conduit donc, pour un atome très rapide ($\frac{1}{2}Mv^2 \gg U_0$, $|v| \gg v_c$), à la vitesse moyenne globale de variation de l'énergie mécanique, dont l'expression est déduite de (I1c - 6) et (I1c - 10) :

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \frac{1}{9}\Gamma s_0 \left[-\frac{1}{2}U_0 + \beta E_R \right] \quad (\text{I1c - 11})$$

où β est un pur nombre ($\beta = \frac{41}{5}$), dépendant, comme nous l'avons vu, de la proportion de photons de fluorescence polarisés σ_+ , σ_- ou π et de leur impulsion quadratique moyenne selon Oz , en unité de $\hbar k$. Nous arrivons ainsi, par des arguments élémentaires, à la conclusion fondamentale suivante : le refroidissement Sisyphe, contrairement au refroidissement Doppler, est à seuil, il n'est efficace (c'est-à-dire qu'il diminue en moyenne l'énergie des atomes) que pour une valeur assez grande de $\frac{U_0}{E_R}$ ($U_0 > 2\beta E_R$).

Signalons que l'on peut donner une formulation plus précise à cette condition : le refroidissement Sisyphe conduit à des distributions atomiques stationnaires en vitesse normalisables seulement si $U_0 > 2\beta E_R$, et d'énergie moyenne finie seulement si $U_0 > 6\beta E_R$. Nous renvoyons au chapitre IV pour cette discussion plus complète.

d) L'approche semi-classique traditionnelle. Rappel de ses résultats et démonstration de ses insuffisances

(i) Ce en quoi consiste l'approche semi-classique traditionnelle

Nous présentons ici les résultats de l'approche semi-classique traditionnelle. Semi-classique signifie que cette approche traite classiquement le mouvement du centre de masse

atomique et quantifie seulement l'état atomique interne. Elle suppose donc que, dans son interaction avec la lumière laser, le centre de masse de l'atome peut être considéré comme localisé. Ceci est légitime tant que la longueur de cohérence spatiale $\Delta\xi$ associée à la description quantique de l'état du centre de masse est suffisamment faible devant la longueur d'onde optique λ . La contrainte $k\Delta\xi \ll 1$ conduit, via la relation de dispersion de Heisenberg, à la condition suivante sur la dispersion Δp de l'impulsion atomique totale :

$$\Delta p \gg \hbar k \quad (\text{I1d} - 1)$$

Un tel traitement semi-classique ne peut pas rendre compte de distributions atomiques en impulsion présentant des variations notables sur une échelle de $\hbar k$.

Considérons alors un grand nombre d'atomes soumis au refroidissement Sisyphe. Cette assemblée est décrite semi-classiquement par une distribution dans l'espace des positions et des vitesses que nous notons $\Pi_+(z, v, t)$ ou $\Pi_-(z, v, t)$ selon l'état atomique interne. Nous admettons que ces distributions vont évoluer vers un état stationnaire unique, indépendant donc de l'état initial de la collection d'atomes^(*). L'objectif est de calculer ces distributions stationnaires et de déterminer les paramètres du laser (désaccord δ et pulsation de Rabi Ω ou, ce qui est plus commode, δ et profondeur des trous U_0) conduisant aux distributions en vitesse les plus "froides", selon des critères que nous préciserons plus tard. Pour simplifier le problème, on se place de plus dans la situation limite où l'état atomique interne atteint un régime forcé avant que la vitesse atomique n'ait eu le temps de changer significativement sous l'effet des forces radiatives. Cette condition, qui s'exprime par l'inégalité $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$ entre les temps typiques de variation des variables internes (soit T_{int}) et externes (soit T_{ext}), constitue le fondement de l'approche semi-classique traditionnelle. Elle permet en effet d'éliminer les degrés de liberté atomiques internes en les asservissant au mouvement du centre de masse atomique. Cette élimination, qualifiée d'adiabatique, conduit à l'étude, plus simple, du mouvement de particules sans structure interne, dont la distribution dans l'espace des position-vitesse est $\Pi(z, v, t) = \Pi_+(z, v, t) + \Pi_-(z, v, t)$.

^(*) L'aspect spatial rend en fait problématique l'atteinte de l'état stationnaire. Nous contournons la difficulté en considérant la position z modulo λ , ce qui autorise à se limiter à des distributions périodiques en z .

(ii) Comparaison des temps interne et externes. Les divers régimes

Il s'agit d'abord de déterminer à quelle condition l'élimination des variables internes est possible. Ces variables ont clairement une durée typique d'évolution $T_{\text{int}} = \tau_p$, où τ_p est le temps de pompage optique donné par (I1b - 6). Le temps T_{ext} le plus court d'évolution de la vitesse atomique est par contre plus délicat à caractériser.

Reprendons d'abord la discussion qualitative du §1c. Nous avons montré que les atomes dont la vitesse v vérifie la double condition (I1c - 4a) et (I1c - 4b) ont une vitesse de variation de leur énergie donnée en moyenne par (I1c - 11), ce qui conduit à une variation relative d'énergie très faible pendant T_{int} , d'après (I1c - 4a). L'approche semi-classique traditionnelle est donc toujours justifiée pour de tels atomes. Néanmoins, lorsqu'on se place nettement au-dessus du seuil du refroidissement Sisyphe, nous verrons que ces atomes sont fortement minoritaires dans l'état stationnaire, et qu'ils ne jouent donc pas de rôle important dans la présente discussion.

Examinons maintenant le cas, majoritaire, des atomes dont l'énergie cinétique viole l'une des deux conditions (I1c - 4a) ou (I1c - 4b). La première condition (I1c - 4a) n'est pas respectée par les atomes se trouvant au fond des puits de potentiel ; il est alors pertinent d'introduire comme échelle de temps externe la période d'oscillation des atomes dans la partie harmonique des potentiels $E_{\pm}(z)$, période associée à la pulsation Ω_{osc} :

$$\Omega_{\text{osc}} = \sqrt{\frac{2k^2U_0}{M}} \quad (\text{I1d} - 2)$$

La vitesse atomique varie plus rapidement que l'état interne si les atomes ont le temps de décrire ne serait-ce que le quart d'une oscillation complète entre deux cycles de pompage optique $\pm 1/2 \longleftrightarrow \mp 1/2$. Cette simple considération sur la dynamique des atomes à l'intérieur des puits conduit donc à la condition nécessaire suivante d'application de l'approche semi-classique traditionnelle :

$$\Omega_{\text{osc}}\tau_p \ll 1 \quad (\text{I1d} - 3)$$

Quant à la deuxième condition (I1c - 4b), elle n'est pas respectée par les atomes de vitesse v inférieure à la vitesse critique v_c . Comme il est établi dans [16], ces atomes subissent, dans le régime de l'approche semi-classique traditionnelle, une force de friction linéaire en vitesse, $F = -\alpha v$, caractérisée par le coefficient de friction α :

$$\alpha = -3\hbar k^2 \frac{\delta}{\Gamma} \quad (\text{I1d - 4})$$

Il est associé à cette force de friction un second temps externe, qui est le temps d'amortissement de la vitesse, T_{am} . Par conséquent, une autre condition nécessaire pour utiliser l'approche semi-classique traditionnelle est :

$$\tau_p \ll T_{\text{am}} = \frac{M}{\alpha} \quad (\text{I1d - 5})$$

Un calcul simple montre alors, ce qui est remarquable, que la condition (I1d - 3) implique (I1d - 5) en fait, en vertu des identités :

$$\Omega_{\text{osc}} \tau_p = 6 \frac{|\delta|}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_R}{U_0}} \quad (\text{I1d - 6a})$$

$$\Omega_{\text{osc}} \tau_p = \left(\frac{U_0}{2Mv_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_0}{2v_c} \quad (\text{I1d - 6b})$$

$$\frac{\alpha \tau_p}{M} = \frac{1}{2} (\Omega_{\text{osc}} \tau_p)^2 \quad (\text{I1d - 6c})$$

Nous retenons donc (I1d - 3) comme condition nécessaire d'application de l'approche semi-classique traditionnelle. Remarquons, en pratique, que, d'après (I1d - 6a), cette approche étudie, dans le cas du refroidissement Sisyphe au-dessus du seuil, la limite des puits profonds $\left(\sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \gg 1 \right)$ à désaccord fixé, et que la condition $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$ apporte, en vertu de (I1d - 6b), la simplification $|v| \ll v_c$, si l'on admet que la plupart des atomes ont une énergie cinétique inférieure à U_0 dans l'état stationnaire.

(iii) Rappel succinct des résultats de l'approche semi-classique traditionnelle

Indiquons maintenant comment mener cette approche semi-classique traditionnelle. La relation $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$ permet de considérer que la vitesse atomique reste constante pendant la durée d'établissement du régime interne forcé, régime noté $\Pi_{\pm}^f(z, v)$, qui est la solution périodique des équations de Bloch optiques (I1b - 5) écrites pour un atome de vitesse v imposée ($z(t) = z_0 + vt$). La connaissance de ce régime forcé permet d'éliminer l'état interne au profit de l'état externe donc de se ramener à l'étude du mouvement d'une

particule sans structure interne. Comme nous l'avons signalé précédemment, il suffit de mener les calculs jusqu'au premier ordre en $\frac{v}{v_c}$, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\Pi_{\pm}^f(z, v) \simeq \Pi_{\pm}^{st}(z) - v\tau_p \frac{d\Pi_{\pm}^{st}}{dz}(z) \quad (\text{I1d - 7})$$

Lorsqu'on reporte (I1d - 7) dans l'expression (I1c - 1) de la force moyenne, on arrive à la dépendance en position et en vitesse de cette force :

$$F(z, v) = -\frac{d}{dz}U(z) - 2\alpha \sin^2(2kz)v \quad (\text{I1d - 8a})$$

$$U(z) = \frac{U_0}{4} \sin^2(2kz) \quad (\text{I1d - 8b})$$

$U(z)$ représente le potentiel effectif dont dérive la force moyenne subie par un atome au repos. Quant au coefficient de friction α , il vaut (I1d - 4). Notons que la moyenne spatiale uniforme de $F(z, v)$ donne une force de friction pure $-\alpha v$. Par ailleurs, on trouvera une étude du comportement de $F(z, v)$ pour une vitesse arbitraire dans [16], et le lien entre le calcul de $F(z, v)$ et des considérations d'optique non linéaire est exposé dans [64-66].

Il reste à prendre en compte les fluctuations de la force instantanée subie par les atomes. Ces fluctuations ont deux origines distinctes.

La première correspond aux processus de chauffage évoqués au §1c, dus au caractère aléatoire des changements de l'impulsion atomique à l'issue d'un cycle de fluorescence. Elle est décrite par un coefficient de diffusion en impulsion, que nous appelons D_1 , qu'il suffit de prendre ici à vitesse nulle, et que l'on peut décomposer ainsi :

$$D_1(z) = D_{\text{abs}}(z) + D_{\text{spont}}(z) \quad (\text{I1d - 9a})$$

$$\text{avec } \begin{cases} D_{\text{abs}}(z) = \frac{1}{6}(\hbar k)^2 \Gamma s_0 [1 + \sin^2 2kz] \\ D_{\text{spont}}(z) = \frac{1}{5}(\hbar k)^2 \Gamma s_0 \left[1 - \frac{7}{18} \sin^2 2kz\right] \end{cases} \quad (\text{I1d - 9b})$$

D_{spont} correspond aux fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence. Il peut s'obtenir comme au §1c, à partir des taux moyens d'émission spontanée de photons polarisés σ_+ , σ_- ou π et des impulsions quadratiques moyennes selon Oz de

ces photons de fluorescence, compte tenu de l'état stationnaire interne d'un atome au repos. D_{abs} décrit les fluctuations de l'impulsion des photons laser absorbés par l'atome. Le calcul correspondant effectué au §1c, à partir de $\langle (N_x - N_y)^2 \rangle$ en supposant que ces variables étaient poissonniennes, ne s'applique plus au cas présent, de faible vitesse, comme le prouve par exemple la forte dépendance spatiale de l'état atomique interne (I1b - 7b). Nous obtenons heuristiquement $D_{\text{abs}}(z)$ en considérant les transitions $|g m\rangle \longleftrightarrow |e m \pm 1\rangle$ de notre système $1/2 \rightarrow 3/2$ comme une superposition d'atomes à deux niveaux, pour lesquels le résultat est bien connu. Nous ajoutons ainsi indépendamment l'effet des composantes σ_+ et σ_- du champ laser, comme on peut le faire dans le calcul des déplacements lumineux du §1b, ce qui est justifié par l'absence de processus stimulé couplant ces deux composantes. Le résultat obtenu pour D_{abs} coïncide avec les calculs plus rigoureux de la procédure générale exposée dans le chapitre II.

La deuxième source de chauffage est mise en évidence par l'élimination des degrés de liberté internes. A chaque changement de niveau interne, la force $-\frac{d}{dz}E_{\pm}(z)$ change de signe. Cette source de fluctuations est prise en compte automatiquement lorsqu'on garde Π_+ et Π_- dans les équations d'évolution, puisque le signe $\varepsilon(t)$ de la force est parfaitement corrélé avec le signe de $m = \pm 1/2$. Il n'en va plus de même lorsque toute référence à l'état interne est supprimée. Le coefficient de diffusion en impulsion à vitesse nulle correspondant, que nous appelons $D_2(z)$, est obtenu, comme en théorie classique du mouvement brownien [29], par la fonction d'autocorrélation temporelle de la force aléatoire :

$$D_2(z) = \left(-\frac{dE_+}{dz}\right)^2 \int_0^{+\infty} d\tau \left[\overline{\varepsilon(t)\varepsilon(t-\tau)} - \overline{\varepsilon(t)}^2 \right] \quad (\text{I1d - 10a})$$

$$D_2(z) = 2(\hbar k)^2 \Gamma s_0 \left(\frac{\delta}{\Gamma}\right)^2 \sin^4 2kz \quad (\text{I1d - 10b})$$

Le calcul détaillé de $D_2(z)$, effectué dans [16], conduit au résultat (I1d - 10b) annoncé. Notons simplement que l'intégrale dans (I1d - 10a) est d'ordre de grandeur du temps de corrélation de $\varepsilon(t)$, ce qui est clairement τ_p .

Comparons maintenant l'importance relative de D_1 et D_2 . Les processus correspondant à D_1 sont responsables, en dehors des puits, de l'existence d'un seuil pour $\frac{U_0}{E_R}$, comme nous l'avons vu au §1c. Ils paraissent, pour des atomes immobiles, au premier abord négligeables devant la diffusion décrite par D_2 dans les situations de grand désaccord en fréquence entre atome et laser ($|\delta| \gg \Gamma$), puisque D_2 bénéficie du facteur $\left(\frac{\delta}{\Gamma}\right)^2$. En

fait, D_1 ne s'annule en aucun point contrairement à D_2 : D_1 joue donc un rôle essentiel tout au fond des puits. Le chauffage que décrit D_1 limite l'accumulation des atomes aux minima de $E_{\pm}(z)$, là où les taux de pompage $\gamma_{\pm \rightarrow \mp}(z)$ et la force $-\frac{d}{dz}E_{\pm}(z)$ s'annulent. L'omission de ce chauffage conduirait à des distributions beaucoup trop froides et trop modulées spatialement.

Dans l'état stationnaire, $\Pi(z, v)$ est donné, comme dans la théorie standard du mouvement brownien [29], par l'équation de Fokker-Planck :

$$v\partial_z\Pi(z, v) = -\partial_p[F(z, v)\Pi(z, v)] + D(z, 0)\partial_p^2\Pi(z, v) \quad (\text{I1d - 11})$$

le premier terme décrivant l'effet sur Π du vol libre des particules à la vitesse v . Cette équation de Fokker-Planck fait apparaître clairement les temps d'évolution typiques de la vitesse atomique dans le régime semi-classique traditionnel. Le premier est associé au mouvement des atomes dans le potentiel effectif $U(z)$ de (I1d - 8b) ; nous le caractérisons par la pulsation d'oscillation dans la partie harmonique de $U(z)$, qui coïncide avec celle (cf. (I1d - 2)) des potentiels $E_{\pm}(z)$, ce qui montre que la condition de validité (I1d - 3) est aussi suffisante. Le second temps externe T_{am} décrit l'amortissement de la vitesse sous l'effet de la force de friction contenue dans $F(z, v)$. Nous l'avons déjà introduit dans (I1d - 5). Le dernier temps T_{diff} décrit la diffusion en impulsions des atomes ; nous le caractérisons par le taux d'accroissement relatif d'énergie cinétique pour un atome d'énergie cinétique de l'ordre de U_0 , ce qui est justifié par le résultat (I1d - 13). En nous limitant (c'est important pour l'évaluation de T_{diff}) aux situations pour lesquelles $|\delta| \geq \Gamma$, nous obtenons finalement :

$$\Omega_{\text{osc}}T_{\text{am}} \sim \Omega_{\text{osc}}T_{\text{diff}} \sim \frac{1}{\Omega_{\text{osc}}\tau_p} \gg 1 \quad (\text{I1d - 12})$$

Ces relations sont en accord avec les considérations générales du II§2c et montrent que le mouvement des particules régi par (I1d - 11) est sous-amorti, ce qui permet de résoudre l'équation de Fokker-Planck de façon approchée [30,31].

Les résultats de l'approche semi-classique traditionnelle sont alors les suivants (voir le chapitre IV). A la limite des puits U_0 très profonds, l'énergie cinétique moyenne des atomes dans l'état stationnaire devient proportionnelle à U_0 , avec un coefficient de proportionnalité qui dépend seulement (et faiblement) de $\left(\frac{\delta}{\Gamma}\right)$:

$$\left\langle \frac{p^2}{2M} \right\rangle_{U_0/E_R \rightarrow +\infty} \sim U_0 g(\delta/\Gamma) = -\frac{2}{3} \hbar \delta s_0 g\left(\frac{\delta}{\Gamma}\right) \quad (\text{I1d - 13})$$

Remarquons en particulier que $\left\langle \frac{p^2}{2M} \right\rangle$ ne dépend plus de la masse M des atomes à la limite des puits profonds. Ajoutons que les distributions en vitesse obtenues ne sont pas rigoureusement gaussiennes. Nous renvoyons au chapitre IV pour une discussion plus approfondie. Nous mettons en garde le lecteur contre les dangers de la notation abusive $\left\langle \frac{p^2}{2M} \right\rangle = U_0 g\left(\frac{\delta}{\Gamma}\right)$. Une telle expression fait penser que l'approche semi-classique traditionnelle présente un comportement linéaire de l'énergie cinétique moyenne avec U_0 , pour toutes les valeurs de U_0 , ce qui conduirait, pour des profondeurs de puits de plus en plus faibles (il suffit de diminuer l'intensité des faisceaux laser), à des distributions de plus en plus froides, aussi froides que l'on veut. Or, l'approche semi-classique traditionnelle ne prédit rien de tel puisqu'elle se place dans le cas limite $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$, ce qui correspond, à désaccord fixé, à la limite des puits très profonds $\left(\sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \gg 1\right)$, et le résultat ne renseigne finalement que sur le comportement asymptotique de $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$ lorsque U_0 devient très grand.

(iv) Impossibilité de trouver l'optimum à partir d'une telle approche. En quoi est-elle défaillante ?

Il est possible, par des arguments physiques simples, de se faire une idée du comportement de $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$ avec U_0 , lorsqu'on diminue U_0 . Nous savons en particulier que l'énergie cinétique moyenne va finir par augmenter, lorsque U_0 devient assez faible : le refroidissement Sisyphe est à seuil, comme l'a montré la discussion du §1c, et $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$ diverge lorsque U_0 se rapproche de $6\beta E_R$. Nous en déduisons donc que $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$ atteint sa valeur optimale pour une valeur finie de U_0 , comprise entre le seuil et la région du comportement linéaire donnée par (I1d - 13). Nous attendons d'ailleurs que $\langle p^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ optimum reste supérieur à $\hbar k$. En effet, comme nous l'avons déjà signalé, dans le refroidissement Sisyphe, un atome donné décrit en permanence des cycles de fluorescence, avec un taux de l'ordre de $\frac{1}{2} \Gamma s_0$: ce refroidissement tombe donc sous le coup d'un argument très général (voir le II§1 et [32]), selon lequel les processus d'émission spontanée limitent la cohérence spatiale atomique $\Delta\xi$ à des valeurs petites devant $1/k$, ce qui en retour conduit à des distributions en impulsions d'écart quadratique moyen $\Delta p \gg \hbar k$. Une telle prédiction ne s'applique pas au schéma des résonances noires [33-35] dans lequel l'atome peut rester très longtemps sans émettre

de photon de fluorescence.

En conclusion, à cette étape de notre démarche, nous considérons comme raisonnable l'affirmation suivante : l'approche semi-classique traditionnelle ne donne pas l'optimum du refroidissement Sisyphe, non pas parce que celui-ci correspond à une distribution en impulsion trop étroite en unités de $\hbar k$ pour être décrite semi-classiquement, mais parce que cet optimum se trouve en dehors du régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$. Ce serait donc le mot traditionnel qu'il faut rejeter ici. Il est en tout cas nécessaire, pour accéder à la limite du refroidissement Sisyphe, de disposer d'une approche qui n'est plus soumise à la condition $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$. Nous nous sommes tourné alors vers l'approche la plus rigoureuse et la plus fiable dans la recherche des basses températures, qui consiste à traiter quantiquement le mouvement du centre de masse atomique. Nous donnons une idée de ce traitement au §1 suivant, et nous estimons qu'il est intéressant d'exposer déjà une partie des résultats obtenus, mettant en lumière les limitations de l'approche semi-classique traditionnelle. Nous représentons sur la fig. I-4a le comportement de l'énergie cinétique moyenne en fonction de U_0 en unité d'énergie de recul. Le calcul est effectué à $\delta = -2\Gamma$, pour un atome ayant la masse du césium (c'est-à-dire que $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2} = 1285$), dans l'approximation de faible puissance ($s_0 \ll 1$) et en négligeant le déplacement du centre de masse pendant le temps que l'atome passe dans l'état excité ($k|v| \ll \Gamma$). Les résultats présentés traduisent donc seulement l'effet des nouveaux mécanismes, en l'absence de refroidissement Doppler. De plus, le diagramme d'émission spontanée a été simplifié (voir IV§1). La droite représente la direction asymptotique donnée par (I1d - 13). Notons que les valeurs du paramètre de saturation correspondant aux puits les plus profonds sur la fig. I-4a ne justifient plus notre approximation de faible puissance ($s_0 = 0.29$ pour $U_0 = 1000E_R$). Cette difficulté, qui n'enlève en rien à la fig. I-4a son rôle pédagogique, traduit le fait que le domaine dans l'espace des paramètres vérifiant la double condition $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$ et $s_0 \ll 1$ est restreint, comme il apparaît clairement sur la fig. I-4b. Nous avons représenté sur cette figure, en diagramme log – log et pour la masse du césium, les courbes donnant $s_0 = 1$, $\Omega_{\text{osc}} \tau_p = 1$ et le seuil de normalisabilité correspondant à la véritable distribution d'émission spontanée, pour les distributions en impulsion obtenues par les seuls nouveaux mécanismes de refroidissement. Dans la suite, le domaine de validité de l'approche semi-classique traditionnelle est qualifié de régime "sautant" (les atomes subissent plusieurs transitions $+1/2 \longleftrightarrow -1/2$ pendant une période d'oscillation au fond des puits). Le domaine qui échappe à l'approche semi-classique traditionnelle ($\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$), et qui contient par ailleurs les distributions en vitesse les plus froides, est qualifié au contraire de régime "oscillant".

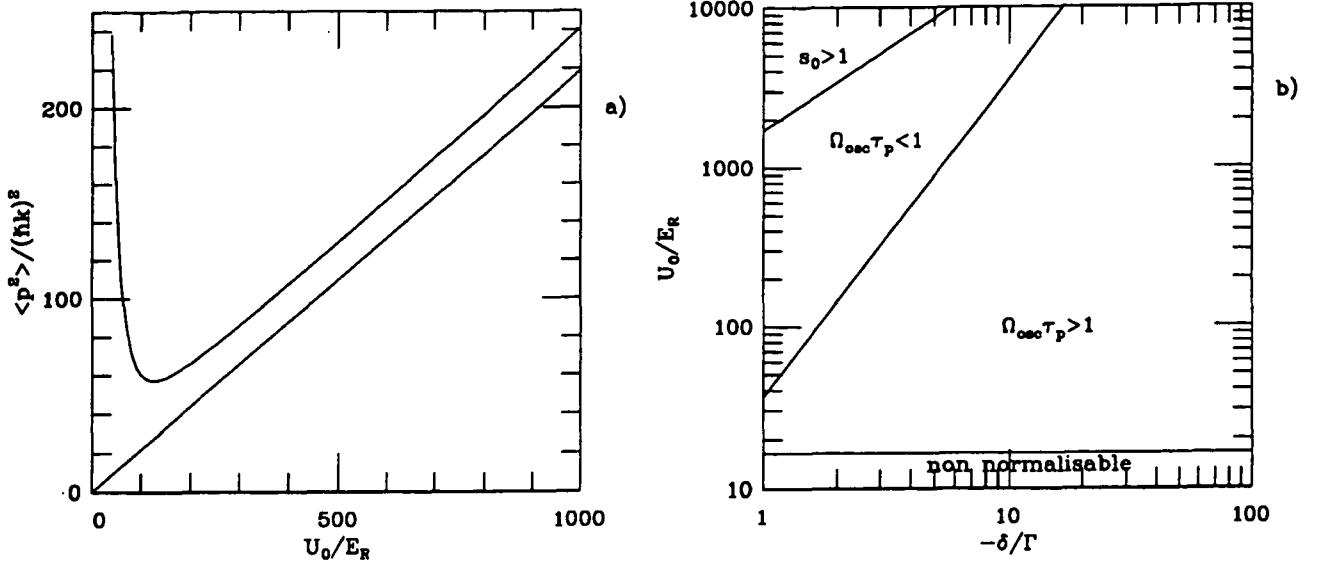


Fig. I-4a : Energie cinétique moyenne dans l'état stationnaire en fonction de la profondeur des puits U_0 . La courbe représente les résultats quantiques, la droite correspond au comportement asymptotique prévu par l'approche semi-classique traditionnelle (cf. (I1d - 13)). La masse est celle du césium ($\frac{M\Gamma}{\hbar k^2} = 1285$) et le désaccord vaut $\delta = -2\Gamma$.

Fig. I-4b : Différents régimes du mouvement des atomes dans la configuration Sisyphe, en fonction du désaccord atome-laser et de la profondeur des puits U_0 , pour la masse du césium. Les tirets correspondent au désaccord $\delta = -2\Gamma$.

e) Comment aller plus loin et obtenir l'optimum du refroidissement Sisyphé

L'obtention de l'optimum du refroidissement Sisyphé par l'approche quantifiant le mouvement du centre de masse atomique constitue la contribution originale de notre travail [19]. Après une brève description de cette approche, nous indiquons quelles sont les valeurs des paramètres qui, d'après notre traitement, conduisent aux distributions les plus froides. Nous expliquons ensuite comment ces équations quantiques, écrites en représentation de Wigner, permettent de donner un sens précis à la notion d'approche semi-classique. Nous indiquons la forme des équations semi-classiques portant sur $\Pi_+(z, p)$ et $\Pi_-(z, p)$ et nous mentionnons la possibilité de réduire ce système à une équation intégro-différentielle dans la limite $\Omega_{osc}\tau_p \gg 1$ (donc lorsque $T_{int} \gg T_{ext}$).

(i) Traitements entièrement quantiques. Grandes lignes et résultats

Donnons une idée de ce traitement entièrement quantique du refroidissement, exploité largement dans la suite de ce travail. La matrice densité σ , représentant l'état de l'atome couplé au rayonnement, agit maintenant également sur les degrés de liberté atomiques externes. Si l'on choisit comme base de ces états externes les ondes planes $|p\rangle$ d'impulsion p (selon l'axe de propagation des ondes laser, Oz), σ est caractérisé dans l'état fondamental par tous les éléments de matrice $\langle m, p | \sigma | m', p' \rangle$ avec $m, m' = \pm 1/2$. Le mouvement libre du centre de masse est pris en compte par le terme d'énergie cinétique $\frac{P^2}{2M}$ dans le hamiltonien atomique, où P désigne l'opérateur quantité de mouvement totale de l'atome (toujours selon Oz). Les facteurs de phase e^{ikz} et e^{-ikz} intervenant dans le couplage atome-laser donnent naissance, dans le point de vue entièrement quantique, aux opérateurs e^{ikZ} et e^{-ikZ} , où Z est l'opérateur position du centre de masse atomique selon Oz . Ces opérateurs translatent en impulsion le centre de masse de $\hbar k$ et $-\hbar k$ respectivement ; ils traduisent les changements d'impulsion de l'atome accompagnant l'absorption ou l'émission d'un photon laser. Le couplage de l'atome avec les modes initialement vides du rayonnement (processus d'émission spontanée) est responsable de l'évolution non hamiltonienne de la matrice densité atomique σ , et le changement d'impulsion de l'atome consécutif à l'émission d'un photon de fluorescence d'impulsion $\hbar k$, selon Oz est là aussi pris en compte par l'opérateur de translation en impulsion $e^{-ik_z Z}$. Les équations de Bloch optiques, dites généralisées, qui gouvernent l'évolution temporelle de σ , contiennent ainsi toute la dynamique atomique, aussi bien interne qu'externe. Les processus responsables, dans l'image semi-classique que nous avons donnée, de la force moyenne subie par l'atome et des fluctuations de cette force, sont automatiquement pris en compte.

Voyons ensuite ce qu'apporte ce traitement quantique dans le cas du refroidissement Sisyphe. D'un point de vue quantitatif, nous retenons ici simplement (voir le chapitre IV) qu'il donne très précisément la valeur minimale de $\langle p^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$:

$$\inf \langle p^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 5.5\hbar k \quad (\text{IIe - 1})$$

obtenue pour une profondeur de puits $U_0 = 95E_R$, à la limite d'un désaccord très grand entre atome et laser ($|\delta| \gg \Gamma$). Nous constatons que l'optimum se situe dans le régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$, qui est l'extrême opposé du régime accessible à l'approche semi-classique traditionnelle ($\Omega_{\text{osc}}\tau_p \ll 1$).

(ii) Limite $T_{\text{int}} \gg T_{\text{ext}}$. Quantification du mouvement atomique dans les puits de potentiel lumineux

Par ailleurs, il faut souligner que l'approche entièrement quantique du refroidissement apporte également un éclairage physique nouveau au problème. Dans le régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$, l'atome a le temps d'effectuer au moins une oscillation au fond des puits de potentiel $E_{\pm}(z)$ avant d'être pompé optiquement sur l'autre sous-niveau interne de l'état fondamental. Il est donc nécessaire de décrire correctement ce mouvement d'oscillation des atomes dans les puits. Le traitement quantique prend en compte, naturellement, la quantification de l'énergie associée au hamiltonien externe :

$$H_{\pm 1/2} = \frac{P^2}{2M} + E_{\pm}(Z) \quad (\text{IIe - 2})$$

Comme le potentiel $E_{\pm}(z)$ est périodique spatialement, le spectre de $H_{\pm 1/2}$ est constitué d'une alternance de bandes d'énergies permises et interdites. Le traitement quantique prévoit que, dans le régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$, la matrice densité atomique stationnaire restreinte dans l'état fondamental, soit σ^{st} , est essentiellement diagonale dans la base des états propres du hamiltonien $H = \sum_{m=\pm 1/2} |m\rangle \langle m| H_m$, où $H_{\pm 1/2}$ est donné par (IIe - 2). Dans la situation optimale pour le refroidissement ($U_0 \simeq 100E_R$), seulement six bandes d'énergie permises se trouvent à l'"intérieur" du puits $E_{\pm}(z)$ (c'est-à-dire qu'elles ont une énergie inférieure à $-\frac{U_0}{2}$), et plus de la moitié des atomes en moyenne se trouvent dans les deux bandes les plus basses en énergie dans l'état stationnaire. Ceci suggère que le caractère discret de l'énergie serait observable sur le spectre de fluorescence ou le signal Raman d'une mélasse optique [18,36]. On attend un spectre de raies centrées en des pulsations $\omega_{n,n'}$ correspondant à une différence d'énergie entre les états de deux bandes différentes n et n' (ce qui donne $\omega_{n,n'} \simeq \Omega_{\text{osc}}$ pour les bandes profondes adjacentes) avec une largeur de l'ordre de l'inverse du temps de pompage, soit $\frac{1}{\tau_p}$. La condition $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$ assure que ces raies sont bien séparées $\left(|\omega_{n,n'}| \gg \frac{1}{\tau_p}\right)$, ce qui constitue d'ailleurs une interprétation entièrement quantique de cette condition ! De telles considérations ne sont bien sûr pas naturelles dans le traitement semi-classique du refroidissement Sisyphe. Elles le sont par contre tout à fait dans le cadre du refroidissement des ions piégés ! [8,21,22,24]

On peut se demander si les résultats précédemment donnés sont la preuve que les états atomiques externes dans les mélasses optiques les plus froides sont essentiellement quantiques, ce qui interdirait de mettre en place un traitement semi-classique, quel qu'il

soit, du refroidissement dans le régime oscillant $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$. Nous avons indiqué par (I1d - 1) à quelle condition on pouvait ne pas quantifier le mouvement externe. Cette condition, qui n'est pas en conflit avec (I1e - 1), est néanmoins seulement qualitative, et il était difficile de savoir a priori que la limite (I1e - 1) est accessible semi-classiquement, comme nous allons l'expliquer maintenant.

(iii) Comment obtenir des équations semi-classiques à partir du traitement entièrement quantique

Montrons d'abord comment obtenir, à partir des équations de Bloch optiques généralisées portant sur σ , les équations semi-classiques complètes. Nous voulons dire, en les qualifiant de complètes, que ces équations, contrairement à (I1b - 5), prennent en compte aussi les processus de chauffage évoqués au §1c. Ces équations agissent sur les distributions des atomes dans l'espace des position-impulsion $\Pi_{\pm}(z, p, t)$, et l'on s'attend à ce qu'elles comportent un terme de type diffusion en $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial p^2}$. Pour les obtenir, écrivons les équations quantiques dans une représentation qui fasse apparaître l'équivalent, quantique, des distributions $\Pi_{\pm}(z, p, t)$. La représentation dite de Wigner est, de ce point de vue, parfaitement adaptée [37] ; nous rappelons l'expression W de la matrice densité σ dans cette représentation :

$$W(z, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \langle p + \frac{q}{2} | \sigma | p - \frac{q}{2} \rangle e^{izq/\hbar} \quad (\text{I1e - 3})$$

Notons que l'opérateur $W(z, p, t)$ n'agit plus que sur les degrés de liberté atomiques internes. Les éléments de matrice diagonaux $W_m(z, p, t)$ dans la base $|m = \pm 1/2\rangle$ donnent pour chaque sous-niveau une quasi-distribution de probabilité dont la limite semi-classique correspond à $\Pi_m(z, p, t)$. Les équations de Bloch optiques généralisées ramenées dans l'état fondamental (voir le II§1) et écrites en représentation de Wigner donnent l'évolution temporelle de $W_m(z, p, t)$. On constate alors que ces équations couplent $W_m(z, p, t)$ à $W_{m'}(z, p \pm \hbar k, t)$ (action du laser sur l'impulsion de l'atome) et à tous les $W_{m''}(z, p \pm \hbar k + \hbar k_s)$, $-\hbar k \leq \hbar k_s \leq \hbar k$ (effet d'un cycle absorption d'un photon laser-émission spontanée d'un photon d'impulsion $\hbar k_S$ selon Oz). Si l'on sait que la condition (I1d - 1) est remplie, il est légitime de développer ces équations aux différences finies en puissances de $\hbar k$:

$$W(z, p + \hbar k) \simeq W(z, p) + \hbar k \partial_p W(z, p) + \frac{(\hbar k)^2}{2} \partial_p^2 W(z, p) + \dots \quad (\text{I1e - 4})$$

On identifie ensuite $W_m(z, p)$ et $\Pi_m(z, p)$, ce qui conduit, à l'ordre 2 inclus en $\hbar k$, aux équations suivantes pour $\Pi_+(z, p, t)$:

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{p}{M} \partial_z + \left(-\frac{dE_+}{dz} \right) \partial_p \right) \Pi_+(z, p, t) = \\ \gamma_{-\rightarrow+}(z) \Pi_-(z, p, t) - \gamma_{+\rightarrow-}(z) \Pi_+(z, p, t) \\ + \partial_p^2 (D_{+\rightarrow+}(z) \Pi_+(z, p, t) + D_{-\rightarrow+}(z) \Pi_-(z, p, t)) \end{aligned} \quad (\text{I1e - 5})$$

L'équation d'évolution correspondante pour $\Pi_-(z, p, t)$ se déduit de (I1e - 5) par changement des indices \pm en leur opposé \mp . Les termes issus du développement (I1e - 4) à l'ordre 0 en $\hbar k$ correspondent aux équations de Bloch classiques (I1b - 5) écrites pour un atome de vitesse constante, puisque $\partial_t + \frac{p}{M} \partial_z = \frac{d}{dt}$ pour une particule libre. Les termes obtenus à l'ordre 1 en $\hbar k$ sont en $\partial_p \Pi_m$: ils décrivent l'effet sur le mouvement de l'atome de la force radiative moyenne qu'il subit, soit ici $-\frac{d}{dz} E_\pm(z)$, puisque les forces de pression de radiation se compensent en moyenne. On retrouve bien $\frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{p}{M} \partial_z + \left(-\frac{dE_\pm}{dz} \right) \partial_p$ pour une particule se déplaçant dans le potentiel $E_\pm(z)$. Finalement, les termes à l'ordre 2 en $\hbar k$ donc en $\partial_p^2 \Pi_m$ sont nouveaux et ne peuvent pas être déduits de (I1b - 5). Les coefficients de diffusion en impulsion correspondants $D_{m \rightarrow m'}(z)$, d'ordre de grandeur $(\hbar k)^2 \Gamma s_0$, décrivent l'effet de chauffage selon Oz des transitions permises par les cycles de fluorescence du sous-niveau m vers le sous-niveau m' . Donnons l'expression de ces coefficients, compte tenu de la distribution dipolaire de l'impulsion des photons de fluorescence :

$$D_{\pm \rightarrow \pm}(z) = (\hbar k)^2 \Gamma s_0 \frac{7}{90} [5 \pm \cos 2kz] \quad (\text{I1e - 6a})$$

$$D_{\mp \rightarrow \pm}(z) = (\hbar k)^2 \Gamma s_0 \frac{1}{90} [6 \mp \cos 2kz] \quad (\text{I1e - 6b})$$

Nous constatons que ces coefficients dépendent faiblement de z et qu'ils ne s'annulent jamais, quelle que soit la position de l'atome dans le champ laser. Cette dernière propriété, que nous avons déjà signalée au §1b pour les processus de chauffage sans changement de sous-niveau, peut paraître surprenante dans le cas du terme croisé $D_{\pm \rightarrow \mp}(z)$, si l'on tient le raisonnement naïf suivant. Considérons un atome de vitesse moyenne nulle, dans un état externe très localisé autour de $z = 0$, suffisamment lourd pour qu'il y reste pendant

un grand nombre de cycles de pompage optique. En $z = 0$, le champ laser est purement σ_- : au bout de quelques temps de pompage τ_p , l'atome se retrouve dans le sous-niveau fondamental $m = -1/2$. Il décrit alors seulement des cycles absorption d'un photon laser σ_- et émission d'un photon de fluorescence σ_- : aussi a-t-on $D_{--+}(0)$ non nul. On s'attend par contre à obtenir $D_{--+}(0) = 0$, puisque l'atome ne peut pas faire de transition $-1/2 \rightarrow +1/2$ en présence de lumière purement σ_- . L'expression (I1e - 6b) prédit au contraire une valeur non nulle pour D_{--+} . Ce paradoxe est identique à celui qui apparaît lorsqu'on étudie la diffusion en impulsions d'un atome à deux niveaux localisé au nœud d'une onde stationnaire : dans ce cas-là, le coefficient de diffusion n'est pas nul non plus, bien que l'intensité lumineuse soit nulle en ce point. En fait, il n'est pas légitime de considérer l'atome comme infiniment localisé spatialement, et l'extension spatiale, aussi petite que l'on veut mais finie, de la matrice densité externe fait que l'atome à deux niveaux n'est pas dans l'obscurité absolue, ou que notre atome, soumis au refroidissement Sisyphe, ne voit pas de la lumière totalement σ_+ ou totalement σ_- . Nous renvoyons à [25] pour une discussion approfondie de ce phénomène.

Utilisons maintenant les expressions (I1e - 6) pour retrouver une partie des résultats donnés dans le §1c et le §1d.

Considérons d'abord le mouvement d'atomes d'énergie très au-dessus des puits de potentiel $E_{\pm}(z)$, c'est-à-dire avec une énergie cinétique bien supérieure à U_0 et à $\frac{1}{2}Mv_c^2$. Comme nous l'avons fait pour déterminer le seuil du refroidissement Sisyphe, nous pouvons négliger la dépendance spatiale de $\Pi_{\pm}(z, p, t)$ et considérer que les atomes se retrouvent avec la même probabilité sur les deux sous-niveaux :

$$\Pi_+(z, p, t) \simeq \Pi_-(z, p, t) \simeq \frac{1}{2}\Pi(p, t) \quad \text{si } p \rightarrow \infty \quad (\text{I1e - 7})$$

Sous cette hypothèse, le coefficient de diffusion D_{∞} qui caractérise, pour des atomes très rapides, l'augmentation de la valeur moyenne $\frac{1}{2}\langle p^2 \rangle$ sous l'influence des processus de chauffage mentionnés au §1c, est donné par la moyenne spatiale des $D_{m \rightarrow m'}$ avec des poids égaux à $1/2$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\langle p^2 \rangle}{2} \right] = D_{\infty} = \frac{1}{2} \sum_{m, m'=\pm 1/2} \langle D_{m \rightarrow m'}(z) \rangle = \frac{41}{90}(\hbar k)^2 \Gamma s_0 \quad (\text{I1e - 8})$$

en conformité avec (I1c - 11).

Retrouvons ensuite l'expression du coefficient de diffusion $D_1(z)$ décrivant la diffusion en impulsions d'un atome au repos en z due aux cycles de fluorescence, à l'exclusion des fluctuations de la force dipolaire $-\frac{d}{dz}E_{\pm}$. Il faut pour cela pondérer, dans la somme donnant $D_1(z)$, la contribution de $D_{m \rightarrow m'}(z)$ par la population stationnaire $\Pi_m^{\text{st}}(z)$ explicitée dans (I1b - 7b). On obtient ainsi :

$$D_1(z) = \sum_{m, m'=\pm 1/2} \Pi_m^{\text{st}}(z) D_{m \rightarrow m'}(z) = (\hbar k)^2 \Gamma s_0 \left[\frac{11}{30} + \frac{4}{45} \sin^2 2kz \right] \quad (\text{I1e - 9})$$

ce qui coïncide avec l'expression (I1d - 9). Nous avons donc montré, sur deux exemples extrêmes (atome au repos et atome à grande vitesse), que les équations d'évolution (I1e - 5) permettent de retrouver très rapidement une partie des résultats obtenus par des arguments physiques simples aux §1c et §1d.

Nous sommes maintenant en mesure de définir très précisément ce que nous appelons approche semi-classique du refroidissement. Les équations d'évolution constituant cette approche sont obtenues par développement au second ordre en $\hbar k$ des équations du traitement entièrement quantique écrites en représentation de Wigner. Dans les situations que nous étudions, l'unique petit paramètre de ce développement est $\frac{\hbar k}{\Delta p}$, où Δp est l'impulsion atomique quadratique moyenne. A priori, les temps d'évolution typiques des variables atomiques internes, soit T_{int} , et des variables externes, soit T_{ext} , peuvent être dans un rapport quelconque. La résolution de ces équations (I1e - 5) et la comparaison avec les prédictions du traitement quantique permettent de déterminer sans ambiguïté l'origine de l'échec de l'approche semi-classique traditionnelle exposée au §1d : cet échec ne vient pas du traitement classique du mouvement atomique (qui nécessite $\Delta p \gg \hbar k$), mais de l'élimination adiabatique de l'état atomique interne (qui réclame $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$), comme nous allons l'exposer.

(iv) Quelques approximations permettant de résoudre les nouvelles équations semi-classiques

Pour obtenir les prédictions semi-classiques, nous avons fait appel essentiellement à deux méthodes. La première associe aux équations (I1e - 5) un processus stochastique classique, qui est le mouvement brownien d'une particule classique dans le bipotentiel $E_{\pm}(z)$. Il est nécessaire pour cela de négliger le phénomène de type "diffusion en impulsions aux nœuds d'une onde stationnaire" que nous avons signalé précédemment. Ceci revient à annuler dans (I1e - 5) les termes de diffusion croisés $D_{\pm \rightarrow \mp}(z)$. La petitesse de ces termes

négligés devant les coefficients $D_{\pm \rightarrow \pm}(z)$ permet d'espérer qu'une telle approximation n'a rien de dramatique. Ce processus stochastique classique est ensuite étudié par simulation numérique Monte-Carlo du mouvement des particules. Le temps est discrétisé avec un pas δt . L'utilisation d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires permet de faire sauter les particules d'un potentiel $E_{\pm}(z)$ à l'autre, en accord avec la valeur des taux de pompage $\gamma_{\pm \rightarrow \mp}(z)$, et de décrire le chauffage interne à chaque sous-niveau par l'action d'une force aléatoire f_{\pm} , de moyenne nulle et dont la variance en z est reliée à la valeur des coefficients de diffusion en impulsion $D_{\pm \rightarrow \pm}(z)$:

$$\frac{1}{2} \langle f_m^2 \rangle(z) \delta t = D_{m \rightarrow m}(z), \quad m = \pm 1/2 \quad (\text{I1e - 10})$$

Les résultats obtenus pour l'état stationnaire sont en bon accord avec la résolution numérique des équations quantiques, comme on peut le constater sur la fig. 4 de l'appendice AIV.

La deuxième méthode, plus originale, ramène la résolution des équations semi-classiques (I1e - 5) à la détermination d'une seule fonction inconnue, en se plaçant dans la limite $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$. Comme nous l'établissons dans le chapitre IV, les distributions stationnaires $\Pi_m(z, p)$ dépendent de l'énergie seulement, dans le régime oscillant :

$$\Pi_m(z, p) \simeq \Phi \left(\frac{p^2}{2M} + E_m(z) \right) \quad \text{lorsque} \quad \Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1 \quad (\text{I1e - 11})$$

La variable pertinente dans ce régime n'est plus la vitesse des atomes mais leur énergie totale E . En effet, entre deux transitions $1/2 \longleftrightarrow -1/2$, E augmente lentement, sous l'effet des processus de chauffage qui préservent l'état interne. Par contre, la marche au hasard sur l'énergie E que représente la succession des changements d'état interne se fait avec des pas de l'ordre de grandeur de la profondeur des puits U_0 , ce qui interdit l'établissement direct d'une équation aux dérivées partielles en énergie de type Fokker-Planck mais conduit à une difficile équation intégrale sur Φ , puisque les distributions stationnaires attendues ont une largeur en énergie inférieure à U_0 . La résolution numérique de cette équation intégrale permet de retrouver les résultats quantiques de manière satisfaisante (cf. fig. IV-4 du chapitre IV).

Il est maintenant clair que l'approche semi-classique traditionnelle ne peut pas prévoir l'optimum du refroidissement Sisyphe, non pas parce qu'elle est semi-classique, mais parce qu'elle se place dans le régime $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$, qui ne contient pas les distributions les plus

froides. Remarquons alors que l'impossibilité de réduire les équations semi-classiques, soit par l'élimination adiabatique traditionnelle de l'état interne, soit par l'utilisation d'une autre propriété particulière du système physique, enlève à ces équations beaucoup de leur intérêt. En effet, pour les résoudre numériquement par exemple, on est amené à représenter ∂_p et ∂_p^2 par des différences finies, ce qui conduit à un problème numériquement équivalent à la résolution des équations quantiques lorsque Δp vaut quelques $\hbar k$! Il devient en fait plus avantageux de travailler directement avec la quantification du mouvement atomique, en cherchant les situations limites intéressantes. Comme nous l'avons déjà suggéré, l'introduction de la base propre du hamiltonien complet H (cf. (I1e - 2)) est parfaitement pertinente dans le régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$, et donne accès au spectre de fluorescence de la mélasse optique, ce qui, dans l'approche semi-classique, n'est pas naturel conceptuellement.

2 - CONFIGURATION $\sigma_+ - \sigma_-$, DITE EN “TIRE-BOUCHON”

a) Description de la configuration étudiée

(i) Polarisations des ondes laser

Le champ laser est obtenu par superposition de deux ondes planes se propageant selon Oz dans des sens opposés, avec une polarisation circulaire σ_+ selon Oz pour l'onde $+k\mathbf{e}_z$, et une polarisation circulaire σ_- pour l'onde $-k\mathbf{e}_z$ [38]. Le champ électrique laser au point z est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(z, t) &= \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(z) e^{-i\omega_L t} + \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(z) e^{i\omega_L t} \\ \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(z) &= \mathcal{E}_0 (e^{ikz} \mathbf{u}_+ + e^{-ikz} \mathbf{u}_-) \end{aligned}\quad (\text{I2a - 1})$$

La base $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$ des polarisations circulaires est définie par (I1a - 2). En revenant aux axes cartésiens (Ox, Oy), on obtient pour l'amplitude de fréquence positive du champ :

$$\vec{\mathcal{E}}^{(+)}(z) = -i\mathcal{E}_0 \sqrt{2} [\sin kz \mathbf{e}_x + \cos kz \mathbf{e}_y] \quad (\text{I2a - 2})$$

En tout point, le champ électrique total est donc polarisé linéairement selon $\epsilon(z) = \sin kz \mathbf{e}_x + \cos kz \mathbf{e}_y$, avec une amplitude indépendante de z (voir fig. I-5). Remarquons, et ceci aura des conséquences importantes dans la suite, que $\epsilon(z)$ se déduit de $\epsilon(0)$ par la rotation d'axe Oz et d'angle $-kz$. L'extrémité de $\epsilon(z)$ décrit une hélice de pas spatial λ , d'où l'appellation “tire-bouchon” de cette configuration.

(ii) Transition atomique

Cherchons maintenant la transition atomique $j \rightarrow j + 1$ la plus simple présentant les nouveaux mécanismes de refroidissement dans ce champ laser. Considérons d'abord le cas d'une transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Comme l'analyse du refroidissement Sisyphe l'a montré au §1 précédent, les nouveaux mécanismes reposent, pour cette transition atomique et en l'absence de lumière polarisée linéairement selon Oz , sur la modulation spatiale des déplacements lumineux $E_{\pm 1/2}(z)$ et des taux de pompage $\gamma_{\pm 1/2 \rightarrow \mp 1/2}(z)$. Nous avons

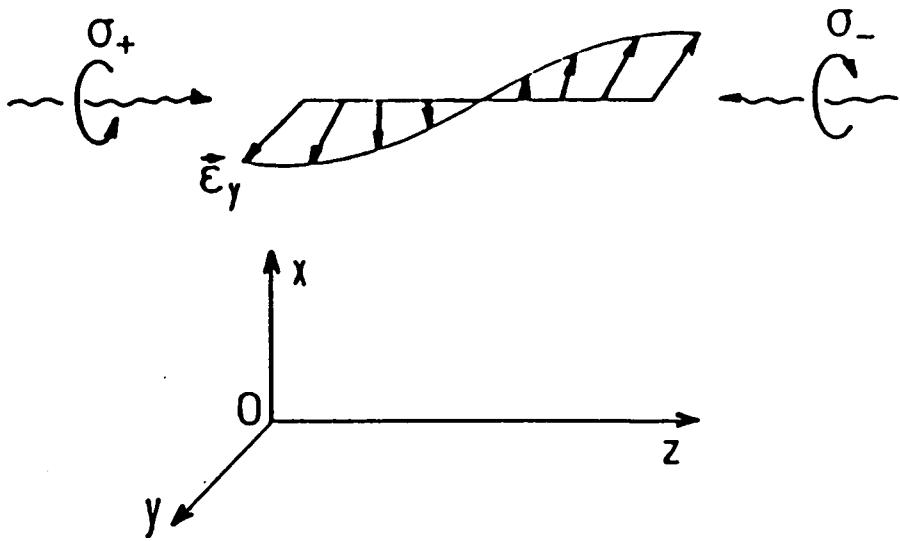


Fig. I-5 : Champ électrique dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$.

constaté que cette modulation spatiale provenait de la dépendance en z de l'intensité des composantes du champ électrique selon σ_+ et σ_- . Or, dans la configuration laser que nous étudions, ces composantes ont seulement une dépendance spatiale en phase ($e^{\pm ikz}$), mais pas en module. La transition $1/2 \rightarrow 3/2$ n'y subit donc que du refroidissement Doppler. Comme nous allons le présenter en détail, la transition $1 \rightarrow 2$ est la plus simple bénéficiant des nouveaux mécanismes. Nous indiquons sur la fig. I-6 les éléments de matrice de l'opérateur dipôle électrique atomique réduit pour cette transition (coefficients de Clebsch-Gordan), par exemple dans la base $\{|g\ m\rangle_z, |e\ m'\rangle_z\}$ des sous-niveaux fondamentaux et excités de moment cinétique bien défini selon Oz . Nous nous limitons dans la suite aux situations de faible saturation de la transition par le laser :

$$s = \frac{\frac{\Omega^2}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \ll 1 \quad (\text{I2a - 3})$$

Dans (I2a - 3), Ω désigne la pulsation de Rabi associée à chacune des ondes laser σ_+ et σ_- . L'hypothèse de faible saturation permet, selon la procédure habituelle, de ramener la dynamique atomique dans l'état fondamental.

b) Dynamique interne pour un atome de vitesse v

Nous allons considérer la situation d'un atome de vitesse v , en négligeant les variations de v en présence des forces radiatives. Ceci permet d'étudier facilement l'effet du mouvement sur la dynamique atomique interne et donne accès à des images physiques

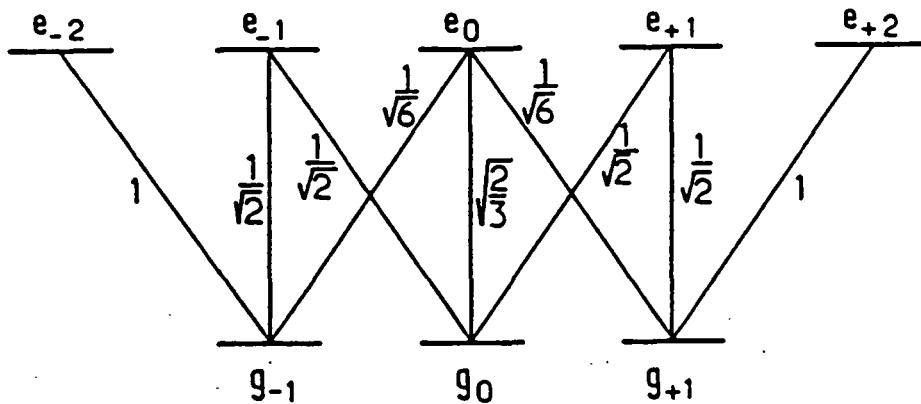


Fig. I-6 : Coefficients de Clebsch-Gordan pour la transition atomique $j = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

simples pour les nouveaux mécanismes de refroidissement. Une telle approche est réaliste, bien sûr, à condition qu'un régime interne forcé par le mouvement puisse s'établir avant que la vitesse v ne change appréciablement : elle réclame une séparation nette des temps d'évolution des variables internes T_{int} et externes T_{ext} , soit $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$. Nous reviendrons plus loin sur cette condition de validité.

(i) Référentiel tournant

Le mouvement de notre atome de vitesse v selon Oz est simplement déterminé par $z(t) = z_0 + vt$. L'atome voit donc à l'instant t un champ électrique à la pulsation ω_L polarisé linéairement selon $\epsilon(vt + z_0)$, cette polarisation tournant au cours du temps autour de l'axe Oz à la pulsation $-k \frac{dz}{dt} = -kv$. Il est naturel alors d'introduire le référentiel (OX, OY) en rotation autour d' Oz à la même pulsation $-kv$ et coïncidant avec (Ox, Oy) en $z = 0$. Dans ce référentiel, l'atome voit d'abord un champ électrique $E(t)$ de direction fixe, polarisé linéairement selon OY et qui dépend sinusoïdalement du temps à la pulsation ω_L . Il voit de plus un champ magnétique fictif B , uniforme, constant, dirigé selon Oz , proportionnel à la vitesse, et qui est le terme inertiel associé au changement de référentiel non galiléen (cf. théorème de Larmor). Il peut être établi simplement [16] que le terme de couplage entre l'atome et ce champ magnétique fictif est kvj_z , où j_z est l'opérateur moment cinétique atomique interne selon Oz . Ce changement de référentiel a d'abord le mérite de faire disparaître toute dépendance explicite en position, ce qui donne à la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ des propriétés particulières, dont le chapitre III tire profit pour le traitement quantique du refroidissement. Nous allons voir de plus qu'à E et B sont associées des bases adaptées distinctes, et que l'essentiel des caractéristiques du refroidissement dans

$\sigma_+ - \sigma_-$ provient de ce conflit entre \mathbf{E} et \mathbf{B} .

(ii) Action du champ électrique

Examinons l'effet du champ électrique $\mathbf{E}(t)$ seul sur la dynamique atomique interne, effet que l'on peut considérer comme étant Stark alternatif. La polarisation du champ électrique selon OY rend le système invariant par rotation d'axe OY et donne à $\mathbf{E}(t)$ une action particulièrement simple dans la base des états atomiques de moment cinétique bien défini selon OY , soit $\{|m\rangle_Y, m = 0, \pm 1\}$. Cette base est la base propre des déplacements lumineux : du carré des amplitudes associées aux transitions π ($\Delta m = 0$) sur la fig. I-6, on déduit simplement que les états $|\pm 1\rangle_Y$ sont déplacés de $\frac{1}{2}\hbar\delta s$, et que l'état $|0\rangle_Y$ est déplacé de $\frac{2}{3}\hbar\delta s$. La dégénérescence $m \longleftrightarrow -m$ n'est pas levée par $\mathbf{E}(t)$, ce qui est le produit d'une autre symétrie de l'effet Stark, l'invariance par réflexion de plan contenant l'axe OY . De plus, les termes décrivant l'effet de l'émission spontanée sur la matrice densité atomique dans les équations de Bloch optiques habituelles sont entièrement invariants par rotation. Ces états ont donc également un taux total de départ par pompage optique parfaitement défini $\left(\frac{1}{2}\Gamma s \text{ pour } |\pm 1\rangle_Y, \frac{2}{3}\Gamma s \text{ pour } |0\rangle_Y\right)$. Finalement, cette symétrie d'axe OY conduit, en présence de $\mathbf{E}(t)$ seul, c'est-à-dire pour un atome de vitesse nulle, à une matrice densité atomique stationnaire σ^{st} diagonale dans cette base. Les populations $\Pi_{m,Y}$ correspondantes sont données au §2c (cf. (I2c - 7)).

(iii) Prise en compte du champ magnétique fictif

Passons à l'étude du champ magnétique fictif \mathbf{B} , dirigé selon Oz . Son action est simple dans la base des états atomiques de moment cinétique bien défini selon Oz , soit $\{|m\rangle_z, m = 0, \pm 1\}$: le niveau $|m\rangle_z$ est simplement déplacé en énergie de $m\hbar kv$. La dégénérescence $m \longleftrightarrow -m$ est ainsi levée par \mathbf{B} . Examinons l'effet du champ électrique dans cette base. Sous l'action de $\mathbf{E}(t)$, un atome initialement dans l'état $|+1\rangle_z$ n'y reste pas : il est couplé par les processus absorption d'un photon σ_- – émission stimulée d'un photon σ_+ à l'état $|{-1}\rangle_z$, et les pulsations associées à ce couplage correspondent aux déplacements lumineux précédemment évoqués, donc sont d'ordre de grandeur δs . Dans les équations de Bloch optiques, ceci se traduit, dans la base selon Oz , par un couplage de grandeur δs entre les populations des niveaux $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ via les cohérences fondamentales $_z\langle +|\sigma|-\rangle_z$ et $_z\langle -|\sigma|+\rangle_z$, ces cohérences ayant par ailleurs une pulsation propre d'évolution $\mp 2kv$ sous l'influence de \mathbf{B} .

A première vue, il pourrait sembler pertinent d'introduire, pour chaque vitesse v , la

base atomique interne diagonalisant l'action conjuguée de $\mathbf{E}(t)$ et \mathbf{B} , même si cette base ne correspond à aucune direction de quantification privilégiée. La partie hamiltonienne des équations de Bloch optiques y est alors particulièrement simple. Il n'en va pas de même malheureusement pour la partie dissipative du couplage atome-champ quantique : les processus de pompage optique, dans cette base, couplent les populations aux cohérences, et aux populations, puisque les changements de moment cinétique de l'atome consécutifs à l'émission d'un photon de fluorescence ne s'y expriment pas simplement. Nous verrons néanmoins, dans le chapitre III, que cette base est très utile dans le cas limite, dit séculaire, où les fréquences de Bohr associées à la partie hamiltonienne sont bien supérieures aux taux de pompage optique, d'ordre de grandeur Γ_s .

c) Force moyenne à nouveaux mécanismes subie par un atome de vitesse v

(i) Pression de radiation

Contrairement à la situation de Sisyphe quantique étudiée au §1, ce sont ici les forces de pression de radiation qui sont prédominantes. Ces forces proviennent, rappelons-le, des processus d'absorption-émission spontanée. Il est inexact, en général, de les obtenir comme simple somme des pressions de radiation associées à chaque onde. Néanmoins, des considérations très générales montrent qu'il est légitime de procéder ainsi lorsque les deux ondes laser ont des vecteurs d'ondes opposés, ce qui est le cas ici [25].

Nous allons utiliser simplement le fait qu'en présence de la seule onde σ_+ ou de la seule onde σ_- , les états fondamentaux $|m\rangle_z$ ont un taux total de départ par pompage optique parfaitement défini, donné, en unité de $\frac{1}{2}\Gamma_s$, par le carré de l'amplitude associée à la transition $|g\ m\rangle_z \rightarrow |e\ m+1\rangle_z$ ou $|g\ m\rangle_z \rightarrow |e\ m-1\rangle_z$ sur la fig. I-6. Dans le cas de l'onde σ_+ , le changement moyen d'impulsion après un cycle de fluorescence est $+\hbar k$, l'impulsion emportée par le photon de fluorescence étant nulle en moyenne. La force moyenne de pression de radiation associée à cette onde vaut donc :

$$F_+ = \frac{1}{2}\hbar k\Gamma_s \left[\Pi_{+,z} + \frac{1}{2}\Pi_{0,z} + \frac{1}{6}\Pi_{-,z} \right] \quad (\text{I2c - 1})$$

où $\Pi_{m,z}$ représente la population de l'état fondamental $|m\rangle_z$. Le résultat équivalent pour l'onde laser σ_- est clairement :

$$F_- = -\frac{1}{2}\hbar k\Gamma_s \left[\Pi_{-,z} + \frac{1}{2}\Pi_{0,z} + \frac{1}{6}\Pi_{+,z} \right] \quad (\text{I2c - 2})$$

ce qui conduit à la force moyenne de pression de radiation associée aux deux ondes :

$$F_{\text{pression}} = \frac{1}{2} \hbar k \Gamma s \cdot \frac{5}{6} (\Pi_{+,z} - \Pi_{-,z}) \quad (\text{I2c - 3})$$

(ii) Force stimulée

Passons au cas de la force stimulée. Elle est due à la variation d'impulsion de l'atome à l'issue des processus absorption d'un photon laser dans une onde-émission stimulée dans l'autre onde. Ces processus constituent une redistribution des photons laser d'une onde à l'autre par le système atomique. Il apparaît que la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ possède la propriété particulière, largement utilisée dans le traitement quantique du refroidissement (cf. chapitre III), de conduire à une redistribution limitée. Considérons en effet un atome soumis seulement à l'action du laser (pas d'émission spontanée). A cause de la corrélation parfaite entre l'impulsion $\pm \hbar k$ des photons laser selon Oz et leur polarisation σ_{\pm} selon le même axe, la variation de l'impulsion de l'atome à l'issue de cycles stimulés le menant de l'état fondamental à l'état fondamental, en unité de $\hbar k$, coïncide avec la variation de son moment cinétique selon Oz en unité de \hbar , donc ne peut excéder 2 en valeur absolue. Cette particularité de $\sigma_+ - \sigma_-$ explique pourquoi la force stimulée reste du même ordre de grandeur $\left(\frac{1}{2} \hbar k \Gamma s\right)$ que la pression de radiation, alors qu'elle atteint $\frac{2}{3} \hbar k \delta s_0$ dans le cas de Sisyphe quantique.

Indiquons les grandes lignes du calcul de cette force stimulée, calcul effectué en détail dans [16]. Nous savons qu'elle correspond à la moyenne, selon l'état atomique interne, de l'opposé du gradient spatial du potentiel de couplage dans l'état fondamental entre l'atome et la lumière laser. Nous avons montré au §2b précédent, que les énergies propres de ce potentiel (déplacements lumineux) ne dépendent pas du point z et que les fonctions d'onde propres se déduisent des états de moment cinétique bien défini selon Oy par la rotation d'angle $-kz$. Cette situation est exactement complémentaire de celle rencontrée dans Sisyphe quantique. La force stimulée correspond donc ici purement à un gradient spatial de fonctions d'onde, alors que c'était, pour $1/2 \rightarrow 3/2$ dans $Ox - Oy$, un pur gradient de déplacement lumineux. Le calcul conduit alors à :

$$F_{\text{stim}} = \frac{1}{2} \hbar k \delta s \cdot \frac{2}{3} \text{Im} \left[{}_z \langle -1 | \sigma | 1 \rangle_z e^{2ikz(t)} \right] \quad (\text{I2c - 4})$$

où Im désigne la partie imaginaire. Nous ne retrouvons pas à première vue sur cette expression le résultat de l'analyse physique précédente, selon laquelle F_{stim} ne dépasse pas

$\frac{1}{2}\hbar k\Gamma s$. En fait, nous devons nous placer, pour toute cette analyse semi-classique, dans la situation où l'état atomique interne atteint un régime forcé, dépendant seulement de la vitesse v de l'atome et de sa position, avant que cette vitesse n'ait eu le temps de changer significativement. Après un laps de temps de quelques $\frac{1}{\Gamma s}$, on peut montrer que pour ce régime forcé :

$$\frac{2}{3} \frac{\delta}{\Gamma} \text{Im} \left[{}_z \langle -1 | \sigma | 1 \rangle e^{2ikz(t)} \right] = \frac{1}{6} (\Pi_{+,z} - \Pi_{-,z}) \quad (\text{I2c - 5})$$

Ceci confirme notre interprétation en terme de redistribution limitée de photons entre les deux ondes laser et donne l'expression suivante pour la contribution des nouveaux mécanismes à la force moyenne totale subie par l'atome dans le régime forcé :

$$F_{\text{totale}} = F_{\text{pression}} + F_{\text{stim}} = \frac{1}{2} \hbar k \Gamma s (\Pi_{+,z} - \Pi_{-,z}) \quad (\text{I2c - 6})$$

La dernière étape consiste à calculer explicitement le régime forcé pour l'état atomique interne. Ce calcul est grandement facilité par l'introduction du référentiel tournant présenté au §2b précédent. Nous avons déjà constaté qu'après ce changement de référentiel, toute dépendance spatiale (ou temporelle via $z(t)$) disparaît explicitement, puisqu'elle est prise en compte implicitement par l'apparition du champ magnétique fictif \mathbf{B} . Notre régime forcé prend simplement l'allure, dans ce point de vue, d'un état stationnaire. Dans la suite de cette discussion, nous raisonnons donc en terme des champs $\mathbf{E}(t)$ et \mathbf{B} .

(iii) Variation de la force moyenne avec la vitesse

A vitesse nulle, donc en l'absence de \mathbf{B} , le bon axe de quantification est OY , dirigé selon \mathbf{E} . Dans l'état stationnaire, la matrice densité atomique σ^{st} est diagonale dans la base $\{|m\rangle_Y\}$ et ses populations s'expriment simplement à l'aide d'un bilan détaillé des flux dus au pompage optique (voir la discussion précédant l'établissement de (I2e - 3)) :

$$\begin{cases} \Pi_{+,Y} = \Pi_{-,Y} = \frac{4}{17} \\ \Pi_{0,Y} = \frac{9}{17} \end{cases} \quad (\text{I2c - 7})$$

Le passage dans la base $\{|m\rangle_z\}$ fait apparaître des cohérences (entre $| - 1 \rangle_z$ et $| + 1 \rangle_z$) pour σ^{st} , ce qui prouve bien qu'il est impossible, dans le présent cas, de raisonner dans

cette base seulement à l'aide de taux de pompage. Nous obtenons $\Pi_{+,z}^{\text{st}} = \Pi_{-,z}^{\text{st}} = \frac{13}{34}$, ce qui donne finalement une force moyenne nulle à $v = 0$.

Plaçons-nous à vitesse non nulle, mais suffisamment faible pour que l'effet du champ magnétique \mathbf{B} puisse être traité perturbativement. Un tel traitement est justifié si les éléments de matrice de kvj_z non diagonaux dans la base $\{|m\rangle_Y\}$ sont petits devant la différence correspondante des déplacements lumineux, ce qui impose $\frac{1}{\sqrt{2}}|kv| \ll \frac{1}{6}|\delta s|^{(*)}$. L'action de \mathbf{B} , calculée au premier ordre en $\frac{kv}{\delta s}$, donne une différence de population $\Pi_{+,z}^{\text{st}} - \Pi_{-,z}^{\text{st}}$ et une force moyenne linéaire en $\frac{kv}{\delta s}$ [16] :

$$F_{\text{totale}} = -\alpha v \quad (\text{I2c} - 8a)$$

où le coefficient de friction vaut :

$$\alpha = -\frac{120}{17}\hbar k^2 \frac{\delta\Gamma}{4\delta^2 + 5\Gamma^2} \quad (\text{I2c} - 8b)$$

Nous obtenons bien un coefficient de friction α indépendant de l'intensité laser. Les auteurs de [16] interprètent ces résultats de la façon suivante, à la limite des grands désaccords ($|\delta| \gg \Gamma$). Ils introduisent la base $\left\{ |\overline{m}\rangle, m = 0 \pm 1 \right\}$, fonction de la vitesse v , diagonalisant la matrice densité stationnaire (dans l'état fondamental). Comme $|\delta| \gg \Gamma$, on peut montrer que $\left\{ |\overline{m}\rangle \right\}$ diagonalise l'action conjuguée de $\mathbf{E}(t)$ et \mathbf{B} : c'est la limite séculaire, dont tout l'intérêt apparaît dans le chapitre III. On constate alors que les populations correspondantes de σ^{st} ne dépendent pas de v à l'ordre 1 en $\frac{kv}{\delta s}$, alors que les vecteurs $|\overline{m}\rangle$ en dépendent. A cet ordre du calcul, tout l'effet est donc dû à une contamination des fonctions d'onde.

Examinons finalement ce que devient la force à grande vitesse. Grande vitesse signifie que le champ magnétique \mathbf{B} l'emporte sur $\mathbf{E}(t)$. \mathbf{B} impose Oz comme axe de quantifica-

(*) A $\frac{\delta}{\Gamma}$ proche de 0, la formulation correcte de cette condition tient compte des "énergies" en $-i\hbar\Gamma s$ associées aux $|m\rangle_Y$, qui traduisent le fait, comme nous l'avons dit au §2b, que ces états ont un taux total de départ bien défini par pompage optique. Nous supposons dans la suite δ de l'ordre de Γ ou plus, lorsque nous comparons l'influence de $\mathbf{E}(t)$ à celle de \mathbf{B} .

tion, et les déplacements lumineux sont cette fois négligeables devant les déplacements Zeeman induits par \mathbf{B} : $|kv| \gg |\delta|s$. Dans l'état stationnaire, les cohérences $z\langle\pm 1|\sigma|\mp 1\rangle_z$ sont alors très petites devant les populations $\Pi_{m,z}$. Les négliger, c'est obtenir les équations de Bloch optiques sous forme de simples équations de pompage entre ces populations, ce qui conduit, pour des raisons de symétrie claires, à $\Pi_{+,z} = \Pi_{-,z}$ donc à une valeur nulle pour la force moyenne associée aux nouveaux mécanismes. Nous allons utiliser d'ailleurs ces équations de pompage au §2d suivant. En ce qui concerne la force F_{totale} , nous admettons ici simplement qu'elle décroît en $\frac{1}{v}$ lorsque $|kv| \gg |\delta|s$ et nous en reportons le calcul détaillé au chapitre III.

En conclusion, la force dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ provient d'un déséquilibre entre les pressions de radiation exercées par chaque onde, déséquilibre induit par la vitesse de l'atome. Notons bien que cette non-compensation ne provient pas de l'effet Doppler traditionnel lié au mouvement de l'atome, mais d'un couplage entre les populations $\Pi_{\pm,z}$ via les cohérences fondamentales $z\langle\pm 1|\sigma|\mp 1\rangle_z$, ces cohérences étant très sensibles à la vitesse. Rappelons que dans toute cette discussion, nous avons omis cet effet Doppler, puisqu'il intervient pour des vitesses de l'ordre de $\frac{1}{k}\sqrt{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$, ce qui correspond, à faible saturation, à des vitesses bien supérieures à celles où se manifeste la force F_{totale} des nouveaux mécanismes.

d) Etude simple de la diffusion en impulsion

Dans l'étude du refroidissement, il ne suffit pas de déterminer la force radiative moyenne subie par un atome de vitesse v . Il faut tenir compte également des fluctuations de ces forces radiatives, responsables d'une marche au hasard de l'atome dans l'espace des impulsions. Nous avons vu que la force moyenne correspond, dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, essentiellement aux pressions de radiations exercées par les ondes laser. On s'attend donc à ce que ce soient surtout les fluctuations de ces pressions de radiation qui contribuent à la diffusion en impulsion. C'est ce que nous vérifions, dans un premier temps, sur un modèle purement probabiliste, qui néglige toute cohérence dans l'état fondamental de la matrice densité atomique dans la base $\{|m\rangle_z\}$. Ce modèle prédit un accroissement considérable de la diffusion en impulsion, par rapport à la transition $0 \rightarrow 1$. Nous verrons ensuite, sur le cas simple d'un atome au repos, que les processus stimulés, même s'ils ne changent pas efficacement l'impulsion atomique, peuvent avoir un effet non négligeable sur la dynamique atomique interne, et qu'ils ramènent dans ce cas, heureusement, l'importance de la diffusion à une valeur normale. Nous analysons en détail la dépendance du coefficient de

diffusion en fonction de la vitesse atomique, du désaccord atome-laser δ et de la pulsation de Rabi Ω dans [39]. Ce comportement du coefficient de diffusion a été prévu également, partiellement, par d'autres auteurs, à vitesse nulle pour [16] et à grande vitesse pour [15].

(i) Modèle probabiliste de la diffusion

La discussion au §2c précédent du comportement de la force moyenne à grande vitesse a montré qu'il est légitime de négliger les cohérences $z\langle \pm 1 | \sigma | \mp 1 \rangle_z$ dans l'état fondamental lorsque l'effet du champ **B** motionnel l'emporte sur celui des processus stimulés induits par $\mathbf{E}(t)$. Cette condition est vérifiée à grande vitesse ($k|v| \gg |\delta|s$). La matrice densité σ dans la base $\{|m\rangle_z\}$ comporte alors uniquement des populations $\Pi_{m,z}(m = 0, \pm 1)$ dont l'évolution provient seulement des cycles de fluorescence et est décrite par des taux de pompage optique. Les taux de départ par absorption d'un photon laser σ_{\pm} , en unité de $\frac{\Gamma_s}{2}$, sont donnés par le carré des amplitudes $|g m\rangle_z \rightarrow |e m \pm 1\rangle_z$, de la fig. I-6, et la probabilité d'émettre un photon de fluorescence σ_+, σ_- ou π par désexcitation de $|e m\rangle_z$ est égale au carré de l'amplitude correspondante $|e m\rangle_z \rightarrow |g m + q\rangle_z$, ($q = 0, \pm 1$) sur la même figure.

Lorsque l'atome se trouve dans le sous-niveau fondamental $|0\rangle_z$, sa situation ressemble à celle d'un atome dans l'état fondamental d'une transition $0 \rightarrow 1$: il absorbe avec le même taux dans chaque onde σ_+ et σ_- , puisqu'elles bénéficient du même facteur d'intensité $1/2$. Il n'en va pas de même lorsque l'atome est dans l'état $|1\rangle_z$. Un tel atome effectue en moyenne 6 cycles d'absorption dans l'onde σ_+ — émission spontanée d'un photon σ_+ , qui le reconduisent tous dans $|1\rangle_z$, avant d'absorber un photon laser σ_- . Le même phénomène se produit à l'autre extrémité, en $| - 1 \rangle_z$, avec la polarisation σ_- , si bien que, en moyenne, l'atome passe effectivement autant de temps dans les deux sous-niveaux $|\pm 1\rangle_z$. On conçoit néanmoins que les fluctuations autour de cet état moyen soient importantes.

Ceci a un effet spectaculaire sur la marche au hasard de l'atome dans l'espace des impulsions, précisément parce qu'il y a correspondance parfaite entre la polarisation des photons laser et leur quantité de mouvement. Notons d'abord que les pas successifs de ce mouvement brownien ne sont pas indépendants, ils sont au contraire fortement corrélés via l'état interne, comme nous l'avons vu. Plus généralement, on constate que l'effet d'une absorption dans l'onde σ_+ est d'augmenter la probabilité d'absorber dans la même onde σ_+ au cours du cycle de fluorescence suivant, pour un atome initialement dans un mélange statistique quelconque des états $|m\rangle_z$. Nous avons obtenu une représentation imagée de

l'effet de ces corrélations sur la marche au hasard en impulsion grâce à une simulation Monte-Carlo du “mouvement” de 15 atomes dans le cas d'une transition 0 → 1 (fig. I-7a) et d'une transition 1 → 2 (fig. I-7b). Pour obtenir cette simulation, nous sommes passés d'une évolution paramétrée en temps à une évolution paramétrée par N , nombre de cycles de fluorescence effectués (voir l'appendice A_I). Les taux de pompage optique entre sous-niveaux dans l'état fondamental conduisent dans cette représentation à des probabilités de transition à l'issue d'un cycle. Nous faisons ensuite sauter les atomes d'un sous-niveau à l'autre, à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires, d'une façon qui respecte ces probabilités de transition. La différence $(N_+ - N_-)\hbar k$, où N_{\pm} est le nombre de photons absorbés dans l'onde σ_{\pm} , représente directement la variation d'impulsion des atomes depuis le début de la simulation, à condition que l'impulsion des photons de fluorescence, source supplémentaire de diffusion, soit négligée. L'augmentation de la diffusion dans le cas $j = 1$ est alors claire : les cycles σ_+ (ou σ_-) à répétition à l'extrémité $|1\rangle_z$ (ou $|-\rangle_z$) font apparaître un pas effectif de la marche au hasard, que l'on estime intuitivement être de longueur $6\hbar k$, ce qui a fait qualifier ce processus de “diffusion à grands pas” [16].

(ii) Coefficient de diffusion à vitesse élevée

Le modèle probabiliste précédent permet le calcul du coefficient de diffusion en impulsion D_{∞} pour un atome de vitesse élevée ($k|v| \gg |\delta|s$ mais $k|v| \ll |\delta|$). Rappelons que D_{∞} est défini par le comportement aux temps T longs de l'accroissement d'impulsion atomique carré moyen :

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle \underset{T \rightarrow +\infty}{\sim} 2D_{\infty}T \quad (\text{I2d - 1})$$

Nous ne prenons en compte que les cycles de fluorescence, à l'exclusion des processus stimulés ; au bout du temps T , N_+ photons laser σ_+ d'impulsion $\hbar k$ et N_- photons laser σ_- d'impulsion $-\hbar k$ ont été absorbés, $N = N_+ + N_-$ photons de fluorescence, d'impulsion $\hbar k_i$ ($1 \leq i \leq N$) selon Oz ont été émis. A ceci est associé le changement d'impulsion atomique :

$$\delta p = (N_+ - N_-)\hbar k - \sum_{i=1}^N \hbar k_i \quad (\text{I2d - 2})$$

Le premier terme de δp correspond aux pressions de radiation exercées par les deux ondes

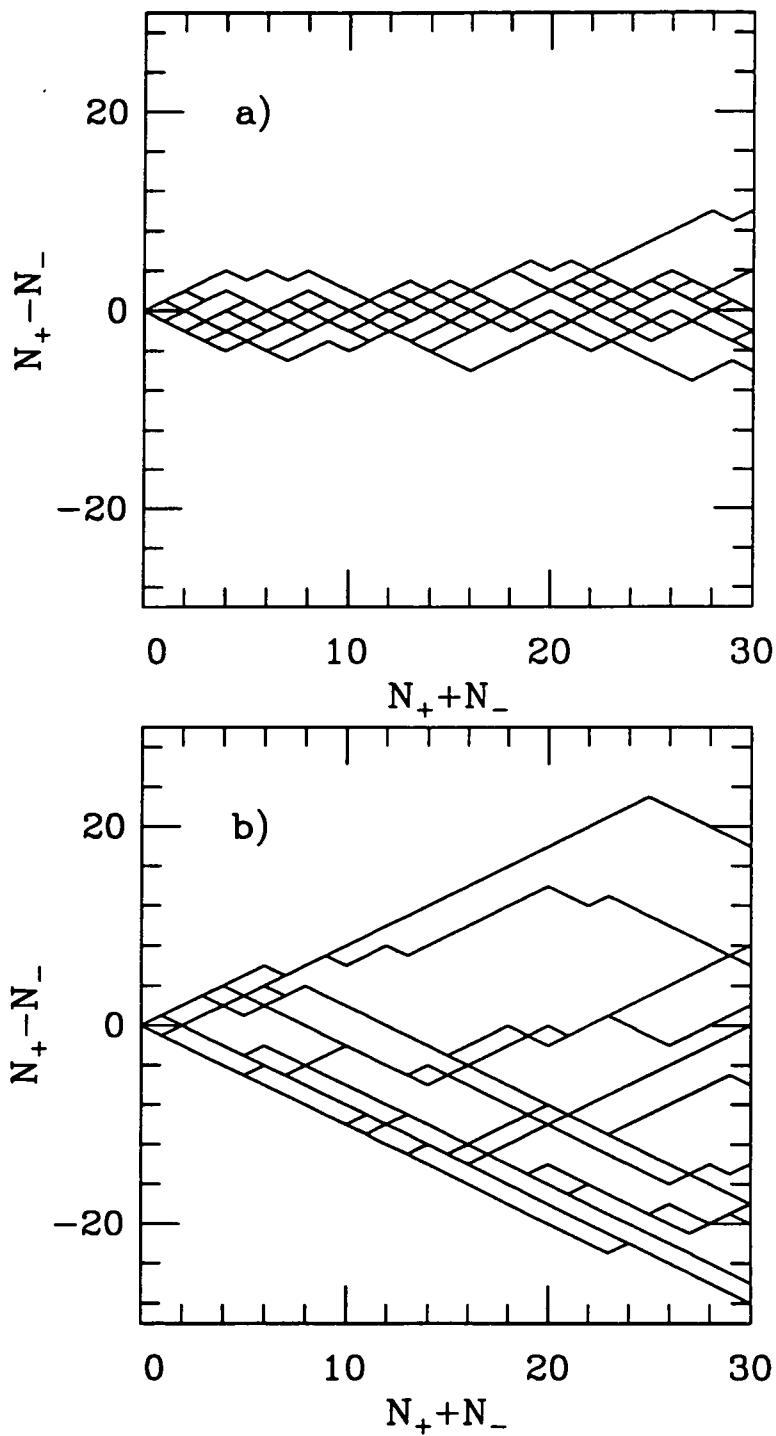


Fig. I-7 : Simulation Monte-Carlo du mouvement de 15 atomes dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$:

a) pour la transition $j_g = 0 \longrightarrow j_e = 1$

b) pour la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

Après N cycles de fluorescence, N_+ (N_-) photons ont été absorbés dans l'onde σ_+ (σ_-).

laser. En moyennant sur toutes les séquences possibles d'absorption-émission spontanée, nous obtenons $\langle N_+ \rangle = \langle N_- \rangle$ (symétrie $+ \longleftrightarrow -$ et effet Doppler négligé) et $\langle \hbar k_i \rangle = 0$ (l'émission spontanée se produit avec la même probabilité dans deux directions opposées). Nous retrouvons bien la force moyenne nulle à grande vitesse ($\langle \Delta p \rangle = 0$) pour les mécanismes à gradient de polarisation. Pour connaître D_∞ , nous devons évaluer maintenant :

$$\langle (\delta p)^2 \rangle = \left\langle (N_+ - N_-)^2 \right\rangle (\hbar k)^2 + \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \hbar k_i \right)^2 \right\rangle \quad (\text{I2d - 3})$$

Le dernier terme de cette expression correspond aux fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence. Sa contribution D_{spont} au coefficient de diffusion D_∞ ne dépasse pas $(\hbar k)^2 \Gamma s$. Nous nous concentrons donc sur le premier terme, dont la contribution à D_∞ , appelée D_{abs} , correspond aux fluctuations des pressions de radiation exercées par les deux ondes. Nous allons voir qu'elle est numériquement beaucoup plus importante. Nous pouvons récrire :

$$N_+ - N_- = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (\text{I2d - 4})$$

où $\varepsilon_i = +1$ ou -1 selon que le $i^{\text{ième}}$ photon laser absorbé est polarisé σ_+ ou σ_- .

Dans le cas de la transition $0 \longrightarrow 1$, les variables aléatoires ε_i sont indépendantes :

$$\langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{I2d - 5})$$

ce qui conduit immédiatement à :

$$\left\langle (N_+ - N_-)^2 \right\rangle = N \quad (\text{I2d - 6})$$

La complexité de l'état fondamental pour la transition $1 \longrightarrow 2$ induit des corrélations entre ces variables aléatoires, une absorption σ_+ passée favorisant une absorption σ_+ à venir. Juste avant la $i^{\text{ième}}$ absorption, l'atome est en moyenne dans l'état interne stationnaire ; la corrélation entre la $i^{\text{ième}}$ et la $j^{\text{ième}}$ absorption ($j > i$) donne alors :

$$\langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{6}{7} \right)^{j-i} \quad (\text{I2d - 7})$$

ce qui conduit, à la limite des grands nombres N de photons absorbés, au comportement asymptotique :

$$\left\langle (N_+ - N_-)^2 \right\rangle \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} 9N \quad (\text{I2d - 8})$$

Nous renvoyons à l'appendice A_I pour l'établissement des relations (I2d - 7) et (I2d - 8). Si l'on prend en compte correctement le taux moyen global d'absorption $\left\langle \frac{N}{T} \right\rangle$ (qui, dans le cas $j = 1$, est plus petit que dans le cas $j = 0$ d'environ un facteur 2), on trouve les coefficients de diffusion suivants (écrit sous la forme $D_{\text{abs}} + D_{\text{spont}}$) :

$$D_{j=0} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) (\hbar k)^2 \Gamma s \quad (\text{I2d - 9a})$$

$$D_{\infty, j=1} = \left(\frac{225}{88} + \frac{23}{220} \right) (\hbar k)^2 \Gamma s \quad (\text{I2d - 9b})$$

$D_{\infty, j=1}$ l'emporte donc sur $D_{j=0}$ d'un facteur presque 4, puisque la somme entre parenthèses vaut 0.7 pour (I2d - 9a) et est de l'ordre de 2.7 pour (I2d - 9b).

(iii) Forte dépendance en vitesse du coefficient de diffusion

Il est important de savoir si cette accélération de la diffusion induite par les corrélations se maintient lorsque les processus stimulés ne sont plus négligeables. Plaçons-nous dans l'autre situation extrême, celle d'un atome au repos. Nous savons alors que la bonne base est $\{|m\rangle_Y\}$ et qu'il est impossible de négliger les cohérences dans l'état fondamental entre les éléments de la base $\{|m\rangle_z\}$. A défaut de pouvoir utiliser une approche probabiliste simple, nous nous limitons maintenant à des considérations qualitatives. L'effet du champ $\mathbf{E}(t)$ dans la base $\{|m\rangle_z\}$ est de redistribuer de façon cohérente les atomes de l'état $|1\rangle_z$ vers l'état $| - 1\rangle_z$ et inversement avec une pulsation typique δs (cf. §2b). Un atome initialement dans l'état $|1\rangle_z$ n'aura pas le temps de faire plusieurs cycles de fluorescence (avec absorption σ_+), chaque cycle durant environ $\frac{1}{\Gamma s}$, avant que l'oscillation temporelle induite par $\mathbf{E}(t)$ ne devienne importante, si $|\delta|s \cdot \frac{1}{\Gamma s} \gg 1$ soit $|\delta| \gg \Gamma$. Pour des valeurs élevées du désaccord en fréquence entre atome et laser, on s'attend donc à ce que les corrélations dans la marche au hasard en impulsions soient détruites et que le coefficient de diffusion à vitesse nulle $D(v = 0)$ prenne des valeurs comparables à D_{spont} . Ceci est confirmé par un calcul traitant quantiquement l'état atomique interne et externe, et exposé en détail dans [16] :

$$D(v = 0) = D_{\text{abs}}(v = 0) + D_{\text{spont}}(v = 0) \quad (\text{I2d - 10a})$$

$$D_{\text{abs}}(v = 0) = \left[\frac{\frac{36}{17}}{1 + \frac{4\delta^2}{5\Gamma^2}} + \frac{4}{17} \right] (\hbar k)^2 \Gamma s \quad (\text{I2d - 10b})$$

$$D_{\text{spont}}(v = 0) = \frac{9}{85} (\hbar k)^2 \Gamma s \quad (\text{I2d - 10c})$$

Le premier terme de (I2d - 10b) a une dépendance inhabituelle en fonction du désaccord. Il correspond à la diffusion supplémentaire due aux corrélations, est effectivement prépondérant lorsque $\frac{\delta}{\Gamma}$ reste proche de 0 mais devient négligeable dans la limite $|\delta| \gg \Gamma$, où la contribution de $D_{\text{abs}}(v = 0)$ à la diffusion se limite au second terme de (I2d - 10b).

Une conséquence importante des résultats présentés est la forte dépendance du coefficient de diffusion en impulsion $D(v)$ en fonction de la vitesse atomique v , lorsque $|\delta| \gg \Gamma$: D en unité de $(\hbar k)^2 \Gamma s$ passe dans ce cas de $\frac{29}{85} \simeq 0.34$ à $\frac{1171}{440} \simeq 2.66$ pour v allant de 0 à des valeurs grandes devant $\frac{|\delta|s}{k}$. Il est donc nécessaire de disposer d'une méthode générale de calcul de $D(v)$. Une première approche consiste à évaluer l'intégrale de la fonction d'autocorrélation temporelle de l'opérateur force $F(t)$ en point de vue de Heisenberg ; il est alors habituel, pour obtenir la valeur de la moyenne à deux temps $\langle F(t)F(t - \tau) \rangle$, d'utiliser le théorème de régression quantique comme il est fait dans [40]. Cette méthode n'est pas la plus directe et elle peut conduire à des calculs assez lourds, dans lesquels il est difficile de prendre immédiatement en compte la simplification apportée par la faiblesse du paramètre de saturation. Nous exposons, dans le chapitre II, une autre approche, fondée sur les équations de Bloch optiques généralisées dont nous avons parlé déjà au §1e. Le traitement quantique du mouvement prend en effet automatiquement en compte les changements d'impulsion de l'atome en interaction avec la lumière. Il est possible de décrire quantiquement la situation d'un atome de vitesse v imposée en remplaçant l'opérateur énergie cinétique $\frac{P^2}{2M}$ par l'opérateur Pv_0 , où v_0 est un pur nombre. Après cette substitution, les équations d'évolution de la matrice densité atomique complète σ décrivant l'état atomique interne et externe fournissent aisément le comportement aux temps longs de $\langle p \rangle(t) = \text{Tr}[P\sigma(t)]$ et de $\langle p^2 \rangle(t)$. Comme ces équations ont, en ce qui concerne l'état atomique interne, la même structure que les équations de Bloch ordinaires, il est élémentaire d'y effectuer les simplifications physiquement pertinentes (prise en compte de la faible saturation, choix de la base interne adaptée, etc). Pour conclure, nous donnons sur la fig. I-8 la dépendance en vitesse du coefficient de diffusion $D(v)$, dépendance obtenue par cette

dernière méthode [39]. On retrouve sur cette figure tous les comportements de D décrits précédemment : valeur élevée à grande vitesse, comme prévu par l'approche probabiliste, et effondrement lorsque la vitesse s'annule, si $|\delta| \gg \Gamma$.

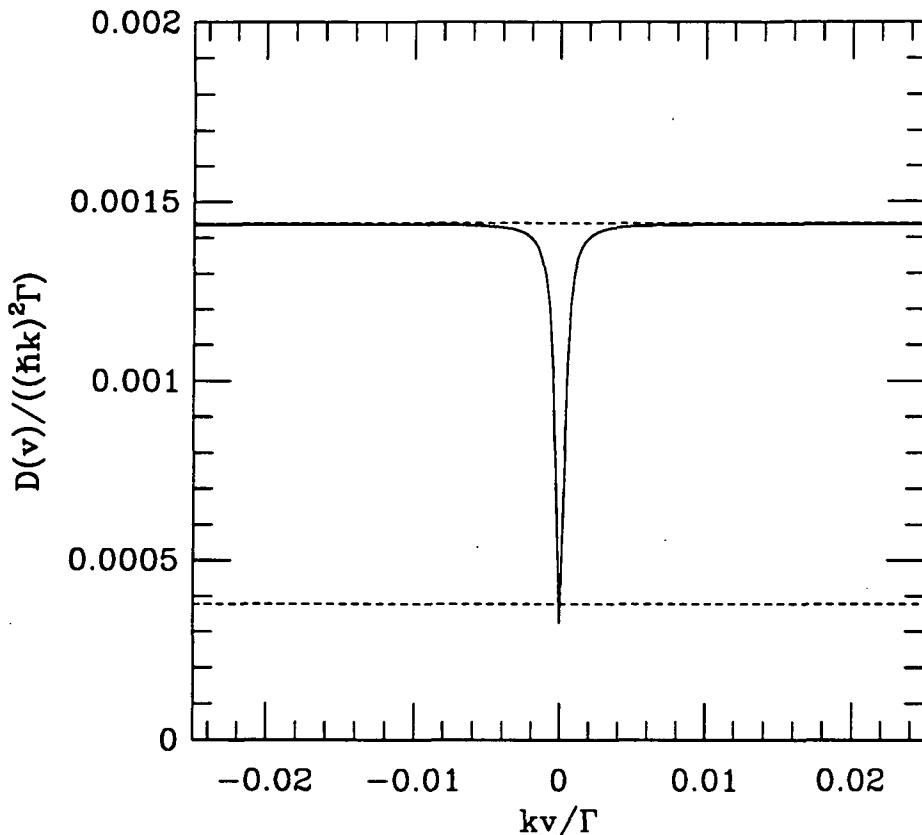


Fig. I-8 : Coefficient de diffusion $D(v)$, pour la transition $j = 1 \rightarrow j_e = 2$ dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, exprimé en unité de $(\hbar k)^2 \Gamma$, comme fonction de la vitesse v , en unité de $\frac{\Gamma}{k}$. La pulsation de Rabi dans chaque onde laser vaut $\Omega = \frac{1}{10} \Gamma$ et le désaccord vaut $\delta = -3\Gamma$. Les lignes tiretées représentent les résultats de l'approche probabiliste pour les transitions $j = 0 \rightarrow j_e = 1$ et $j = 1 \rightarrow j_e = 2$.

e) Problèmes liés à l'établissement d'un traitement semi-classique du refroidissement

Dans l'étude classique que nous venons d'effectuer du mouvement d'un atome en interaction avec deux ondes laser polarisées σ_+ et σ_- , nous avons supposé que l'état atomique interne atteint un régime forcé avant que la vitesse v de l'atome n'ait le temps de

changer significativement (condition $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$). Cette hypothèse nous a conduit naturellement à la caractérisation du changement moyen d'impulsion atomique par la force $F(v)$, et des fluctuations en impulsions autour de ce changement moyen par le coefficient de diffusion en impulsions $D(v)$. A partir de l'expression supposée acquise de $F(v)$ et $D(v)$ pour la transition $j = 1 \longrightarrow j_e = 2$, nous devons maintenant déterminer explicitement la distribution stationnaire en vitesse et l'optimum du refroidissement. Nous examinons d'abord les prédictions de l'approche semi-classique traditionnelle, qui fait appel seulement au comportement de $F(v)$ et $D(v)$ au voisinage de $v = 0$. Après avoir mis en évidence l'incapacité de cette approche à déterminer la distribution la plus froide, nous discutons la possibilité d'écrire une équation de Fokker-Planck prenant en compte la dépendance complète en vitesse de $F(v)$ et $D(v)$. Cependant, nous donnons quelques raisons de douter de la validité d'une telle équation de Fokker-Planck dans le cas de transitions à moment cinétique élevé ($j = 4$ est pris comme exemple). Nous présentons donc finalement une méthode de résolution des équations entièrement quantiques du refroidissement, dans le cas limite des grands désaccords ($|\delta| \gg \Gamma$), méthode qui est la transposition à la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ de l'approximation séculaire du §1e.

(i) L'approche semi-classique traditionnelle

Nous avons déjà vu au §1d que cette approche effectue un traitement perturbatif des équations semi-classiques dans la limite $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$. Dans l'examen de cette condition de validité, il est possible de donner du temps interne le plus long T_{int} une définition sans ambiguïté. Considérons en effet un atome de vitesse v fixée, et d'état interne décrit par la matrice densité σ restreinte dans l'état fondamental. L'évolution temporelle de σ est gouvernée par les équations de Bloch optiques habituelles, que nous écrivons dans le référentiel tournant $OXYz$ défini au §2b, ce qui fait disparaître toute dépendance temporelle explicite et transforme le régime forcé en état stationnaire pour σ . Ces équations sont alors de la forme :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{Bloch}(v)[\sigma(t)] \quad (\text{I2e - 1})$$

où $\text{Bloch}(v)$ est un opérateur linéaire constant, fonction de la vitesse atomique v , dont les coefficients se déduisent aisément des équations d'évolution pour les populations $\Pi_{m,z}$ ($m = 0, \pm 1$), la partie réelle et la partie imaginaire de la cohérence $z\langle 1|\sigma| - 1\rangle_z$ dans l'état fondamental, équations données explicitement par [16]. La diagonalisation de l'opérateur $\text{Bloch}(v)$ conduit à des valeurs propres de la forme $-[\gamma_n(v) + i\omega_n(v)]$, où $\gamma_n \geq 0$ et

n va de 0 à 4. Une seule d'entre elles, d'indice n pris égal à 0, est nulle : son existence est liée à la conservation de la population totale de σ par les équations de Bloch (I2e - 1), et il lui correspond la matrice densité atomique dans l'état stationnaire, $\sigma^{\text{st}}(v)$. Aux autres valeurs sont associés les modes propres $\sigma_n(v)$ ($n = 1$ à 4) de relaxation de l'état atomique interne. Nous appelons ainsi $T_{\text{int}}(v)$, pour un atome de vitesse v , le temps associé au mode interne décroissant le plus lentement :

$$T_{\text{int}}(v) = \max \left\{ \frac{1}{\gamma_n(v)}, n = 1 \text{ à } 4 \right\} \quad (\text{I2e - 2})$$

Nous trouvons toujours ce temps interne de l'ordre de l'inverse du taux typique $\frac{\Gamma_s}{2}$ de pompage, même si la dépendance en vitesse de T_{int} n'est pas négligeable.

Nous avons besoin essentiellement de l'expression de $T_{\text{int}}(v = 0)$ puisque l'approche semi-classique traditionnelle se place au voisinage de la vitesse nulle. Nous savons que, pour un atome au repos, la bonne base est $\{|m\rangle_Y, m = 0, \pm 1\}$. Dans cette base, le champ électrique $\mathbf{E}(t)$ ne change pas le nombre quantique m , et les processus d'émission spontanée dans (I2e - 1) entraînent, pour les populations des sous-niveaux $|m\rangle_Y$, un couplage entre plus proches voisins seulement. On obtient ainsi que la population du sous-niveau $|1\rangle_Y$ alimente celle du sous-niveau $|0\rangle_Y$ avec un taux qui est le produit du taux de départ de $|1\rangle_Y$, soit $\frac{\Gamma_s}{2}$ (cf. §2b) par la probabilité de désexcitation par émission d'un photon de fluorescence polarisé σ_+ selon OY , soit $\frac{1}{2}$ (cf. fig. I-6). Le taux de transfert correspondant donne justement le temps interne le plus long à vitesse nulle, comme le confirme un calcul élémentaire, à condition que $|\delta| > \Gamma$:

$$\frac{1}{2} \Gamma_s \cdot T_{\text{int}}(v = 0, |\delta| > \Gamma) = 2 \quad (\text{I2e - 3})$$

Notons simplement que, dans le cas $|\delta| < \Gamma$, le temps interne le plus long correspond à la disparition d'éléments non diagonaux ${}_Y\langle m | \sigma | m' \rangle_Y, m \neq m'$.

Lorsque la vitesse atomique est très élevée ($k|v| \gg |\delta|s$), l'effet du champ magnétique fictif \mathbf{B} l'emporte sur celui du champ électrique. Les cohérences dans l'état fondamental pour la base $\{|m\rangle_z, m = 0, \pm 1\}$ jouent alors un rôle négligeable et, comme on l'a utilisé au §2d, l'essentiel de la dynamique est décrit en termes de taux de pompage entre sous-niveaux. On constate alors, par la diagonalisation de la matrice associée à (A_I - 3a), que T_{int} correspond au taux de départ le plus faible, qui est le taux de départ du sous-niveau $|1\rangle_z$ (ou $| - 1 \rangle_z$) par absorption d'un photon laser polarisé σ_- (ou σ_+) :

$$\frac{1}{2} \Gamma s \cdot T_{\text{int}}(k|v| \gg |\delta|s) = 6 \quad (\text{I2e - 4})$$

Cette dépendance en vitesse de T_{int} est d'autant plus dramatique que les transitions $j_g \rightarrow j_e + 1$ envisagées sont à moment cinétique j_g élevé. Pour $j_g = 4$ et $|\delta| \gg \Gamma$, $T_{\text{int}}(0)$ est environ deux fois plus grand que pour $j_g = 1$, alors que $T_{\text{int}}(k|v| \gg |\delta|s)$ est presque 30 fois plus grand que son homologue pour $j_g = 1$.

Passons maintenant à l'estimation de T_{ext} . Dans le cas du refroidissement Sisyphe, nous avons mis en évidence (cf. §1d) un temps externe réactif T_{osc} , période du mouvement d'oscillation des atomes au fond des puits de potentiel, et un temps externe dissipatif, T_{am} , associé à l'amortissement de la vitesse sous l'effet de la force de friction $-\alpha v$. Dans la présente configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, les déplacements lumineux sont indépendants de la position (voir §2b), ce qui réduit T_{ext} au seul temps dissipatif :

$$T_{\text{ext}} = \frac{M}{\alpha} \quad (\text{I2e - 5})$$

A partir de l'expression (I2c - 8b) du coefficient de friction α et de la valeur (I2e - 3) du temps interne à vitesse nulle, nous obtenons, à grand désaccord ($|\delta| \gg \Gamma$), la formulation suivante pour la condition $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$:

$$\frac{\hbar|\delta|s}{2E_R} \gg \frac{120}{17} \sim 7 \quad (\text{I2e - 6})$$

Avant de commenter plus avant cette condition, donnons les résultats de l'approche semi-classique traditionnelle, telle qu'elle est menée dans [16]. Les auteurs se limitent aux distributions en vitesse contenues dans la plage de linéarité de la force, ce qui impose à la vitesse quadratique moyenne Δv l'inégalité suivante, déduite de l'expression (III3b - 8) de la force à grand désaccord :

$$k\Delta v \ll \frac{1}{4} \sqrt{\frac{17}{33}} |\delta|s \quad (\text{I2e - 7})$$

Cette hypothèse permet de réduire la force $F(v)$ à son comportement linéaire près de $v = 0$, et de réduire le coefficient de diffusion en impulsion $D(v)$ à sa valeur à vitesse nulle. Aussi parlons-nous pour (I2e - 7) de condition de linéarisation. L'absence de dépendance en position conduit à l'équation de Fokker-Planck habituelle suivante sur la distribution en impulsion stationnaire $\Pi(p)$:

$$0 = \partial_p[\alpha v \Pi(p)] + D(0) \partial_p^2 \Pi \quad (\text{I2e - 8})$$

Le coefficient de friction α est donné par (I2c - 8b), et le coefficient de diffusion à vitesse nulle par (I2d - 10). La solution de (I2e - 8) est une gaussienne, de température T vérifiant :

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{M} = k_B T = \frac{D(0)}{\alpha} \quad (\text{I2e - 9a})$$

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{M} = \frac{\hbar \Omega^2}{|\delta|} \left[\frac{29}{300} + \frac{254}{75} \cdot \frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right] \quad (\text{I2e - 9b})$$

Nous constatons immédiatement que cette prédiction sur l'énergie cinétique moyenne souffre de la même pathologie que dans le cas du refroidissement Sisyphe : elle donne l'impression que l'on peut obtenir des distributions en impulsion aussi étroites que l'on veut (il suffit de diminuer Ω^2 , donc l'intensité lumineuse, à fréquence laser fixée). En fait, on s'attend à ce que Δp reste plus grand que $\hbar k$, et que le refroidissement présente même un seuil sur $\hbar |\delta| s$! Ce paradoxe doit être levé par la prise en compte des conditions de validité (I2e - 6), qui exprime que $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$, et (I2e - 7), qui légitime la linéarisation de la force.

A titre de comparaison, appuyons-nous sur la situation rencontrée dans le refroidissement Sisyphe. La condition $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$, traduite par $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$, impose :

$$\left(\frac{3}{4} \frac{U_0}{E_R} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar |\delta| s}{2E_R} \right)^{\frac{1}{2}} \gg \sqrt{27} \frac{|\delta|}{\Gamma} \quad (\text{I2e - 10})$$

ce qui est très sévère à grand désaccord : lorsque $|\delta| \gg \Gamma$, l'optimum du refroidissement Sisyphe, correspondant à une valeur finie de $\frac{U_0}{E_R}$ (cf. (I1e - 1)), ne vérifie pas (I2e - 10). On peut espérer qu'il n'en va pas de même pour le refroidissement par $\sigma_+ - \sigma_-$. La condition (I2e - 6) fait intervenir en effet une valeur numériquement très faible des déplacements lumineux (quelques énergie de recul), à grand désaccord. L'étude plus approfondie, quantique, effectuée dans le chapitre III, confirme en partie cet espoir : l'optimum du refroidissement à nouveaux mécanismes, obtenu pour $|\delta| \gg \Gamma$, correspond à :

$$\frac{\hbar |\delta| s}{2E_R} \simeq 250 \quad (\text{I2e - 11a})$$

$$\langle p^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \simeq 10.2 \hbar k \quad (\text{I2e - 11b})$$

Pour comprendre l'échec de l'approche semi-classique traditionnelle dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, il est donc nécessaire d'examiner la condition de linéarité de la force (I2e - 7). En utilisant la limite de (I2e - 9b) aux grands désaccords :

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{M} \simeq \frac{29}{150} \hbar |\delta| s \quad (\text{I2e - 12})$$

nous obtenons (I2e - 7) sous la forme :

$$\left(\frac{\hbar |\delta| s}{2E_R} \right)^{\frac{1}{2}} \gg \frac{2}{5} \sqrt{\frac{638}{17}} \sim \sqrt{6} \quad (\text{I2e - 13})$$

Cette condition désigne comme petit paramètre de développement :

$$\varepsilon = \left(\frac{12E_R}{\hbar |\delta| s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I2e - 14})$$

donc est bien plus contraignante que l'exigence $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$, qui présente trompeusement ε^2 comme petit paramètre (à l'optimum (I2e - 11a), $\varepsilon \simeq 0.15$ et $\varepsilon^2 \simeq 0.02$). L'absence de temps réactif rend, en fait, la situation présente très différente de celle du refroidissement Sisyphe et ne permet pas de justifier la linéarisation de la force par la seule condition $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$. Rappelons en effet que, dans le cas de Sisyphe, la condition $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$ (soit $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$) et celle de linéarité de la force (soit $\Delta v \ll v_c$) sont équivalentes (voir remarque après (I1d - 6)). Nous renvoyons aux considérations du chapitre II pour l'élucidation de ces propriétés de l'approche semi-classique traditionnelle et la justification, dans un cadre général, de l'introduction de (I2e - 14) comme petit paramètre vrai de développement. Nous retenons ici simplement la conclusion importante suivante : il est nécessaire de renoncer à la condition de linéarisation de la force en fonction de la vitesse, explicitée par (I2e - 7), si l'on veut obtenir l'optimum et le seuil du refroidissement à nouveaux mécanismes.

(ii) Equation de Fokker-Planck avec dépendance en vitesse complète de $F(v)$ et $D(v)$

La discussion précédente a montré la nécessité d'inclure, dans le calcul des distributions en impulsion $\Pi(p)$, l'expression exacte, non linéarisée, de la force moyenne $F(v)$ et du coefficient de diffusion $D(v)$ en fonction de la vitesse. Cette expression exacte étant rendue accessible par le II§2b, il reste à déterminer la forme convenable de l'équation de Fokker-Planck sur $\Pi(p)$, ainsi que sa véritable condition de validité. Nous présentons maintenant une simple discussion de ces problèmes, qui seront résolus dans le chapitre III.

L'écriture de l'équation de Fokker-Planck est rendue problématique par la dépendance en vitesse de $D(v)$. La forme la plus générale assurant la conservation de la probabilité s'écrit en terme d'un courant de probabilité $J[\Pi]$ [40] :

$$\partial_t \Pi + \partial_p J[\Pi] = 0 \quad (\text{I2e - 15a})$$

$$J[\Pi](p) = F(v)\Pi(p) - D_1(v)\partial_p \Pi - \partial_p(D_2(v)\Pi) \quad (\text{I2e - 15b})$$

La seule condition a priori sur les coefficients D_1 et D_2 étant :

$$D(v) = D_1(v) + D_2(v) \quad (\text{I2e - 16})$$

Intégrons la forme stationnaire de (I2e - 15) dans le cas limite où l'un des deux coefficients coïncide avec $D(v)$, l'autre étant nul. On obtient :

$$\Pi_1(p) = \Pi_1(0) e^{\int_0^p dp' F(v')/D(v')} \quad \text{si } D_1(v) = D(v), D_2(v) = 0 \quad (\text{I2e - 17a})$$

$$\Pi_2(p) = \Pi_2(0) \frac{D(0)}{D(v)} e^{\int_0^p dp' F(v')/D(v')} \quad \text{si } D_1(v) = 0, D_2(v) = D(v) \quad (\text{I2e - 17b})$$

La variation brutale de $D(v)$ en fonction de v dans les situations de grand désaccord entre laser et atome ($|\delta| \gg \Gamma$) (voir fig. I-8) donne aux distributions stationnaires $\Pi_1(p)$ et $\Pi_2(p)$ des comportements aux faibles vitesses réellement distincts. Notons que la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$ est d'autant plus intéressante pour l'examen de ce problème de la place du coefficient de diffusion qu'aucune difficulté supplémentaire liée à la dépendance spatiale de la distribution stationnaire n'y apparaît.

Afin de lever cette indétermination sur l'expression exacte du courant (I2e - 15b), nous allons avoir recours, dans le chapitre III, aux équations du mouvement semi-classiques, déduites des équations entièrement quantiques dans la limite $\Delta p \gg \hbar k$. Nous avons déjà indiqué, au §1e, la démarche générale à suivre pour effectuer cette approximation semi-classique. On utilise la représentation de Wigner $W(z, p)$ de la matrice densité

atomique complète (supposée ici non restreinte à l'état fondamental). Les équations quantiques sont non locales en impulsion : $\partial_t W(z, p)$ est couplé à $W\left(z, p \pm \frac{\hbar k}{2}\right)$ par l'échange d'un photon laser et à $W(z, p + \hbar k_S)$ par l'émission d'un photon de fluorescence d'impulsion $\hbar k_S$ selon Oz . On effectue, sous l'hypothèse $\hbar k \ll \Delta p$, un développement au second ordre des termes non locaux en impulsion. On aboutit à une équation aux dérivées partielles en position et impulsion sur les coefficients de la matrice $W(z, p)$, équation qualifiée de semi-classique. Dans le cas de la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, nous avons vu au §2b qu'il est pertinent d'introduire le référentiel tournant, ce qui se décrit au point z par l'opérateur rotation de l'état atomique interne d'angle $-kz$ selon l'axe Oz :

$$R(z) = e^{ikzj_z/\hbar} \quad (\text{I2e - 18a})$$

$$\tilde{W}(z, p) = R(z)^{-1} W(z, p) R(z) \quad (\text{I2e - 18b})$$

Les équations semi-classiques sur $\tilde{W}(z, p)$ ne comportent alors plus de dépendance spatiale explicite ; on peut se limiter aux distributions $\tilde{W}(z, p)$ indépendantes de la position, puisque cette classe de distributions contient l'état stationnaire.

Il s'agit, en dernière transformation, d'éliminer l'état interne dans les équations semi-classiques, pour obtenir la relation cherchée sur la seule distribution en impulsion $\Pi(p, t)$. Une telle élimination peut être faite de façon systématique (élimination adiabatique [41]) dans le cas où l'on s'intéresse au comportement de $\Pi(p, t)$ à des échelles de temps très longues devant le temps de relaxation T_{int} des variables internes : lorsque $t \gg T_{\text{int}}$, l'état atomique interne est "asservi" à la distribution externe $\Pi(p, t)$ par la relaxation, et peut donc être éliminé. Notons en particulier que cette procédure, n'introduit en elle-même aucune erreur dans le calcul de l'état stationnaire, à condition qu'elle soit menée de façon exacte : l'approche semi-classique traditionnelle avec force linéarisée en vitesse, par exemple, réalise l'élimination de l'état interne par une approximation pas toujours acceptable dans le cas des nouveaux mécanismes de refroidissement. Nous montrons en fait, dans le chapitre III, que le résultat de l'élimination adiabatique rigoureusement menée ne prend pas en général la forme d'une équation de Fokker-Planck. Une telle équation de Fokker-Planck n'est légitime que dans le cas limite où le pas effectif δp_{eff} de la marche au hasard en impulsion, compte tenu des corrélations entre les cycles successifs de fluorescence, reste petit devant la largeur de la distribution $\Pi(p, t)$. Nous reportons à ce chapitre III l'exposé de la procédure itérative conduisant, lorsque $\delta p_{\text{eff}} \ll \Delta p$, à l'équation de Fokker-Planck

cherchée, et nous en indiquons ici seulement le résultat. L'équation obtenue est bien de la forme (I2e - 15)^(*). $D_1(v)$ est la valeur supplémentaire de la diffusion due à la corrélation entre les pas de la marche au hasard (cf. §2d), alors que $D_2(v)$ est la partie dite "normale" de la diffusion, celle qui existe en l'absence de corrélations. Par exemple, à vitesse nulle, $D_1(0)$ est le premier terme de (I2d - 10b), alors que $D_2(0)$ contient le second terme de (I2d - 10b) et celui, $D_{\text{spont}}(0)$, décrivant l'effet des fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence (cf. (I2d - 10c)).

L'examen de la validité de l'équation de Fokker-Planck réclame la définition précise de δp_{eff} . Le formalisme mis en jeu dans le chapitre III permet de répondre à cette question. Nous ne disposons ici d'une image claire de la marche au hasard que dans le domaine d'application du modèle probabiliste de la diffusion du §2d, qui se limite aux vitesses atomiques élevées ($k|v| \gg |\delta|s$). On est conduit dans ce cas à poser :

$$\delta p_{\text{eff}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\langle (N_+ - N_-)^2 \rangle}{N} \hbar k \quad (\text{I2e - 19})$$

Le domaine $k|v| \gg |\delta|s$ n'est pas le plus intéressant, puisqu'il ne contient pas les distributions stationnaires en vitesse au-dessus du seuil de refroidissement. La définition (I2e - 19) de δp_{eff} ne permet donc pas de prouver la validité de l'équation de Fokker-Planck. Elle met cependant en évidence, dans son propre domaine de validité, une différence spectaculaire entre la portée des corrélations dans la marche au hasard pour une transition $j = 1 \rightarrow j_e = 2$ et pour une transition $j = 4 \rightarrow j_e = 5$, cette dernière étant utilisée expérimentalement dans les mélasses optiques sur le césum :

$$\delta p_{\text{eff},j=1} = 9\hbar k \quad (\text{I2e - 20a})$$

$$\delta p_{\text{eff},j=4} \simeq 335\hbar k \quad (\text{I2e - 20b})$$

Le calcul est effectué dans le cadre de l'approche probabiliste de l'appendice A_I. Ces écarts sur δp_{eff} se comprennent qualitativement si l'on considère, pour un atome dans l'état interne $|j\rangle_z$, le rapport des taux d'absorption de photons σ_+ et de photons σ_- . Ce rapport, dont nous avons vu la pertinence au §2d, vaut, pour une transition de moment cinétique

^(*) Elle porte cependant, en toute rigueur, non pas sur la distribution en impulsion $\Pi(p)$, mais sur $\Pi_F(p)$ définie par (III3c - 5).

arbitraire, $(j + 1)(2j + 1)$ (voir le tableau de la fig. II-4 pour l'expression générale des coefficients de Clebsch-Gordan dans le cas d'une transition $j \rightarrow j_e = j + 1$). Il passe ainsi, en valeur numérique, de 6 à 45 lorsque j saute de 1 à 4. Tout ceci justifie finalement la mise en oeuvre d'une résolution directe des équations quantiques, d'une part pour confirmer les prédictions de l'équation de Fokker-Planck sur la transition $1 \rightarrow 2$, d'autre part pour effectuer une étude complète de la transition $4 \rightarrow 5$, que l'on soupçonne fortement, au vu de (I2e - 20b), d'échapper à une description par Fokker-Planck, du moins pour les distributions les plus étroites en impulsion.

(iii) Etude entièrement quantique du refroidissement

Nous avons déjà mis en évidence quelques propriétés particulières de la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$: d'une part, la possibilité d'éliminer toute dépendance spatiale de l'état stationnaire par passage dans le référentiel tournant (voir §2b et (I2e - 18)) ; d'autre part, le caractère limité de la redistribution cohérente de photons entre les deux ondes laser (voir la discussion sur la force stimulée au §2c). En fait, ces deux propriétés sont profondément liées, et il est possible d'en tirer parti, dans l'étude de l'évolution entièrement quantique de la matrice densité complète ρ , à l'aide de la transformation unitaire suivante, dite "des familles" [14,42,61] :

$$S_F = e^{ikZj_z/\hbar} \quad (\text{I2e - 21a})$$

$$\rho_F = S_F^{-1} \rho S_F \quad (\text{I2e - 21b})$$

La transformation unitaire S_F , qui agit à la fois sur les degrés de liberté atomiques internes (par j_z) et externes (par Z), a une signification géométrique claire. L'action de S_F sur un état atomique dont le centre de masse est parfaitement localisé en z , est en effet simplement celle de la rotation interne $R(z)$ de (I2e - 18a). Les équations d'évolution quantiques pour ρ_F , déduites de celles de ρ , sont alors particulièrement simples en représentation p . Dans ces équations, les processus stimulés ne changent pas le nombre p : tout se passe, dans la représentation des familles (I2e - 21), comme s'il n'y avait plus de redistribution entre les deux ondes laser. Seule l'émission spontanée peut modifier p , mais elle le fait de façon non cohérente, couplant les éléments de ρ_F diagonaux en p à des éléments de ρ_F également diagonaux en p . Il suffit donc, lorsqu'on cherche l'état stationnaire, de se limiter aux matrices densité ρ_F diagonales dans la base p , ce qui constitue une réduction considérable du problème.

La réduction du problème apportée par la transformation (I2e - 21) est telle qu'elle rend possible la résolution numérique, directe et brutale, des équations quantiques stationnaires pour la transition $j = 1 \longrightarrow j_e = 2$. Nous verrons dans le chapitre III que les prédictions de l'équation de Fokker-Planck (I2e - 15) reproduisent de façon satisfaisante ces résultats numériques. Les deux approches, numérique et semi-classique, placent l'optimum absolu du refroidissement à nouveaux mécanismes (I2e - 11) dans la limite des grands désaccords en fréquence entre atome et laser ($|\delta| \gg \Gamma$). Dans cette limite, le refroidissement à nouveaux mécanismes adopte un comportement presque universel, en ce sens que la distribution stationnaire en impulsion, pour p exprimé en unité de $\hbar k$, dépend du seul paramètre $\frac{\hbar |\delta| s}{2E_R}$. L'étude quantique de cette limite $|\delta| \gg \Gamma$ est donc particulièrement intéressante, et nous indiquons ici, pour finir, comment réduire les équations quantiques en conséquence, ce qui rend accessibles les transitions atomiques à moment cinétique élevé ($j = 4$).

Rappelons d'abord la situation rencontrée pour le refroidissement Sisyphe, dans le §1e. Le refroidissement optimal est atteint dans la limite $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$ et ne dépend plus alors que du paramètre $\frac{U_0}{E_R}$. Nous avions décrit l'approche quantique adaptée à ce régime. Elle consiste à introduire la base propre de la partie hamiltonienne des équations de Bloch optiques généralisées (voir (I1e - 2)). Le spectre correspondant a une structure de bandes dont la séparation minimale est de l'ordre de $\hbar \Omega_{\text{osc}}$ (voir (I1d - 2) pour l'expression de Ω_{osc}), donc beaucoup plus grande, dans le régime oscillant, que la largeur des niveaux, de l'ordre de $\frac{\hbar}{\tau_p}$, due aux processus de pompage optique. La matrice densité atomique (interne et externe) stationnaire est alors essentiellement diagonale dans la base propre, donc est déterminée par la seule connaissance des taux de transition entre les niveaux, ce qui constitue une réduction importante du problème.

Nous transposons cette approche aux transitions $j \longrightarrow j_e = j + 1$ dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$. La partie hamiltonienne des équations de Bloch optiques généralisées ramenées dans l'état fondamental fait intervenir l'opérateur suivant :

$$H = \frac{P^2}{2M} + H_{\text{laser}}(Z) \quad (\text{I2e - 22})$$

$H_{\text{laser}}(Z)$ est le hamiltonien dont les énergies propres constituent les déplacements lumineux. Il contient des opérateurs de translation en impulsion $e^{\pm 2ikZ}$, qui décrivent l'effet sur l'impulsion atomique des cycles stimulés donc de la redistribution de photons entre les ondes laser. Le passage dans le référentiel tournant $OXYz$ correspond quantiquement

à la transformation unitaire (I2e - 21a). Il fait disparaître du hamiltonien les termes de redistribution pour conduire à un hamiltonien d'effet Stark (action de $\mathbf{E}(t)$), opérateur purement interne :

$$S_F^{-1} H_{\text{laser}}(Z) S_F = H_{\text{Stark}} \quad (\text{I2e - 23})$$

Il transforme l'énergie cinétique en faisant apparaître le couplage avec le champ magnétique fictif \mathbf{B} et un terme supplémentaire, de l'ordre de quelques énergies de recul, inaccessible aux considérations classiques du §2b :

$$S_F^{-1} \frac{P^2}{2M} S_F = \frac{(P + kj_z)^2}{2M} = \frac{P^2}{2M} + k \frac{P}{M} j_z + \frac{k^2 j_z^2}{2M} \quad (\text{I2e - 24})$$

Rappelons que j_z est l'opérateur moment cinétique atomique interne selon Oz . Nous constatons ainsi que le hamiltonien $H_F = S_F^{-1} H S_F$ est diagonal en impulsion p . Les états propres de H_F sont donc de la forme $|n, p\rangle \otimes |p\rangle$ où $n = 1$ à $2j + 1$ et où $|n, p\rangle$ désigne le $n^{\text{ième}}$ état propre du hamiltonien purement interne $H_F(p)$:

$$H_F(p) = \frac{(p + kj_z)^2}{2M} + H_{\text{Stark}} \quad (\text{I2e - 25a})$$

$$H_F(p)|n, p\rangle = E_n(p)|n, p\rangle \quad (\text{I2e - 25b})$$

D'après ce que nous avons déjà dit, il suffit d'étudier la partie de la matrice densité σ_F (restreinte dans l'état fondamental) diagonale en p , soit $\sigma_F(p)$. Il est nécessaire a priori, pour connaître $\sigma_F(p)$, de déterminer tous les éléments de matrice $\langle n, p | \sigma_F(p) | n', p' \rangle$. En fait, lorsque toutes les différences d'énergie $|E_n(p) - E_{n'}(p)|$, $n \neq n'$ sont beaucoup plus grandes que la largeur des niveaux due aux processus de pompage optique, les éléments de matrice non diagonaux $\langle n, p | \sigma_F(p) | n', p' \rangle$, $n \neq n'$, dans l'état stationnaire sont négligeables devant les éléments diagonaux $\langle n, p | \sigma_F(p) | n, p \rangle$. Dans cette limite, qualifiée traditionnellement de séculaire, σ_F^{st} est essentiellement diagonale dans la base propre de H_F :

$$\tilde{\sigma}^{\text{st}} \underset{|E_n - E_{n'}| \gg \frac{1}{2}\hbar\Gamma_s}{\sim} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \sum_n \Pi_n(p) |n, p\rangle |p\rangle \langle p| \langle n, p| \quad (\text{I2e - 26})$$

Le calcul direct des courbes paramétrées en p , $E_n(p)$, montre que la valeur minimale de $|E_n(p) - E_{n'}(p)|$, $n \neq n'$, atteinte au voisinage de $p = 0$, devient proportionnelle à $\hbar|\delta|s$,

lorsque $\hbar|\delta|s \gg E_R$ (la contribution du dernier terme de (I2e - 24) est alors négligeable - voir discussion plus approfondie dans le chapitre III). La condition de l'approximation séculaire coïncide dans ce cas avec la limite des grands désaccords : $|\delta| \gg \Gamma$, dont nous avons dit qu'elle conduit sur la transition $j = 1 \longrightarrow j_e = 2$ à l'optimum absolu du refroidissement $\sigma_+ - \sigma_-$.

Nous mettons en oeuvre dans le chapitre III l'approche quantique adaptée à la limite séculaire. Indiquons simplement ici l'optimum absolu pour $j = 4$ prévu par cette méthode :

$$\inf \langle p^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 6.5\hbar k \quad (\text{I2e - 27})$$

obtenu à la limite des désaccords très grands, lorsque :

$$\frac{1}{2}\hbar\delta s = -420 \frac{(\hbar k)^2}{2M} \quad (\text{I2e - 28})$$

Appendice A_I

Modèle probabiliste de la diffusion en impulsion

Nous sommes dans la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$. La très faible saturation de la transition ($s \ll 1$) nous permet de ramener la dynamique dans l'état fondamental, et nous voulons déterminer le coefficient de diffusion en impulsion pour des atomes très rapides, dont la vitesse v vérifie :

$$k|v| \gg |\delta|s \quad (\text{A}_I - 1\text{a})$$

$$k|v| \gg \Gamma s \quad (\text{A}_I - 1\text{b})$$

$$k|v| \ll \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \quad (\text{A}_I - 1\text{c})$$

Les deux premières conditions assurent que l'effet du champ magnétique fictif \mathbf{B} introduit au §2b l'emporte de beaucoup sur l'action du champ électrique $\mathbf{E}(t)$, responsable de déplacements lumineux d'ordre $\hbar\delta s$ (condition (A_I - 1a)), et sur les processus de pompage optique, responsables d'une largeur des sous-niveaux dans l'état fondamental d'ordre $\hbar\Gamma s$ (condition (A_I - 1b)). Il est alors légitime de négliger les processus stimulés et de considérer la matrice densité atomique σ comme diagonale dans la base $\{|m\rangle_z, m = 0, \pm 1\}$ adaptée à l'action de \mathbf{B} :

$$\sigma \simeq \sum_m \Pi_m |m\rangle_z \langle m| \quad (\text{A}_I - 2)$$

L'évolution temporelle de ces populations, due seulement aux cycles de fluorescence, est déduite des taux de pompage entre les sous-niveaux Zeeman : nous désignons par $\gamma_{m' \leftarrow m}^{(\pm)}$ le taux de pompage de l'état $|m\rangle_z$ vers l'état $|m'\rangle_z$ par absorption d'un photon laser polarisé σ_\pm . Lorsque (A_I - 1c) est vraie, ce taux en unité de $\frac{1}{2}\Gamma s$ est obtenu, pour la transition $j = 1 \rightarrow j_e = 2$, par le produit des carrés des coefficients de la fig. I-6 associés aux transitions $|g m\rangle \rightarrow |e m \pm 1\rangle$ et $|e m \pm 1\rangle \rightarrow |g m'\rangle$. Avec cette notation, les équations de pompage prennent la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \Pi_m(t) = -\gamma_m \Pi_m(t) + \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{m'} \gamma_{m' \leftarrow m}^{(\epsilon)} \Pi_{m'}(t) \quad (\text{A}_I - 3\text{a})$$

$$\gamma_m = \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{m'} \gamma_{m' \leftarrow m}^{(\epsilon)} \quad (\text{A}_I - 3\text{b})$$

Dans (A_I – 3), γ_m désigne le taux total de départ par pompage optique du sous-niveau $|m\rangle_z$.

Nous souhaitons passer, dans la description de l'évolution du système, de l'usage de la variable continue t , temps écoulé, à celui de la variable discrète N , nombre de cycles de fluorescence effectués. Pour cela, suivons pendant un temps T long ($\Gamma sT \gg 1$) l'évolution d'un atome. Le temps moyen passé par cet atome dans le sous-niveau $|m\rangle_z$ est $\Pi_m^{\text{st}} T$, où $\Pi_{0,\pm 1}^{\text{st}}$ est la solution stationnaire normalisée de (A_I – 3a). L'atome a effectué en moyenne $\langle N \rangle$ cycles de fluorescence, et nous introduisons la probabilité P_m^{st} telle que $\langle N \rangle P_m^{\text{st}}$ soit le nombre de cycles pour lesquels l'atome était initialement dans l'état $|m\rangle_z$. Comme à chacun de ces cycles d'état initial $|m\rangle_z$ est associé un laps de temps moyen $\frac{1}{\gamma_m}$, nous obtenons les relations de passage de la description temporelle à l'image probabiliste :

$$P_m^{\text{st}} = \frac{\gamma_m \Pi_m^{\text{st}}}{\frac{\langle N \rangle}{T}} \quad (\text{A}_I - 4a)$$

$$\sum_m P_m^{\text{st}} = 1 \quad (\text{A}_I - 4b)$$

$$\frac{\langle N \rangle}{T} = \sum_m \gamma_m \Pi_m^{\text{st}} \quad (\text{A}_I - 4c)$$

Nous avons déduit l'expression (A_I – 4c) du taux moyen de pompage $\frac{\langle N \rangle}{T}$ par insertion de la valeur (A_I – 4a) de P_m^{st} dans (A_I – 4b). L'objectif essentiel de cet appendice est le calcul de $\langle (N_+ - N_-)^2 \rangle$ à la limite des grands nombres de cycles N , N_{\pm} désignant le nombre de photons laser polarisés σ_{\pm} absorbés. Pour ceci, il est commode, à l'issue de N cycles de fluorescence, de mieux préciser le chemin suivi par l'atome, en introduisant $\mathbf{P}(N_+, N_-)$, vecteur dont la composante m donne la probabilité pour que, après N cycles de fluorescence, l'atome ait absorbé N_+ photons σ_+ , N_- photons σ_- et se retrouve dans le sous-niveau $|m\rangle_z$. La condition de normalisation associée à cette probabilité s'écrit :

$$\sum_{N_+ + N_- = N} \mathbf{u}\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(N_+, N_-) = 1 \quad (\text{A}_I - 5)$$

où $\mathbf{u}\mathbf{n}$ est le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Nous disposons alors de la relation de récurrence suivante :

$$\mathbf{P}(N_+, N_-) = M_+ [\mathbf{P}(N_+ - 1, N_-)] + M_- [\mathbf{P}(N_+, N_- - 1)] \quad (\text{A}_I - 6)$$

valable pour $(N_+, N_-) \neq (0, 0)$ avec la convention $\mathbf{P}(N_+, N_-) = 0$ si $N_+ < 0$ ou $N_- < 0$. Les matrices M_{\pm} comportent au croisement de la ligne m et de la colonne m' la probabilité pour un atome de sauter du sous-niveau $|m'\rangle_z$ vers le sous-niveau $|m\rangle_z$ en absorbant un photon polarisé σ_{\pm} , à l'issue d'un cycle de fluorescence. D'après (A_I - 3a) on obtient pour cette probabilité :

$$p_{m \leftarrow m'}^{(\pm)} = \frac{\gamma_{m \leftarrow m'}^{(\pm)}}{\gamma_{m'}} \quad (\text{A}_I - 7)$$

Nous donnons explicitement les matrices M_+ et M_- pour la transition $j = 1 \rightarrow j_e = 2$, avec l'ordre $m = 1, m = 0, m = -1$ pour les trois composantes de \mathbf{P} , lues de haut en bas :

$$M_+ = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{4} & \frac{1}{42} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{21} \\ 0 & 0 & \frac{1}{42} \end{pmatrix} \quad (\text{A}_I - 8a)$$

$$M_- = \begin{pmatrix} \frac{1}{42} & 0 & 0 \\ \frac{2}{21} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{42} & \frac{1}{4} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \quad (\text{A}_I - 8b)$$

Il s'agit maintenant, en prenant comme condition initiale pour (A_I - 6) l'état stationnaire :

$$\mathbf{P}(0, 0) = \mathbf{P}^{\text{st}} \quad (\text{A}_I - 9a)$$

$$(M_+ + M_-) [\mathbf{P}^{\text{st}}] = \mathbf{P}^{\text{st}} \quad (\text{A}_I - 9b)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^{\text{st}} = 1 \quad (\text{A}_I - 9c)$$

de déterminer le comportement asymptotique de $\langle (N_+ - N_-)^2 \rangle$ avec N :

$$\langle (N_+ - N_-)^2 \rangle \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda N \quad (\text{A}_I - 10)$$

Nous proposons deux méthodes de calcul. La première, assez formelle, utilise la technique des séries génératrices. La seconde introduit la fonction de corrélation entre les pas successifs de la marche au hasard de l'atome selon la variable $N_+ - N_-$.

Méthode des séries génératrices

Introduisons la double série génératrice à valeurs vectorielles :

$$\mathbf{g}(x, y) = \sum_{N_+, N_-} x^{N_+} y^{N_-} \mathbf{P}(N_+, N_-) \quad (\text{A}_I - 11)$$

En multipliant (A_I - 6) par $x^{N_+} y^{N_-}$ et en sommant sur $\{N_+ \geq 0, N_- \geq 0, (N_+, N_-) \neq (0, 0)\}$, on obtient l'expression explicite suivante pour $\mathbf{g}(x, y)$:

$$\mathbf{g}(x, y) - \mathbf{g}(0, 0) = (x M_+ + y M_-) [\mathbf{g}(x, y)] \quad (\text{A}_I - 12\text{a})$$

$$\text{donc } \mathbf{g}(x, y) = \frac{1}{I - (x M_+ + y M_-)} [\mathbf{P}(0, 0)] \quad (\text{A}_I - 12\text{b})$$

où I désigne la matrice de l'identité. La série génératrice des moments $\langle (N_+ - N_-)^2 \rangle$, soit $h(z)$, s'obtient par dérivation à partir de $\mathbf{g}(x, y)$:

$$h(z) = \mathbf{u} \cdot \sum_{N_+, N_-} \mathbf{P}(N_+, N_-) (N_+ - N_-)^2 z^{N_++N_-} \quad (\text{A}_I - 13\text{a})$$

$$h(z) = \sum_N \langle (N_+ - N_-)^2 \rangle_N z^N \quad (\text{A}_I - 13\text{b})$$

$$h(z) = (x \partial_x - y \partial_y)^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}|_{x=y=z} \quad (\text{A}_I - 13\text{c})$$

Pour mener les dérivations de (A_I - 13c) nous conseillons d'effectuer le changement de variables :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(x + y) \\ v = \frac{1}{2}(x - y) \end{cases} \quad (\text{A}_I - 14)$$

et d'utiliser la propriété suivante, associée à la conservation de la probabilité totale dans (A_I - 6) :

$${}^t(M_+ + M_-)[\mathbf{u}\mathbf{n}] = \mathbf{u}\mathbf{n} \quad (\text{A}_I - 15)$$

La prise en compte explicite de la condition initiale ($\text{A}_I - 9a$), dont la valeur de λ dans ($\text{A}_I - 10$) ne dépend bien sûr pas, conduit à l'expression simple suivante :

$$h(z) = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{2z^2}{(1-z)^2} \mathbf{u}\mathbf{n} \cdot (M_+ - M_-) \frac{1}{I - z(M_+ + M_-)} (M_+ - M_-) [\mathbf{P}^{\text{st}}] \quad (\text{A}_I - 16)$$

Un calcul élémentaire, diagonalisant éventuellement $M_+ + M_-$, montre que λ est donné par le résidu du pôle double $z = 1$ de $h(z)$:

$$\lambda = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^2 h(z) = 1 + 2\mathbf{u}\mathbf{n} \cdot (M_+ - M_-) \frac{1}{I - (M_+ + M_-)} (M_+ - M_-) [\mathbf{P}^{\text{st}}] \quad (\text{A}_I - 17)$$

Le terme 1 au début du dernier membre de ($\text{A}_I - 17$) correspond au résultat poissonien (I2d - 6), donc le second terme représente l'effet des corrélations dans la marche au hasard de l'atome. L'inverse de $I - (M_+ + M_-)$ s'entend dans le sous-espace associé aux valeurs propres de $M_+ + M_-$ différentes de 1. Le calcul pour $j = 1$ montre que :

$$(M_+ - M_-) [\mathbf{P}^{\text{st}}] = \frac{2}{5} \mathbf{P}_{6/7} \quad (\text{A}_I - 18a)$$

$${}^t(M_+ - M_-) [\mathbf{u}\mathbf{n}] = \frac{5}{7} \mathbf{P}_{6/7} \quad (\text{A}_I - 18b)$$

où $\mathbf{P}_{6/7} = (1, 0, -1)$ est un vecteur propre de $M_+ + M_-$ associé à la valeur propre $6/7$. Ceci était prévisible par des considérations de symétrie sous l'échange $m \longleftrightarrow -m$. On retrouve finalement le résultat annoncé dans (I2d - 8) :

$$\lambda = 1 + 2 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{6}{7}} \cdot \frac{2}{5} \cdot (\mathbf{P}_{6/7} \cdot \mathbf{P}_{6/7}) = 9 \quad (\text{A}_I - 19)$$

Approche en terme de fonction de corrélation

Nous partons de la décomposition (I2d - 4) et nous voulons calculer la fonction de corrélation $\langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle$. En régime stationnaire, cette grandeur ne dépend que de $j - i$, ce qui

nous ramène à l'évaluation de $\langle \varepsilon_0 \varepsilon_l \rangle$, $l \geq 1$. La probabilité d'absorber un photon σ_{\pm} à partir de l'état stationnaire \mathbf{P}^{st} vaut p_{\pm} , et cette absorption fait passer de la distribution \mathbf{P}^{st} à la distribution \mathbf{P}_{\pm} , avec :

$$p_{\pm} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot M_{\pm} [\mathbf{P}^{\text{st}}] \quad (\text{A}_I - 20\text{a})$$

$$\mathbf{P}_{\pm} = \frac{M_{\pm} [\mathbf{P}^{\text{st}}]}{p_{\pm}} \quad (\text{A}_I - 20\text{b})$$

L'évolution ultérieure comprend $l - 1$ cycles de fluorescence, pour lesquels on ne mesure pas la polarisation du photon absorbé. En utilisant (A_I - 6), nous montrons que l'effet de ces $l - 1$ cycles est de conduire en moyenne à la distribution :

$$\mathbf{Q}_{\pm} = (M_+ + M_-)^{l-1} [\mathbf{P}_{\pm}] \quad (\text{A}_I - 21)$$

En utilisant les probabilités d'absorption de photons polarisés σ_{ϵ} , à partir de l'état \mathbf{Q}_{ϵ} , nous obtenons pour $l \geq 1$:

$$\langle \varepsilon_0 \varepsilon_l \rangle = \sum_{\epsilon, \epsilon'=\pm 1} \varepsilon \varepsilon' \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot M_{\epsilon'} (M_+ + M_-)^{l-1} M_{\epsilon} [\mathbf{P}^{\text{st}}] \quad (\text{A}_I - 22\text{a})$$

$$\langle \varepsilon_0 \varepsilon_l \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot (M_+ - M_-) (M_+ + M_-)^{l-1} (M_+ - M_-) [\mathbf{P}^{\text{st}}] \quad (\text{A}_I - 22\text{b})$$

L'utilisation des relations (A_I - 18) conduit pour $j = 1$ au résultat (I2d - 7) :

$$\langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{6}{7} \right)^{j-i} \text{ si } j > i \quad (\text{A}_I - 23)$$

CHAPITRE II

**LES ÉQUATIONS QUANTIQUES FONDAMENTALES
QUELQUES APPLICATIONS DE LEUR LIMITÉ SEMI-CLASIQUE**

INTRODUCTION DU CHAPITRE II

Nous donnons, dans cette partie, la forme des équations d'évolution de la matrice densité atomique complète, avec quantification des degrés de liberté externes associés au mouvement du centre de masse de l'atome. La situation considérée est celle des mélasses optiques : l'atome comporte un état fondamental et un état excité, avec des sous-niveaux Zeeman $|g\ m\rangle$ et $|e\ m'\rangle$, et la transition supposée fermée entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$ est excitée par des ondes laser monochromatiques quasi-résonnantes. Les équations d'évolution portent alors le nom d'équations de Bloch optiques généralisées et nous indiquons comment les réduire lorsque les atomes sont suffisamment lents et que la transition est très peu saturée par le laser ; elles agissent dans ce cas sur la restriction de la matrice densité dans l'état fondamental.

Dans le §2, nous donnons une représentation quantique de la situation d'un atome de vitesse \mathbf{v} imposée, en substituant à l'opérateur énergie cinétique $\frac{\mathbf{P}^2}{2M}$ l'opérateur $\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}$. Dans le cas des mélasses optiques à une dimension, nous étudions, à partir des équations de Bloch optiques généralisées écrites en représentation de Wigner, le comportement de la quasi-quantité de mouvement d'un tel atome de vitesse v , ce qui nous permet de définir une force et un coefficient de diffusion en impulsions fonction de la position z et de la vitesse v . Finalement, nous donnons une première utilisation des valeurs de la force et du coefficient de diffusion dans ce qui constitue l'approche semi-classique traditionnelle, et nous montrons les insuffisances de cette approche.

0 - DÉMARCHE GÉNÉRALE SUIVIE DANS CE CHAPITRE II

a) Equations d'évolution de la matrice densité atomique

Les situations physiques que nous étudions peuvent être modélisées par l'interaction d'un "petit système" et d'un réservoir à très grand nombre de degrés de liberté. Le réservoir est constitué par le champ quantique initialement dans l'état vide de rayonnement. Le petit système est un atome, dont l'état interne comporte des sous-niveaux excités $|e m\rangle$ et fondamentaux $|g m\rangle$ reliés par transition optique, et dont le mouvement du centre de masse est quantifié. Nous expliciterons au §1a le hamiltonien du système total atome + champ quantique utilisé. Nous nous intéressons ici seulement à l'influence du réservoir sur la dynamique du système atomique : les fluctuations quantiques du champ entraînent une relaxation du petit système, dont le processus physique est l'émission spontanée, caractérisée par le taux de désexcitation Γ de l'état excité. Le temps de relaxation correspondant, $T_{\text{relax}} = \frac{1}{\Gamma}$, étant beaucoup plus long que le temps de corrélation du réservoir τ_C , de l'ordre de la période optique, il est possible d'éliminer, par l'approximation markovienne habituelle, les degrés de liberté du champ quantique pour obtenir les équations d'évolution, dites de Bloch optiques généralisées, de la matrice densité atomique complète ρ , qui décrit l'état atomique interne et le mouvement du centre de masse. Ces équations comportent une partie réactive, hamiltonienne, dans laquelle intervient le potentiel purement atomique $V_{AL}(t)$ décrivant l'influence du champ électrique laser moyen sur la dynamique atomique. Ces équations comportent également une partie dissipative, non hamiltonienne, donnant l'effet des processus de relaxation sur l'état interne et le mouvement de l'atome.

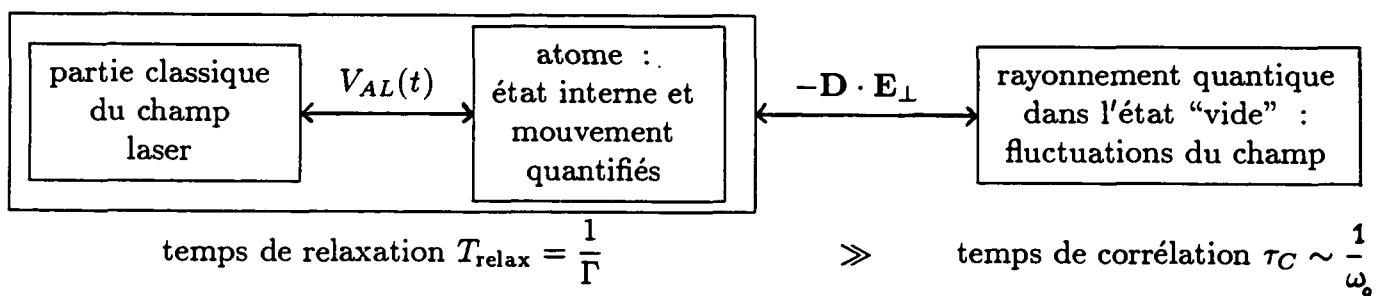


Fig. II-1 : Modélisation de l'interaction atome-champ laser

Nous réalisons explicitement au §1b l'élimination des degrés de liberté du champ dans l'approximation de mémoire courte ($\Gamma\tau_C \ll 1$) [43], avec prise en compte de la quantification du mouvement du centre de masse atomique [11,17]. Nous rappelons d'autre part, au §1c, comment séparer la partie classique et les fluctuations quantiques du champ à l'aide d'une transformation de Mollow [44], lorsque le champ quantique est initialement dans un produit d'états cohérents. Le lecteur familier avec les considérations de ces deux paragraphes peut en négliger la lecture.

b) Adapter les équations d'évolution à l'étude du refroidissement

(i) Réduction des équations quantiques

Les équations quantiques dont nous disposons sont extrêmement générales. Or, nous allons les utiliser pour étudier plus particulièrement les nouveaux mécanismes de refroidissement dans les mélasses optiques. Il convient donc d'effectuer certaines transformations et certaines approximations, conduisant à des équations toujours quantiques, mais réduites, donc plus faciles à manier.

D'une part, les configurations laser considérées dans le présent travail sont toutes unidimensionnelles, c'est-à-dire qu'elles sont obtenues par superposition d'ondes progressives de même axe de propagation Oz . Seule l'impulsion du centre de masse atomique selon Oz est alors intéressante, ce qui permet de réduire la matrice densité ρ à une matrice $\bar{\rho}$, décrivant complètement l'état atomique interne mais ne donnant que le mouvement atomique selon Oz . La trace partielle des équations quantiques sur les degrés de liberté externes selon Ox et Oy , conduit sans approximation, dans le cas unidimensionnel, aux équations d'évolution quantiques sur $\bar{\rho}$.

D'autre part, nous étudions essentiellement les nouveaux mécanismes près de l'optimum du refroidissement. Or, il se trouve que cet optimum correspond à des valeurs faibles du paramètre de saturation s_0 de la transition par le laser : l'atome passe, en moyenne, une partie également faible de son temps dans l'état excité. De plus, les vitesses atomiques sont très basses, ce qui assure que l'atome parcourt, pendant qu'il reste dans l'état excité, une distance petite devant la longueur d'onde optique $\lambda = \frac{2\pi}{k}$: nous avons affaire à des distributions en vitesse de largeur Δv telle que $k\Delta v \ll \Gamma$, ce qui permet de négliger les mécanismes du refroidissement Doppler. Par élimination adiabatique de l'état excité et par développement des équations quantiques à l'ordre 0 en $\frac{k\Delta v}{\Gamma}$, il est alors possible d'obtenir des équations d'évolution quantiques mais approchées sur la matrice densité atomique σ

restreinte dans l'état fondamental. La dynamique est ramenée dans l'état fondamental et il ne reste, en termes de refroidissement, que les nouveaux mécanismes.

Nous résumons sur la fig. II-2, les deux réductions des équations quantiques, l'une exacte, l'autre approchée, que l'on peut bien sûr effectuer en cascade.

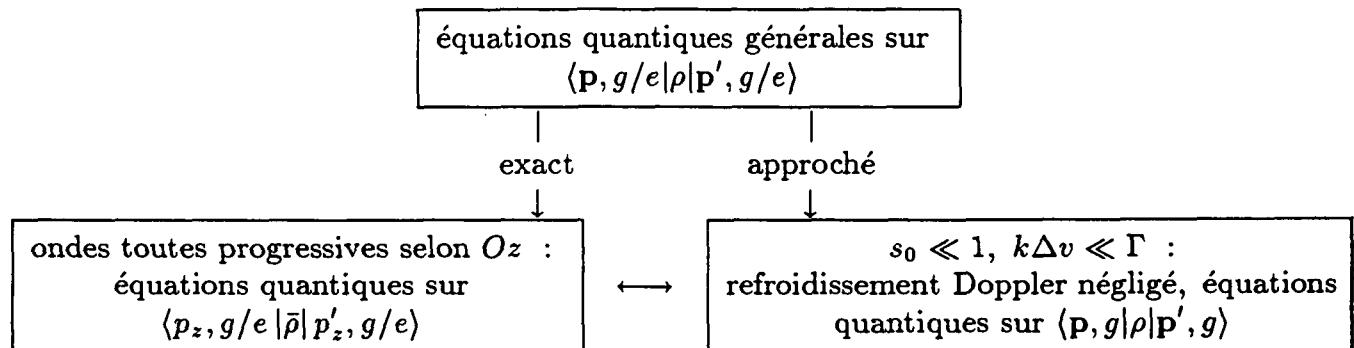


Fig. II-2 : Les deux réductions des équations quantiques

(ii) Approximation semi-classique des équations quantiques

Dans les configurations que nous allons étudier, qui sont celles des mélasses optiques, les atomes décrivent en permanence des cycles de fluorescence. On conçoit alors, intuitivement, que la largeur en impulsion Δp des distributions stationnaires les plus froides ne puisse être très inférieure au recul associé à l'émission d'un seul photon $\hbar k$. Ceci signifie, d'après les inégalités de Heisenberg, que la longueur de cohérence spatiale des atomes, $\Delta\xi$, reste plus petite que la longueur d'onde optique λ . Il semble donc pertinent, en première approximation, de traiter classiquement le mouvement du centre de masse atomique, tout en maintenant la description quantique des degrés de liberté atomiques internes, ce qui a fait qualifier cette approche de semi-classique.

Pour obtenir de façon systématique la limite semi-classique des équations quantiques, il est commode d'écrire la matrice densité atomique en représentation de Wigner. Dans ce point de vue, l'état atomique est défini par la donnée, en chaque point (\mathbf{z}, \mathbf{p}) de l'espace des positions-impulsions, d'une matrice densité interne $W(\mathbf{z}, \mathbf{p}, t)$, dont la trace interne, $f(\mathbf{z}, \mathbf{p}, t)$, constitue une distribution de quasi-probabilité en positions-impulsions. Dans l'évolution temporelle de la distribution de Wigner déduite des équations quan-

tiques, $\partial_t W(\mathbf{z}, \mathbf{p})$ est couplé à $W\left(\mathbf{z}, \mathbf{p} \pm \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)$ par interaction avec les modes laser, et à $W(\mathbf{z}, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_S)$ par émission spontanée d'un photon d'impulsion $\hbar \mathbf{k}_S$. Dans la limite semi-classique $\Delta p \gg \hbar k$, il est légitime de développer ces termes non locaux en \mathbf{p} au second ordre en $\hbar k$: les équations aux dérivées partielles obtenues sur $W(\mathbf{z}, \mathbf{p})$ ne sont autres que les équations semi-classiques cherchées. Nous les présentons au §2a.

Cependant, l'analyse des équations semi-classiques reste difficile, à cause du couplage étroit entre les degrés de liberté internes (éléments de matrice de $W(\mathbf{z}, \mathbf{p})$) et le mouvement du centre de masse (distribution $f(\mathbf{z}, \mathbf{p})$). Pour éliminer l'état atomique interne en l'asservissant aux degrés de liberté externes, il est habituel de se placer à des échelles de temps t beaucoup plus longues que T_{int} , où T_{int} est le temps typique de relaxation des variables internes.

Nous effectuons au §2b une telle élimination, dans la situation modèle et unidimensionnelle d'un atome de vitesse constante v_0 . Dans ce modèle, nous prenons en compte de façon exacte les changements des moyennes $\langle p \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$ de l'impulsion atomique sous l'effet des forces radiatives, dans le cas limite où les changements correspondants pour la vitesse atomique peuvent être considérés comme négligeables. Au bout de $t \gg T_{\text{int}}$, l'état atomique interne atteint un régime forcé, déduit des équations de Bloch ordinaires, qui permet de calculer la force radiative moyenne $F(z, v_0)$ subie par l'atome. Nous obtenons également, au prix d'une seconde intégration des équations de Bloch, l'expression du coefficient de diffusion $D(z, v_0)$, qui caractérise les fluctuations de ces forces radiatives.

En fait, et c'est là tout l'intérêt du problème, les forces radiatives modifient aussi la vitesse atomique. Au bout d'un temps que nous appelons T_{ext} , la variation de vitesse typique correspondante δv est telle que les régimes internes forcés aux vitesses v_0 et $v_0 + \delta v$ deviennent sensiblement différents. Les résultats du modèle précédent, déduits de régimes forcés, ne sont donc a priori pertinents qu'aux instants t tels que $T_{\text{int}} \ll t \ll T_{\text{ext}}$, ce qui suppose en particulier que $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$ et exclut l'état stationnaire ($t = \infty$). Il semble ainsi plus intéressant d'effectuer une élimination de l'état atomique interne qui soit valable aux instants t tels que : $T_{\text{int}} \ll t \gtrsim T_{\text{ext}}$. Une telle élimination, dite "adiabatique", conduit formellement, à partir des équations semi-classiques, à une loi d'évolution pour la seule distribution en position-impulsion $f(z, p, t)$, loi que nous notons symboliquement $\partial_t f + \mathcal{L}[f] = 0$. Précisons tout de suite que l'expression de l'opérateur \mathcal{L} est en générale très complexe, faisant intervenir des dérivées en p à un ordre arbitraire et étant non locale

en position. Nous ne donnons pas, dans le présent travail, l'expression générale de \mathcal{L} , peu exploitable. Une question plus intéressante est l'examen de la possibilité d'obtenir une expression simplifiée de \mathcal{L} sous la forme d'un opérateur de Fokker-Planck contenant la force moyenne $F(z, v_0)$ et le coefficient de diffusion en impulsions $D(z, v_0)$, ce qui rendrait tout son intérêt au modèle simple de l'atome à vitesse imposée. Une telle possibilité a été réalisée, à l'époque du refroidissement Doppler, dans ce que nous appelons l'approche semi-classique traditionnelle. Nous résumons la présente problématique sur la fig. II-3, avant de passer à l'insuffisance de l'approche semi-classique traditionnelle en présence des nouveaux mécanismes de refroidissement.

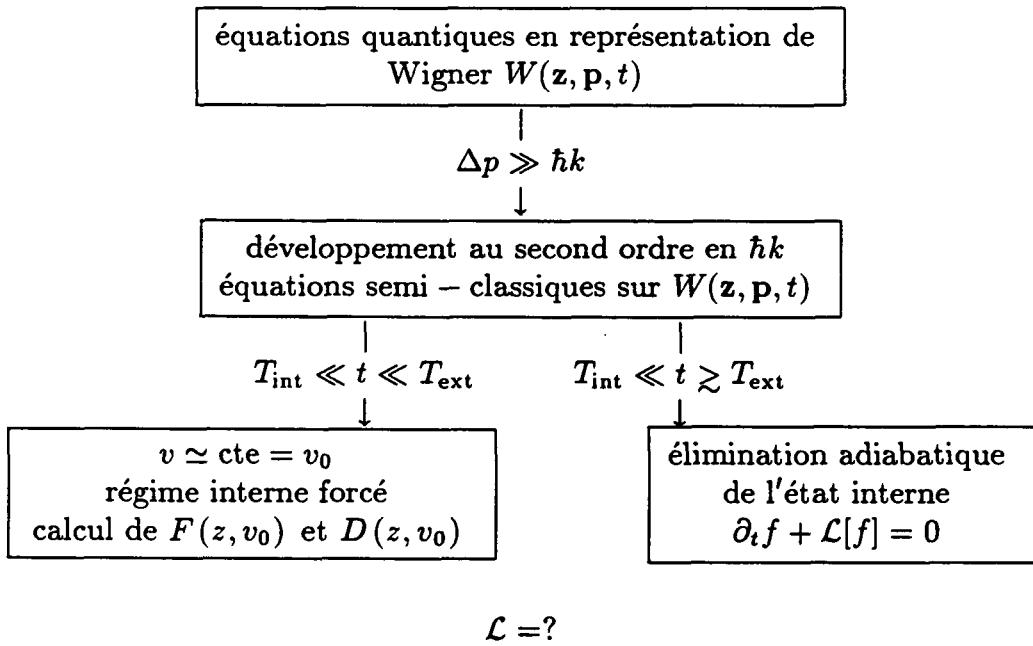


Fig. II-3 : Les équations semi-classiques et le problème de l'élimination de l'état interne

c) L'approche semi-classique traditionnelle

Cette approche, dont l'objet était originellement le refroidissement Doppler, est présentée habituellement comme un développement perturbatif au second ordre en $\frac{T_{\text{int}}}{T_{\text{ext}}}$ de l'opérateur \mathcal{L} du §b précédent [17], ce qui conduit à une équation de Fokker-Planck comportant un terme de friction linéaire en vitesse et un terme de diffusion en impulsions calculé

pour des atomes au repos. Au §2c, nous donnons à cette approche, dans le cas unidimensionnel, une formulation différente, qui procède par développement perturbatif de la distribution stationnaire f .

(i) Les petits paramètres physiques du développement

L'approche semi-classique traditionnelle se place dans un régime tel que, pendant le temps typique de relaxation des variables atomiques internes, ni la position ni la vitesse des atomes n'ont le temps de changer significativement.

L'exigence de faible déplacement spatial pendant T_{int} est particulièrement contraintante. Dans les situations de mélasses optiques que nous étudions, la présence de gradients de polarisation de période la longueur d'onde optique λ donne au régime interne forcé pour un atome au repos une forte dépendance spatiale, de même période λ . L'approche semi-classique traditionnelle exige donc que :

$$k|v|T_{\text{int}} \ll 1 \quad (\text{II0c - 1})$$

Notre modèle d'atome de vitesse imposée v_0 , au §2b, qui permet le calcul de la force radiative moyenne $F(z, v_0)$ et du coefficient de diffusion $D(z, v_0)$, réclame certes, pour être pertinent, une faible variation de la vitesse pendant T_{int} , mais il n'impose rien sur le déplacement spatial du centre de masse pendant T_{int} . En général, la condition (II0c - 1) assure, en fait, que les vitesses atomiques considérées se trouvent dans le domaine de linéarité de la force moyenne $F(z, v)$ avec la vitesse :

$$F(z, v) \simeq -\frac{dU}{dz} - \alpha(z)v \quad (\text{II0c - 2})$$

La force réactive, dérivant du potentiel dipolaire U , est de moyenne spatiale nulle, contrairement au terme de friction, dissipatif. La condition (II0c - 1) permet également d'oublier la dépendance en vitesse du coefficient de diffusion $D(z, v)$:

$$D(z, v) \simeq D(z, v = 0) = D(z) \quad (\text{II0c - 3})$$

Remarquons tout de suite un point qui jouera un rôle important dans la discussion qui va suivre : par construction, $\alpha(z)$ et $D(z)$ sont indépendants de la masse atomique.

L'examen de la condition de faible variation de la vitesse pendant T_{int} est grandement facilité par les résultats précédents. Nous caractérisons l'effet de chaque terme de

(II0c - 2) sur le mouvement des atomes par deux échelles de temps externes. Au terme réactif $\left(-\frac{dU}{dz}\right)$ est associé le temps externe réactif :

$$T_{\text{ext}}^{(1)} = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{osc}}} \quad (\text{II0c - 4})$$

où Ω_{osc} est la pulsation d'oscillation au fond des puits de $U(z)$. Au terme dissipatif $(-\alpha v)$ est associé le temps externe dissipatif :

$$T_{\text{ext}}^{(2)} = \frac{M}{\alpha} \quad (\text{II0c - 5})$$

où $\frac{\alpha}{M}$ est le taux d'amortissement de la vitesse sous l'influence de la force de friction. Pour que la vitesse atomique moyenne varie peu en valeurs relatives pendant T_{int} , les deux conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}^{(1)} \quad (\text{II0c - 6a})$$

$$T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}^{(2)} \quad (\text{II0c - 6b})$$

(ii) Comment mener le développement perturbatif ?

Nous résumons, dans l'état stationnaire, les trois conditions de validité (II0c - 1), (II0c - 6a) et (II0c - 6b), par l'introduction d'un seul paramètre formel de développement :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{M}} \quad (\text{II0c - 7})$$

où l'échelle de masse M_0 , fonction de $\hbar k, \Gamma, \dots$ est précisée plus loin. En effet, nous nous attendons, comme dans la théorie standard du mouvement brownien, à ce que cet état stationnaire soit caractérisé par une température T telle que $k_B T \sim \frac{D}{\alpha}$, indépendante donc de la masse atomique M . Dans ce cas, l'énergie cinétique moyenne dans l'état stationnaire n'en dépend pas non plus, ce qui donne en fonction de la masse M la loi d'échelle $v \sim \varepsilon$ pour la largeur en vitesse de la distribution. La condition (II0c - 1) exprime alors simplement que $\varepsilon \ll 1$, lorsque la seule dépendance en masse est prise en compte. (II0c - 6a) lui est, de ce point de vue, équivalente : le potentiel $U(z)$ ne dépend pas de la masse de l'atome, donc la constante de raideur de la partie harmonique de $U(z)$ n'en dépend pas

non plus, ce qui désigne ϵ comme la loi d'échelle de la pulsation Ω_{osc} avec la masse. On constate finalement que (II0c - 6b) introduit un petit paramètre du second ordre en ϵ , puisque $T_{\text{ext}}^{(2)}$ est proportionnel à M . Cette simple analyse donne de façon plus précise les petits paramètres d'ordre 1 de l'approche semi-classique traditionnelle :

$$\epsilon \sim kvT_{\text{int}}, \frac{T_{\text{int}}}{T_{\text{ext}}^{(1)}}, \frac{T_{\text{ext}}^{(1)}}{T_{\text{ext}}^{(2)}} \quad (\text{II0c} - 8)$$

Nous effectuons, au §2c, le développement suivant de la matrice densité en représentation de Wigner et de la distribution $f(z, p)$ qui lui est associée par trace interne :

$$W = W^{(0)} + \epsilon W^{(1)} + \epsilon^2 W^{(2)} + \dots \quad (\text{II0c} - 9a)$$

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (\text{II0c} - 9b)$$

Nous substituons ces développements dans la forme stationnaire des équations semi-classiques et nous identifions les termes de même ordre en ϵ . Nous montrons qu'il est nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 2 en ϵ dans le développement (II0c - 9a), pour déterminer complètement la distribution $f^{(0)}$, dont nous donnons une expression explicite. On peut en déduire l'énergie cinétique moyenne seulement à l'ordre 0 en ϵ , bien qu'on ait calculé jusqu'à l'ordre 2.

(iii) Insuffisance des résultats pour les nouveaux mécanismes de refroidissement

Par sa nature même, comme nous venons de le voir, l'approche semi-classique traditionnelle, à l'issue du développement à l'ordre 2 en ϵ , prédit des énergies cinétiques moyennes indépendantes de la masse M de l'atome dans l'état stationnaire. Dans le cas modèle du refroidissement Sisyphe du I§1, ces énergies cinétiques prédictes sont proportionnelles à la profondeur des trous de potentiel que constituent les déplacements lumineux. On réalise rapidement que de tels résultats sont incomplets. Par exemple, l'optimum du refroidissement à nouveaux mécanismes, dont nous verrons par ailleurs qu'il correspond à une énergie cinétique de l'ordre de l'énergie de recul, inversement proportionnelle à M , tend vers 0 et donc disparaît dans la limite $M \rightarrow +\infty$.

Nous examinons, à la fin du §2c, la possibilité (théorique) de pousser les développements (II0c - 9) à des ordres supérieurs en ϵ . Nous constatons alors que même les calculs à l'ordre 6 en ϵ , qui conduiraient à des distributions stationnaires correctes jusqu'à l'ordre 4

en ε , ne sont pas satisfaisants, en particulier en ce qui concerne le seuil du refroidissement. Il est donc nécessaire de faire appel à d'autres approches, non perturbatives en ε , que nous présentons sur des configurations laser particulières, dans les chapitres III et IV, et dont nous comparons les prédictions aux résolutions numériques des équations quantiques.

1 - OBTENTION DES ÉQUATIONS DE BLOCH OPTIQUES GÉNÉRALISÉES

a) Hamiltonien du système atome+champ quantique

(i) Cas de l'atome

Nous nous limitons, en ce qui concerne la structure atomique interne, à un état fondamental, noté g , et un état excité, noté e . Ces états comportent éventuellement plusieurs sous-niveaux Zeeman, associés au moment cinétique total j_g dans l'état fondamental et j_e dans l'état excité. Nous utiliserons souvent la base des états propres de l'opérateur moment cinétique interne j_z selon l'axe Oz , soit $\{|g\ m\rangle_z, |e\ m'\rangle_z\}$. Le hamiltonien associé à ces degrés de liberté internes de l'atome prend la forme suivante, lorsqu'on choisit l'état fondamental comme origine des énergies :

$$H_{\text{at}}^{\text{int}} = \hbar\omega_0 P_e \quad (\text{IIIa - 1})$$

Dans (IIIa - 1), ω_0 représente la pulsation propre de l'atome nu et P_e désigne le projecteur orthogonal sur l'état excité :

$$P_e = \sum_{m=-j_e}^{j_e} |e\ m\rangle_z \langle e\ m| \quad (\text{IIIa - 2})$$

Le mouvement du centre de masse atomique est traité quantiquement dans la limite non relativiste. En particulier, nous négligeons la dépendance de la masse atomique M avec l'état interne. Le hamiltonien associé aux degrés de liberté externes de l'atome correspond donc à l'énergie cinétique du centre de masse :

$$H_{\text{at}}^{\text{ext}} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} \quad (\text{IIIa - 3})$$

Nous utiliserons souvent la base des états propres de l'opérateur quantité de mouvement totale \mathbf{P} . Il est traditionnel de choisir comme volume de quantification une boîte cubique de côté L , associée aux axes cartésiens Ox , Oy et Oz , avec des conditions aux limites périodiques. L'état $|\mathbf{p}\rangle$ prend alors la forme suivante en représentation position :

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{p}.\mathbf{r}/\hbar} \quad (\text{IIIa - 4})$$

avec les contraintes associées à la périodicité :

$$p_j = n_j \frac{2\pi\hbar}{L}, \quad n_j \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad j = x, y, z \quad (\text{II1a - 5})$$

(ii) Cas du rayonnement quantique

Nous nous plaçons en jauge de Coulomb ($\text{div } \mathbf{A} = 0$, où \mathbf{A} est le potentiel vecteur dont dérive le champ magnétique \mathbf{B}) donc nous ne quantifions que la partie transverse \mathbf{E}_\perp du champ électrique, suivant la procédure habituelle [45]. Le champ quantique est décrit par une superposition d'oscillateurs harmoniques linéaires μ dont les excitations élémentaires sont les photons. A chaque indice μ correspond un mode du champ transverse \mathbf{E}_\perp , que nous choisissons être l'onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k}_μ , de pulsation ω_μ et de polarisation éventuellement complexe ϵ_μ :

$$\|\mathbf{k}_\mu\| = \frac{\omega_\mu}{c} \quad (\text{II1a - 6a})$$

$$\mathbf{k}_\mu \cdot \epsilon_\mu = 0 \quad (\text{II1a - 6b})$$

Le volume de quantification choisi pour le champ coïncide avec celui choisi pour les atomes du (i), puisque ces deux systèmes sont amenés à interagir. Chaque impulsion $\hbar\mathbf{k}_\mu$ est donc de la forme (II1a - 5). Le hamiltonien du champ s'exprime en terme des opérateurs création a_μ^\dagger et annihilation a_μ d'un photon dans le même mode μ :

$$H_R = \sum_\mu \hbar\omega_\mu \left(a_\mu^\dagger a_\mu + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{II1a - 7})$$

(iii) Couplage entre atome et rayonnement quantique

Pour décrire ce couplage, nous nous plaçons dans l'approximation dipolaire électrique valable lorsque l'extension spatiale des états atomiques internes, décrivant le mouvement relatif des électrons par rapport au noyau, est petite devant les longueurs d'onde pertinentes du rayonnement, qui sont ici dans le domaine optique. Notons bien que la légitimité de cette approximation dipolaire électrique n'est pas affectée par la cohérence spatiale importante, supérieure à la longueur d'onde optique, acquise par le centre de masse atomique dans certains schémas de refroidissement [34,53,54], puisque seul le mouvement relatif entre en ligne de compte. Le couplage dipolaire électrique s'exprime simplement en

terme de l'opérateur dipôle électrique atomique \mathbf{D} et de l'opérateur champ électrique \mathbf{E}_\perp évalué en \mathbf{R} , opérateur position du centre de masse atomique^(*) :

$$V_{AR} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_\perp(\mathbf{R}) \quad (\text{IIIa - 8})$$

L'opérateur dipôle électrique \mathbf{D} n'agit que sur les états atomiques internes. C'est un opérateur impair, donc tous ses éléments de matrice sont nuls à l'intérieur de l'état fondamental et de l'état excité, qui sont des états de parité bien définie. C'est de plus un opérateur vectoriel. Comme l'état fondamental et l'état excité sont de moment cinétique (respectivement j_g et j_e) bien défini, nous pouvons, par application du théorème de Wigner-Eckart [52], mettre l'opérateur \mathbf{D} sous la forme :

$$\mathbf{D} = d\Delta \quad (\text{IIIa - 9})$$

Le nombre d , moment dipolaire électrique typique de la transition, peut être rendu réel par un choix de phase global sur l'état excité. L'opérateur dipôle réduit Δ est tel que ses éléments de matrice sont les coefficients de Clebsch-Gordan associés à l'addition de moments cinétiques $1 + j_g \longrightarrow j_e$. Les moments cinétiques de l'état fondamental et de l'état excité doivent donc souscrire à la condition :

$$|j_e - j_g| \leq 1 \quad (\text{II1a - 10})$$

si l'on veut relier ces états par une transition dipolaire électrique. Décomposons d'une part l'opérateur dipôle réduit en une partie ascendante $\Delta^{(+)}$, qui fait passer de l'état fondamental à l'état excité, et une partie descendante $\Delta^{(-)}$, qui fait passer de l'état excité à l'état fondamental :

$$\Delta^{(+)} = P_e \Delta P_g \quad (\text{II1a - 11a})$$

$$\Delta^{(-)} = P_g \Delta P_e \quad (\text{II1a - 11b})$$

(*) En toute rigueur, signalons que ce couplage est obtenu après transformation unitaire à partir de la jauge (\mathbf{A}, \mathbf{p}) : l'opérateur \mathbf{E}_\perp , qui s'exprime comme l'opérateur champ électrique transverse en jauge (\mathbf{A}, \mathbf{p}) , ne représente pas l'observable champ électrique dans la jauge (\mathbf{D}, \mathbf{E}) , mais l'observable induction électrique, à un facteur ϵ_0 près [46].

Comme d est choisi réel, ces deux parties se correspondent par conjugaison hermitienne. Introduisons d'autre part les composantes du vecteur Δ dans la base standard $(\mathbf{u}_q)_{q=0,\pm 1}$:

$$\Delta_q = \Delta \cdot \mathbf{u}_q \quad (\text{IIIa - 12a})$$

$$\Delta_{-q} = (-1)^q \Delta_q^\dagger \quad q = 0, \pm 1 \quad (\text{IIIa - 12b})$$

Les vecteurs \mathbf{u}_+ et \mathbf{u}_- , associés aux polarisations circulaires droite et gauche (σ_+ et σ_-), sont donnés par (I1a - 2). \mathbf{u}_0 est simplement le vecteur unitaire \mathbf{e}_z selon l'axe Oz (polarisation π). L'action de Δ est alors simple dans la base des états propres du moment cinétique interne j_z :

$$\Delta_q^{(+)} |g m\rangle = c_m^q |e m+q\rangle \quad (\text{IIIa - 13a})$$

$$\Delta_q^{(-)} |e m\rangle = (-1)^q c_{m+q}^{-q} |g m+q\rangle \quad (\text{IIIa - 13b})$$

avec la convention $|e m+q\rangle = 0$ si $|m+q| > j_e$ et $|g m+q\rangle = 0$ si $|m+q| > j_g$. Les coefficients de Clebsch-Gordan c_m^q sont donnés dans la table II-4 pour les transitions de type $j \rightarrow j, j \pm 1$. Dans notre travail, nous n'avons considéré que des transitions de type $j_g = j \rightarrow j_e = j + 1$. Ce sont les seules pour lesquelles l'atome n'a jamais de sous-niveau dans l'état fondamental non couplé à la lumière, que cette lumière soit polarisée selon σ_+ , σ_- ou π (les coefficients c_m^q , $-j \leq m \leq j$ et $q = 0, \pm 1$ sont tous non nuls). La présence d'une combinaison linéaire dans l'état fondamental non couplée à la lumière (voir par exemple le schéma des résonances noires sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 1$ [34]) peut conduire à des situations physiquement très différentes de celles des mélasses optiques. On pourra consulter [107] pour une étude expérimentale du refroidissement avec $j_e = j_g - 1$.

Rappelons la forme que prend le champ électrique transverse $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r})$ développé sur les ondes planes que sont les modes μ :

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_\perp^{(-)}(\mathbf{r}) \quad (\text{IIIa - 14a})$$

$$\mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_\mu \mathcal{E}_\mu \epsilon_\mu e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{r}} a_\mu \quad (\text{IIIa - 14b})$$

q	$j \rightarrow j - 1$	$j \rightarrow j$	$j \rightarrow j + 1$
-1	$\sqrt{\frac{(j+m)(j+m-1)}{2j(2j+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j+1-m)(j+m)}{2j(j+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j+1-m)(j+2-m)}{(2j+1)(2j+2)}}$
0	$-\sqrt{\frac{(j-m)(j+m)}{j(2j+1)}}$	$\frac{m}{\sqrt{j(j+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j+1-m)(j+1+m)}{(2j+1)(j+1)}}$
1	$\sqrt{\frac{(j-1-m)(j-m)}{2j(2j+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j+m+1)(j-m)}{2j(j+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j+1+m)(j+2+m)}{(2j+1)(2j+2)}}$

Fig. II-4 : Coefficients de Clebsch-Gordan c_m^q de l'équation (II1a - 13) pour les 3 transitions dipolaires électriques permises à partir de l'état fondamental de moment cinétique j [47].

$$\mathbf{E}_{\perp}^{(-)}(\mathbf{r}) = [\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r})]^\dagger \quad (\text{II1a - 14c})$$

$$\mathcal{E}_\mu = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2\varepsilon_0 L^3}} \quad (\text{II1a - 14d})$$

Nous avons décomposé d'abord le champ en sa partie de fréquence positive $\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}$ et sa partie de fréquence négative $\mathbf{E}_{\perp}^{(-)}$. La partie de fréquence positive, dont nous avons donné l'expression en (II1a - 14b), s'appelle ainsi car chacune de ses composantes évolue temporellement avec un facteur de phase $e^{-i\omega_\mu t}$ en représentation de Heisenberg pour le champ libre. Ceci est dû au fait que cette partie comporte seulement des opérateurs annihilation de photons; quant à $\mathbf{E}_{\perp}^{(-)}$, il ne comporte que des opérateurs création de photons. Nous avons indiqué finalement la convention habituelle pour l'amplitude élémentaire \mathcal{E}_μ du champ dans le mode μ . Le terme L^3 correspond bien sûr au volume de quantification.

Le couplage décrit par (II1a - 8) a maintenant un sens physique clair. Les processus élémentaires qui lui sont associés (dans un développement diagrammatique par exemple) sont l'absorption ou l'émission d'un photon, avec changement d'état interne de l'atome ($g \longleftrightarrow e$). Si l'atome absorbe (action de a_μ dans $\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}$) un photon polarisé \mathbf{u}_q selon Oz , son moment cinétique interne selon Oz augmente de $q\hbar$, grâce aux propriétés de l'opérateur $\Delta \cdot \mathbf{u}_q$ (voir (II1a - 13)). Si l'atome émet (action de a_μ^\dagger dans $\mathbf{E}_{\perp}^{(-)}$) ce même photon,

l'action de $\Delta \cdot \mathbf{u}_q^* = (-1)^q \Delta \cdot \mathbf{u}_{-q}$ diminue le moment cinétique interne de $q\hbar$. L'état atomique externe est également modifié par ces processus. Les opérateurs $e^{\pm i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}}$ intervenant dans (II1a - 8) ont en effet l'action suivante sur le mouvement du centre de masse en représentation impulsion :

$$e^{\pm i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}} |\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{k}_\mu\rangle \quad (\text{II1a - 15})$$

Ce sont donc des opérateurs de translation en impulsion qui diminuent l'impulsion atomique de celle du photon émis (action de $e^{-i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}}$ dans $\mathbf{E}_\perp^{(-)}(\mathbf{R})$) ou augmentent l'impulsion atomique de celle du photon absorbé (action de $e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}}$ dans $\mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{R})$).

Nous allons, pour finir, simplifier le couplage dipolaire électrique dans l'approximation dite du champ tournant [48]. Pour cela, récrivons (II1a - 8) en introduisant la décomposition de \mathbf{D} en parties ascendante et descendante, et celle de \mathbf{E}_\perp en parties de fréquence positive et négative :

$$\begin{aligned} V_{AR} = & - \mathbf{D}^{(+)} \cdot \mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{R}) - \mathbf{D}^{(-)} \cdot \mathbf{E}_\perp^{(-)}(\mathbf{R}) \\ & - \mathbf{D}^{(+)} \cdot \mathbf{E}_\perp^{(-)}(\mathbf{R}) - \mathbf{D}^{(-)} \cdot \mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (\text{II1a - 16})$$

Les processus élémentaires associés à la première ligne de (II1a - 16) sont ceux qui interviennent dans les diagrammes habituels de diffusion de la lumière par les atomes : l'absorption d'un photon fait passer l'atome de l'état fondamental à l'état excité, et l'atome se désexcite en émettant un photon. Ces processus donnent naissance à des dénominateurs d'énergie résonnantes dans le calcul perturbatif des amplitudes de diffusion. Par contre, les processus élémentaires associés à la deuxième ligne de (II1a - 16) changent l'énergie non perturbée $H_{at} + H_R$ du système d'une grandeur de l'ordre de $\hbar(\omega_0 + \omega_\mu)$, où ω_0 et ω_μ sont pour nous en pratique dans le domaine optique. Ils ne conduisent donc pas à des dénominateurs d'énergie résonnantes dans l'interaction lumière-matière, mais ils sont à l'origine, par exemple, du déplacement de Lamb de l'état fondamental [48] ou de l'interaction de Van der Waals entre deux atomes dans l'état fondamental [49]. Nous allons ainsi négliger les termes de cette deuxième ligne, ce qui est nécessaire si l'on veut être cohérent avec le modèle de la transition fermée entre deux niveaux atomiques. Donnons la forme définitive du potentiel de couplage entre atome et rayonnement, utilisée dans tout notre travail, et décomposée en parties ascendante et descendante :

$$V = V^{(+)} + V^{(-)} \quad (\text{IIIa - 17a})$$

$$V^{(+)} = \sum_{\mu} \frac{\hbar \Omega_{\mu}}{2} a_{\mu} e^{i \mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{R}} \Delta^{(+)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mu} \quad (\text{IIIa - 17b})$$

$$\Omega_{\mu} = -\frac{2d\mathcal{E}_{\mu}}{\hbar} \quad (\text{IIIa - 17c})$$

Nous avons défini dans (IIIa - 17c) la pulsation de Rabi Ω_{μ} qui caractérise l'importance du couplage entre l'atome et le champ électrique élémentaire \mathcal{E}_{μ} du mode μ .

b) Relaxation de l'atome en l'absence de champ laser

Nous sommes confronté ici au problème suivant. Un atome dans l'espace libre, initialement (à $t = 0$) dans l'état excité, est couplé au champ quantique dans l'état vide de rayonnement par (IIIa - 17). Nous savons que cet atome va se désexciter et que l'état du système au bout d'un temps long devant $\frac{1}{\Gamma}$, où $\hbar\Gamma$ est largeur naturelle de l'état excité, est celui d'un atome dans l'état fondamental en présence d'un état du champ contenant un photon et ayant la forme d'une onde divergente s'éloignant de l'atome à la célérité c . Cette évolution est irréversible parce que le spectre en énergie des modes du rayonnement est continu. Il en serait autrement dans une petite cavité à très grand facteur de qualité : l'atome pourrait alors réabsorber le photon réel qu'il a émis.

L'approche naturelle pour la résolution de ce problème est la résolution directe de l'équation de Schrödinger portant sur le vecteur d'état du système atome-rayonnement :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H|\psi\rangle \quad (\text{II1b - 1a})$$

$$H = H_{\text{at}} + H_R + V \quad (\text{II1b - 1b})$$

avec la condition initiale :

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle_A \otimes |0\rangle_R \quad (\text{II1b - 2})$$

où $|\psi_0\rangle_A$ désigne l'atome excité dans un état externe quelconque et $|0\rangle_R$ est le vide du rayonnement. Cette approche, qui renseigne à la fois sur la dynamique de l'atome et du champ, est difficile à généraliser en présence d'un faisceau laser qui peut en permanence

réexciter l'atome. Nous faisons donc appel à une autre méthode, bien connue par ailleurs [43], avec la particularité ici que nous quantifions le mouvement du centre de masse atomique. Cette méthode permet d'obtenir une équation différentielle, dite équation pilote, relative à la seule matrice densité atomique $\rho_A(t)$, ce qui nous suffit puisque nous étudions les seules observables atomiques. La possibilité d'obtenir une telle équation repose sur le fait que le champ quantique dans l'état $|0\rangle_R$ a un temps de corrélation τ_C extrêmement court devant le temps de relaxation typique de l'atome, ce qui permet de traiter perturbativement les corrélations entre l'atome et le champ (approximation dite de mémoire courte du champ).

Appelons $\rho(t)$ la matrice densité du système complet (atomique et de rayonnement) à l'instant t , en point de vue de Schrödinger. La matrice densité atomique $\rho_A(t)$ est obtenue par trace partielle sur tous les états du rayonnement :

$$\rho_A(t) = Tr_R[\rho(t)] \quad (\text{II1b - 3})$$

Il est naturel de passer en représentation interaction vis-à-vis du hamiltonien non perturbé $H_0 = H_{\text{at}} + H_R$, pour éliminer les rotations de phase rapides dues à la pulsation propre de l'atome, ω_0 , par exemple. Tout opérateur représenté par $X(t)$ en point de vue de Schrödinger donne en représentation interaction :

$$\tilde{X}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} X(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (\text{II1b - 4a})$$

$$H_0 = H_{\text{at}} + H_R \quad (\text{II1b - 4b})$$

Nous indiquons, pour fixer les idées, la forme des opérateurs associés aux observables pertinentes en représentation interaction :

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R} + \frac{\mathbf{P}t}{M} \quad (\text{II1b - 5a})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(+)}(t) = e^{i\omega_0 t} \mathbf{D}^{(+)} \quad (\text{II1b - 5b})$$

$$a_\mu(t) = e^{-i\omega_\mu t} a_\mu \quad (\text{II1b - 5c})$$

La matrice densité complète vérifie alors l'équation d'évolution suivante, déduite de (II1b - 1) et (II1b - 4a) :

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)] \quad (\text{II1b - 6})$$

équation que l'on met sous forme intégrale (point de départ de beaucoup de traitements perturbatifs) :

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}(t-\tau)] \quad (\text{II1b - 7})$$

En substituant à $\tilde{\rho}(t)$ l'expression (II1b - 7) dans le second membre de (II1b - 6), nous obtenons :

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(0)] + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_0^t d\tau [\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}(t-\tau)]] \quad (\text{II1b - 8})$$

C'est maintenant qu'intervient l'hypothèse cruciale, dite de factorisation, qui considère comme légitime, à l'intérieur du double commutateur de (II1b - 8), l'approximation suivante pour $\tilde{\rho}(t-\tau)$:

$$\tilde{\rho}(t') \simeq \tilde{\rho}_A(t') \otimes (|0\rangle_{RR}\langle 0|) \quad (\text{II1b - 9})$$

Dans (II1b - 9), le champ se trouve dans l'état correspondant aux conditions initiales (II1b - 2), ce qui suppose, à juste titre, que le rayonnement quantique est très peu perturbé par l'atome ; par contre, l'évolution du système atomique est prise en compte par la présence de $\tilde{\rho}_A(t')$. Il semble à première vue que l'on perde ainsi toute corrélation entre l'atome et le champ. En fait, l'expression approchée (II1b - 9) est insérée à l'intérieur du double commutateur de (II1b - 8) : entre les deux interactions atome-rayonnement représentées par $\tilde{V}(t)$ et $\tilde{V}(t-\tau)$ apparaissent des corrélations entre les deux systèmes, dont l'effet sur la dynamique de $\tilde{\rho}_A$ est ainsi pris en compte et dont on peut montrer qu'elles sont, de ce point de vue, les seules importantes dans notre situation [43]. Nous allons voir que ces interactions ont un effet sensible sur $\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_A$ à condition que le champ n'ait pas perdu à l'instant t toute mémoire de son état à l'instant $t-\tau$, ce qui conduit à des temps τ nécessairement très courts, de l'ordre d'une période optique $\frac{1}{\omega_0}$, beaucoup plus courts que le temps typique d'évolution de $\tilde{\rho}_A(t)$, soit $\frac{1}{\Gamma}$.

Nous remplaçons dans (II1b - 8) $\tilde{\rho}(t - \tau)$ par l'expression approchée (II1b - 9), et nous prenons la trace partielle sur le rayonnement de (II1b - 8) ainsi transformée. La trace partielle de l'expression $[\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(0)]$ donne 0. En développant le double commutateur explicitement, nous faisons apparaître deux types de termes, ceux dans lesquels les deux opérateurs \tilde{V} se trouvent d'un même côté de $\tilde{\rho}_A$:

$$\left(\frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right)_1 = \mathcal{T}_1 = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \left[{}_R\langle 0 | \tilde{V}(t) \tilde{V}(t - \tau) | 0 \rangle_R \tilde{\rho}_A(t - \tau) + \tilde{\rho}_A(t - \tau) {}_R\langle 0 | \tilde{V}(t - \tau) \tilde{V}(t) | 0 \rangle_R \right] \quad (\text{II1b - 10})$$

et ceux dans lesquels les opérateurs \tilde{V} encadrent $\tilde{\rho}_A$:

$$\left(\frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right)_2 = \mathcal{T}_2 = \frac{1}{\hbar^2} Tr_R \int_0^t d\tau \left[\tilde{V}(t) \tilde{\rho}_A(t - \tau) | 0 \rangle_{RR} \langle 0 | \tilde{V}(t - \tau) + \tilde{V}(t - \tau) \tilde{\rho}_A(t - \tau) | 0 \rangle_{RR} \langle 0 | \tilde{V}(t) \right] \quad (\text{II1b - 11})$$

(i) Les termes de départ de l'état excité

Considérons d'abord les termes du premier type. En remplaçant dans (II1b - 10) le potentiel de couplage V entre atome et rayonnement par son expression (II1a - 17) et en utilisant le comportement (II1b - 5) des opérateurs en représentation interaction, on fait apparaître sous l'intégrale sur τ l'opérateur purement atomique suivant :

$$W_{+,-}(\tau) = \sum_{j,l=x,y,z} D_j^{(+)} D_l^{(-)} e^{i\omega_0 \tau} g_{jl}(\tau) \quad (\text{II1b - 12a})$$

$$g_{jl}(\tau) = {}_R \langle 0 | \tilde{E}_{\perp j}^{(+)} (\tilde{\mathbf{R}}(t), t) \tilde{E}_{\perp l}^{(-)} (\tilde{\mathbf{R}}(t - \tau), t - \tau) | 0 \rangle_R \quad (\text{II1b - 12b})$$

L'opérateur $g_{jl}(\tau)$ agit seulement sur les degrés de liberté du centre de masse de l'atome ; il représente la fonction de corrélation temporelle du champ vu par l'atome, compte tenu du mouvement libre du centre de masse. Notons que le développement complet de (II1b - 10) donne également des termes que l'on noterait $W_{+,+}$, $W_{-,+}$ et $W_{-,-}$ dans le même esprit que (II1b - 12a) ; il est facile de constater qu'ils sont nuls en fait.

Il est instructif de calculer explicitement l'opérateur de corrélation $g_{jl}(\tau)$, pour vérifier en particulier qu'il ne dépend pas de t . Il s'agit dans un premier temps d'évaluer :

$$e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \bar{\mathbf{R}}(t)} e^{-i\mathbf{k}_\mu \cdot \bar{\mathbf{R}}(t-\tau)} = e^{iH_{at}^{\text{ext}} t/\hbar} e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}} e^{-i\mathbf{k}_\mu \cdot \bar{\mathbf{R}}(-\tau)} e^{-iH_{at}^{\text{ext}} t/\hbar} \quad (\text{II1b - 13})$$

ce que l'on peut faire à l'aide de (II1b - 5a) et de la formule de Glauber [50] :

$$e^{-i\mathbf{k}_\mu \cdot [\mathbf{R} - \frac{\mathbf{P}}{M} \tau]} = e^{-i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \frac{\mathbf{P}}{M} \tau} e^{-i\hbar k_\mu^2 \tau/(2M)} \quad (\text{II1b - 14})$$

ce qui fait apparaître l'effet Doppler sur le champ lié à la vitesse de l'atome, ainsi que l'énergie de recul associée à l'émission d'un photon d'impulsion $\hbar\mathbf{k}_\mu$. Comme \mathbf{P} commute avec H_{at}^{ext} , nous obtenons finalement pour l'opérateur de corrélation :

$$g_{jl}(\tau) = \sum_\mu \frac{\hbar\omega_\mu}{2\varepsilon_0 L^3} (\varepsilon_\mu)_j (\varepsilon_\mu^*)_l e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \frac{\mathbf{P}}{M} \tau} e^{-i\hbar k_\mu^2 \tau/(2M)} e^{-i\omega_\mu \tau} \quad (\text{II1b - 15})$$

Nous constatons ainsi que $g_{jl}(\tau)$ est diagonal en représentation impulsion, ce qui était prévisible puisque l'état du rayonnement $|0\rangle_R$ est invariant par translation. En passant à la limite d'un volume infini de quantification :

$$\frac{1}{L^3} \sum_\mu \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_{\epsilon \perp \mathbf{k}} \quad (\text{II1b - 16})$$

et en négligeant la contribution des termes de recul en $\exp\left(-i\frac{\hbar k_\mu^2}{2M}\tau\right)$, nous obtenons $g_{jl}(\tau)$ comme une intégrale sur la pulsation ω et la direction \mathbf{n} du photon émis et absorbé :

$$g_{jl}(\tau) = \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3 c^3} \int_0^{+\infty} d\omega \omega^3 \int d^2n (\delta_{jl} - n_j n_l) e^{i\frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{P}}{M} \tau} e^{-i\omega \tau} \quad (\text{II1b - 17})$$

Considérons l'action de $g_{jl}(\tau)$ sur l'état atomique externe $|\mathbf{p}\rangle$ d'impulsion \mathbf{p} . Nous introduisons comme nouvelle variable d'intégration la pulsation ω' décalée de ω par l'effet Doppler :

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{n} \right) \quad (\text{II1b - 18})$$

Ceci fait apparaître une correction à la densité d'états en ω^3 , exacte au premier ordre en $\frac{v}{c}$ et qui, à cet ordre, s'annule après sommation sur la direction du photon émis et absorbé. Malgré le mouvement de l'atome, nous retrouvons donc, à cet ordre de l'approximation non relativiste, la forme habituelle de la fonction de corrélation temporelle du champ en un point donné de l'espace, qui est, au sens des distributions :

$$g_{jl}(\tau) = g(\tau)\delta_{jl} \quad (\text{II1b - 19a})$$

$$g(\tau) = \frac{\hbar}{6\pi^2\epsilon_0 i c^3} \frac{d^3}{d\tau^3} \delta_M(\tau) \quad (\text{II1b - 19b})$$

$$\delta_M(\tau) = \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} \quad (\text{II1b - 19c})$$

Nous pouvons maintenant récrire l'expression de (II1b - 10) au premier ordre en $\frac{v}{c}$:

$$T_1 = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \left[\mathbf{D}^{(+)} \cdot \mathbf{D}^{(-)} e^{i\omega_0\tau} g(\tau) \tilde{\rho}_A(t-\tau) + e^{-i\omega_0\tau} g(\tau)^* \tilde{\rho}_A(t-\tau) \mathbf{D}^{(+)} \cdot \mathbf{D}^{(-)} \right] \quad (\text{II1b - 20})$$

Nous allons simplifier cette expression en comparant les échelles de variation temporelle des grandeurs en présence sous l'intégrale de (II1b - 20). Le temps typique d'évolution de la matrice densité atomique en représentation interaction, $\tilde{\rho}_A(t)$, est simplement le temps caractéristique de relaxation de $\tilde{\rho}_A(t)$, que nous notons T_{relax} . Notons que T_{relax} est a priori bien plus long que les temps associés à $\rho_A(t)$, car le passage en représentation interaction a fait disparaître les fréquences d'oscillation très rapides (certaines sont d'ordre ω_0) de l'évolution libre de la matrice densité atomique. Par contre, $e^{i\omega_0\tau} g(\tau)$ est une fonction extrêmement étroite en temps : nous caractérisons sa largeur effective par τ_C , le temps de corrélation du champ en un point donné de l'espace. On peut montrer que la présence du facteur $e^{i\omega_0\tau}$ rend τ_C de l'ordre de grandeur d'une période optique :

$$\tau_C \sim \frac{1}{\omega_0} \quad (\text{II1b - 21})$$

Nous allons supposer, pour progresser dans l'obtention de l'équation pilote, qu'il y a très nette séparation des temps d'évolution du réservoir (i.e. le champ) et du petit système (i.e. l'atome) :

$$T_{\text{relax}} \gg \tau_C \quad (\text{II1b} - 22)$$

Cette inégalité permet d'effectuer l'approximation markovienne suivante, qui consiste à remplacer sous l'intégrale (II1b - 20) $\tilde{\rho}_A(t - \tau)$ par $\tilde{\rho}_A(t)$ et à étendre l'intégration à $0 \leq \tau < +\infty$. En remarquant, d'après (II1a - 13), que $\Delta^{(+)} \cdot \Delta^{(-)}$ n'est autre que P_e , projecteur orthogonal sur l'état excité, et en utilisant la décomposition habituelle suivante en partie réelle et imaginaire :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{d^2}{\hbar^2} e^{i\omega_0 \tau} g(\tau) = \frac{1}{2} \Gamma + i\Delta_e \quad (\text{II1b} - 23a)$$

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega_0^3}{3\pi \varepsilon_0 \hbar c^3} \quad (\text{II1b} - 23b)$$

nous obtenons la contribution de T_1 à l'évolution de $\tilde{\rho}_A$ sous la forme d'un hamiltonien effectif :

$$\left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_A \right)_1 = T_1 = \frac{1}{i\hbar} \left(H_{\text{eff}} \tilde{\rho}_A - \tilde{\rho}_A H_{\text{eff}}^\dagger \right) \quad (\text{II1b} - 24a)$$

$$H_{\text{eff}} = \left(\hbar \Delta_e - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \right) P_e \quad (\text{II1b} - 24b)$$

Le hamiltonien effectif H_{eff} constitue une modification de l'énergie interne de l'état atomique excité sous l'effet du couplage de l'atome avec le rayonnement dans l'état vide. $\hbar \Delta_e$ est le déplacement de Lamb de l'état excité, que l'on réincorpore dans la pulsation propre de l'atome nu, ce qui donne la pulsation de résonance atomique ω_A proprement dite :

$$\omega_A = \omega_0 + \Delta_e \quad (\text{II1b} - 25)$$

Le caractère non hermitique de H_{eff} traduit le caractère instable de l'état excité, que l'atome quitte, avec un taux Γ , par émission d'un photon de fluorescence. $\hbar \Gamma$ est appelée

traditionnellement la largeur naturelle de l'état excité, "naturelle" signifiant qu'elle ne correspond qu'à la relaxation due au couplage avec le rayonnement quantique, à l'exclusion d'autres processus, collisionnels par exemple. La condition de validité de ce traitement, (II1b - 22), peut être réécrite :

$$\Gamma \ll \omega_0 \quad (\text{II1b - 26})$$

condition qui est toujours largement vérifiée dans les transitions que nous allons considérer. En conclusion, nous retrouvons ici l'expression du taux de relaxation Γ donnée pour un atome de masse infinie : le mouvement de l'atome libre est sans effet sur Γ à l'ordre 1 en $\frac{v}{c}$, ce qui était prévisible dans le cadre de la Relativité restreinte.

(ii) Les termes d'alimentation de l'état fondamental

Passons maintenant à l'étude des termes du deuxième type, désignés par T_2 dans l'expression (II1b - 11). Nous effectuons sur ces termes la trace partielle sur les degrés de liberté du rayonnement et nous utilisons l'évolution libre de l'opérateur dipôle atomique (II1b - 5b) et des opérateurs de champ (II1b - 5c). Avec les notations de (II1a - 17), nous obtenons finalement :

$$T_2 = \int_0^t d\tau \sum_{\mu} \left| \frac{\Omega_{\mu}}{2} \right|^2 \Delta^{(-)} \cdot \epsilon_{\mu}^* \left[e^{-ik_{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t)} \tilde{\rho}_A(t-\tau) e^{ik_{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t-\tau)} e^{i(\omega_{\mu} - \omega_0)\tau} + e^{-ik_{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t-\tau)} \tilde{\rho}_A(t-\tau) e^{ik_{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t)} e^{-i(\omega_{\mu} - \omega_0)\tau} \right] \Delta^{(+)} \cdot \epsilon_{\mu} \quad (\text{II1b - 27})$$

Les propriétés des opérateurs $\Delta^{(-)}$ et $\Delta^{(+)}$ montrent que T_2 joue un rôle uniquement dans l'évolution des éléments de matrice de ρ_A dans l'état fondamental, et qu'il s'exprime en fonction seulement des éléments de matrice de ρ_A dans l'état excité. T_2 décrit donc l'alimentation de l'état fondamental induite par la décroissance de l'état excité, décroissance prise en compte par les termes précédents T_1 .

En cherchant à reproduire pour T_2 l'analyse effectuée sur T_1 , nous constatons qu'il n'est pas possible, sur T_2 , de faire apparaître directement l'opérateur de corrélation du champ (II1b - 12b) : les opérateurs de translation $e^{\pm ik_{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t)}$ et $e^{\mp ik_{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t-\tau)}$ agissent de part et d'autre de $\tilde{\rho}_A(t-\tau)$ et, comme ils ne commutent pas en général avec la matrice densité atomique, on ne peut pas les regrouper. Cette difficulté n'intervient pas dans le

traitement habituel, qui traite la position du centre de masse atomique \mathbf{R} comme un pur nombre. Pour surmonter cet obstacle, il est commode de travailler en représentation position et de négliger l'effet du vol libre des atomes pendant τ en identifiant $\tilde{\mathbf{R}}(t)$ et $\tilde{\mathbf{R}}(t - \tau)$, vol libre dont on a vu d'ailleurs pour T_1 qu'il ne jouait pas de rôle sur la dynamique de $\tilde{\rho}_A$. Nous obtenons alors l'expression suggestive suivante :

$$\widetilde{\langle \mathbf{r}_1 |} \left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_A \right)_2 \widetilde{| \mathbf{r}_2 \rangle} = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \sum_{j,l=x,y,z} D_l^{(-)} \widetilde{\langle \mathbf{r}_1 |} \tilde{\rho}_A(t - \tau) \widetilde{| \mathbf{r}_2 \rangle} D_j^{(+)} [e^{-i\omega_0 \tau} g_{jl}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, -\tau) + e^{i\omega_0 \tau} g_{jl}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tau)] \quad (\text{II1b - 28})$$

$\widetilde{| \mathbf{r} \rangle}$ désigne, en représentation interaction à l'instant t , l'état du centre de masse localisé en \mathbf{r} . $g_{jl}(\mathbf{r}, \tau)$ est la fonction de corrélation du champ dans l'état vide entre l'événement (\mathbf{r}_0, t_0) et l'événement $(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \tau + t_0)$:

$$g_{jl}(\mathbf{r}, \tau) =_R \langle 0 | \tilde{E}_{\perp j}^{(+)}(\mathbf{r}, \tau) \tilde{E}_{\perp l}^{(-)}(0, 0) | 0 \rangle_R \quad (\text{II1b - 29a})$$

$$g_{jl}(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{\mu} \frac{\hbar \omega_{\mu}}{2\epsilon_0 L^3} (\boldsymbol{\epsilon}_{\mu})_j (\boldsymbol{\epsilon}_{\mu}^*)_l e^{i(\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mu} \tau)} \quad (\text{II1b - 29b})$$

En passant à la limite continue ($L \rightarrow +\infty$), il est bien connu que l'on peut calculer explicitement le tenseur de corrélation $g_{jl}(\mathbf{r}, \tau)$ [45,51]. Dans la présente discussion, il nous suffit d'en relier la trace à la fonction $g(\tau)$ introduite en (II1b - 19) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_j g_{jj}(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{1}{4\pi} \int d^2 \mathbf{n} g\left(\tau - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}\right) \\ &= \frac{\hbar}{6\pi^2 \epsilon_0 i c^3} \frac{\delta''_M\left(\tau + \frac{\|\mathbf{r}\|}{c}\right) - \delta''_M\left(\tau - \frac{\|\mathbf{r}\|}{c}\right)}{\frac{2\|\mathbf{r}\|}{c}} \end{aligned} \quad (\text{II1b - 30})$$

Les temps retardés $\left(\tau - \frac{\|\mathbf{r}\|}{c}\right)$ et avancés $\left(\tau + \frac{\|\mathbf{r}\|}{c}\right)$ ont l'interprétation physique claire habituelle. Il intervient donc, sous l'intégrale de (II1b - 28), la fonction de τ , $e^{i\omega_0 \tau} g_{jl}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tau)$, de largeur le temps de corrélation τ_C introduit au (i), mais centrée

en $\frac{1}{c} \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$ et non plus en 0. L'approximation markovienne habituelle peut donc être effectuée, à condition que :

$$\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| \ll cT_{\text{relax}} \sim \frac{c}{\Gamma} \quad (\text{II1b - 31})$$

L'équation pilote obtenue après une telle approximation ne peut donc pas être utilisée pour décrire l'évolution des cohérences spatiales entre deux points trop éloignés (condition (II1b - 31)). En fait, nous verrons que l'émission spontanée détruit les cohérences sur des distances beaucoup plus petites que celles correspondant à (II1b - 31). Effectuons donc l'approximation markovienne habituelle sur (II1b - 27) : $\tilde{\rho}_A(t - \tau)$ est assimilé à $\tilde{\rho}_A(t)$, et l'intégrale sur τ est étendue à $[0, +\infty[$. Nous omettons l'évolution libre de $\tilde{\mathbf{R}}$ pendant τ , ce qui revient, comme on l'a vu au (i), à négliger le décalage par rapport à ω_0 de la pulsation du photon de fluorescence ω_S , dû à l'effet Doppler et à l'effet de recul. Nous obtenons ainsi, en représentation interaction, l'alimentation de l'état fondamental par l'état excité, sous forme d'une somme sur la direction d'émission \mathbf{n} et sur la polarisation $\epsilon \perp \mathbf{n}$ du photon de fluorescence :

$$\left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_A \right)_2 = \mathcal{T}_2 = \frac{3\Gamma}{8\pi} \int d^2 n \sum_{\epsilon \perp \mathbf{n}} \Delta^{(-)} \cdot \epsilon^* e^{-ik_0 \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t)} \tilde{\rho}_A(t) e^{ik_0 \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t)} \Delta^{(+)} \cdot \epsilon \quad (\text{II1b - 32a})$$

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c} \quad (\text{II1b - 32b})$$

Le taux d'émission spontanée Γ est explicité par (II1b - 23).

Il est intéressant d'utiliser maintenant (II1b - 28) dans l'approximation markovienne pour estimer l'importance du terme d'alimentation $\langle \widetilde{\mathbf{r}'} | \left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_A \right)_2 | \widetilde{\mathbf{r}''} \rangle$, ce qui revient à effectuer explicitement dans (II1b - 32a) l'intégration sur la direction d'émission du photon de fluorescence. On obtient ainsi, avec les notations de (II1b - 28) :

$$\langle \widetilde{\mathbf{r}_1} | \left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_A \right)_2 | \widetilde{\mathbf{r}_2} \rangle = \sum_{j,l=x,y,z} \Delta_l^{(-)} \langle \widetilde{\mathbf{r}_1} | \tilde{\rho}_A(t) | \widetilde{\mathbf{r}_2} \rangle \Delta_j^{(+)} G_{jl}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (\text{II1b - 33a})$$

$$G_{jl}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{d^2}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} d\tau [e^{-i\omega_0 \tau} g_{jl}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, -\tau) + e^{i\omega_0 \tau} g_{jl}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tau)] \quad (\text{II1b - 33b})$$

Pour estimer l'ordre de grandeur de $G_{jl}(\mathbf{r})$, nous calculons seulement la trace de ce tenseur, ce qui permet de s'affranchir de dépendances angulaires inessentielles ici et d'utiliser directement (II1b - 30) :

$$\frac{1}{3} \sum_j G_{jj}(\mathbf{r}) = \Gamma \frac{\sin(k_0 r)}{k_0 r} \quad (\text{II1b - 34})$$

Nous voyons donc que le caractère aléatoire de la direction du photon de fluorescence fait qu'à l'issue d'une désexcitation spontanée, l'état atomique externe ne peut pas présenter de cohérence spatiale sur une longueur beaucoup plus grande que la longueur d'onde optique λ_0 ^(*). Indiquons qu'il en va de même dans toutes les situations de mélasses optiques que nous allons étudier, car les atomes ne cessent pas, dans ces configurations, d'effectuer des cycles de fluorescence. D'un point de vue pratique, pour nous, la condition (II1b - 31) est équivalente à : $\lambda_0 \ll c\Gamma^{-1}$, ce qui n'est autre que (II1b - 26).

Nous avons donc rappelé l'obtention de l'équation pilote sur la matrice densité ρ_A d'un atome à deux niveaux couplé au vide du rayonnement. Les termes de relaxation obtenus (départ de l'état excité (II1b - 24a) et arrivée dans l'état fondamental (II1b - 32a)) prennent en compte la quantification du mouvement du centre de masse, ce qui ne change pas de façon observable la condition de validité ($\Gamma \ll \omega_0$) du traitement. Tout l'intérêt pour nous de cette équation pilote se révèle en fait dans l'étude de la relaxation atomique en présence de lumière laser, comme nous allons le voir.

c) Evolution de la matrice densité atomique en présence de laser

Nous donnons ici les équations quantiques fondamentales que nous utilisons dans la suite de ce travail pour étudier le mouvement des atomes dans les mélasses optiques. Elles sont obtenues essentiellement, en point de vue de Schrödinger, par addition aux équations de relaxation du §1b précédent, d'un commutateur décrivant l'effet des faisceaux laser sur l'évolution de la matrice densité atomique.

(i) Description de la lumière laser

Classiquement, la lumière utilisée pour le refroidissement d'atomes correspond, pour le champ électrique, à une superposition d'ondes planes progressives polarisées selon ϵ_j , et

(*) On notera cependant que le schéma dit des "résonances noires" permet de donner à une certaine classe d'atomes une cohérence spatiale plus grande que λ_0 [34].

de pulsation ω_j , ce qui conduit à l'expression suivante pour la partie de fréquence positive du champ électrique classique :

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{class}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_L} \mathcal{E}_j \epsilon_j e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} \quad (\text{II1c - 1})$$

La description quantique standard correspondante assigne à chaque onde classique j un mode du champ quantique μ_j , mode qu'elle met initialement dans un état cohérent bien choisi. Il est possible alors d'effectuer une transformation unitaire sur le champ, dite de Mollow [44,45]. Cette transformation, qui dépend du temps et agit uniquement sur les degrés de liberté du champ, fait apparaître dans le hamiltonien complet un terme supplémentaire, fonction du temps, noté $V_{AL}(t)$. Ce terme représente le couplage de l'atome à la moyenne du champ prise dans l'état initial :

$$V_{AL}(t) = -\mathbf{D}^{(+)} \cdot \tilde{\mathcal{E}}_{\text{class}}^{(+)}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{D}^{(-)} \cdot \tilde{\mathcal{E}}_{\text{class}}^{(-)}(\mathbf{R}, t) \quad (\text{II1c - 2})$$

Dans le point de vue de Mollow, le couplage entre l'atome et les fluctuations du champ est entièrement contenu dans V_{AR} . L'intérêt de ce point de vue est donc de prendre en compte tous les processus stimulés par un opérateur purement atomique, ce qui permet, tout en traitant perturbativement l'effet de V_{AR} , comme nous allons le faire, de décrire à tous les ordres l'effet du laser proprement dit.

Le point délicat est que $V_{AL}(t)$ dépend explicitement du temps. Heureusement, dans le cas, qui est le nôtre en pratique, où toutes les ondes laser ont la même pulsation ω_L , il est possible, dans le cadre de l'approximation de l'onde tournante (déjà effectuée sur (II1c - 2)), d'éliminer cette dépendance par une seconde transformation unitaire. Cette transformation est appelée traditionnellement "passage dans le référentiel tournant à la pulsation ω_L ", et réduit $V_{AL}(t)$ à sa valeur à $t = 0$, que nous notons dans toute la suite V_{AL} . Nous la décrivons plus en détail, ainsi que la transformation de Mollow, dans l'appendice AII. Nous supposons ainsi, dans toute la suite :

$$\omega_j = \omega_L, \quad j = 1 \text{ à } \mathcal{N}_L \quad (\text{II1c - 3})$$

(ii) Equation pilote en présence des lasers

A l'aide de deux transformations unitaires en cascade, nous nous sommes ramené essentiellement à la situation du §1b, la seule différence importante pour la dynamique étant la modification du hamiltonien atomique par le potentiel de couplage V_{AL} .

Une première conséquence de l'action du laser est de permettre à l'atome d'émettre en permanence des photons de fluorescence, au lieu de l'unique photon de désexcitation du §1b. On peut montrer en fait que, dans l'espace libre, chaque photon de fluorescence s'éloigne de l'atome sous forme d'une onde pratiquement sphérique et de célérité c . L'atome n'interagit donc plus jamais avec le photon de fluorescence qu'il a émis, et l'approximation (II1b - 9) reste justifiée.

D'autre part, les expressions de $\tilde{\Delta}(t)$ et $\tilde{R}(t)$ en présence de V_{AL} prennent une forme plus complexe que (II1b - 5), faisant intervenir en particulier les pulsations de Rabi Ω_j associées à chaque onde laser (cf. (II1a - 17)). Une conclusion importante du §1b était que la durée d'interaction cohérente τ_C entre l'atome et le rayonnement est de l'ordre de grandeur d'une période optique (cf. (II1b - 21)). Nous avions pris en compte alors de façon exacte l'évolution libre du dipôle atomique pendant τ_C , à la pulsation ω_0 . L'effet du laser est une modification de cette pulsation d'ordre de grandeur $\delta\omega \sim [(\omega_L - \omega_0)^2 + \Omega^2]^{1/2}$, où Ω est une pulsation de Rabi typique. Nous n'examinons dans la suite que des situations dépourvues de toute pathologie : le désaccord en pulsation entre atome et laser est de l'ordre de quelques dizaines de largeurs naturelles Γ au plus, et Ω reste comparable à Γ . Dans ce cas, $\delta\omega \cdot \tau_C \ll 1$ au même titre que (II1b - 26) et c'est une excellente approximation que de reprendre (II1b - 24a) et (II1b - 32a) comme équations d'évolution de la matrice densité atomique, avec prise en compte bien sûr de V_{AL} dans le calcul de $\tilde{\rho}_A(t)$.

Donnons maintenant la forme explicite de ces équations, dites de Bloch optiques généralisées, en point de vue de Schrödinger. Nous appelons $\rho(t)$, au lieu de $\rho_A(t)$, la matrice densité atomique dans le référentiel tournant. Il est commode d'introduire la notation suivante par blocs, à l'aide des projecteurs P_e et P_g sur l'état excité ou fondamental :

$$\rho_{ab} = P_a \rho P_b \quad \text{avec} \quad a, b = e \text{ ou } g \quad (\text{II1c - 4})$$

ainsi que la variable δ , qui mesure le désaccord entre la pulsation laser ω_L et la pulsation propre de résonance ω_A (cf. (II1b - 25)) :

$$\delta = \omega_L - \omega_A \quad (\text{II1c - 5})$$

ce qui conduit à la forme explicite suivante de l'équation pilote :

$$\frac{d}{dt} \rho_{ee} = -\Gamma \rho_{ee} + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M}, \rho_{ee} \right] + \frac{1}{i\hbar} \left[V_{AL}^{(+)} \rho_{ge} - \rho_{eg} V_{AL}^{(-)} \right] \quad (\text{II1c - 6a})$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{eg} = \left(i\delta - \frac{\Gamma}{2} \right) \rho_{eg} + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M}, \rho_{eg} \right] + \frac{1}{i\hbar} \left[V_{AL}^{(+)} \rho_{gg} - \rho_{ee} V_{AL}^{(+)} \right] \quad (\text{II1c - 6b})$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{ge} = - \left(i\delta + \frac{\Gamma}{2} \right) \rho_{ge} + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M}, \rho_{ge} \right] + \frac{1}{i\hbar} \left[V_{AL}^{(-)} \rho_{ee} - \rho_{gg} V_{AL}^{(-)} \right] \quad (\text{II1c - 6c})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{gg} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M}, \rho_{gg} \right] + \frac{1}{i\hbar} \left[V_{AL}^{(-)} \rho_{eg} - \rho_{ge} V_{AL}^{(+)} \right] \\ &+ \frac{3\Gamma}{8\pi} \int d^2 n \sum_{\epsilon \perp n} \Delta^{(-)} \cdot \epsilon^* e^{-ik_0 n \cdot R} \rho_{ee} e^{ik_0 n \cdot R} \Delta^{(+)} \cdot \epsilon \end{aligned} \quad (\text{II1c - 6d})$$

Notons que $V_{AL}^{(+)}$ représente la partie ascendante du potentiel de couplage atome-laser :

$$V_{AL}^{(+)} = \sum_{j=1}^{N_L} \frac{\hbar \Omega_j}{2} e^{ik n_j \cdot R} \Delta^{(+)} \cdot \epsilon_j \quad (\text{II1c - 7})$$

et que $V_{AL}^{(-)} = (V_{AL}^{(+)})^\dagger$ en est la partie descendante. Dans (II1c - 7), k désigne la norme commune des vecteurs d'onde laser $\mathbf{k}_j = k \mathbf{n}_j$:

$$k = \frac{\omega_L}{c} \quad (\text{II1c - 8})$$

Dans la suite, nous identifierons k_0 à k dans (II1c - 6d).

(iii) Réduction de l'équation pilote dans l'état fondamental

Les équations de Bloch optiques généralisées que nous venons de donner constituent une description complète du refroidissement tel que nous l'avons modélisé, car elles prennent en compte tous les mécanismes concernant l'évolution des observables atomiques, sans faire d'hypothèse contraignante sur la puissance des lasers, la vitesse des atomes ou le rapport entre la largeur naturelle $\hbar\Gamma$ et l'énergie de recul $E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$. Elles permettent

en particulier l'étude générale du refroidissement Doppler. Nous les avons utilisées [14] dans la situation la plus pure possible, qui est celle d'une transition $j_g = 0 \longrightarrow j_e = 1$ (il n'y a pas de sous-niveau dans l'état atomique fondamental) dans la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$ (absence de redistribution entre les deux ondes). Le seul mécanisme de refroidissement est alors l'effet Doppler, tel qu'il a été initialement introduit [7]. Dans le cas d'un atome assez lourd ($E_R \ll \hbar\Gamma$), nous avons ainsi retrouvé la température Doppler optimale à une dimension :

$$\text{si } E_R \ll \hbar\Gamma, \quad k_B T_D^{\text{opt}} = \frac{7}{20} \hbar\Gamma \quad (\text{II1c - 9})$$

Pour l'obtention de cette température, la quantification du mouvement atomique peut sembler un luxe inutile, puisque l'approche semi-classique traditionnelle conduit à (II1c - 9). Il n'en va pas de même dans le cas d'une raie étroite ($\hbar\Gamma \ll E_R$). Le refroidissement Doppler conduit alors à des distributions en impulsions dont les plus froides n'ont rien d'une gaussienne et sont de largeur inférieure à l'impulsion d'un seul photon laser :

$$\text{si } E_R \gg \hbar\Gamma, \quad \langle p^2 \rangle^{\text{opt}} \simeq 0.53(\hbar k)^2 \quad (\text{II1c - 10})$$

On ne peut plus se contenter dans ce cas d'un traitement semi-classique du refroidissement, et il est nécessaire de résoudre exactement la forme stationnaire de (II1c - 6).

Cependant, nous souhaitons essentiellement étudier, dans ce travail, les caractéristiques du refroidissement à gradient de polarisation. De ce point de vue, pour mettre en évidence les nouveaux mécanismes, il est conceptuellement nécessaire de simplifier le jeu d'équations (II1c - 6), en négligeant les termes à l'origine du refroidissement Doppler. Il est bien connu que ces termes interviennent sur des échelles de vitesse atomique v telles que l'effet Doppler soit comparable à la largeur naturelle. Une première condition, nécessaire, pour les négliger, est alors que :

$$k\Delta v \ll \Gamma \quad (\text{II1c - 11})$$

où Δv donne la largeur de la distribution en vitesse. Notons qu'elle exclut le cas des atomes légers ($\hbar\Gamma \sim E_R$ ou moins) lorsque $\Delta v \sim \frac{\hbar k}{M}$, puisque le Δv obéissant à (II1c - 11) devrait être très inférieur à la vitesse de recul $\frac{\hbar k}{M}$. Par ailleurs, il n'est pas légitime physiquement d'éliminer le refroidissement Doppler dans les situations stationnaires telles que les

nouveaux mécanismes, agissant seuls, ne conduisent pas à une distribution en vitesse vérifiant (II1c - 11). Nous allons donc nous placer, pour effectuer la réduction de l'équation pilote, près de l'optimum des nouveaux mécanismes, qui, pour des atomes assez lourds ($\hbar\Gamma \gg E_R$), se produit à faible saturation de la transition par les lasers. Nous caractérisons cette faible saturation de la transition par la petitesse des paramètres de saturation associés à chaque onde pour un atome de vitesse $v \ll \frac{\Gamma}{k}$, ce choix de v étant légitimé par (II1c - 11) :

$$s_j = \frac{\frac{1}{2} |\Omega_j|^2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \ll 1 \quad (\text{II1c - 12})$$

Il se produit alors une séparation nette des temps d'évolution des différents éléments de matrice de ρ . Au bout de quelques $\frac{1}{\Gamma}$, la relaxation conduit les variables rapides ρ_{ee} , ρ_{eg} et ρ_{ge} à une valeur asservie à ρ_{gg} , qui, variable lente, a un temps de relaxation de l'ordre de $\frac{1}{\Gamma s_j}$, beaucoup plus long que $\frac{1}{\Gamma}$. Il est légitime d'éliminer adiabatiquement [41] les variables rapides en fonction de ρ_{gg} si l'on ne s'intéresse pas au régime transitoire précédent l'asservissement. En particulier, cette élimination adiabatique n'introduit en elle-même aucune erreur sur la détermination de l'état stationnaire. Nous savons cependant que, sous les conditions (II1c - 11) et (II1c - 12), elle conduit à une expression des éléments de matrice de l'opérateur densité atomique dans l'état excité de l'ordre de s_j fois plus petite que les éléments de matrice dans l'état fondamental. Ceci nous conduit à effectuer la simplification habituelle, qui néglige le couplage de ρ_{eg} et ρ_{ge} avec ρ_{ee} dans (II1c - 6b) et (II1c - 6c).

Il nous reste maintenant à identifier les termes de (II1c - 6) responsables de l'apparition de l'échelle de vitesse $\frac{\Gamma}{k}$. Pour montrer que ces termes ne sont autres que certains des commutateurs $\frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M}, \rho \right]$ de (II1c - 6), qui décrivent effectivement le vol libre des atomes, il est commode de les exprimer en représentation de Wigner (I1e - 3) :

$$\frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M}, \rho \right] \xrightarrow{\text{Wigner}} -\mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{r}} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (\text{II1c - 13})$$

Pour évaluer leur ordre de grandeur, plaçons-nous dans l'état stationnaire. $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ est alors, dans les situations que nous étudions, une fonction périodique de \mathbf{r} , et nous appelons \bar{n} le nombre d'harmoniques spatiales significatives. Ceci donne pour les termes de

vol libre l'ordre de grandeur $\bar{n}k\Delta v$ relativement à W . Il est légitime de les négliger lorsqu'ils sont dominés par le taux de relaxation de l'élément de matrice de W correspondant. Ceci est le cas pour W_{ee} , W_{eg} et W_{ge} dès que le déplacement des atomes pendant le temps $\frac{1}{\Gamma}$ est négligeable devant les échelles de modulation spatiale de $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$:

$$\bar{n}k\Delta v \ll \Gamma \quad (\text{II1c - 14})$$

ce qui est plus restrictif que (II1c - 11) du fait de la présence de \bar{n} , dont des valeurs typiques sont données dans l'appendice B_{IV}. Notons que, par contre, l'effet du vol libre des atomes dans l'état fondamental est à comparer à des taux de relaxation d'ordre de grandeur Γ_{sj} , beaucoup plus faible que Γ d'après (II1c - 12). Le commutateur $\frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M}, \rho_{gg} \right]$, qui n'est donc pas négligeable même si (II1c - 14) est vérifiée, permet l'apparition de l'échelle de vitesse $\frac{\Gamma_{sj}}{k}$ caractéristique des nouveaux mécanismes de refroidissement. La réduction des équations de Bloch que nous sommes en train d'effectuer peut être considérée finalement comme un calcul à l'ordre 0 en $\frac{kv}{\Gamma}$ mais à tous les ordres en $\frac{kv}{\Gamma_{sj}}$, à la limite des faibles saturations.

Donnons finalement la forme explicite des équations de Bloch réduites dans l'état fondamental. La mise en oeuvre des approximations décrites précédemment permet d'exprimer aisément les matrices ρ_{eg} , ρ_{ge} et ρ_{ee} en fonction de l'opérateur densité dans l'état fondamental, que nous appelons σ :

$$\sigma = \rho_{gg} \quad (\text{II1c - 15})$$

Nous obtenons par exemple l'expression de ρ_{eg} asservie à la variable lente σ à partir de la forme stationnaire $\left(\frac{d}{dt} \rho_{eg} = 0 \right)$ de (II1c - 6b) :

$$\rho_{eg} = \frac{1}{\hbar\delta + i\hbar\Gamma/2} V_{AL}^{(+)} \sigma \quad (\text{II1c - 16})$$

Cette expression donne accès au dipôle atomique moyen forcé à la pulsation ω_L . Dans (II1c - 16), $V_{AL}^{(+)}$ est la partie ascendante du couplage atome-laser (cf. (II1c - 7)). Pour donner à l'équation d'évolution sur σ la forme la plus suggestive possible, nous introduisons la notation suivante :

$$V_{AL}^{(+)} = \frac{\hbar\Omega}{2}\mathcal{V}^{(+)} \quad (\text{II1c - 17})$$

où Ω , réel, désigne une pulsation de Rabi typique associée aux faisceaux laser. Le paramètre de saturation s_0 correspondant est défini par :

$$s_0 = \frac{\frac{1}{2}\Omega^2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (\text{II1c - 18})$$

La connaissance de ρ_{eg} , et donc de ρ_{ge} par conjugaison complexe, donne accès, par sa substitution dans (II1c - 6a), à l'expression approchée de ρ_{ee} :

$$\rho_{ee} = \frac{1}{i\hbar\Gamma} [V_{AL}^{(+)}\rho_{ge} - \rho_{eg}V_{AL}^{(-)}] \quad (\text{II1c - 19a})$$

$$\rho_{ee} = \frac{1}{2}s_0\mathcal{V}^{(+)}\sigma\mathcal{V}^{(-)} \quad (\text{II1c - 19b})$$

Nous vérifions ainsi que le paramètre de saturation s_0 représente bien la proportion d'atomes dans l'état excité. Il reste à reporter l'expression (II1c - 19b) de ρ_{ee} dans le terme intégral de (II1c - 6d) pour expliciter en fonction de σ le terme d'alimentation de l'état fondamental par émission spontanée. Quant au commutateur de (II1c - 6d) décrivant l'action du laser, on peut lui donner une forme suggestive en décomposant le préfacteur de (II1c - 16) en partie réelle et partie imaginaire :

$$\frac{\Omega}{2}\rho_{eg} = \left(\frac{1}{2}\delta s_0 - \frac{1}{4}i\Gamma s_0 \right) \mathcal{V}^{(+)}\sigma \quad (\text{II1c - 20})$$

ce qui fait apparaître ce commutateur comme somme de deux termes, chacun ayant une signification physique claire :

$$\frac{1}{i\hbar} [V_{AL}^{(-)}\rho_{eg} - \rho_{ge}V_{AL}^{(+)}] = \frac{1}{i\hbar}[U(\mathbf{R}), \sigma] - \frac{1}{4}\Gamma s_0 \{ \mathcal{V}^{(-)}\mathcal{V}^{(+)}, \sigma \} \quad (\text{II1c - 21a})$$

$$\text{avec} \quad U(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\hbar\delta s_0\mathcal{V}^{(-)}\mathcal{V}^{(+)} \quad (\text{II1c - 21b})$$

Le potentiel $U(\mathbf{R})$, qui contribue à l'évolution de σ par un commutateur, correspond à la partie réactive du couplage atome-rayonnement. Il décrit, à faible saturation, le déplacement des niveaux d'énergie atomiques sous l'effet du laser. Ses valeurs propres, associées à

des états atomiques parfaitement localisés, constituent les déplacements lumineux, d'ordre de grandeur $\hbar\delta s_0$. D'autre part, le terme en $i\Gamma s_0$ de (II1c - 20) est à l'origine dans (II1c - 21a) d'un anticommutateur, dont la trace n'est pas nulle. En écrivant l'effet de ce terme dans la base propre de l'opérateur positif $\mathcal{V}^{(-)}\mathcal{V}^{(+)}$, qui est aussi celle des déplacements lumineux, on constate qu'il se réduit à un terme de départ des niveaux déplacés avec des taux de l'ordre de Γs_0 . Ceci correspond à la partie dissipative du couplage atome-rayonnement : l'action du laser ramène dans l'état fondamental l'instabilité des états excités due à l'émission spontanée. Dans le cas d'atomes à plusieurs sous-niveaux dans l'état fondamental, les taux correspondants sont simplement ceux du pompage optique.

Il est possible finalement d'écrire les équations de Bloch optiques généralisées réduites dans l'état fondamental sous la forme :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \sigma] + \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\text{relax}} \quad (\text{II1c - 22a})$$

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + U(\mathbf{R}) \quad (\text{II1c - 22b})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\text{relax}} &= -\frac{1}{4} \Gamma s_0 \left\{ \mathcal{V}^{(-)} \mathcal{V}^{(+)}, \sigma \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \Gamma s_0 \cdot \frac{3}{8\pi} \int d^2 n \sum_{\epsilon \perp n} W_\epsilon(n) \sigma W_\epsilon(n)^\dagger \end{aligned} \quad (\text{II1c - 22c})$$

$$W_\epsilon(n) = (\Delta^{(+)} \cdot \epsilon)^\dagger e^{-ikn \cdot \mathbf{R}} \mathcal{V}^{(+)} \quad (\text{II1c - 22d})$$

(II1c - 22) a donc essentiellement la même structure que les équations traditionnelles du pompage optique [55], mais a l'avantage essentiel pour nous de traiter quantiquement le mouvement du centre de masse. Cette quantification a pour effet en particulier d'ajouter, dans le hamiltonien effectif \mathcal{H} , l'énergie cinétique $\frac{\mathbf{P}^2}{2M}$ au potentiel $U(\mathbf{R})$ des déplacements lumineux. La quantification du mouvement fait également intervenir l'impulsion des photons de fluorescence émis par l'atome dans le terme de relaxation (II1c - 22c) proportionnel au taux de pompage optique $\frac{1}{2} \Gamma s_0$, ce qui interdit l'intégration que l'on effectue d'habitude sur la direction d'émission n dans le terme d'alimentation de (II1c - 22c). Notons que cette impulsion n'apparaît pas dans l'anticommutateur donc dans le terme de départ de (II1c - 22c), en vertu de la règle de sommation suivante, qui assure d'ailleurs la conservation de la probabilité ($Tr_{\text{int,ext}}\sigma = 1$) :

$$\frac{3}{8\pi} \int d^2 n \sum_{\epsilon \perp n} W_\epsilon^\dagger(n) W_\epsilon(n) = \mathcal{V}^{(-)} \mathcal{V}^{(+)} \quad (\text{II1c - 23})$$

Nous ferons dans la suite un usage abondant des équations réduites (II1c - 22).

(iv) Réduction de l'équation pilote à une seule dimension d'espace

Les situations de mélasse optique que nous allons étudier sont en fait unidimensionnelles, c'est-à-dire que toutes les ondes laser introduites pour le refroidissement se propagent dans la même direction, que l'on choisit comme axe Oz . Comme le potentiel de couplage entre atome et laser change seulement, dans ce cas, le mouvement du centre de masse atomique selon Oz , il est possible, sans approximation, de prendre la trace de l'équation pilote sur les degrés de liberté du centre de masse selon les axes Ox et Oy , pour obtenir une équation portant sur la matrice densité atomique $\bar{\rho}$ ainsi réduite, qui seule d'ailleurs admet un état stationnaire :

$$\bar{\rho} = \int dp_x dp_y \langle p_x, p_y | \rho | p_x, p_y \rangle \quad (\text{II1c - 24})$$

Le commutateur $\frac{1}{i\hbar} [V_{AL}, \rho]$ et les termes de départ par émission spontanée sont complètement transparents à l'égard de cette trace partielle. Seul le terme d'alimentation de l'état fondamental par émission spontanée réclame quelque soin, comme nous allons l'expliquer maintenant.

L'expression du terme d'alimentation par émission spontanée que nous donnons dans la deuxième ligne de (II1c - 6d) comporte une somme sur la direction n du photon de fluorescence. Il est commode d'introduire l'angle polaire θ (angle entre e_z et n) et l'angle azimutal φ du système de coordonnées sphériques d'axe Oz . L'effet de la trace partielle sur p_x et p_y est simplement de faire disparaître les opérateurs de translation en impulsion associés aux composantes du vecteur d'onde kn selon Ox et Oy , en laissant intacte la contribution de la composante selon Oz , $k \cos \theta$:

$$\int dp_x dp_y \langle p_x, p_y | e^{-ikn \cdot R} \rho_{ee} e^{ikn \cdot R} | p_x, p_y \rangle = e^{-ikZ \cos \theta} \bar{\rho}_{ee} e^{ikZ \cos \theta} \quad (\text{II1c - 25})$$

Ceci permet d'effectuer partiellement l'intégrale sur la direction d'émission spontanée : on peut à angle θ fixé, intégrer librement sur φ . Il faut d'abord, à direction n fixée, sommer

sur la polarisation ϵ du photon de fluorescence, comme il apparaît dans (II1c - 6d). Pour ceci, il est agréable de décomposer le vecteur ϵ sur la base standard $(\mathbf{u}_q)_{q=0,\pm 1}$ adaptée à l'axe Oz (cf. (II1a - 12)) :

$$\epsilon = \sum_{q=0,\pm 1} \epsilon_q \mathbf{u}_q \quad (\text{II1c - 26})$$

Selon la procédure habituelle, on aboutit aux égalités suivantes, à θ fixé :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{\epsilon \perp n} \epsilon_q \epsilon_{q'}^* = \frac{8\pi}{3} \delta_{qq'} N_q(\theta) \quad (\text{II1c - 27})$$

où l'on a introduit les notations :

$$N_{\pm}(\theta) = \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{II1c - 28a})$$

$$N_0(\theta) = \frac{3}{4} \sin^2 \theta \quad (\text{II1c - 28b})$$

qui correspondent aux distributions angulaires classiques de rayonnement pour un dipôle oscillant polarisé circulairement par rapport à Oz ou linéairement selon Oz . Remarquons l'apparition, après somme sur φ dans (II1c - 27), de la règle de sélection $q = q'$, qui est particulière au cas unidimensionnel, et sur laquelle nous reviendrons.

Pour donner la forme finale du terme d'alimentation de $\bar{\rho}$ par émission spontanée, nous introduisons comme variable d'intégration, plutôt que l'angle polaire θ , la composante p' de la quantité de mouvement du photon de fluorescence selon Oz :

$$p' = \hbar k \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = \hbar k \cos \theta \quad (\text{II1c - 29})$$

Ce changement de variable fait apparaître, à partir des fonctions $N_q(\theta)$ de (II1c - 28), les densités de probabilité $\mathcal{N}_q(p')$ de la variable aléatoire p' dans l'intervalle $[-\hbar k, \hbar k]$ pour une polarisation q :

$$\mathcal{N}_{\pm}(p') = \frac{3}{8\hbar k} \left[1 + \left(\frac{p'}{\hbar k} \right)^2 \right] \quad (\text{II1c - 30a})$$

$$\mathcal{N}_0(p') = \frac{3}{4\hbar k} \left[1 - \left(\frac{p'}{\hbar k} \right)^2 \right] \quad (\text{II1c - 30b})$$

Ces distributions sont bien sûr normalisées à l'unité :

$$\int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp' \mathcal{N}_q(p') = 1 \quad (\text{II1c - 31})$$

Avec ces conventions, le terme d'alimentation de $\bar{\rho}$ prend la forme suivante :

$$\left(\frac{d}{dt} \bar{\rho}_{gg} \right)_{ES} = \Gamma \sum_{q=0,\pm 1} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp' \mathcal{N}_q(p') e^{-ip'Z/\hbar} \left(\Delta_q^{(+)} \right)^{\dagger} \bar{\rho}_{ee} \Delta_q^{(+)} e^{ip'Z/\hbar} \quad (\text{II1c - 32})$$

Nous voyons qu'une conséquence importante de la règle de sélection de (II1c - 27) est que l'élément de matrice $\langle g\ m | \bar{\rho} | g\ m' \rangle$ dans la base des états propres du moment cinétique interne selon Oz est couplé par (II1c - 32) seulement aux éléments $\langle e\ m + q | \bar{\rho} | e\ m' + q' \rangle$ avec $q = 0, \pm 1$. Il n'en va pas de même dans une situation générale de refroidissement à deux ou trois dimensions, le couplage se faisant alors vers tous les $\langle e\ m + q | \bar{\rho} | e\ m' + q' \rangle$ avec $q, q' = 0, \pm 1$. Cette particularité du cas unidimensionnel, que l'on peut interpréter en terme d'invariance de l'évolution de $\bar{\rho}$ par rotation des degrés de liberté internes autour d' Oz instaurée par la trace sur p_x et p_y , jouera un rôle important dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ du chapitre III.

2 - APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DE L'ÉQUATION PILOTE. FORCE MOYENNE ET DIFFUSION EN IMPULSION. CAS LIMITÉ D'UN ATOME TRÈS LOURD

Nous nous limitons ici au cas de deux faisceaux laser se propageant selon Oz avec des vecteurs d'onde opposés, ceci par commodité d'exposition, et parce que notre travail porte sur les mélasses optiques unidimensionnelles. Les considérations exposées maintenant, à l'exception du §2c, dépendent en fait peu de la dimensionnalité des mélasses, seule leur mise en oeuvre explicite peut être plus ou moins complexe (voir en particulier [57] pour le calcul de la force à plusieurs dimensions ; on consultera aussi [58,59]).

a) Passage en représentation de Wigner et forme semi-classique

(i) Equations quantiques en représentation de Wigner

En représentation de Wigner, la matrice densité atomique est caractérisée par la donnée, en chaque point de l'espace des phases classique (z, p) , d'un opérateur $W(z, p)$ qui agit seulement sur les degrés de liberté atomiques internes, et dont l'expression en fonction de ρ en représentation impulsion correspond à (IIe - 3). La forme que prennent les termes d'évolution $\frac{d}{dt}\rho$ et d'énergie cinétique $\frac{1}{i\hbar} \left[\frac{P^2}{2M}, \rho \right]$ est celle de la dérivée hydrodynamique $\partial_t + v\partial_z$ (voir (II1c - 13)). Pour transformer les termes de couplage avec les faisceaux laser, il est commode de décomposer V_{AL} selon ses composantes de Fourier :

$$V_{AL} = V_+ e^{ikZ} + V_- e^{-ikZ} \quad (\text{II2a - 1a})$$

$$V_+ = (V_-)^\dagger \quad (\text{II2a - 1b})$$

Les processus élémentaires pris en compte dans V_+ sont la modification de l'état atomique interne consécutive à l'absorption d'un photon laser d'impulsion $\hbar k \mathbf{e}_z$ (partie ascendante de V_+) ou à l'émission stimulée d'un photon dans le mode laser de vecteur d'onde $-k \mathbf{e}_z$ (partie descendante de V_+). L'action de V_{AL} devient ainsi en représentation de Wigner, compte tenu de (IIe - 3) :

$$e^{ikZ} \rho \xrightarrow{\text{Wigner}} e^{ikz} W \left(z, p - \frac{\hbar k}{2} \right)$$

$$\frac{1}{i\hbar} [V_{AL}, \rho] \xrightarrow{\text{Wigner}} \frac{1}{i\hbar} \left[V_+ e^{ikz} W\left(z, p - \frac{\hbar k}{2}\right) + V_- e^{-ikz} W\left(z, p + \frac{\hbar k}{2}\right) \right. \\ \left. - W\left(z, p + \frac{\hbar k}{2}\right) V_+ e^{ikz} - W\left(z, p - \frac{\hbar k}{2}\right) V_- e^{-ikz} \right] \quad (\text{II2a - 2})$$

Quant aux termes de relaxation associés à l'émission spontanée dans (II1c - 6), seul le terme intégral d'alimentation de l'état fondamental par l'état excité est non trivial. Il suffit d'utiliser la relation suivante :

$$e^{-ik'Z} \rho e^{ik'Z} \xrightarrow{\text{Wigner}} W(z, p + \hbar k') \quad (\text{II2a - 3})$$

pour obtenir la forme du terme d'alimentation :

$$[\partial_t W_{gg}(z, p, t)]_{\text{relax}} = \Gamma \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp' \sum_{q=0, \pm 1} \mathcal{N}_q(p') \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger W_{ee}(z, p + p', t) \Delta_q^{(+)} \quad (\text{II2a - 4})$$

où l'opérateur $\Delta_q^{(+)}$ est défini en (III1a - 11a) et (III1a - 12a) et où les distributions d'émission spontanée $\mathcal{N}_q(p')$, dépendant de la composante de polarisation q (σ_+ , σ_- ou π selon Oz) des photons de fluorescence, sont données par (II1c - 30).

(ii) Limite semi-classique

A partir de ces équations quantiques écrites en représentation de Wigner, il est facile d'obtenir la forme générale des équations semi-classiques. Nous constatons que les équations quantiques obtenues sont non locales en p à cause des changements d'impulsion discrets de l'atome associés aux processus élémentaires d'échange de photons. Lorsque $W(z, p)$ varie peu à l'échelle de ces pas discrets :

$$\hbar k \|\partial_p W(z, p)\| \ll \|W(z, p)\| \quad (\text{II2a - 5})$$

il est légitime de développer les différences finies en puissances de $\hbar k$. Il est habituel de limiter ce développement à l'ordre 2 en $\hbar k$, ce que nous commenterons plus bas, et ce qui donne la structure suivante aux équations semi-classiques :

$$(\partial_t + v\partial_z) W(z, p, t) = [M_0(z) + M_1(z)\partial_p + M_2(z)\partial_p^2] [W(z, p, t)] \quad (\text{II2a - 6})$$

Les opérateurs M_0 , M_1 , M_2 , fonctions de la position z , agissent dans l'espace de Liouville interne, c'est-à-dire que ce sont des matrices agissant sur $W(z, p, t)$ considéré comme un vecteur. $M_0(z)$, obtenu à l'ordre 0 en $\hbar k$, est simplement l'opérateur des équations de Bloch optiques habituelles écrites pour un atome localisé en z :

$$\begin{aligned} M_0(z)[W] = & \frac{1}{i\hbar} [V_+ e^{ikz} + V_- e^{-ikz}, W] \\ & - \Gamma W_{ee} + \left(i\delta - \frac{\Gamma}{2} \right) W_{eg} + \left(-i\delta - \frac{\Gamma}{2} \right) W_{ge} \\ & + \Gamma \sum_{q=0,\pm 1} \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger W_{ee} \Delta_q^{(+)} \end{aligned} \quad (\text{II2a - 7})$$

Rappelons sa propriété essentielle, qui est de conserver la probabilité :

$$Tr_{\text{int}} M_0(z)[W] = 0 \quad \forall W \quad (\text{II2a - 8})$$

Cette relation (II2a - 8) assure que la matrice densité interne, pour un atome localisé en z , dont l'évolution est donnée par les équations de Bloch habituelles, garde une population totale constante au cours du temps. L'opérateur M_1 , obtenu à l'ordre 1 en $\hbar k$, est exempt de contribution des termes de relaxation, car l'impulsion moyenne des photons de fluorescence est nulle. Il s'exprime donc simplement en fonction du potentiel de couplage atome-laser, et le développement de (II2a - 2) donne :

$$M_1(z)[W] = \frac{1}{2} \{ \partial_z (V_+ e^{ikz} + V_- e^{-ikz}), W \} \quad (\text{II2a - 9})$$

où $\{A, B\}$ désigne l'anticommuteur $AB + BA$. Nous mettons en évidence le gradient du potentiel de couplage atome-laser, ce qui désigne $-M_1(z)$ comme l'opérateur force, ainsi qu'il sera confirmé plus bas. Quant à $M_2(z)$, il contient d'une part les premières corrections quantiques au mouvement classique dans le potentiel V_{AL} , d'autre part une contribution des termes de relaxation, proportionnelle au carré de l'impulsion quadratique moyenne des photons de fluorescence selon les distributions $\mathcal{N}_q(p')$:

$$M_2(z)[W] = -i \frac{\hbar k^2}{8} [V_+ e^{ikz} + V_- e^{-ikz}, W] \\ + \Gamma \sum_{q=0,\pm 1} \frac{1}{2} \langle p'^2 \rangle_q \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger W_{ee} \Delta_q^{(+)} \quad (\text{II2a} - 10a)$$

$$\langle p'^2 \rangle_q = \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp' N_q(p') p'^2 \quad (\text{II2a} - 10b)$$

Il est tentant d'interpréter $M_2(z)$ comme l'opérateur de diffusion en impulsion. En fait, comme nous allons le voir, la trace de $M_2(z)$ donne accès au coefficient de la diffusion en impulsion liée aux fluctuations de la quantité de mouvement emportée par les photons de fluorescence (seule la deuxième ligne de (II2a - 10a) contribue, le terme de la première ligne étant de trace nulle), mais $M_2(z)$ ne contient pas les contributions à la diffusion des fluctuations de la force dérivant du potentiel V_{AL} qu'exercent les faisceaux laser sur les atomes. Il est donc important de prouver, comme nous allons le faire, que les équations semi-classiques (II2a - 6) contiennent toutes les images que l'on donne habituellement du refroidissement, ce qui justifie en quelque sorte que l'on ait arrêté le développement en puissances de $\hbar k$ à l'ordre 2.

b) Evolution de l'impulsion pour un atome de vitesse v_0

(i) Introduction

Nous nous plaçons ici dans l'optique de l'approche semi-classique traditionnelle : la grande séparation des temps internes et externes ($T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$) permet l'établissement pour l'état atomique interne d'un régime forcé, avant que la vitesse de l'atome n'ait eu le temps de changer significativement. Ceci autorise à calculer ce régime forcé en considérant le cas modèle d'un atome de vitesse imposée v_0 . Pour déterminer ne serait-ce que la force moyenne subie par l'atome en régime forcé, il est cependant nécessaire de prendre en compte correctement les changements d'impulsion atomique pendant T_{int} , même si l'on ne répercute pas leur effet sur la vitesse de l'atome. Or, les équations traitant quantiquement le mouvement atomique prennent en compte naturellement ces changements d'impulsion. Nous allons donc utiliser ces équations pour le calcul de la force moyenne $F(v_0)$ et du coefficient de diffusion en impulsion $D(v_0)$, la situation de l'atome de vitesse v_0 imposée étant obtenue quantiquement par la substitution suivante, portant sur le hamiltonien du centre de masse atomique :

$$H_{\text{at}}^{\text{ext}} = \frac{P^2}{2M} \longrightarrow H_{\text{at}}^{\text{ext}} = Pv_0 \quad (\text{II2b - 1})$$

On peut vérifier que cette substitution a l'effet désiré en calculant l'évolution de l'opérateur position du centre de masse en représentation de Heisenberg, à partir du hamiltonien total (II1b - 4b) modifié selon (II2b - 1) :

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \frac{1}{i\hbar} [Z(t), H] = (\partial_P H)(t) = v_0 \quad (\text{II2b - 2})$$

Une justification équivalente du choix de (II2b - 1) est la forme des équations quantiques en représentation de Wigner, dont seul le terme de vol libre est modifié par (II2b - 1), et de la façon attendue :

$$\left(\partial_t + \frac{p}{M} \partial_z \right) W \xrightarrow{(\text{II2b - 1})} (\partial_t + v_0 \partial_z) W \quad (\text{II2b - 3})$$

La discussion qui va suivre s'appuie exclusivement sur la représentation de Wigner. Il est donc utile de rappeler les notions de quasi-impulsion moyenne $\langle p \rangle(z, t)$, de quasi-impulsion au carré moyenne $\langle p^2 \rangle(z, t)$, au point z à l'instant t . Ces définitions font intervenir la densité atomique spatiale moyenne en z , $f(z, t)$ [60] :

$$f(z, t) = \int dp \text{Tr}_{\text{int}}(W(z, p, t)) \quad (\text{II2b - 4a})$$

$$f(z, t)\langle p \rangle(z, t) = \int dp p \cdot \text{Tr}_{\text{int}}(W(z, p, t)) \quad (\text{II2b - 4b})$$

$$f(z, t)\langle p^2 \rangle(z, t) = \int dp p^2 \cdot \text{Tr}_{\text{int}}(W(z, p, t)) \quad (\text{II2b - 4c})$$

La dépendance en position de $\langle p \rangle(z, t)$ et $\langle p^2 \rangle(z, t)$ permet de définir la force moyenne $F(z, v_0)$ et le coefficient de diffusion en impulsion $D(z, v_0)$ au point z :

$$F(z, v_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} \langle p \rangle(z, t) \quad (\text{II2b - 5a})$$

$$D(z, v_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\langle p^2 \rangle(z, t) - \langle p \rangle(z, t)^2] \quad (\text{II2b - 5b})$$

Dans ces relations, la limite $t \rightarrow +\infty$ signifie en pratique $t \gg T_{\text{int}}$, pour un état initial quelconque donné à $t = 0$, comme nous l'exposons dans l'appendice B_{II}. La dérivation temporelle est totale, donc s'entend au sens hydrodynamique :

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle(z, t) = (\partial_t + v_0 \partial_z) \langle p \rangle(z, t) \quad (\text{II2b - 6})$$

Les moyennes de l'impulsion vraie, $\langle P \rangle$ et $\langle P^2 \rangle$, se déduisent aisément des moyennes de la quasi-impulsion, à l'aide de la distribution spatiale $f(z, t)$. On dispose en effet de l'égalité suivante, pour un entier n arbitraire :

$$\langle P^n \rangle(t) = \int dz f(z, t) \langle p^n \rangle(z, t) \quad (\text{II2b - 7})$$

ce qui prouve en particulier que la force $F(z, v_0)$ moyennée selon la densité $f(z, t)$ donne la vitesse d'accroissement de l'impulsion atomique moyenne aux temps longs devant T_{int} . Cependant, en général, cette propriété ne s'étend pas à la diffusion en impulsion, c'est-à-dire que la variance de l'impulsion vraie ΔP^2 ne s'exprime pas seulement à partir de la moyenne spatiale de la variance en z de la quasi-impulsion $\Delta p^2(z, t)$, comme le montre la relation suivante :

$$\Delta P^2(t) = \int dz f(z, t) \Delta p^2(z, t) + \left[\int dz f(z, t) \langle p \rangle(z, t)^2 - \langle P \rangle^2 \right] \quad (\text{II2b - 8})$$

Le terme entre crochets dans (II2b - 8) est responsable d'une divergence de $\Delta P^2(t)$ quadratique en temps pour $t \gg T_{\text{int}}$, sauf cas particulier, comme celui de la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$ (voir le chapitre III), dans laquelle $F(z, v_0)$ ne dépend en fait pas de la position. Nous renvoyons à [60] pour une discussion approfondie, sur le modèle de l'atome à deux niveaux dans une onde stationnaire.

Voyons maintenant comment obtenir les comportements des différentes valeurs moyennes $\langle p^n \rangle(z, t)$ aux temps longs devant T_{int} . L'idée est d'écrire des relations de récurrence entre les différentes matrices internes $W_n(z, t)$, dont la trace donne accès à $\langle p^n \rangle(z, t)$:

$$W_n(z, t) = \int dp p^n W(z, p, t) \quad (\text{II2b - 9a})$$

$$Tr_{\text{int}}(W_n(z, t)) = f(z, t) \langle p^n \rangle(z, t) \quad (\text{II2b - 9b})$$

La matrice $W_0(z, t)$ a un sens physique clair, que l'on obtient facilement en utilisant pour (II2b - 9a) la définition de la transformée de Wigner en représentation position :

$$W(z, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\xi \langle z - \frac{1}{2}\xi | \rho(t) | z + \frac{1}{2}\xi \rangle e^{i\xi p/\hbar} \quad (\text{II2b - 10})$$

On trouve que $W_0(z, t)$ n'est autre que $\langle z | \rho(t) | z \rangle$, matrice densité atomique interne au point z , dont la trace donne la probabilité de détecter la particule en z . Les matrices $W_n(z, t)$, $n \geq 1$, ont une signification moins évidente, et il suffit de les considérer ici comme des intermédiaires de calcul permettant d'accéder à l'évolution de $\langle p^n \rangle(z, t)$. Les relations de récurrence cherchées sont déduites des équations quantiques en représentation de Wigner par multiplication par p^0, p^1, p^2, \dots respectivement et par intégration sur la quasi-impulsion p de $-\infty$ à $+\infty$. Nous allons donner la démarche générale des calculs, qui montre la nécessité de la substitution (II2b - 1), avant d'entrer dans le détail.

Soient donc les équations quantiques portant sur $W(z, p, t)$, multipliées par p^n , à intégrer sur p . Les termes de décroissance par émission spontanée font intervenir de simples coefficients constants ; ils ne posent donc aucune difficulté. Voici par exemple la contribution du taux de départ de l'état excité :

$$\int dp (-p^n \Gamma W_{ee}(z, p, t)) = -\Gamma (W_n)_{ee}(z, t) \quad (\text{II2b - 11})$$

Le couplage avec le laser et le terme d'alimentation de l'état fondamental par émission spontanée font intervenir des termes non locaux en p . Cette difficulté est éliminée par translation de la variable d'intégration p . Prenons ainsi l'exemple du premier terme de (II2a - 2) :

$$\begin{aligned} \int dp p^n \frac{1}{i\hbar} V_+ e^{ikz} W\left(z, p - \frac{\hbar k}{2}, t\right) &= \int dp \left(p + \frac{\hbar k}{2}\right)^n \frac{1}{i\hbar} V_+ e^{ikz} W(z, p, t) \\ &= \frac{1}{i\hbar} V_+ e^{ikz} \left[W_n(z, t) + n \frac{\hbar k}{2} W_{n-1}(z, t) + \dots + \left(\frac{\hbar k}{2}\right)^n W_0(z, t) \right] \quad (\text{II2b - 12}) \end{aligned}$$

Quant aux termes de vol libre, ils ne posent pas de problème lorsque la substitution (II2b - 3) est effectuée :

$$\int dp p^n (\partial_t + v_0 \partial_z) W(z, p, t) = (\partial_t + v_0 \partial_z) W_n(z, t) \quad (\text{II2b - 13})$$

On obtient alors une relation de récurrence sur $W_n(z, t)$, dont la structure générale est :

$$(\partial_t + v_0 \partial_z) W_n(z, t) = M_0(z) [W_n(z, t)] + S_n(z, t) \quad (\text{II2b - 14})$$

L'opérateur $M_0(z)$, défini précisément en (II2a - 7), est celui des équations de Bloch optiques habituelles écrites pour un atome localisé en z . Le terme source $S_n(z, t)$ dépend seulement, et de façon linéaire, des matrices $W_{n'}(z, t)$ avec $n' \leq n - 1$. En particulier, il est nul pour $n = 0$, ce qui permet de déterminer l'évolution de $W_0(z, t)$. Le calcul de la force et du coefficient de diffusion nécessite donc seulement la résolution d'équations de la forme (II2b - 14), où le terme source est connu. Nous en indiquons dans l'appendice BII les différentes étapes. Notons bien que la structure simple de (II2b - 14) est due à la substitution (II2b - 1), qui fait qu'on étudie la situation d'un atome de vitesse imposée. Si l'on utilise le véritable hamiltonien $H_{\text{at}}^{\text{ext}} = \frac{P^2}{2M}$, (II2b - 13) doit être modifiée comme suit :

$$\int dp p^n \left(\partial_t + \frac{p}{M} \partial_z \right) W(z, p, t) = \partial_t W_n(z, t) + \frac{1}{M} \partial_z W_{n+1}(z, t) \quad (\text{II2b - 15})$$

L'équivalent de (II2b - 14) donne alors seulement W_{n+1} en fonction des $W_{n'}$, $n' \leq n$, à une constante près. L'élément initial de la récurrence, W_0 , n'étant pas connu, la suite du calcul devient problématique !

(ii) Matrice densité interne au point z

Nous avons vu que l'intégration directe sur p des équations quantiques, moyennant la substitution (II2b - 1), donne l'équivalent des équations de Bloch optiques ordinaires pour la matrice densité interne au point z :

$$\frac{d}{dt} W_0(z, t) = M_0(z) [W_0(z, t)] \quad (\text{II2b - 16})$$

où le symbole de dérivation $\frac{d}{dt}$ est celui de (II2b - 6). Une conséquence importante de (II2b - 16), obtenue en prenant la trace, compte tenu de (II2a - 8), est la contrainte suivante sur la densité spatiale $f(z, t)$:

$$\frac{d}{dt} f(z, t) = 0 \quad (\text{II2b - 17})$$

qui, à l'instant t , se déduit donc simplement de sa valeur à $t = 0$ par translation spatiale de $v_0 t$. D'autre part, il est bien connu que la partie dissipative de $M_0(z)$ conduit l'état atomique interne à un régime forcé, fonction seulement de la position, que nous notons $W_0^f(z; v_0)$. Nous nous plaçons dans les situations où il y a unicité de ce régime forcé (on s'attend à ce que ce soit le cas pour les transitions atomiques $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$), que la périodicité spatiale de $M_0(z)$, de pas $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, permet de définir comme suit (voir l'appendice B_{II} pour l'existence) :

$$v_0 \partial_z W_0^f(z; v_0) = M_0(z) [W_0^f(z; v_0)] \quad (\text{II2b - 18a})$$

$$W_0^f(z + \lambda; v_0) = W_0^f(z; v_0) \quad (\text{II2b - 18b})$$

$$Tr_{\text{int}}(W_0^f(z; v_0)) = 1 \quad (\text{II2b - 18c})$$

Nous aboutissons ainsi à l'expression générale du régime forcé de (II2b - 16) :

$$W_0(z, t) \underset{t \gg T_{\text{int}}}{\approx} f(z, t) W_0^f(z; v_0) \quad (\text{II2b - 19})$$

(iii) Quasi-impulsion moyenne au point z . Force moyenne

Pour obtenir l'évolution de la quasi-impulsion moyenne $\langle p \rangle(z, t)$, il nous faut l'expression du terme source $S_1(z, t)$ dans (II2b - 14). On peut la déduire des équations quantiques selon la procédure indiquée au (i). Il est également possible d'utiliser les équations semi-classiques (II2a - 6) (puisque elles ont été obtenues par développement à l'ordre 2), à condition d'effectuer la substitution (II2b - 3). Après multiplication par p et sommation sur p , on intègre par parties :

$$\int dp p M_1 [\partial_p W(z, p, t)] = -M_1 [W_0(z, t)] \quad (\text{II2b - 20a})$$

$$\int dp p M_2 [\partial_p^2 W(z, p, t)] = 0 \quad (\text{II2b - 20b})$$

D'où l'équation d'évolution pour $W_1(z, t)$:

$$\frac{d}{dt} W_1(z, t) = M_0(z) [W_1(z, t)] - M_1(z) [W_0(z, t)] \quad (\text{II2b - 21})$$

En prenant la trace de (II2b - 21) sur l'état interne, nous accédons à l'évolution de la quasi-impulsion :

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle(z, t) = -\frac{\text{Tr}_{\text{int}} M_1(z) [W_0(z, t)]}{f(z, t)} \quad (\text{II2b} - 22)$$

et donc, en utilisant (II2b - 19), à la force moyenne subie par un atome dont la vitesse reste constante et égale à v_0 pendant $t \gg T_{\text{int}}$, ce qui met son état interne en régime forcé :

$$F(z, v_0) = -\text{Tr}_{\text{int}} M_1(z) [W_0^f(z; v_0)] \quad (\text{II2b} - 23)$$

Ceci confirme l'identification de $-M_1(z)$ comme opérateur force que nous avions faite à propos de (II2a - 9).

La connaissance de l'évolution temporelle pour l'état interne de $W_1(z, t)$ n'est donc en rien utile au calcul de la force moyenne. Elle est par contre indispensable pour la détermination du coefficient de diffusion en impulsion, comme nous le verrons bientôt. Le calcul aux temps longs de $W_1(z, t)$ ne consiste pas directement en la recherche d'un régime forcé. En effet, $\langle p \rangle(z, t)$ n'admet a priori pas de limite finie avec le temps. Par exemple, lorsque $v_0 = 0$, la quasi-impulsion moyenne en z diverge linéairement avec t , proportionnellement à $F(z, 0)$. Une partie de $W_1(z, t)$ est donc susceptible de diverger aux temps longs, partie que l'on met en évidence par la transformation suivante :

$$W_1(z, t) = \langle p \rangle(z, t) W_0(z, t) + \tilde{W}_1(z, t) \quad (\text{II2b} - 24)$$

Cette relation constitue une définition de la matrice interne $\tilde{W}_1(z, t)$, de trace nulle en raison de (II2b - 9), et dont l'équation d'évolution est donnée dans l'appendice B_{II}. Nous prouvons, également en B_{II}, l'existence d'un régime forcé pour \tilde{W}_1 , fonction de la position seulement et de période spatiale λ . Nous indiquons ici seulement les relations de définition de ce régime $W_1^f(z; v_0)$:

$$\begin{aligned} v_0 \partial_z W_1^f(z; v_0) &= M_0(z) [W_1^f(z; v_0)] \\ &\quad - M_1(z) [W_0^f(z; v_0)] - F(z, v_0) W_0^f(z; v_0) \end{aligned} \quad (\text{II2b} - 25a)$$

$$W_1^f(z + \lambda; v_0) = W_1^f(z; v_0) \quad (\text{II2b} - 25b)$$

$$\text{Tr}_{\text{int}} (W_1^f(z; v_0)) = 0 \quad (\text{II2b} - 25c)$$

On obtient ainsi, pour la matrice interne $\tilde{W}_1(z, t)$ aux temps longs, l'équivalent de (II2b - 19) :

$$\tilde{W}_1(z, t) \underset{t \gg T_{\text{int}}}{\simeq} f(z, t) W_1^f(z; v_0) \quad (\text{II2b - 26})$$

(iv) Variance de la quasi-impulsion au point z . Coefficient de diffusion en impulsion

Il nous reste finalement à étudier l'évolution temporelle de la quasi-impulsion au carré moyennée sur l'état interne, $\langle p^2 \rangle(z, t)$. Comme nous l'avons constaté pour le calcul de $\langle p \rangle(z, t)$, seule nous est nécessaire la trace du terme source $S_2(z, t)$, dans (II2b - 14) écrit pour $n = 2$. Nous utilisons, comme au (iii), les équations semi-classiques, compte tenu de (II2b - 3). La multiplication par p^2 , la sommation sur p et l'intégration par parties conduisent à :

$$S_2(z, t) = -2M_1(z)[W_1(z, t)] + 2M_2(z)[W_0(z, t)] \quad (\text{II2b - 27a})$$

$$\frac{d}{dt} \langle p^2 \rangle(z, t) = \frac{T r_{\text{int}}(S_2(z, t))}{f(z, t)} \quad (\text{II2b - 27b})$$

Nous modifions la première égalité (II2b - 27a) en prenant en compte la décomposition (II2b - 24) de $W_1(z, t)$:

$$S_2(z, t) = -2M_1(z)[W_0(z, t)] \langle p \rangle(z, t) - 2M_1(z) [\tilde{W}_1(z, t)] + 2M_2(z)[W_0(z, t)] \quad (\text{II2b - 28})$$

Nous constatons alors que le premier terme de (II2b - 28) donne précisément naissance, dans (II2b - 27b), à $2\langle p \rangle(z, t) \frac{d}{dt} \langle p \rangle(z, t) = \frac{d}{dt} (\langle p \rangle(z, t)^2)$, en vertu de (II2b - 22), ce qui conduit finalement à l'évolution de la variance de la quasi-impulsion :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\langle p^2 \rangle(z, t) - \langle p \rangle(z, t)^2] = \frac{T r_{\text{int}} (-M_1(z) [\tilde{W}_1(z, t)] + M_2(z)[W_0(z, t)])}{f(z, t)} \quad (\text{II2b - 29})$$

Pour obtenir le coefficient de diffusion en impulsion au point z à la vitesse constante v_0 , il suffit de se placer à des temps longs devant T_{int} , ce qui autorise à faire usage des comportements asymptotiques (II2b - 19) et (II2b - 26) :

$$D(z, v_0) = D_0(z, v_0) + D_1(z, v_0) \quad (\text{II2b - 30a})$$

$$D_0(z, v_0) = Tr_{\text{int}} \left(M_2(z) \left[W_0^f(z; v_0) \right] \right) \quad (\text{II2b - 30b})$$

$$D_1(z, v_0) = -Tr_{\text{int}} \left(M_1(z) \left[W_1^f(z; v_0) \right] \right) \quad (\text{II2b - 30c})$$

Nous obtenons ainsi $D(z, v_0)$ comme somme de deux termes d'origines bien distinctes, ce qui est d'ailleurs bien connu [17].

Le premier terme $D_0(z, v_0)$ dépend seulement du régime forcé $W_0^f(z; v_0)$ des équations de Bloch ordinaires. Il est facile de l'interpréter physiquement à partir de la forme (II2a - 10a) de l'opérateur M_2 , en effectuant explicitement le calcul de Tr_{int} dans la base des états propres du moment cinétique interne selon Oz . La première ligne de (II2a - 10a) est un commutateur, donc est de trace nulle. Seule la deuxième ligne de (II2a - 10a) a une contribution non nulle, contribution qui fait intervenir les populations excitées de W_0^f :

$$D_0(z, v_0) = \Gamma \sum_{q=0, \pm 1} \frac{1}{2} \langle p'^2 \rangle_q \sum_m (c_{m-q}^q)^2 \langle e m | W_0^f(z; v_0) | e m \rangle \quad (\text{II2b - 31})$$

Nous voyons apparaître les taux de désexcitation spontanée de chaque sous-niveau excité $|e m\rangle$ vers les sous-niveaux fondamentaux $|g m - q\rangle$, $q = 0, \pm 1$:

$$\Gamma_{e m \rightarrow g m - q} = \Gamma (c_{m-q}^q)^2 \quad (\text{II2b - 32})$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan c_m^q sont donnés dans le §1. De plus, chaque transition $|e m\rangle \rightarrow |g m - q\rangle$ par émission spontanée augmente l'impulsion atomique carrée moyenne de $\langle p'^2 \rangle_q$, d'après (II2a - 10b). L'expression (II2b - 31) désigne donc clairement $D_0(z, v_0)$ comme le coefficient de diffusion décrivant les fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence :

$$D_0(z, v_0) = D_{\text{spont}}(z, v_0) \quad (\text{II2b - 33})$$

Le second terme $D_1(z, v_0)$ fait intervenir seulement les changements d'impulsion atomique par échange de photons avec les modes laser, à l'exclusion de l'impulsion des photons de fluorescence. Il contient ainsi l'effet sur le mouvement du centre de masse atomique des

fluctuations de la force exercée par les ondes laser sur l'atome. Il est bien connu [17], dans le cas d'un atome au repos ($v_0 = 0$), que $D_1(z, v_0)$ est obtenu comme l'intégrale de la fonction d'autocorrélation $\langle F(t)F(t - \tau) \rangle$ de l'opérateur force $F(t) = \left(\frac{dP}{dt} \right)_{\text{laser}}$ en point de vue de Heisenberg. Ce résultat peut être généralisé pour un atome en mouvement [25], et l'on peut montrer que l'utilisation du théorème de régression quantique [62, 40] aboutit à une formulation équivalente à la nôtre, avec apparition du système (II2b - 21). Nous ne souhaitons pas ici adopter le point de vue de Heisenberg. Néanmoins, nous établissons, dans B_{II} (cf. (B_{II} – 26)), une forme intégrale suggestive de $W_1^f(z; v_0)$, en terme de l'opérateur d'évolution associé aux équations de Bloch habituelles, qui conduit à une expression pour $D_1(z, v_0)$ aussi claire physiquement qu'en point de vue de Heisenberg, mais plus directement opérationnelle.

c) Développement asymptotique de l'équation pilote pour un atome très lourd

Nous abordons maintenant, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, une résolution approchée des équations du mouvement de la matrice densité stationnaire d'un atome dans une onde lumineuse.

Nous nous plaçons ici exclusivement dans la situation des mélasses optiques stationnaires à une dimension, et nous étudions le cas limite d'un atome de masse très élevée, tous les autres paramètres (désaccord entre atome et laser, pulsation de Rabi en unité de largeur naturelle Γ) étant fixés. Le temps typique T_{int} associé aux variables atomiques internes est lui aussi fixé, puisqu'il ne dépend pas de la masse M de l'atome. Par contre, l'atome devenant de plus en plus lourd, et les forces radiatives restant bornées, il est clair que T_{ext} , associé au temps de variation de la vitesse atomique en valeurs relatives, va augmenter indéfiniment, selon des lois que nous précisons plus loin. La limite $M \rightarrow +\infty$ doit être considérée ici comme un moyen assez formel d'accéder avec certitude au régime de l'approche semi-classique traditionnelle ($T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$). Nous effectuons ainsi le développement de l'équation pilote au second ordre en $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{M}}$, ce qui nous donne explicitement la distribution en position-vitesse dans l'état stationnaire à l'ordre le plus bas, c'est-à-dire à l'ordre 0 en ε . Notre démarche est donc complémentaire de l'approche semi-classique traditionnelle telle qu'elle est formulée dans [17] : les auteurs obtiennent, par élimination adiabatique de l'état atomique interne, une équation de Fokker-Planck donnant l'évolution temporelle de la distribution en position-vitesse, mais ne proposent pas de forme explicite pour l'état stationnaire.

(i) Paramètre ε du développement

Le paramètre physique dont la petitesse motive notre développement est le rapport du temps atomique interne T_{int} au temps externe réactif $T_{\text{ext}}^{(1)}$, période du mouvement des atomes dans les puits de potentiel que sont les déplacements lumineux (cf. §0). Nous associons à cette grandeur physique le paramètre ε de développement formel ayant la même dépendance en fonction de la masse atomique que $\frac{T_{\text{int}}}{T_{\text{ext}}^{(1)}}$, soit :

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (\text{II2c - 1})$$

Bien entendu, ce paramètre n'est pas sans dimension. Ceci ne pose cependant pas de problème : nous allons effectuer dans un premier temps un développement formel en puissances de ε ; nous identifierons ensuite comme véritables petits paramètres physiques les rapports des termes successifs de la série formelle, ce qui fera apparaître, comme prévu, successivement $\frac{T_{\text{int}}}{T_{\text{ext}}^{(1)}}$ et $\frac{T_{\text{ext}}^{(1)}}{T_{\text{ext}}^{(2)}}$.

Avant d'effectuer ce développement, il nous est nécessaire de connaître la loi d'échelle qui fixe la largeur en p de la distribution stationnaire, à la limite $M \rightarrow +\infty$, les autres paramètres (δ, Ω) étant maintenus constants. Nous laissant guider par la situation bien connue du refroidissement Doppler, dans laquelle l'énergie cinétique moyenne dans l'état stationnaire ne dépend plus de la masse lorsque l'atome est assez lourd, nous allons admettre que, dans les situations de mélasses optiques à une dimension qui nous intéressent, conduisant en particulier à un refroidissement autour de la vitesse nulle, la propriété suivante est vérifiée :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{p^2}{2M} \right\rangle = g(\delta, \Omega) \quad (\text{II2c - 2})$$

les autres paramètres (δ, Ω) étant maintenus constants. Nous excluons ainsi les configurations de refroidissement avec champ magnétique ou à très forte intensité [82-85,72]. Ceci étant admis, nous en déduisons la renormalisation en impulsion à effectuer pour qu'il y ait convergence de la distribution en position-impulsion $f(z, p; M)$ vers une distribution finie lorsque $M \rightarrow +\infty$:

$$p = \sqrt{M} u \quad (\text{II2c - 3a})$$

$$\exists \lim_{M \rightarrow +\infty} f(z, \sqrt{M}u; M) = \bar{f}^{(0)}(z, u) \quad \text{à } \delta, \Omega, z \text{ et } u \text{ fixés (II2c - 3b)}$$

Notons qu'au pas élémentaire en impulsion des équations quantiques, soit $\hbar k$, correspond le pas infiniment petit $\hbar k\varepsilon$ sur u . La limite (II2c - 3b), qui donne la distribution en position-vitesse à l'ordre 0 en ε , est donc naturellement semi-classique.

(ii) Développement à l'ordre 2 inclus en ε

L'objectif du présent calcul est la détermination explicite de la distribution limite $\bar{f}^{(0)}(z, u)$ définie dans (II2c - 3b). Il est nécessaire, pour ceci, d'effectuer un développement des équations quantiques au second ordre en ε . En effet, comme nous allons l'établir ci-dessous, l'ordre 0 renseigne sur l'état interne ; l'ordre 1 montre que la fonction de deux variables $\bar{f}^{(0)}(z, u)$ dépend en fait d'une seule variable E , qui est l'énergie totale des atomes dans un potentiel effectif $U(z)$; l'ordre 2 donne la dépendance en E correspondante. Comme le développement est effectué simplement jusqu'à l'ordre 2, il est équivalent d'utiliser les équations quantiques stationnaires en représentation de Wigner ou la forme stationnaire des équations semi-classiques (II2a - 6). Par commodité, nous choisissons ces dernières, ainsi transformées selon (II2c - 3a) :

$$u\varepsilon\partial_z\bar{W}(z, u; \varepsilon) = [M_0(z) + \varepsilon M_1(z)\partial_u + \varepsilon^2 M_2(z)\partial_u^2] [\bar{W}(z, u; \varepsilon)] \quad (\text{II2c - 4})$$

avec la notation suivante :

$$\bar{W}(z, u; \varepsilon) = W(z, p; M) \quad (\text{II2c - 5})$$

Le développement en puissances de ε prend la forme suivante :

$$\bar{W}(z, u; \varepsilon) = \bar{W}^{(0)}(z, u) + \varepsilon \bar{W}^{(1)}(z, u) + \varepsilon^2 \bar{W}^{(2)}(z, u) + \dots \quad (\text{II2c - 6a})$$

$$\bar{f}(z, u; \varepsilon) = Tr_{\text{int}} \bar{W}(z, u; \varepsilon) \quad (\text{II2c - 6b})$$

$$\bar{f}(z, u; \varepsilon) = \bar{f}^{(0)}(z, u) + \varepsilon \bar{f}^{(1)}(z, u) + \varepsilon^2 \bar{f}^{(2)}(z, u) + \dots \quad (\text{II2c - 6c})$$

Nous allons obtenir, à partir de (II2c - 4) écrite aux ordres successifs en ε , des relations matricielles sur les opérateurs $\bar{W}^{(0)}, \bar{W}^{(1)} \dots$ Nous exploiterons de façon systématique ces

relations en les projetant sur $W_0^f(z; v = 0)$ (état stationnaire interne des équations de Bloch ordinaires pour un atome immobile en z) et sur le sous-espace des matrices internes de trace nulle, comme nous l'avons déjà fait en (B_{II} - 5). La projection sur $W_0^f(z; v = 0)$ revient simplement à prendre la trace sur l'état interne des relations matricielles.

Nous aurons besoin également du développement des solutions forcées définies par (II2b - 18) et (II2b - 25), pour une vitesse $v = \frac{p}{M} = u\varepsilon$:

$$W_0^f(z; u\varepsilon) = W_0^{f(0)}(z) + \varepsilon u W_0^{f(1)}(z) + \dots \quad (\text{II2c - 7a})$$

$$W_1^f(z; u\varepsilon) = W_1^{f(0)}(z) + \varepsilon u W_1^{f(1)}(z) + \dots \quad (\text{II2c - 7b})$$

Par exemple, les termes successifs de (II2c - 7a) sont définis, en plus de la périodicité spatiale (II2b - 18b), par les contraintes suivantes, obtenues par développement de (II2b - 18a) en puissances de ε :

$$\begin{cases} M_0(z) [W_0^{f(0)}(z)] = 0 \\ Tr_{\text{int}} (W_0^{f(0)}(z)) = 1 \end{cases} \quad (\text{II2c - 8a})$$

$$\begin{cases} M_0(z) [W_0^{f(1)}(z)] = \frac{d}{dz} W_0^{f(0)}(z) \\ Tr_{\text{int}} (W_0^{f(1)}(z)) = 0 \end{cases} \quad (\text{II2c - 8b})$$

Il est important de remarquer que la substitution de (II2c - 7a) dans l'expression de la force (II2b - 23) conduit au développement de $F(z, u\varepsilon)$ en puissances de ε . Le terme correspondant à l'ordre 0 en ε n'est autre que la force moyenne subie par un atome au repos ; cette force dérive d'un potentiel $U(z)$ puisque nous étudions le cas unidimensionnel. Le terme correspondant à l'ordre 1 en ε est linéaire en vitesse ; il constitue, dans les situations de refroidissement qui nous intéressent, une force de friction caractérisée par le coefficient de friction $\alpha(z)$. Toutes ces grandeurs sont définies ainsi :

$$F(z, u\varepsilon) = -\frac{d}{dz} U(z) - \alpha(z) u\varepsilon \quad (\text{II2c - 9a})$$

$$-\frac{d}{dz} U(z) = -Tr_{\text{int}} (M_1(z) [W_0^{f(0)}(z)]) \quad (\text{II2c - 9b})$$

$$\alpha(z) = Tr_{\text{int}} (M_1(z) [W_0^{f(1)}(z)]) \quad (\text{II2c - 9c})$$

De même, la substitution de (II2c - 7) dans (II2b - 30) fournit le développement du coefficient de diffusion en impulsion $D(z, u\epsilon)$ en puissances de ϵ . Seule nous sera utile ici la valeur de ce coefficient pour un atome au repos :

$$D^{(0)}(z) = D(z, 0) = Tr_{\text{int}} \left(M_2(z) \left[W_0^{f(0)}(z) \right] \right) - Tr_{\text{int}} \left(M_1(z) \left[W_1^{f(0)}(z) \right] \right) \quad (\text{II2c} - 10)$$

Effectuons maintenant le développement de (II2c - 4) en puissances de ϵ . L'écriture à l'ordre 0 de (II2c - 4) conduit à l'équation suivante :

$$M_0(z) \left[\bar{W}^{(0)}(z, u) \right] = 0 \quad (\text{II2c} - 11)$$

dont la solution, compte tenu de (II2c - 6) et (II2c - 8a), est :

$$\bar{W}^{(0)}(z, u) = \bar{f}^{(0)}(z, u) W_0^{f(0)}(z) \quad (\text{II2c} - 12)$$

A l'ordre le plus bas, l'état interne des atomes en z correspond à l'état stationnaire des équations de Bloch optiques ordinaires pour un atome au repos. Ce que nous voulons déterminer ici, c'est la distribution $\bar{f}^{(0)}(z, u)$.

Utilisons maintenant (II2c - 4) à l'ordre 1 en ϵ , ce qui conduit à :

$$u \partial_z \bar{W}^{(0)}(z, u) = M_0(z) \left[\bar{W}^{(1)}(z, u) \right] + M_1(z) \left[\partial_u \bar{W}^{(0)}(z, u) \right] \quad (\text{II2c} - 13)$$

En prenant la trace de (II2c - 13) sur l'état atomique interne, nous obtenons, à l'aide de (II2c - 12), et compte tenu de (II2a - 8) :

$$u \partial_z \bar{f}^{(0)}(z, u) = \partial_u \bar{f}^{(0)}(z, u) Tr_{\text{int}} \left(M_1(z) \left[W_0^{f(0)}(z) \right] \right) \quad (\text{II2c} - 14)$$

Il est possible alors de donner à (II2c - 14) la forme suggestive suivante, grâce à (II2c - 9b) :

$$\left[u \partial_z + \left(-\frac{dU}{dz} \right) \partial_u \right] \bar{f}^{(0)}(z, u) = 0 \quad (\text{II2c} - 15)$$

qui montre qu'à l'ordre 0 en ϵ , la distribution en position-impulsion est stationnaire pour le mouvement dans le potentiel $U(z)$. Pour résoudre (II2c - 15), il est commode de se placer en représentation position-énergie :

$$\begin{cases} Z = z \\ E = \frac{1}{2}u^2 + U(z) \end{cases} \quad (\text{II2c - 16})$$

Pour qu'il y ait une correspondance biunivoque entre les deux représentations (z, u) et (Z, E) , nous nous limitons aux vitesses u positives. Pour faire le lien avec le domaine $u \leq 0$, nous constatons qu'il y a formellement invariance de (II2c - 4) si l'on change simultanément ε en $-\varepsilon$ et u en $-u$. Par unicité supposée de l'état stationnaire, nous bénéficions donc des propriétés de parité :

$$\bar{f}^{(n)}(z, -u) = (-1)^n \bar{f}^{(n)}(z, u) \quad (\text{II2c - 17})$$

ce qui nous suffira pour conclure. En représentation (Z, E) , (II2c - 15) devient simplement :

$$\partial_Z \bar{f}^{(0)}(Z, E) = 0 \quad (\text{II2c - 18})$$

Les positions Z a priori accessibles pour les atomes d'énergie E sont une réunion d'intervalles, éventuellement infinis, de bornes $X_j(E)$ et $Y_j(E)$, comme on le voit sur la fig. II-5 :

$$\{Z/U(Z) \leq E\} = \bigcup_j [X_j(E), Y_j(E)] \quad (\text{II2c - 19})$$

La solution générale de (II2c - 18) est donc constante vis à vis de Z sur chacun de ces intervalles :

$$\forall Z \in [X_j(E), Y_j(E)], \bar{f}^{(0)}(Z, E) = \varphi_j(E) \quad (\text{II2c - 20})$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que $\bar{f}^{(0)}(Z, E)$ représente simplement la distribution dans l'espace des position-vitesse $\bar{f}^{(0)}(z, u)$ écrite en fonction des nouvelles variables Z et E . Si l'on veut en déduire la densité dans l'espace des position-énergie, que nous notons $\bar{g}^{(0)}(Z, E)$, il ne faut pas oublier le jacobien, associé à la transformation (II2c - 16), qui exprime le rapport entre les volumes élémentaires $dZ dE$ et $dz du$. Un calcul simple montre que ce jacobien vaut précisément u , ce qui donne $\bar{g}^{(0)}(Z, E) = \frac{1}{u(Z, E)} \bar{f}^{(0)}(Z, E)$.

Le facteur supplémentaire $\frac{1}{u}$, proportionnel à l'inverse de la vitesse, exprime le fait que

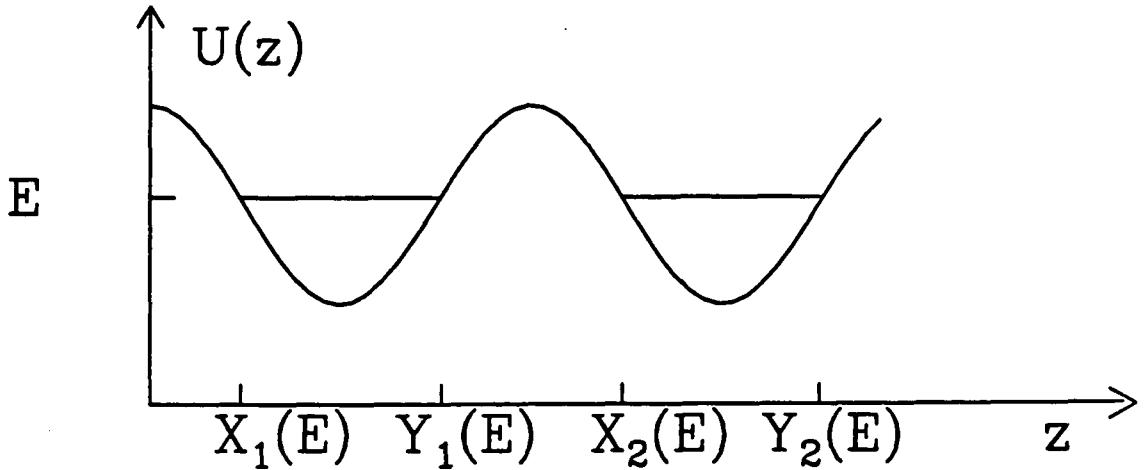


Fig. II-5 : Intervalles en position accessibles à une particule classique d'énergie E dans le potentiel $U(z)$.

les particules oscillant dans le potentiel $U(z)$ restent d'autant plus longtemps au voisinage d'un point z que leur vitesse y est plus faible.

Il nous reste maintenant à déterminer les fonctions $\varphi_j(E)$, ce qui nécessite le calcul de \bar{W}_1 et la prise en compte des termes d'ordre 2 dans (II2c - 4). En retirant à (II2c - 13) l'équation (II2c - 14) multipliée par $W_0^{f(0)}(z)$, nous obtenons la condition sur $\bar{W}^{(1)}(z, u)$:

$$M_0(z) \left[\bar{W}^{(1)}(z, u) \right] = u \bar{f}^{(0)}(z, u) \frac{d}{dz} W_0^{f(0)}(z) - \left(\partial_u \bar{f}^{(0)} \right) \left\{ M_1(z) \left[W_0^{f(0)}(z) \right] - \frac{dU}{dz} W_0^{f(0)}(z) \right\} \quad (\text{II2c - 21})$$

Nous constatons que la première ligne du second membre est proportionnelle au second membre de (II2c - 8b), et que la seconde ligne est proportionnelle au terme source de (II2b - 25a) écrit pour $v_0 = 0$. Comme les solutions déjà introduites dans (II2c - 8b) et (II2b - 25) sont de trace interne nulle, la solution générale de (II2c - 21) s'écrit, compte tenu de (II2c - 6c) et (II2c - 8a) :

$$\bar{W}^{(1)}(z, u) = \bar{f}^{(1)}(z, u) W_0^{f(0)}(z) + u \bar{f}^{(0)}(z, u) W_0^{f(1)}(z) - \left(\partial_u \bar{f}^{(0)} \right) W_1^{f(0)}(z) \quad (\text{II2c - 22})$$

Les deux premiers termes de (II2c - 22) sont le développement à l'ordre 1 de $\bar{f}(z, u; \varepsilon) W_0^f(z; u\varepsilon)$, dont (II2c - 12) était le développement à l'ordre 0. S'il n'y avait le troisième terme, moins

intuitif, l'état atomique interne coïnciderait, jusqu'à l'ordre 1, avec le régime forcé d'un atome de vitesse imposée εu . Nous verrons, dans le cadre de la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ (chapitre III), dans quelle mesure cette propriété (présence de $f(z, v)W_0^f(z; v)$ dans l'expression de la distribution de Wigner vraie $W(z, v)$) se généralise à tous les ordres en ε .

Pour obtenir finalement la dépendance en E de $\bar{f}^{(0)}(z, u)$, il nous reste à développer (II2c - 4) à l'ordre 2 en ε , ce qui donne :

$$u\partial_z \bar{W}^{(1)}(z, u) = M_0(z) [\bar{W}^{(2)}(z, u)] + M_1(z) [\partial_u \bar{W}^{(1)}] + M_2(z) [\partial_u^2 \bar{W}^{(0)}] \quad (\text{II2c - 23})$$

En prenant la trace de cette égalité sur l'état atomique interne, nous obtenons, à l'aide de (II2c - 22), (II2c - 9) et (II2c - 10) :

$$\left[u\partial_z + \left(-\frac{dU}{dz} \right) \partial_u \right] \bar{f}^{(1)}(z, u) = \partial_u \left\{ \alpha(z)u\bar{f}^{(0)}(z, u) + D^{(0)}(z)\partial_u \bar{f}^{(0)}(z, u) \right\} \quad (\text{II2c - 24})$$

Le premier membre incite à passer en représentation (Z, E) , comme nous l'avons fait pour (II2c - 15), ce qui donne la forme suivante à (II2c - 24) sur chaque intervalle $[X_j(E), Y_j(E)]$:

$$\partial_Z \bar{f}^{(1)}(z, u) = \partial_E \left\{ \alpha(Z)u(Z, E)\varphi_j(E) + D^{(0)}(Z)u(Z, E)\varphi'_j(E) \right\} \quad (\text{II2c - 25a})$$

$$\text{avec } u(Z, E) = \sqrt{2(E - U(Z))} \quad (\text{II2c - 25b})$$

Pour éliminer la fonction inconnue $\bar{f}^{(1)}$, supposée parfaitement régulière, nous utilisons la propriété qu'elle a d'être impaire en u à position z fixée, d'après (II2c - 17), ce qui montre qu'elle s'annule en $u = 0$. Dans le cas où l'intervalle d'indice j associé à l'énergie E est borné, on a donc :

$$\bar{f}^{(1)}(X_j(E), E) = \bar{f}^{(1)}(Y_j(E), E) = 0 \quad (\text{II2c - 26})$$

L'intégration de (II2c - 25a) sur Z à énergie E fixée, sur l'intervalle borné $[X_j(E), Y_j(E)]$, conduit alors à l'équation différentielle ordinaire sur $\varphi_j(E)$:

$$\frac{d}{dE} (\ln \varphi_j(E)) = -\frac{\bar{\alpha}_j(E)}{\bar{D}_j(E)} \quad (\text{II2c - 27a})$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_j(E) = \int_{X_j(E)}^{Y_j(E)} dZ \alpha(Z) u(Z, E) \\ \bar{D}_j(E) = \int_{X_j(E)}^{Y_j(E)} dZ D^{(0)}(Z) u(Z, E) \end{cases} \quad (\text{II2c - 27b})$$

Lorsque l'intervalle $[X_j(E), Y_j(E)]$ est non borné, la dérivée logarithmique de $\varphi_j(E)$ est simplement donnée par la limite du rapport (II2c - 27a), lorsque la borne supérieure ou la borne inférieure des intégrales (II2c - 27b) tend vers l'infini. Dans les situations que nous allons rencontrer au chapitre IV, le potentiel $U(z)$ est de période la longueur d'onde optique λ , et cette limite correspond simplement au rapport des intégrales de (II2b - 27b) calculées sur une période, comme on peut le vérifier directement en utilisant la périodicité de $\bar{f}^{(1)}$ et en intégrant (II2c - 25a) sur l'intervalle $[0, \lambda]$. Nous attirons par ailleurs l'attention du lecteur sur le fait non intuitif que les moyennes (II2c - 27b) ne correspondent pas en général à celles que l'on effectuerait spontanément sur la trajectoire d'énergie fixée E ; par exemple :

$$\bar{D}_j(E) \neq \int_{X_j(E)}^{Y_j(E)} dZ \frac{D^{(0)}(Z)}{u(Z, E)} \quad (\text{II2c - 28})$$

(iii) Discussion physique

Nous allons maintenant interpréter le développement formel que nous venons d'effectuer, en montrant qu'il repose sur une séparation bien nette entre les différentes échelles de temps intervenant dans une expérience de refroidissement. L'opérateur intervenant à l'ordre 0 du développement en ε , dans (II2c - 11), concerne seulement la dynamique atomique interne au point z . Il s'agit simplement de l'opérateur de Bloch habituel $M_0(z)$ écrit pour un atome localisé en z , et qui permet de définir le temps de relaxation interne le plus long, soit T_{int} , indépendant de la masse M et associé aux valeurs propres de $M_0(z)$ non nulles et de parties réelles les plus proches de 0.

A l'ordre 1 en ε , apparaît dans (II2c - 15) l'opérateur :

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ v \partial_z + \left(-\frac{dU}{dz} \right) \partial_p \right\} \quad (\text{II2c - 29})$$

qui décrit le mouvement classique des atomes dans le potentiel moyen $U(z)$; ses valeurs propres associées aux trajectoires bornées d'énergie E sont les multiples entiers de $\frac{2\pi}{T(E)}$, où $T(E)$ est la période du mouvement classique à l'énergie E . Ces $T(E)$ constituent une première famille de temps externes $T_{\text{ext}}^{(1)}$, purement réactifs :

$$\text{Spec}(\mathcal{D}_1) = \left\{ \frac{2in\pi}{T(E)}, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (\text{II2c - 30a})$$

$$T_{\text{ext}}^{(1)} = \sqrt{M} \int_{X_j}^{Y_j} \frac{dZ}{u(Z, E)} \quad (\text{II2c - 30b})$$

Les pulsations correspondantes sont effectivement proportionnelles à ε , ce qui justifie leur apparition à cet ordre du développement.

Finalement, à l'ordre 2 en ε , nous obtenons, dans le second membre de (II2c - 24), l'opérateur externe :

$$\mathcal{D}_2 = \partial_p \left\{ \alpha(z)v + D^{(0)}(z)\partial_p \right\} \quad (\text{II2c - 31})$$

qui décrit la thermalisation en z d'une particule soumise à une force aléatoire, dont la moyenne est une friction linéaire en vitesse et dont les fluctuations introduisent une diffusion en impulsions caractérisée par $D^{(0)}(z)$. Les valeurs propres de cet opérateur correspondent aux taux d'amortissement de la vitesse sous l'influence de la force de friction. On peut montrer que :

$$\text{Spec}(\mathcal{D}_2(z)) = \left\{ -n \frac{\alpha(z)}{M}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{II2c - 32a})$$

$$T_{\text{ext}}^{(2)} = \frac{M}{\alpha(z)} \quad (\text{II2c - 32b})$$

ce qui constitue une deuxième famille de temps externes, purement dissipatifs, proportionnels à M donc inversement proportionnels à ε^2 , ce qui justifie leur apparition à l'ordre 2 du développement. Notons que la valeur du coefficient de diffusion n'introduit pas d'autre temps dissipatif que (II2c - 32b), ce dont on peut se convaincre soit par une diagonalisation exacte de \mathcal{D}_2 [63], soit par un raisonnement élémentaire du type de celui qui nous a conduit à (IId - 12).

Cette hiérarchie temporelle nous permet de préciser, autrement que formellement, les conditions de validité de notre résultat (II2c - 27). Il faut d'abord pouvoir éliminer adiabatiquement l'état atomique interne, ce qui impose $\|M_0\| \gg \|\mathcal{D}_1\|$ donc $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}^{(1)}$: l'état atomique interne atteint son régime forcé bien avant que l'atome n'ait le temps d'effectuer une oscillation complète dans les puits de potentiel $U(z)$. Il faut ensuite que $\|\mathcal{D}_1\| \gg \|\mathcal{D}_2\|$, donc $T_{\text{ext}}^{(1)} \ll T_{\text{ext}}^{(2)}$, ce qui signifie que l'atome a le temps d'effectuer plusieurs oscillations dans les puits de $U(z)$ avant que sa vitesse ne soit amortie de façon significative par la force de friction. (II2c - 27) n'est donc valable qu'en régime sous-amorti pour le mouvement externe. Pour admettre (II2c - 27) comme solution stationnaire, il est finalement nécessaire que :

$$T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}^{(1)} \ll T_{\text{ext}}^{(2)} \quad (\text{II2c - 33})$$

Cette chaîne d'inégalités se réduit à $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}^{(2)}$ en l'absence de dépendance spatiale (cas du chapitre III).

L'examen des conditions de validité du présent traitement n'est a priori pas épousé par la comparaison précédente des temps internes et externes. En particulier, il reste à vérifier que les expressions (II2c - 9a) et (II2c - 10) constituent une approximation admissible de la force et du coefficient de diffusion sur toute la largeur en vitesse Δv de la distribution stationnaire. Nous exigeons en pratique que l'essentiel de cette distribution soit contenu dans le domaine de linéarité en vitesse v_{lin} de la force. Notons que cette condition, qui introduit le petit paramètre $\frac{\Delta v}{v_{\text{lin}}}$ proportionnel à ϵ d'après la loi d'échelle (II2c - 2), légitime de façon indirecte le développement (II2c - 7) des régimes forcés W_0^f et W_1^f , développement dont les expressions (II2c - 9a) et (II2c - 10) sont finalement issues. Dans le cas général des nouveaux mécanismes de refroidissement, la force moyenne est dominée par les processus stimulés, du moins à grand désaccord ($|\delta| \gg \Gamma$). Le domaine de linéarité v_{lin} est alors inversement proportionnel à kT_{int} , et la condition $\Delta v \ll v_{\text{lin}}$ est automatiquement vérifiée lorsque $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}^{(1)}$, comme nous l'avons constaté pour le refroidissement Sisyphe du I§1 (cf. remarque après (I1d - 6)). Cette condition de linéarité n'apporte donc, dans le cas général, rien de plus que la chaîne d'inégalités (II2c - 33). Elle est par contre intéressante pour la configuration particulière $\sigma_+ - \sigma_-$. L'absence de dépendance spatiale réduit (II2c - 33) dans ce cas à la condition $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}^{(2)}$, ce qui, de façon trompeuse, désigne $\frac{T_{\text{int}}}{T_{\text{ext}}^{(2)}}$ comme petit paramètre de développement de l'approche semi-classique traditionnelle, ainsi que nous l'avons écrit naïvement en (I2e - 6). En fait

comme nous l'avons vu au I§2e, le calcul explicite de v_{lin} , à partir des résultats de I§2, rétablit comme véritable petit paramètre $\frac{\Delta v}{v_{\text{lin}}} \sim \left(\frac{T_{\text{int}}}{T_{\text{ext}}^{(2)}} \right)^{1/2}$ effectivement utilisé par les auteurs de [17].

Etablissons une comparaison rapide de ces résultats avec les prévisions de l'approche semi-classique traditionnelle formulée en termes habituels d'équation de Fokker-Planck. Pour ceci, résumons la démarche des auteurs de [17], qui diffère essentiellement de la nôtre dans son esprit. Le point de départ est toujours constitué par les équations quantiques en représentation de Wigner. La première étape consiste en l'élimination adiabatique de l'état atomique interne, à des temps $t \simeq T_{\text{ext}} \gg T_{\text{int}}$, ce qui permet formellement de définir un opérateur d'évolution \mathcal{L} pour la seule distribution en position-impulsion :

$$\partial_t f + \mathcal{L}[f] = 0 \quad (\text{II2c - 34})$$

L'expression de \mathcal{L} étant très complexe, les auteurs de [17] effectuent, dans une seconde étape, un développement des coefficients de \mathcal{L} jusqu'à l'ordre 2 en puissances des deux petits paramètres :

$$\varepsilon_1 = \frac{\hbar k}{\Delta p} \ll 1 \quad (\text{II2c - 35a})$$

$$\varepsilon_2 = k \langle v^2 \rangle^{1/2} T_{\text{int}} \ll 1 \quad (\text{II2c - 35b})$$

Dans (II2c - 35b), $T_{\text{int}} = \frac{1}{\Gamma}$ car les auteurs avaient à l'esprit, à l'époque, le refroidissement Doppler. Remarquons que les deux nombres ε_1 et ε_2 sont en fait proportionnels à notre paramètre ε , si l'on admet le comportement asymptotique (II2c - 2). Avec nos notations, ce développement de \mathcal{L} prend la forme d'une équation de Fokker-Planck :

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 + \dots \quad (\text{II2c - 36})$$

Les auteurs développent donc un opérateur, \mathcal{L} , en puissances de ε , alors que nous avons développé une distribution, la distribution stationnaire, en puissances de ε . Il est alors possible, pour établir l'équivalence entre les deux points de vue, de résoudre l'équation de Fokker-Planck de [17] dans le cas stationnaire en traitant perturbativement l'action de \mathcal{D}_2 devant celle de \mathcal{D}_1 : c'est la limite dite des frictions faibles, dont la solution [30,31]

coïncide avec (II2c - 27a). Il est donc important de remarquer que, par développement de l'opérateur \mathcal{L} au second ordre en ε , on ne peut obtenir mieux que la distribution en position-vitesse à l'ordre 0 en ε , soit $\bar{f}^{(0)}(z, u)$. Cette propriété est générale : il est nécessaire de développer les équations quantiques à l'ordre $n + 2$ en ε si l'on veut calculer la distribution stationnaire à l'ordre n en ε .

(iv) Insuffisances de l'approche semi-classique traditionnelle

Pour finir, indiquons les limites de l'approche semi-classique traditionnelle, dans la formulation de [17] ou dans la présente formulation. Pour rendre la discussion plus claire, nous allons nous appuyer sur une expression approchée de l'énergie cinétique moyenne dans l'état stationnaire de la configuration Sisyphe du I§1. Par résolution des équations semi-classiques dans les situations où la modulation spatiale de la distribution est très faible, nous obtenons en effet dans l'appendice A_{IV}, lorsque $|\delta| \gg \Gamma$:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2M} \simeq \frac{1}{4} \frac{U_0^2}{U_0 - 6\beta E_R} \quad (\text{II2c - 37})$$

β est un pur coefficient numérique, dont nous donnons la valeur après (I1c - 11). Il est facile de voir que (II2c - 37) contient les caractéristiques du refroidissement par effet Sisyphe discutées dans le I§1. On constate en effet l'existence d'un seuil sur U_0 pour le refroidissement : il faut que $U_0 > 6\beta E_R$ pour que l'énergie cinétique moyenne soit finie dans l'état stationnaire. On obtient aussi une valeur approchée de l'optimum de $\langle p^2 \rangle$, soit $6\beta(\hbar k)^2$, atteinte pour une profondeur de puits $U_0 = 12\beta E_R$. Ces valeurs sont à comparer aux résultats plus exacts du traitement quantique, donnés en (I1e - 1).

Voyons si l'approche semi-classique traditionnelle peut rendre compte de la forme (II2c - 37). Rappelons brièvement les calculs effectués. Nous avons développé les équations quantiques à l'ordre 2 en ε , ce qui donne seulement la distribution stationnaire à l'ordre 0, $\bar{f}^{(0)}(z, u)$, et ce qui ne suffit pas pour déterminer l'ordre suivant $\bar{f}^{(1)}(z, u)$. Nous obtenons donc uniquement l'énergie cinétique moyenne à la limite $M \rightarrow +\infty$, à δ et Ω fixés donc à U_0 fixé dans (II2c - 37). Pour visualiser la convergence de $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, nous avons représenté sur la fig. II-6 la variation de $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$ correspondant à (II2c - 37) en fonction de U_0 , pour des valeurs croissantes de la masse en unité de $\frac{\hbar k^2}{\Gamma}$. Le cas limite $M = \infty$ correspond aux prédictions de l'approche semi-classique traditionnelle menée à l'ordre 2 :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{\langle p^2 \rangle}{2M} = \frac{1}{4} U_0 \quad (\text{II2c - 38})$$

Physiquement, il s'agit cependant de déterminer, à masse fixée, l'optimum du refroidissement. Nous voyons sur la fig. II-6 que (II2c - 38) donne simplement la direction asymptotique des courbes $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$ en fonction de U_0 , pour des profondeurs de puits élevées, ce qui confirme notre affirmation de (IId - 13), mais ne dit rien sur la position et la valeur du minimum de l'énergie cinétique.

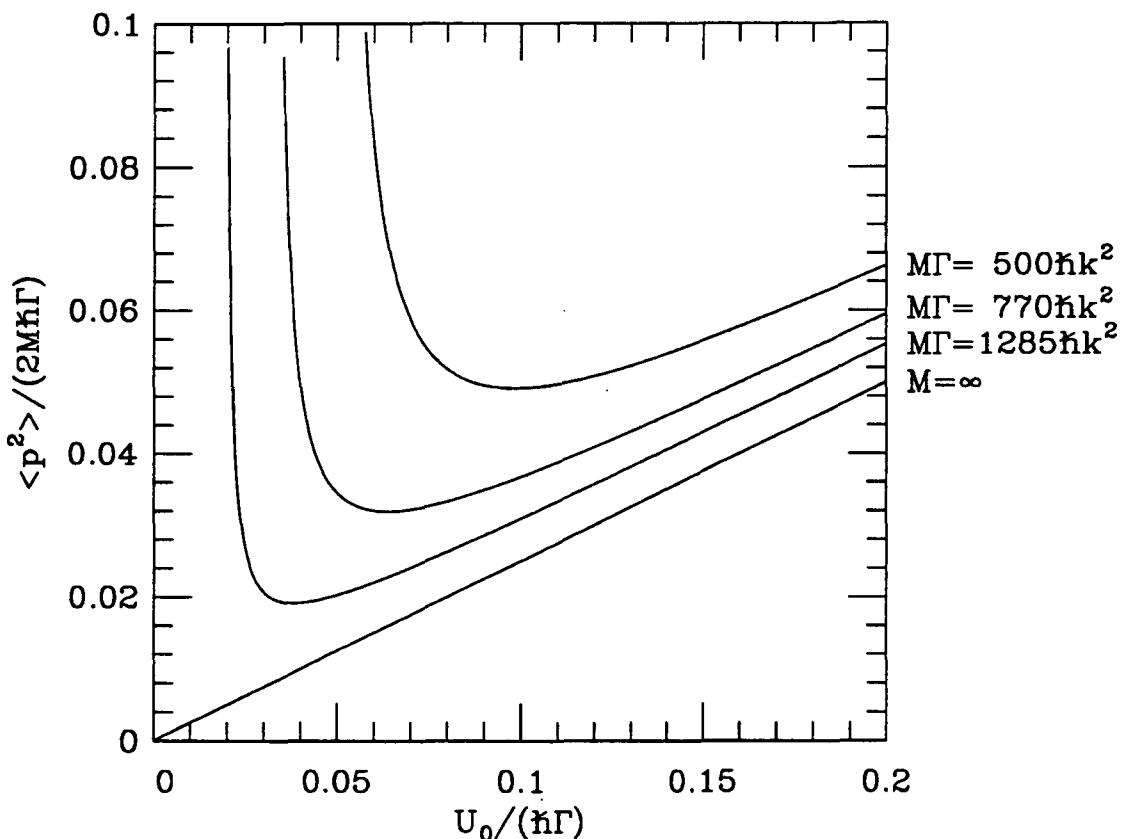


Fig. II-6 : Dans la configuration Sisyphe, dépendance de l'énergie cinétique moyenne avec la profondeur de puits U_0 , d'après la loi approchée (II2c - 37). Les courbes sont données pour différentes valeurs du paramètre de masse $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2}$.

Comme (II2c - 38) ne conduit pas à l'optimum du refroidissement à masse fixée, on peut être tenté d'améliorer le résultat en poussant le développement de l'approche

semi-classique à des ordres plus grands que 2 en puissances de ε . La relation (II2c - 25a) donne la dépendance, en Z de $\bar{f}^{(1)}(Z, E)$, à une “constante” d’intégration près $C(E)$, qui dépend en fait de l’énergie E . Le développement des équations quantiques à l’ordre 3 en ε permet en théorie d’accéder à la dépendance en E de $C(E)$ donc de déterminer complètement $\bar{f}^{(1)}(z, u)$. On constate malheureusement que la connaissance de $\bar{f}^{(1)}(z, u)$ n’apporte aucune correction à l’énergie cinétique moyenne, car $\bar{f}^{(1)}(z, u)$ est une fonction impaire de la vitesse (cf. la relation de parité (II2c - 17)). Pour obtenir la première correction à (II2c - 38), il est nécessaire d’aller à l’ordre 4 en ε ! Le résultat correspondant se déduit aisément du développement de (II2c - 37) à l’ordre 2 en ε donc à l’ordre 1 en $\frac{E_R}{U_0}$:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2M} = \frac{1}{4}U_0 + \frac{3}{2}\beta E_R + O(\varepsilon^4) \quad (\text{II2c - 39})$$

L’effet du terme en E_R est une simple translation de l’énergie cinétique, à masse fixée. (II2c - 39) donne maintenant l’asymptote de $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$ en fonction de U_0 , à masse fixée, pour des puits U_0 très profonds, mais ne donne pas le minimum cherché. Allons donc, ce qui est en pratique peu réaliste, jusqu’à l’ordre 6 en ε dans le développement des équations quantiques. On obtient alors l’expression des $\bar{f}^{(n)}(z, u)$, pour $n = 1$ à 4, et la valeur de $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$ jusqu’à l’ordre 4 en ε , qui, déduite de (II2c - 37), s’écrit :

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2M} = \frac{U_0}{4} + \frac{3}{2}\beta E_R + 9\beta^2 \frac{E_R^2}{U_0} + O(\varepsilon^6) \quad (\text{II2c - 40})$$

L’expression (II2c - 40) prédit une valeur acceptable de l’optimum de $\langle p^2 \rangle$ à M fixée, soit $\frac{9}{2}\beta(\hbar k)^2$, mais place cet optimum à une profondeur de puits $6\beta E_R$, pour laquelle $\langle p^2 \rangle$ diverge en fait, d’après (II2c - 37) ! On constate que la divergence de $\langle p^2 \rangle$ dans (II2c - 40) se produit à la mauvaise position $U_0 = 0$. Nous résumons les résultats (II2c - 38) (calculs à l’ordre 2 en ε), (II2c - 39) (calculs à l’ordre 4 en ε) et (II2c - 40) (calculs à l’ordre 6 en ε) sur la fig. II-7, tracée pour la masse du césum ($\frac{M\Gamma}{\hbar k^2} = 1285$) ; nous avons représenté également la loi prise comme modèle, (II2c - 37). En poussant le développement en ε à un ordre arbitraire mais fini, on améliore certes l’estimation de l’optimum mais la divergence de l’expression de $\langle p^2 \rangle$ se produit toujours en $U_0 = 0$. La raison en est fondamentalement que le développement de (II2c - 37) en puissance de ε^2 ne converge uniformément sur aucun intervalle en U_0 contenant le seuil $6\beta E_R$. L’approche semi-classique traditionnelle n’est donc pas pertinente dans l’étude des nouveaux mécanismes à gradient de polarisation,

lorsqu'on cherche l'optimum ou le seuil du refroidissement correspondant.

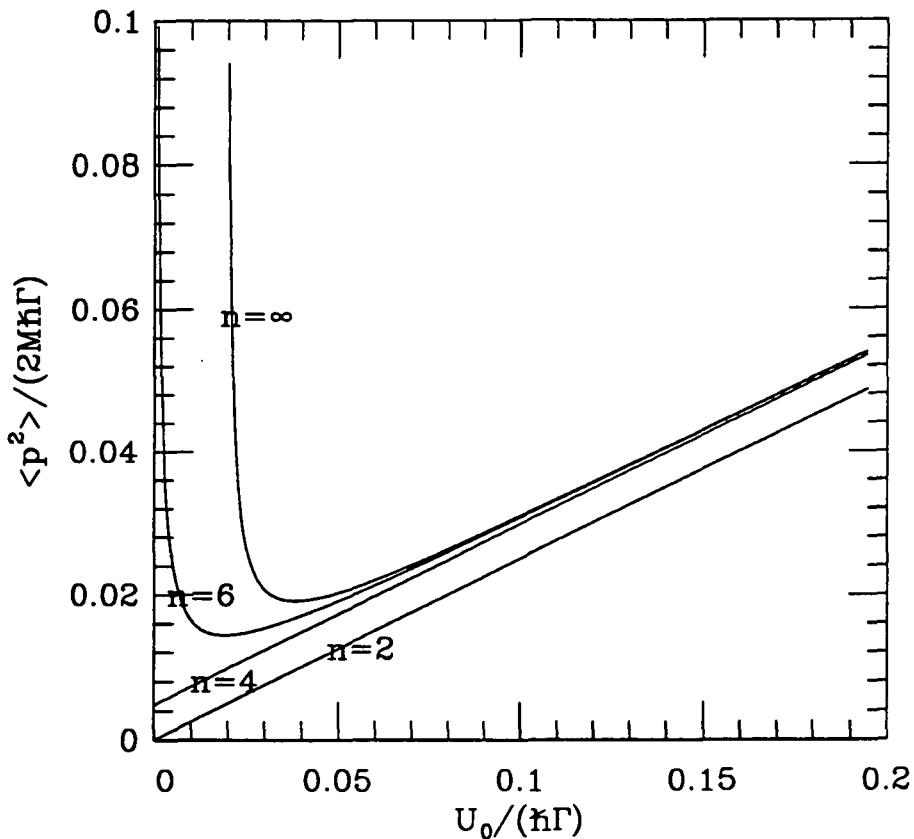


Fig. II-7 : Pour la masse du césium ($M\Gamma = 1285\hbar k^2$), dépendance de l'énergie cinétique moyenne en fonction de la profondeur de puits U_0 prédite par l'approche semi-classique traditionnelle menée à l'ordre $n = 2, 4$ et 6 en ε , si l'on prend comme loi modèle (II2c - 37) (considérée comme $n = \infty$).

Il est en fait nécessaire, pour décrire de façon satisfaisante les mélasses optiques à nouveaux mécanismes, d'effectuer une resommation infinie de la série de perturbation en ε . Nous ne désirons pas donner ici de façon systématique la procédure de resommation, celle-ci conduisant dans le cas général à une expression extrêmement complexe, non locale en z , de l'opérateur \mathcal{L} de (II2c - 34), qui rend préférable la résolution directe des équations entièrement quantiques. Nous allons plutôt étudier de façon spécifique les deux configurations laser déjà introduites dans le chapitre I.

Dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ (voir le chapitre III), l'absence de dépendance spatiale explicite dans la base des familles permet d'effectuer, sans trop de douleur, une resom-

mation partielle, satisfaisante, de la série en ε . Néanmoins, l'opérateur \mathcal{L} obtenu ne prend la forme simple d'une équation de Fokker-Planck avec toute la dépendance en vitesse de la force et du coefficient de diffusion, que dans le cas des transitions de moment cinétique assez faible ($j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$). Il est nécessaire de faire mieux pour la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ par exemple.

Quant à la configuration dite Sisyphe quantique (voir le chapitre IV), une telle tentative de resommation s'est révélée peu praticable dans la recherche de l'optimum absolu du refroidissement. C'est que cet optimum est atteint, comme nous l'avons dit en I§1, dans la limite $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$, ce qui correspond formellement (cf. (I1d - 6a)) à la limite $\varepsilon \rightarrow +\infty$. Il est plus fructueux, dans ce cas, d'effectuer un développement des équations semi-classiques ou même des équations quantiques en puissances de $\frac{1}{\varepsilon}$!

Appendice A_{II}

Transformation de Mollow et passage dans le référentiel tournant

Nous donnons ici rapidement les deux transformations unitaires appliquées sur le système atome + rayonnement au §1c.

La première, dite de Mollow [44], est intéressante particulièrement lorsque chaque mode du champ se trouve initialement dans un état cohérent. Prenons ainsi comme vecteur d'état initial pour le champ le ket $|\psi\rangle_R(0)$ associé au champ classique de refroidissement (II1c - 1). A chaque onde classique j est associé le mode du rayonnement quantique μ_j , et l'état cohérent $|\alpha_j\rangle_{\mu_j}$. Les autres modes sont pris dans l'état vide au départ. On choisit les nombres complexes α_j de façon que la moyenne de l'opérateur champ électrique libre en \mathbf{r} , $\langle \tilde{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}, t) \rangle$ coïncide avec $\mathcal{E}_{\text{class}}(\mathbf{r}, t)$:

$$|\psi\rangle_R(0) = \left(\bigotimes_{j=1}^{\mathcal{N}_L} |\alpha_j\rangle_{\mu_j} \right) \bigotimes_{\mu \notin \{\mu_j\}} |0\rangle_\mu \quad (\text{A}_{\text{II}} - 1\text{a})$$

$$a_{\mu_j} |\alpha_j\rangle_{\mu_j} = \alpha_j |\alpha_j\rangle_{\mu_j} \quad (\text{A}_{\text{II}} - 1\text{b})$$

$$\alpha_j \mathcal{E}_{\mu_j} = \mathcal{E}_j \quad (\text{A}_{\text{II}} - 1\text{c})$$

Si l'on quantifie dans le cube de côté L , l'indépendance de l'amplitude \mathcal{E}_j vis à vis de L rend α_j proportionnel à $\sqrt{L^3}$, ce qui correspond à une densité finie n_j de photons du mode μ_j dans le volume de quantification :

$$n_j = \frac{\langle a_{\mu_j}^\dagger a_{\mu_j} \rangle}{L^3} = \frac{|\alpha_j|^2}{L^3} = |\mathcal{E}_j|^2 \frac{2\epsilon_0}{\hbar\omega_j} \quad (\text{A}_{\text{II}} - 2)$$

Il est très commode, comme nous l'avons dit, d'effectuer sur le champ une transformation unitaire dépendant du temps, dite de Mollow [44,48] et définie par :

$$S_{\text{Mollow}}(t) = e^{-\sum_j \left(\alpha_j e^{-i\omega_j t} a_{\mu_j}^\dagger - \alpha_j^* e^{i\omega_j t} a_{\mu_j} \right)} \quad (\text{A}_{\text{II}} - 3)$$

Ceci revient à translater les opérateurs de champ, à chaque instant t , de la valeur moyenne qu'ils ont dans l'état $|\psi\rangle_R$ de (A_{II} - 1a) après évolution libre pendant t ; en particulier, le champ électrique se transforme ainsi :

$$S_{\text{Mollow}}(t)\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r})S_{\text{Mollow}}(t)^{-1} = \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_{\text{class}}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A}_{\text{II}} - 4)$$

Dans cette représentation, que nous adoptons dans tout ce travail, le hamiltonien du système (II1b - 1b) dépend explicitement du temps par le terme inertiel $V_{AL}(t)$:

$$\begin{aligned} \bar{H}(t) &= S_{\text{Mollow}}(t)HS_{\text{Mollow}}(t)^{-1} + i\hbar \left(\frac{d}{dt}S_{\text{Mollow}}(t) \right) S_{\text{Mollow}}(t)^{-1} \\ &= H + V_{AL}(t) \end{aligned} \quad (\text{A}_{\text{II}} - 5\text{a})$$

$$V_{AL}(t) = -\mathbf{D}^{(+)} \cdot \mathcal{E}_{\text{class}}^{(+)}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{D}^{(-)} \cdot \mathcal{E}_{\text{class}}^{(-)}(\mathbf{R}, t) \quad (\text{A}_{\text{II}} - 5\text{b})$$

Ceci fait apparaître tout l'intérêt de cette transformation : dans $\bar{H}(t)$, le couplage entre l'atome et le champ laser moyen est décrit par le potentiel purement atomique $V_{AL}(t)$, alors que le couplage entre l'atome et les fluctuations du champ est pris en compte par H . Comme l'état initial du champ dans la représentation de Mollow est le vide du rayonnement :

$$S_{\text{Mollow}}(0)|\psi\rangle_R = |0\rangle_R \quad (\text{A}_{\text{II}} - 6)$$

nous nous rapprochons de la situation du §1b.

Nous allons maintenant nous restreindre au cas où toutes les ondes laser ont la même pulsation ω_L , ce qui est effectivement vérifié dans les mélasses optiques habituelles et permet d'exploiter une seconde transformation unitaire. Cette hypothèse n'est pas nécessaire à l'obtention de l'équation pilote que nous cherchons, mais nous aurions tort de nous en priver puisque toutes les situations que nous allons étudier y obéissent. Introduisons d'abord la notion de nombre d'excitations élémentaires du système, observable représentée quantiquement par l'opérateur :

$$N_{\text{exc}} = P_e + \sum_{\mu} a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu} \quad (\text{A}_{\text{II}} - 7)$$

Cette notion correspond simplement au nombre de photons dans le champ, augmenté d'une unité si l'atome est dans l'état excité. On vérifie alors que, grâce à l'approximation dite du référentiel tournant (cf. §1b), le nombre d'excitations est une quantité conservée

par l'évolution sous le hamiltonien H . Par contre, en représentation de Mollow, la contribution du champ à N_{exc} est celle des seuls photons de fluorescence, et N_{exc} n'est plus une constante du mouvement. On constate néanmoins que les termes augmentant N_{exc} d'une unité (absorption d'un photon laser par l'atome) sont affectés du facteur de phase $e^{-i\omega_L t}$, alors que les termes diminuant N_{exc} d'une unité (émission stimulée par l'atome d'un photon dans un mode laser) sont affectés d'un facteur de phase $e^{i\omega_L t}$. Cette remarque donne l'idée de la transformation unitaire habituelle suivante, qui constitue le passage dans le référentiel tournant à la pulsation ω_L [48] :

$$S_{RT}(t) = e^{iN_{\text{exc}}\omega_L t} \quad (\text{A}_{\text{II}} - 8\text{a})$$

$$(\bar{H})_{RT} = H - \hbar\omega_L N_{\text{exc}} + V_{AL}(0) \quad (\text{A}_{\text{II}} - 8\text{b})$$

Le terme inertiel associé à la dépendance temporelle de $S_{RT}(t)$ a pour effet en particulier d'amener la "pulsation propre" de l'atome à $\omega_0 - \omega_L$.

Appendice B_{II}

Régimes forcés à la vitesse v_0

Nous avons fait intervenir au §2, dans le calcul de la force et du coefficient de diffusion pour un atome de vitesse v_0 imposée, deux matrices internes $W_0(z, t)$ et $W_1(z, t)$, dont les équations d'évolution sont de la forme générique (II2b - 14) :

$$(\partial_t + v_0 \partial_z) W_0(z, t) = M_0(z) [W_0(z, t)] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 1\text{a})$$

$$(\partial_t + v_0 \partial_z) W_1(z, t) = M_0(z) [W_1(z, t)] + S_1(z, t) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 1\text{b})$$

$$S_1(z, t) = -M_1 [W_0(z, t)] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 1\text{c})$$

Le terme source est nul dans (B_{II} - 1a), alors qu'il dépend linéairement de $W_0(z, t)$ dans (B_{II} - 1b). Nous souhaitons rappeler les propriétés utiles des solutions de (B_{II} - 1) aux temps longs, dans le cas où l'opérateur de Bloch $M_0(z)$ et l'opérateur force $-M_1(z)$ sont de période la longueur d'onde optique λ . Notre seule hypothèse cruciale concerne l'unicité du régime forcé défini par (II2b - 18), hypothèse qui paraît raisonnable dans les situations que nous avons étudiées (transitions atomiques $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$).

(i) Le cas élémentaire $v_0 = 0$

L'examen de ce cas particulier, qui permet de raisonner à position z fixée, donne une bonne idée du traitement général à vitesse non nulle. Il est d'abord essentiel de remarquer que l'opérateur de Bloch $M_0(z)$ envoie toutes les matrices densité sur l'hyperplan \mathcal{H} des matrices de trace nulle (équation (II2a - 8)). Cette propriété assure que la trace de $W_0(z, t)$ ne dépend pas du temps dans (B_{II} - 1a). On la note $\varphi(z)$. Elle prouve également que l'opérateur de Bloch n'est pas inversible, donc que (B_{II} - 1a) admet, à z fixé, un état stationnaire en temps. Nous voulons que cet état stationnaire, noté $W_0^f(z; 0)$, soit unique, de trace 1 :

$$M_0(z) \left[W_0^f(z; 0) \right] = 0 \quad (\text{B}_{\text{II}} - 2\text{a})$$

$$\text{Tr}_{\text{int}} \left(W_0^f(z; 0) \right) = 1 \quad (\text{B}_{\text{II}} - 2\text{b})$$

et que toute solution de (B_{II} - 1a) à $v_0 = 0$ converge aux temps longs vers cet état stationnaire, à un facteur près :

$$W_0(z, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \varphi(z) W_0^f(z; 0) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 3)$$

Pour obtenir ces propriétés, nous allons faire l'hypothèse suivante sur la restriction de $M_0(z)$ à l'hyperplan stable \mathcal{H} , restriction notée $\tilde{M}_0(z)$:

$$\text{toutes les valeurs propres de } \tilde{M}_0(z) \text{ sont de partie réelle } < 0 \quad (\text{B}_{\text{II}} - 4)$$

Ces valeurs propres ne sont pas nulles, ce qui assure l'unicité de $W_0^f(z; 0)$. Elles sont de partie réelle négative strictement, ce qui nous donne la propriété (B_{II} – 3). Notons bien que, dans les situations que nous avons étudiées (transitions atomiques $j \rightarrow j + 1$), l'hypothèse (B_{II} – 4) est parfaitement vérifiée.

Pour obtenir l'évolution temporelle de $W_1(z, t)$, il est agréable de décomposer $W_1(z, t)$ selon $W_0^f(z; 0)$ et \mathcal{H} :

$$W_1(z, t) = \tilde{W}_1(z, t) + \text{Tr}_{\text{int}}(W_1(z, t)) W_0^f(z; 0) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 5)$$

On définit de même cette décomposition pour $S_1(z, t)$, et la restriction de $M_1(z)$ à \mathcal{H} qui, remarquons-le, contrairement à $\tilde{M}_0(z)$, dépend explicitement du choix de $W_0^f(z; 0)$ pour compléter \mathcal{H} en une base, puisque $M_1(z)$ ne laisse en général pas stable l'hyperplan :

$$\tilde{M}_1(z)[W] = M_1(z)[W] - \text{Tr}_{\text{int}}(M_1(z)[W]) W_0^f(z; 0) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 6)$$

Il reste alors à projeter (B_{II} – 1b) de la même façon, en utilisant (B_{II} – 2a) :

$$\partial_t \text{Tr}_{\text{int}}(W_1(z, t)) = \text{Tr}_{\text{int}}(S_1(z, t)) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 7\text{a})$$

$$\partial_t \tilde{W}_1(z, t) = \tilde{M}_0(z) [\tilde{W}_1(z, t)] + \tilde{S}_1(z, t) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 7\text{b})$$

Le comportement aux temps longs de (B_{II} – 7a) se déduit de celui de $S_1(z, t)$ donc de (B_{II} – 3) :

$$\partial_t \text{Tr}_{\text{int}}(W_1(z, t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\text{Tr}_{\text{int}}(M_1(z) [\varphi(z) W_0^f(z; 0)]) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 8)$$

Si cette limite n'est pas nulle, $\text{Tr}_{\text{int}}(W_1(z, t))$ diverge linéairement en t aux temps longs. Par contre, $\tilde{W}_1(z, t)$ admet un état stationnaire, noté $W_1^f(z; 0)$, unique, puisque $\tilde{M}_0(z)$ est un opérateur inversible, d'après l'hypothèse (B_{II} – 4) :

$$\tilde{W}_1(z, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \varphi(z) W_1^f(z; 0) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 9\text{a})$$

$$W_1^f(z; 0) = \tilde{M}_0(z)^{-1} \tilde{M}_1(z) [W_0^f(z; 0)] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 9\text{b})$$

utile pour évaluer le coefficient de diffusion à vitesse nulle au point z . Nous voyons ainsi tout le mérite de la transformation (B_{II} – 5), qui élimine la partie de $W_1(z, t)$ susceptible de diverger aux temps longs. Nous supposons dans toute la suite que la vitesse atomique v_0 n'est pas nulle, et nous la choisissons positive par commodité.

(ii) Obtention d'un système différentiel par élimination du vol libre

Il est possible de ramener les équations aux dérivées partielles que constituent (B_{II} – 1a) et (B_{II} – 1b) à des systèmes différentiels ordinaires, en considérant successivement les trajectoires $t \rightarrow z(t) = z_0 + v_0 t$ d'origine z_0 . A z_0 fixé, définissons en effet :

$$\bar{W}_0(z) = W_0 \left(z, t = \frac{z - z_0}{v_0} \right) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 10\text{a})$$

$$\bar{W}_1(z) = W_1 \left(z, t = \frac{z - z_0}{v_0} \right) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 10\text{b})$$

$$\bar{S}_1(z) = S_1 \left(z, t = \frac{z - z_0}{v_0} \right) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 10\text{c})$$

Ces matrices internes, qui "suivent" les atomes dans leur vol libre à la vitesse v_0 , obéissent aux relations suivantes :

$$v_0 \frac{d}{dz} \bar{W}_0(z) = M_0(z) [\bar{W}_0(z)] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 11\text{a})$$

$$v_0 \frac{d}{dz} \bar{W}_1(z) = M_0(z) [\bar{W}_1(z)] + \bar{S}_1(z) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 11\text{b})$$

$$\bar{S}_1(z) = -M_1(z) [\bar{W}_0(z)] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 11\text{c})$$

Comme z_0 n'apparaît pas explicitement dans ces relations, z_0 intervient donc seulement dans l'expression des conditions initiales $\bar{W}(z_0) = W(z_0, 0)$. L'objectif de ce qui suit est

l'étude, à z fixé, des comportements de $\bar{W}_0(z)$ et $\bar{W}_1(z)$ aux temps longs c'est-à-dire pour $z - z_0 \rightarrow +\infty$.

(iii) Régime forcé pour $\bar{W}_0(z)$

Nous sommes confronté à (B_{II} – 11a), équation de Bloch ordinaire pour un atome de vitesse v_0 . Nous savons que cette équation conserve la trace, qui dépend donc seulement de l'état initial, donc de z_0 :

$$Tr_{\text{int}}(\bar{W}_0(z)) = \text{cte} = \varphi(z_0) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 12)$$

et qu'il est pertinent d'introduire l'opérateur d'évolution depuis un point z_1 arbitraire jusqu'à z . Cet opérateur, noté $U(z \leftarrow z_1)$, à action dans l'espace des matrices W , est défini par :

$$v_0 \frac{d}{dz} U(z \leftarrow z_1) = M_0(z)U(z \leftarrow z_1) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 13a)$$

$$U(z_1 \leftarrow z_1) = I \quad (\text{B}_{\text{II}} - 13b)$$

Dans (B_{II} – 13b), I désigne l'opérateur identité. Le nom d'opérateur d'évolution se justifie par le résultat suivant :

$$\bar{W}_0(z) = U(z \leftarrow z_1)[\bar{W}_0(z_1)] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 14)$$

où $\bar{W}_0(z)$ est une solution arbitraire de (B_{II} – 11a). L'opérateur d'évolution vérifie en conséquent la propriété essentielle, dite de composition, qui contient son invérabilité :

$$U(z_3 \leftarrow z_2)U(z_2 \leftarrow z_1) = U(z_3 \leftarrow z_1) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 15)$$

Pour réduire le problème, nous allons maintenant utiliser explicitement la périodicité des opérateurs $M_0(z)$ et $M_1(z)$ de pas λ , et nous concentrer sur l'opérateur $U(\lambda \leftarrow 0)$. La transposition à cet opérateur de l'invariance de la trace (B_{II} – 12) montre que $U(\lambda \leftarrow 0)$ laisse stable le sous-espace \mathcal{H} des matrices W de trace nulle, et nous allons faire l'hypothèse suivante sur $\tilde{U}(\lambda \leftarrow 0)$, restriction de $U(\lambda \leftarrow 0)$ à \mathcal{H} :

$$\text{toutes les valeurs propres } \mu_i \text{ de } \tilde{U}(\lambda \leftarrow 0) \text{ sont de module } |\mu_i| < 1 \quad (\text{B}_{\text{II}} - 16)$$

Ceci est l'équivalent à $v_0 \neq 0$ de l'assertion (B_{II} – 4). Le fait que $|\mu_i| < 1$ traduit bien le rôle attendu de la partie dissipative des équations de Bloch, qui doit imposer l'existence d'un régime forcé lorsque $z - z_0 \rightarrow \infty$. On constate immédiatement que ce régime forcé, s'il existe, est nécessairement de trace non nulle. Toute solution de (B_{II} – 11a) de trace nulle tend en effet vers 0 aux grands z , en vertu de (B_{II} – 16) :

$$\tilde{U}(n\lambda \leftarrow 0) = (\tilde{U}(\lambda \leftarrow 0))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{B}_{\text{II}} - 17)$$

Ce régime forcé, que nous notons $W_0^f(z; v_0)$, est donc le vecteur propre, choisi de trace interne unité, associé à l'unique valeur propre de $U(\lambda \leftarrow 0)$ de module 1. Il reste à prouver que cette valeur propre vaut 1, ce qui désigne le régime forcé comme l'unique solution périodique de (B_{II} – 11a) de trace 1 :

$$U(\lambda \leftarrow 0) [W_0^f(0; 0)] = W_0^f(0; 0) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 18a)$$

$$Tr_{\text{int}} (W_0^f(0; 0)) = 1 \quad (\text{B}_{\text{II}} - 18b)$$

Pour ceci, remarquons, en prenant la trace interne de (B_{II} – 13a), que la forme linéaire sur l'espace des W $Tr_{\text{int}}\{(U(z \leftarrow 0) - I)[\cdot]\}$ est constante et vaut 0 d'après (B_{II} – 13b), ce qui montre que $U(z \leftarrow 0) - I$ est à valeurs dans \mathcal{H} pour tout z . $U(\lambda \leftarrow 0) - I$ n'est pas inversible, d'où l'existence de $W_0^f(0)$ défini par (B_{II} – 18). Par retour au problème initial (B_{II} – 1a), nous obtenons le régime forcé pour $W_0(z, t)$:

$$W_0(z, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} \varphi(z - v_0 t) W_0^f(z; v_0) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 19)$$

(iv) Régime forcé pour $\bar{W}_1(z)$

Nous allons exprimer formellement la solution de (B_{II} – 11b) à l'aide de l'opérateur d'évolution, en effectuant au préalable la décomposition suivante, analogue à (B_{II} – 5) :

$$\bar{W}_1(z) = \tilde{\bar{W}}_1(z) + (Tr_{\text{int}}(\bar{W}_1(z))) W_0^f(z; v_0) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 20)$$

$\tilde{\bar{W}}_1(z)$, de trace nulle, se trouve donc dans \mathcal{H} . Par projection de (B_{II} – 11b) selon (B_{II} – 20) sur \mathcal{H} et sur $W_0^f(z; v_0)$, nous réduisons le système à deux équations indépendantes :

$$v_0 \frac{d}{dz} Tr_{\text{int}} (\bar{W}_1(z)) = Tr_{\text{int}} (\bar{S}_1(z)) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 21\text{a})$$

$$v_0 \frac{d}{dz} \tilde{\bar{W}}_1(z) = \tilde{M}_0(z) [\tilde{\bar{W}}_1(z)] + \tilde{\bar{S}}_1(z) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 21\text{b})$$

La première relation, purement scalaire, est résolue par intégration directe sur z . Elle concerne la partie de $\bar{W}_1(z)$ susceptible de diverger lorsque $z - z_0 \rightarrow +\infty$. Pour obtenir la solution de (B_{II} - 21b) avec la condition initiale en z_0 , nous la cherchons sous la forme :

$$\tilde{\bar{W}}_1(z) = \tilde{U}(z \leftarrow z_0) [\tilde{V}(z)] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 22)$$

Cette méthode de variation de la constante permet de déterminer $\tilde{V}(z)$ par simple quadrature, d'où l'expression suivante de la solution :

$$\tilde{\bar{W}}_1(z) = \tilde{U}(z \leftarrow z_0) \tilde{W}_1(z_0, 0) + \int_{z_0}^z \frac{dz'}{v_0} \tilde{U}(z \leftarrow z') [\tilde{\bar{S}}_1(z')] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 23)$$

Le régime forcé de (B_{II} - 21b) est ce vers quoi tend $\tilde{\bar{W}}_1(z)$ lorsque $z_0 \rightarrow -\infty$ à $\tilde{W}_1(z_0, 0)$ fixé. Définissons un régime forcé de référence en remplaçant, dans $\bar{S}_1(z)$, la matrice $\bar{W}_0(z)$ par $W_0^f(z; v_0)$:

$$W_1^f(z; v_0) = \int_{-\infty}^z \frac{dz'}{v_0} U(z \leftarrow z') [\tilde{S}_1^f(z'; v_0)] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 24\text{a})$$

$$\tilde{S}_1^f(z; v_0) = -\tilde{M}_1(z) [W_0^f(z; v_0)] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 24\text{b})$$

Le régime forcé pour $\tilde{W}_1(z, t)$ est alors, compte tenu des conditions initiales en z_0 donc de (B_{II} - 19) :

$$\tilde{W}_1(z, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} \varphi(z - v_0 t) W_1^f(z; v_0) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 25)$$

Ceci conduit à la forme annoncée, à la fin du §2b, de la partie $D_1(z; v_0)$ du coefficient de diffusion, forme proche de l'intégrale de la fonction d'autocorrélation de la force en point de vue de Heisenberg :

$$D_1(z(t); v_0) = \int_{-\infty}^t d\tau \text{Tr}_{\text{int}} \left\{ M_1(z(t)) U(z(t) \leftarrow z(\tau)) \tilde{M}_1(z(\tau)) \left[W_0^f(z(\tau); v_0) \right] \right\} \quad (\text{B}_{\text{II}} - 26)$$

avec $z(t) = z_0 + v_0 t$.

Pourachever cet appendice, montrons que $W_1^f(z; v_0)$ est obtenue également comme l'unique solution périodique de (B_{II} – 21b) écrite pour le terme source supposé périodique $\tilde{S}_1^f(z; v_0)$. Pour cela, calculons d'abord cette solution périodique $W_1^p(z; v_0)$ à l'aide de (B_{II} – 23) :

$$W_1^p(\lambda; v_0) = W_1^p(0; v_0) = \tilde{U}(\lambda \leftarrow 0) W_1^p(0; v_0) + \int_0^\lambda \frac{dz}{v_0} \tilde{U}(\lambda \leftarrow z) \left[\tilde{S}_1^f(z; v_0) \right] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 27)$$

La propriété (B_{II} – 16) assure l'existence de $W_1^p(0; v_0)$ donc de $W_1^p(z; v_0)$:

$$W_1^p(0; v_0) = \left(\tilde{I} - \tilde{U}(\lambda \leftarrow 0) \right)^{-1} \int_0^\lambda \frac{dz}{v_0} \tilde{U}(\lambda \leftarrow z) \left[\tilde{S}_1^f(z; v_0) \right] \quad (\text{B}_{\text{II}} - 28)$$

Il suffit alors de développer l'inverse de $\tilde{I} - \tilde{U}(\lambda \leftarrow 0)$ en puissances de $\tilde{U}(\lambda \leftarrow 0)$ et d'utiliser la relation :

$$\tilde{U}(\lambda \leftarrow 0)^n \tilde{U}(\lambda \leftarrow z) = \tilde{U}(0 \leftarrow z - (n+1)\lambda) \quad (\text{B}_{\text{II}} - 29)$$

ainsi que la périodicité de $\tilde{S}_1^f(z; v_0)$ de pas λ , pour faire apparaître le second membre de (B_{II} – 24a) écrit en $z = 0$.

CHAPITRE III

**REFROIDISSEMENT DANS LA CONFIGURATION $\sigma_+ - \sigma_-$
POUR DES TRANSITIONS ATOMIQUES $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$**

INTRODUCTION DU CHAPITRE III

Nous avons déjà signalé, dans la partie qualitative I§2, ce qui constitue la particularité de la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$: la redistribution cohérente de photons entre les deux ondes laser est limitée. Cette propriété, que nous exploitons de façon quantitative dans la présente partie III, a les conséquences importantes suivantes.

Considérons d'abord les équations fondamentales associées au traitement complètement quantique du refroidissement. Il est possible d'exploiter le caractère limité de la redistribution de photons par une transformation unitaire, qui introduit la base dite des familles, et permet d'éliminer la dépendance en position de la matrice densité stationnaire (§1). Cette réduction considérable du problème rend accessible la résolution purement numérique des équations quantiques les plus générales pour la transition atomique $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$. Cette résolution permet de faire la part entre le refroidissement Doppler et les nouveaux mécanismes. Elle prouve que l'optimum du refroidissement à gradients de polarisation se produit dans la limite des grands désaccords ($|\delta| \gg \Gamma$), pour une valeur bien déterminée du déplacement lumineux $\hbar\delta s$ (§2).

Envisageons ensuite le traitement semi-classique du refroidissement. Le caractère limité de la redistribution de photons entraîne l'absence de dépendance spatiale des déplacements lumineux. La force stimulée, due à un pur gradient de fonction d'onde, est alors du même ordre de grandeur que la force de pression de radiation, comme nous l'avons vu dans le I§2. Ceci fait disparaître un temps caractéristique de la dynamique externe, la période d'oscillation des atomes au fond des trous de potentiel associés, dans une configuration générale de refroidissement, aux déplacements lumineux. Rappelons que, dans la configuration appelée Sisyphe quantique (cf. I§1), c'est l'existence de ce temps externe d'oscillation qui limite le domaine de validité de l'approche semi-classique traditionnelle. Puisque ce temps est au contraire absent de la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, il est possible sans restriction de réduire, dans le cas de la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, l'approche semi-classique à une équation de Fokker-Planck, avec prise en compte de toute la dépendance en vitesse de la force $F(v)$ et du coefficient de diffusion en impulsion $D(v)$. Les distributions stationnaires en vitesse prédictes sont alors en bon accord avec les résultats numériques quantiques (§3).

La dernière étape de notre traitement du refroidissement $\sigma_+ - \sigma_-$ est l'examen de

transitions à moment cinétique j_g plus élevé ($j_g = 4$ sur le césium). Une première idée consiste à résoudre l'équation de Fokker-Planck pour j_g arbitraire. En fait, les images physiques simples fournies par l'approche semi-classique mettent en évidence une corrélation forte entre les pas successifs de la marche au hasard de l'atome dans l'espace des impulsions. Cette marche à grands pas n'est plus descriptible de façon satisfaisante par une équation de Fokker-Planck, lorsque les distributions stationnaires ont une largeur en impulsion qui n'est plus très grande devant le pas effectif de la marche au hasard, ce qui se produit dans le cas $j_g = 4$, pour certaines valeurs des paramètres. Nous allons donc, pour obtenir l'optimum du refroidissement sur des transitions à moment cinétique élevé, avoir recours à nouveau au traitement entièrement quantique (§4). Nous réduirons les équations de Bloch optiques généralisées à des équations de taux entre des populations, par approximation séculaire dans la limite des grands désaccords ($|\delta| \gg \Gamma$).

1 - PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE POUR LA CONFIGURATION $\sigma_+ - \sigma_-$: LA MÉTHODE DES FAMILLES

Nous cherchons à donner l'écriture la plus simple possible des équations de Bloch optiques généralisées. Ces équations régissent l'évolution temporelle de la matrice densité atomique ρ , décrivant quantiquement l'état atomique interne et le mouvement du centre de masse selon la direction de propagation des ondes laser. Il nous faut trouver la base des états atomiques la plus pertinente, qui prenne en compte les règles de sélection induites par les symétries de la configuration laser. Il est commode de chercher de telles symétries en considérant d'abord, dans le couplage atome-champ, seulement la partie réactive, décrite par le potentiel V_{AL} , et en voyant ensuite dans quelle mesure ces symétries sont partagées par les termes de relaxation de la matrice densité atomique.

a) Evolution temporelle en l'absence d'émission spontanée

Dans la présente configuration, le champ électrique laser est obtenu par superposition de deux ondes progressives, polarisées respectivement σ_+ et σ_- selon l'axe Oz , et de vecteurs d'onde $k\mathbf{e}_z$ et $-k\mathbf{e}_z$. L'interaction du dipôle atomique avec chacune des ondes est caractérisée par les pulsations de Rabi Ω_+ et Ω_- , apparaissant dans l'expression suivante de la partie ascendante du potentiel de couplage atome-laser :

$$V_{AL}^{(+)}(Z) = \frac{\hbar\Omega_+}{2} e^{ikZ} \Delta_+^{(+)} + \frac{\hbar\Omega_-}{2} e^{-ikZ} \Delta_-^{(+)} \quad (\text{III1a - 1})$$

Les éléments de matrice de l'opérateur dipôle réduit sous forme standard Δ_q sont donnés par (II1a - 13) et dans la fig. II-1. En l'absence d'émission spontanée, l'évolution de la matrice densité atomique est gouvernée, dans le référentiel tournant, par le hamiltonien :

$$H = \frac{P^2}{2M} - \hbar\delta P_e + V_{AL}(Z) \quad (\text{III1a - 2})$$

où P_e est le projecteur orthogonal dans l'état excité et P l'opérateur quantité de mouvement de l'atome selon Oz . Nous allons chercher, dans l'espace des vecteurs d'état de l'atome, des sous-espaces laissés stables par H . Les deux premiers termes de H , l'énergie cinétique et l'énergie atomique interne, ainsi que la direction de propagation des faisceaux laser, désignent comme naturelle la base $\{|g m\rangle_z |p\rangle, |e m\rangle_z |p\rangle\}$. Pour déterminer des sous-espaces laissés stables par V_{AL} , qui le soient en définitive par H , nous procédons

par itération de l'action de V_{AL} à partir d'un $|a\ m\rangle_z|p\rangle$ arbitraire ($a = e$ ou g). Nous notons à chaque étape la liste des vecteurs de base sur lesquels les vecteurs images par V_{AL} ont une composante non nulle, et nous soumettons ensuite cette liste à l'action de V_{AL} . On obtient ainsi les sous-espaces suivants, appelés familles et indexés par p , invariants sous l'évolution hamiltonienne régie par H :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(p) = \text{Vect} \{ & |g\ m\rangle_z|p + m\hbar k\rangle, m + j_g \text{ pair;} \\ & |e\ m\rangle_z|p + m\hbar k\rangle, m + j_g \text{ impair} \} \end{aligned}\quad (\text{III1a - 3a})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(p) = \text{Vect} \{ & |g\ m\rangle_z|p + m\hbar k\rangle, m + j_g \text{ impair;} \\ & |e\ m\rangle_z|p + m\hbar k\rangle, m + j_g \text{ pair} \} \end{aligned}\quad (\text{III1a - 3b})$$

Une représentation graphique en est donnée sur la fig. III-1. Notons bien que l'existence et l'expression de ces familles, déjà introduites dans [61], ne préjugent pas du fait que $j_e = j_g$ ou $j_g \pm 1$, le cas $j_e \leq j_g$ ayant d'ailleurs été étudié intensivement à propos du schéma dit "des résonances noires" [33-35].

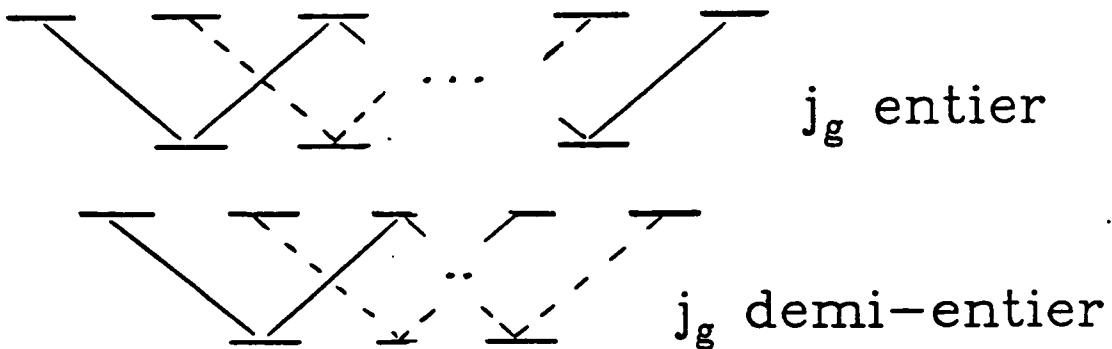


Fig. III-1 : Vecteurs de base des familles $\mathcal{F}_1(p)$ (reliés par un trait) et $\mathcal{F}_2(p)$ (reliés par des tirets) pour une transition $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$, avec j_g entier et j_g demi-entier respectivement.

b) Prise en compte de l'émission spontanée

Prenons en compte maintenant les processus d'émission spontanée, à l'origine des termes de relaxation de la matrice densité, et examinons dans quelle mesure la structure en familles (III1 - 3) est préservée. Les équations d'évolution de ρ sont déduites de celles de la matrice densité complète (II1c - 6) par prise de la trace sur les degrés de liberté du centre de masse selon les directions Ox et Oy . Nous avons effectué cette trace partielle à la fin de II§1c. Les équations de Bloch sur ρ prennent alors la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] - \Gamma \rho_{ee} - \frac{\Gamma}{2} (\rho_{eg} + \rho_{ge}) + \frac{d}{dt} \rho_{gg}|_{ES} \quad (\text{III1b - 1})$$

où le hamiltonien H est celui de (III1a - 2) et où le terme d'alimentation par émission spontanée est donné par (II1c - 32).

(i) Les éléments intrafamille

Considérons d'abord l'évolution temporelle d'un élément de matrice de ρ intrafamille, c'est-à-dire d'un élément de matrice de ρ entre deux vecteurs d'une même famille $\mathcal{F}_1(p)$ ou $\mathcal{F}_2(p)$; il suffit de se limiter aux éléments de la forme :

$$\langle p + m\hbar k |_z \langle a m | \rho | a' m' \rangle_z | p + m' \hbar k \rangle \quad (\text{III1b - 2})$$

où a et a' désignent l'état excité e ou l'état fondamental g . Il est alors clair que le terme hamiltonien et les termes de départ par émission spontanée de (III1b - 1) couplent l'élément (III1b - 2) à des éléments eux-mêmes intrafamille et associés à la même famille $\mathcal{F}_1(p)$ ou $\mathcal{F}_2(p)$. Pour savoir si le terme d'alimentation par émission spontanée partage cette propriété, il est commode d'écrire son action dans la base $\{|a m\rangle_z, |p\rangle\}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p |_z \langle g m | \rho | g m' \rangle_z | p' \rangle |_S &= \\ \Gamma \sum_{q=0,\pm 1} c_m^q c_{m'}^q \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S N_q(p_S) \langle p + p_S |_z \langle e m + q | \rho | e m' + q \rangle_z | p' + p_S \rangle & \quad (\text{III1b - 3}) \end{aligned}$$

où les coefficients de Clebsch-Gordan c_m^q sont définis dans le II§1a. Il est alors important de remarquer que les éléments de matrice figurant dans la double somme de (III1b - 3) se déduisent de l'élément qu'ils alimentent par une translation en impulsion à gauche et

à droite de la même grandeur p_S ($-\hbar k \leq p_S \leq \hbar k$), ce qui découle de la conservation de la quantité de mouvement du système atome+champ, mais également par une translation en moment cinétique interne selon Oz à gauche et à droite de la même grandeur $q\hbar$ ($q = 0, \pm 1$), ce qui est particulier des configurations unidimensionnelles, comme nous l'avions remarqué après (II1c - 32). L'élément de matrice intrafamille (III1b - 2), avec $a = a' = g$, est donc alimenté, par émission spontanée, seulement par des éléments de matrice dans l'état excité de la forme $\langle p + p_S + m\hbar k |_z \langle e m + q | \rho | e m' + q \rangle_z | p + p_S + m'\hbar k \rangle$, visiblement intrafamille d'indice $p + p_S - \hbar k q$ distant de p d'au plus $2\hbar k$. Les éléments de matrice intrafamille de la matrice densité ρ pour le mouvement réduit selon Oz sont donc couplés seulement entre eux par évolution temporelle complète, à la fois sous l'influence du hamiltonien atomique propre, du couplage avec les faisceaux laser et de l'émission spontanée. La réduction du problème qui en résulte est de grande importance pratique, puisque nous sommes intéressés essentiellement par la distribution en impulsion, qui se déduit des seuls éléments intrafamille $\langle p |_z \langle a m | \rho | a m \rangle_z | p \rangle$. Nous allons faire usage de cette réduction dans la suite de façon systématique.

(ii) Les éléments interfamille

Pour achever cette analyse, examinons brièvement l'évolution temporelle des éléments de matrice interfamille, éléments de matrice de ρ entre deux états appartenant à des familles distinctes. Il est facile de constater, par un raisonnement identique au précédent, que les éléments de matrice interfamille sont couplés seulement entre eux. Plus précisément, les éléments entre les familles $\mathcal{F}(p)$ et $\mathcal{F}(p')$, $p \neq p'$, sont couplés à des éléments entre les familles $\mathcal{F}(p + p_S - \hbar k q)$ et $\mathcal{F}(p' + p_S - \hbar k q)$, avec $-\hbar k \leq p_S \leq \hbar k$ et $q = 0, \pm 1$; l'étude de l'évolution temporelle de ces éléments à $p - p'$ fixé est donc de la même complexité que celle des éléments intrafamille. Nous n'allons cependant pas réaliser cette étude dans la suite. En fait, ces éléments interfamille ne sont utiles que si l'on considère l'évolution de la densité spatiale des atomes, comme le prouve la relation suivante :

$$\langle z |_z \langle m | \rho | m \rangle_z | z \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp dp' e^{i(p-p')z/\hbar} \langle p + m\hbar k |_z \langle m | \rho | m \rangle_z | p' + m\hbar k \rangle \quad (\text{III1b - 4})$$

Examinons seulement intuitivement ce que nous attendons d'une telle étude, même si nous ne l'avons pas menée rigoureusement. L'évolution temporelle de l'ensemble des éléments interfamille de différence d'indice $p - p'$ fixée est régie par un opérateur qui est une restriction de l'opérateur de Bloch associé aux équations d'évolution sur la matrice ρ complète.

Dans le cas limite intrafamille ($p - p' = 0$), nous savons que cette restriction d'opérateur n'est pas inversible : la trace de ρ sur tous les degrés de liberté réalise une combinaison linéaire d'éléments intrafamille conservée par évolution temporelle, ce qui assure l'existence d'un état stationnaire pour ces éléments, éventuellement non normalisable. Dans le cas où $p - p' \neq 0$, il n'y a plus cette quantité conservée : l'on s'attend à ce que l'opérateur régissant l'évolution temporelle pour cette valeur de $p - p'$ soit inversible et que les éléments interfamille associés relaxent vers 0, avec un temps d'autant plus long que $p - p'$ est plus proche de 0, donc que l'échelle de variation spatiale considérée dans (III1b - 4) est plus grande.

En conclusion, dans la présente configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, nous ne nous intéressons pas à la distribution spatiale des atomes, qui tend à s'uniformiser par diffusion spatiale, mais nous limitons à la distribution en impulsion, qui nécessite seulement la considération des éléments de matrice de ρ à l'intérieur de chaque famille $\mathcal{F}_1(p)$ et $\mathcal{F}_2(p)$, pour tous les p .

c) Interprétation géométrique de la méthode des familles et forme des équations quantiques

Nous avons effectué, jusqu'à présent, un choix de base judicieux, défini par (III1a - 3). Pour obtenir une compréhension plus profonde de la méthode des familles, nous allons montrer que ce changement de base est celui qui décompose la représentation, dans l'espace des états de l'atome, d'un groupe continu de symétrie en somme de représentations irréductibles.

(i) Le groupe de symétrie

L'identification du groupe de symétrie découle naturellement de la variation spatiale du champ électrique laser que nous avons déjà étudiée au I§2a. La propriété qu'a l'extrémité du champ électrique de décrire une hélice de pas λ incite à considérer le sous-groupe suivant des vissages d'axe Oz :

$$\left\{ V(a) = e^{-iPa/\hbar} e^{ika j_z/\hbar}, a \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{III1c - 1})$$

obtenus par composition de la translation spatiale de a selon Oz et de la rotation interne d'angle $-ka$. On vérifie aisément que le hamiltonien de (III1a - 2) commute avec toutes les transformations $V(a)$. Les termes de relaxation de la matrice densité ρ réduite à une dimension d'espace sont également invariants au sens suivant :

$$V(a) \frac{d}{dt} \rho |_{ES} V(a)^\dagger = \frac{d}{dt} [V(a)\rho V(a)^\dagger] |_{ES} \quad (\text{III1c - 2})$$

Cette invariance est claire sous les translations spatiales. Elle l'est également sous les rotations, d'axe Oz , mais agissant a priori, avec le même angle, à la fois sur les degrés de liberté atomique internes et externes. Il faudrait donc rajouter à $V(a)$ l'effet de la rotation externe d'axe Oz et d'angle $-ka$. En fait, l'équation d'évolution sur ρ a été obtenue par prise de trace sur le mouvement du centre de masse selon les axes Ox et Oy , et cette trace trivialise l'action sur ρ des rotations externes d'axe Oz .

Comme le groupe (III1c - 1) est commutatif, les représentations irréductibles unitaires sont de dimension 1. Chaque représentation irréductible agit dans un espace engendré par $|g\ m\rangle_z|p\rangle$ ou $|e\ m\rangle_z|p\rangle$, et est caractérisée par le nombre $p_F = p - m\hbar k$, en ce sens que deux telles représentations sont équivalentes seulement si elles ont le même nombre p_F . p_F n'est autre finalement que l'indice p des familles introduit dans (III1a - 3). Nous constatons alors que le nombre de représentations irréductibles équivalentes, qui détermine la dimension des familles, est fini et égal à la dimension de l'espace des états atomiques internes, soit $2(j_g + j_e + 1)$. Cette situation très favorable provient fondamentalement du caractère continu du groupe de symétrie (III1c - 1). Dans la configuration laser du chapitre IV (refroidissement Sisyphe), nous n'obtiendrons que des groupes de symétrie discrets, ce qui conduit à des familles de dimension infinie. Cette conclusion justifie à nos yeux les considérations de symétrie abstraites développées ici, qui permettent finalement une compréhension assez profonde de ce qui fait le statut particulier de la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$.

(ii) Une transformation unitaire judicieuse

Le groupe de symétrie introduit en (III1c - 1) est en fait isomorphe au groupe plus familier des translations spatiales selon Oz . Il est utile de chercher à se ramener au groupe des translations, aussi bien par commodité d'écriture que pour la compréhension physique du mouvement des atomes. Nous allons construire explicitement cet isomorphisme sous la forme d'une transformation unitaire S :

$$T(a) = S^\dagger V(a) S \quad \forall a \quad (\text{III1c - 3})$$

où $T(a)$ désigne la translation du centre de masse atomique de a selon Oz . Nous choisissons comme expression de S la solution la plus simple de (III1c - 3) :

$$S \equiv S_F = e^{ikZj_z/\hbar} \quad (\text{III1c - 4})$$

où j_z est la composante selon Oz de l'opérateur moment cinétique atomique interne. Ce choix de S nous fait retrouver ainsi naturellement le référentiel tournant du I§2 et la transformation (I2e - 21a), dont nous avions déjà commenté la forme. S_F , qui n'est autre que la matrice de passage entre la base $\{|g/e m\rangle_z |p\rangle\}$ des représentations irréductibles des translations et la base des familles, est l'équivalent quantique (i.e. pour des degrés de liberté atomiques externes quantifiés) du passage semi-classique dans le référentiel tournant du I§2b.

Après transformation unitaire par S_F , la réduction des équations quantiques sur la nouvelle matrice densité :

$$\rho_F = S_F^\dagger \rho S_F \quad (\text{III1c - 5})$$

est maintenant immédiate. L'évolution temporelle pour ρ_F ne peut coupler que des représentations irréductibles équivalentes du groupe des translations dans l'espace de Liouville des matrices densité. En d'autres termes, $\langle p_1 | \rho_F | p_2 \rangle$ est couplé seulement aux $\langle p'_1 | \rho_F | p'_2 \rangle$ avec $p'_2 - p'_1 = p_2 - p_1$. Nous avons expliqué au §1b que seule nous intéresse la partie diagonale en p de ρ_F :

$$\rho_F(p, t) = \langle p | \rho_F(t) | p \rangle \quad (\text{III1c - 6})$$

Il doit être clair que, dans cette représentation, p désigne en fait l'indice des familles p_F et non pas la véritable impulsion de l'atome.

(iii) Équations quantiques dans la base des familles

Pour obtenir les équations d'évolution sur $\rho_F(t)$, il suffit de transformer (III1b - 1) selon S_F . Considérons d'abord la partie hamiltonienne associée à H . La transformation de l'énergie cinétique et du potentiel de couplage atome-laser est élémentaire :

$$S_F^\dagger \frac{P^2}{2M} S_F = \frac{(P + kj_z)^2}{2M} = \frac{P^2}{2M} + k \frac{P}{M} j_z + \frac{k^2 j_z^2}{2M} \quad (\text{III1c - 7a})$$

$$S_F^\dagger V_{AL}^{(+)}(Z) S_F = V_{AL}^{(+)}(0) = \frac{\hbar\Omega_+}{2} \Delta_+^{(+)} + \frac{\hbar\Omega_-}{2} \Delta_-^{(+)} \quad (\text{III1c - 7b})$$

Le terme linéaire en P , dans (III1c - 7a), est justifiable de l'image du champ magnétique fictif déjà donnée classiquement dans I§2b. Ce champ est d'ailleurs d'autant plus fictif qu'il se couple au système atomique avec des facteurs de Landé de même valeur dans l'état excité et dans l'état fondamental. Notons néanmoins l'apparition du terme supplémentaire de recul quadratique en j_z , dont l'effet n'est a priori pas négligeable pour des transitions à moment cinétique j_g élevé. Dans le cas où les pulsations de Rabi sont égales et réelles :

$$\Omega_+ = \Omega_- = \Omega \in \mathbb{R} \quad (\text{III1c - 8})$$

ce qui correspond aux situations envisagées dans toute la suite, il est possible de donner à (III1c - 7b) l'expression simple :

$$V_{AL}^{(+)}(0) = \frac{\hbar\Omega_T}{2}\Delta_y^{(+)} \quad (\text{III1c - 9a})$$

$$\Omega_T = -i\sqrt{2}\Omega \quad (\text{III1c - 9b})$$

L'atome voit dans ce cas, dans la représentation des familles, le champ laser sous forme d'un champ électrique uniforme à la pulsation ω_L , polarisé linéairement selon Oy , dont la pulsation de Rabi associée est Ω_T .

Passons maintenant à la transformation des termes de relaxation par émission spontanée. Celle-ci nécessite seulement la connaissance de la relation :

$$S_F^\dagger \Delta_q^{(+)} e^{ip_s Z/\hbar} S_F = \Delta_q^{(+)} e^{i(p_s - \hbar k q)Z/\hbar} \quad (\text{III1c - 10})$$

Le terme d'alimentation transformé garde donc sa structure originelle, seule "l'impulsion" effective des photons de fluorescence est modifiée. L'effet important de S_F sur les équations de Bloch est donc de rendre la partie hamiltonienne de ces équations entièrement locale en p , le seul terme non local étant celui d'alimentation par émission spontanée. Ceci se fait bien sûr au prix de l'introduction de termes supplémentaires à l'énergie cinétique (cf. (III1c - 7a)). Comme nous sommes intéressés en particulier par (III1c - 6), nous donnons de façon explicite les équations d'évolution quantiques seulement pour la partie de ρ_F diagonale en p (éléments de matrice intrafamille) :

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_F(p, t) = & \frac{1}{i\hbar} \left[k \frac{p}{M} j_z + \frac{k^2 j_z^2}{2M} + V_{AL}(0) - \hbar \delta P_e, \rho_F(p) \right] \\
& - \Gamma (\rho_F)_{ee}(p) - \frac{\Gamma}{2} \left[(\rho_F)_{eg}(p) + (\rho_F)_{ge}(p) \right] \\
& + \Gamma \sum_{q=0,\pm 1} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_q(p_S) \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger (\rho_F)_{ee}(p + p_S - \hbar k q) \Delta_q^{(+)}
\end{aligned} \tag{III1c - 11)$$

où les distributions d'impulsion des photons de fluorescence $\mathcal{N}_q(p_S)$ figurent dans (II1c - 30).

2 - RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS QUANTIQUES POUR LA TRANSITION $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$

Nous effectuons ici la résolution numérique de la forme stationnaire de (III1c - 11) discrétisée en p , dans le cas de la transition atomique $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, sans faire l'hypothèse de faible saturation de la transition par le laser, ni l'hypothèse de faible vitesse ($k|v| \ll \Gamma$). Le programme utilisé [67] est donc valable pour une valeur arbitraire du paramètre de masse $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2}$.

a) La méthode de calcul

Pour donner une formulation matricielle à (III1c - 11), il est nécessaire d'effectuer une discrétisation sur la variable p . Le seul terme non local en p étant le terme d'alimentation par émission spontanée, il suffit de préciser les valeurs discrètes que l'on autorise à p_S , composante selon Oz de l'impulsion des photons de fluorescence. Par commodité, nous choisissons une discrétisation uniforme de l'intervalle $[-\hbar k, \hbar k]$:

$$p_S \in \left\{ \frac{i_S}{n} \hbar k, -n \leq i_S \leq n \right\} \quad (\text{III2a - 1})$$

Il reste à fixer la discrétisation du nombre p . Nous la choisissons dans le prolongement de (III2a - 1) :

$$p = \frac{i}{n} \hbar k, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (\text{III2a - 2})$$

Le terme d'alimentation par émission spontanée de (III1c - 11) est donc représenté dans ce modèle discret par :

$$\hbar k \Gamma \sum_{q=0, \pm 1} \sum_{i_S=-n}^n \mathcal{N}_q \left(\frac{i_S}{n} \hbar k \right) \Pi(i_S; n) \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger (\rho_F)_{ee} \left(\frac{i + i_S}{n} \hbar k - \hbar k q \right) \Delta_q^{(+)} \quad (\text{III2a - 3})$$

où les $\Pi(i_S; n)$ sont les poids d'intégration. Le facteur $\hbar k$ est introduit pour rendre ces poids sans dimension, ce qui donne la forme suivante à leur condition de normalisation :

$$\sum_{i_S=-n}^n \Pi(i_S; n) = 2 \quad (\text{III2a - 4})$$

Comme nous voulons que (III2a - 3) conduise à une forme discrète de (III1c - 11) conservant la trace totale de la matrice densité ρ_F , nous exigeons que les poids d'intégration satisfassent de plus à :

$$\hbar k \sum_{i_S=-n}^n \Pi(i_S; n) \mathcal{N}_q\left(\frac{i_S}{n} \hbar k\right) = 1, \quad q = 0, \pm 1 \quad (\text{III2a - 5})$$

Remarquons en particulier que les poids de la méthode des rectangles ou des trapèzes ne vérifient pas rigoureusement (III2a - 5). Comme les distributions $\mathcal{N}_q(p_S)$ sont des polynômes de degré 2 en p_S (cf. (II1c - 30)), nous avons choisi les poids d'intégration de Simpson [68] :

$$\Pi(i_S; n) = \frac{1}{3n}(1, 4, 2, \dots, 4, 1) \quad (\text{III2a - 6})$$

Comme ces poids sont issus d'une interpolation par des polynômes de degré 2 sur des intervalles $\left[\frac{i_S-1}{n} \hbar k, \frac{i_S+1}{n} \hbar k\right]$, ils vérifient exactement la condition (III2a - 5).

Après discrétisation du problème, nous obtenons l'opérateur de Bloch restreint aux éléments intrafamille sous forme d'une "matrice infinie". Cette "matrice" n'est pas inversible, puisque la somme de ses lignes vaut 0. Nous allons voir qu'on peut lui donner une structure de matrice de bande réelle. A indice p fixé, l'opérateur interne $\rho_F(p)$ est en effet hermitien ; ses composantes sont réelles dans une base de la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(|a m\rangle\langle a' m'| + |a' m'\rangle\langle a m|), \\ \frac{1}{2i}(|a m\rangle\langle a' m'| - |a' m'\rangle\langle a m|) \end{cases} \quad (\text{III2a - 7})$$

où a et a' désignent l'état interne e ou g . Nous utilisons, à p donné, la structure en double famille interne, reflet dans la représentation S_F de l'existence des deux familles $\mathcal{F}_1(p)$ et $\mathcal{F}_2(p)$ de (III1a - 3). Ecrivons pour $j_g = 1$ l'expression de ces deux familles internes :

$$\mathcal{I}_1 = \text{Vect}\{|e - 2\rangle, |g - 1\rangle, |e 0\rangle, |g 1\rangle, |e 2\rangle\} \quad (\text{III2a - 8a})$$

$$\mathcal{I}_2 = \text{Vect}\{|e - 1\rangle, |g 0\rangle, |e 1\rangle\} \quad (\text{III2a - 8b})$$

Comme tous les éléments de matrice de $\rho_F(p)$ entre \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 sont nuls dans l'état stationnaire, il suffit de se limiter dans (III2a - 7) aux dyades telles que $m - m'$ soit pair lorsque $a = a'$ et impair lorsque $a \neq a'$. Les dyades de cette forme et linéairement indépendantes sont au nombre de la somme des carrés des dimensions de \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 , soit $5^2 + 3^2 = 34$. Nous les désignons par $|j\rangle_{\text{int}}$, $j = 1$ à 34, suivant une numérotation arbitraire. De même, nous notons $|i\rangle_{\text{ext}}$, $i \in \mathbb{Z}$, la dyade $|p\rangle\langle p|$, où le nombre p vaut $\frac{i}{n}\hbar k$. La partie diagonale en p de la matrice densité ρ_F prend ainsi la forme suivante :

$$\rho_F^{\text{diag}} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{34} \rho_F(i, j) |j\rangle_{\text{int}} \langle i|_{\text{ext}} \quad (\text{III2a - 9})$$

où les coefficients $\rho_F(i, j)$ sont tous réels. Nous souhaitons considérer cette partie diagonale comme un vecteur, et nous ordonnons pour cela les couples (i, j) selon l'ordre lexicographique. Une définition possible des composantes X_k de ce vecteur est la suivante :

$$\rho_F(i, j) = X_{j+34i} \quad (\text{III2a - 10})$$

Dans ce point de vue, la restriction de l'opérateur de Bloch à la partie diagonale en p de ρ_F est une "matrice" infinie M telle que :

$$\dot{\mathbf{X}} = M[\mathbf{X}] \quad (\text{III2a - 11})$$

Comme ρ_F reste hermitique sous évolution temporelle, la "matrice" M est nécessairement à coefficients réels. Montrons qu'elle a de plus une structure de bande. Considérons pour cela l'évolution temporelle de la composante X_k , où $k = j + 34i$. Par (III2a - 11), \dot{X}_k est couplé à des $X_{k'}$, où $k' = j' + 34i'$. Nous savons en fait que l'indice p' associé à $X_{k'}$ ne peut pas différer de l'indice p associé à X_k de plus de $2\hbar k$, puisque soit $p' = p$ (énergie atomique propre, effet du laser et termes de départ par émission spontanée), soit $p' = p + p_S - \hbar k q$ (terme d'alimentation de l'état fondamental par émission spontanée). Il en découle que $|i - i'| \leq 2n$ et $|k - k'| < 34(2n + 1)$. D'où la propriété essentielle de la "matrice" M :

$$M_{k,k'} = 0 \quad \text{si} \quad |k - k'| \geq 34(2n + 1) \quad (\text{III2a - 12})$$

Pour déterminer numériquement la solution stationnaire de (III2a - 11), il est nécessaire de se limiter à un nombre fini de composantes de \mathbf{X} ; pour ne pas heurter l'invariance

par parité de la distribution en p stationnaire, nous choisissons un échantillon symétrique par rapport à l'origine :

$$p \in \left\{ \frac{i}{n} \hbar k, -N \leq i \leq N \right\} \quad (\text{III2a - 13})$$

Il reste à déterminer de quelle façon effectuer la coupure en $\pm p_{\max}$, où $p_{\max} = \frac{N}{n} \hbar k$: en d'autres termes, il faut associer à la "matrice" infinie M une matrice finie A , telle que le système :

$$0 = \sum_{k'} A_{k,k'} X_{k'}, \quad \mathcal{N}_1 \leq k, k' \leq \mathcal{N}_2 \quad (\text{III2a - 14})$$

noté $A[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, soit une bonne approximation de la forme stationnaire de (III2a - 11). Les valeurs des bornes \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 se déduisent aisément de la numérotation (III2a - 10) et de (III2a - 13). Les conditions aux limites périodiques (identification de $p_{\max} + \delta p$ et $\delta p - p_{\max}$) ont l'inconvénient de briser la structure de bande (III2a - 12), à moins qu'on ait pris soin de replier la matrice M sur le sous espace des composantes à $p \geq 0$ en utilisant l'invariance par parité, ce qui constitue une difficulté d'écriture supplémentaire. Les conditions aux limites parfaitement réfléchissantes (identification de $p_{\max} + \delta p$ et $p_{\max} - \delta p$) ont le mérite de conduire à une matrice A de bande et non inversible puisqu'elle conserve la population totale dans $[-p_{\max}, p_{\max}]$. La solution finalement retenue par Klaus Mølmer [67] consiste à mettre à zéro, dans les équations $\dot{X}_k = 0$, $\mathcal{N}_1 \leq k \leq \mathcal{N}_2$, déduites de (III2a - 11), toutes les variables $X_{k'}$ telles que $k' \notin \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_2\}$. Dans (III2a - 14), ceci revient donc à prendre simplement $A_{k,k'} = M_{k,k'}$. La matrice A obtenue est inversible, en toute rigueur, mais nous nous attendons bien à ce que ceci ne constitue pas un réel problème numériquement.

En dernière étape, nous nous ramenons, par une formulation judicieuse du problème, à un calcul numérique classique, pour lequel il existe des algorithmes standards, la résolution du système linéaire :

$$B[\mathbf{X}] = \mathbf{Y} \quad (\text{III2a - 15})$$

où B est une matrice inversible et où le second membre \mathbf{Y} est non nul. Pour construire la matrice B à partir de A , nous renonçons à l'une des équations (III2a - 14), celle correspondant à $k = k_0$, et nous la remplaçons par une condition de normalisation :

$$\sum_{k'} \varepsilon_{k'} X_{k'} = 1, \quad |k' - k_0| < 34(2n + 1) \quad (\text{III2a - 16})$$

Les autres lignes de B sont prises identiques à celles de A . Dans (III2a - 16), $\varepsilon_{k'}$ vaut 1 lorsque $X_{k'}$ correspond à une population de la matrice densité ρ_F dans la base $\{|g/e m\rangle_z |p\rangle\}$ (cas où $|j\rangle_{\text{int}} = |a m\rangle \langle a m|$), et $\varepsilon_{k'}$ vaut 0 dans les autres cas. L'intervalle de variation de l'indice k' est choisi pour préserver la propriété (III2a - 12) : B est donc aussi une matrice de bande, mais la solution correspondante de (III2a - 15) ne sera pas correctement normalisée. L'indice k_0 est tel que le nombre p associé à la composante X_{k_0} est proche de 0, de façon que les populations intervenant dans (III2a - 16) soient parmi les plus grandes de l'état stationnaire. Cette procédure, qui ramène la résolution de $A[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ à celle de $B[\mathbf{X}] = \mathbf{Y}$, où $Y_k = \delta_{k,k_0}$, est parfaitement rigoureuse mathématiquement lorsque A est non inversible. En fait, lorsque N est choisi assez grand dans (III2a - 13), la partie numériquement significative de la solution \mathbf{X} de (III2a - 15) issue de cette définition (III2a - 16) de B dépend très peu des conditions aux limites choisies pour A .

La résolution explicite de (III2a - 15) est effectué en FORTRAN à l'aide de la procédure LSLRB ou DLSLRB de la bibliothèque mathématique IMSL, selon que les variables sont écrites en simple ou double précision. Cette procédure prend en compte explicitement la structure de bande de la matrice B . Nous diminuons le pas de la discréétisation en impulsion $\delta p = \frac{\hbar k}{n}$ et nous augmentons p_{\max} , valeur maximale de p considérée, jusqu'à ce que l'impulsion quadratique moyenne calculée n'en dépende plus. Dans le cas d'atomes de masse élevée ($M\Gamma \gg \hbar k^2$), les distributions les plus froides sont bien décrites par $\delta p = \hbar k$ et $p_{\max} = 50$ ou $100\hbar k$. Dans le cas d'atomes légers ($M\Gamma \ll \hbar k^2$), les distributions optimales sont beaucoup plus étroites, et nous avons choisi $\delta p = \frac{\hbar k}{5}$ et $p_{\max} = 10$ ou $20\hbar k$. La matrice B comporte donc typiquement 34×200 lignes et une largeur de bande de 6×34 à 22×34 , ce qui conduit à des manipulations de tableaux de plus de 10^6 éléments et des temps d'exécution d'une à quelques minutes sur un calculateur vectoriel CONVEX. Après obtention de la valeur stationnaire de ρ_F^{diag} , il ne faut pas oublier, pour obtenir la distribution en la véritable impulsion, de quitter la base des familles selon (III1c - 5) inversée.

b) Les résultats pour le refroidissement sur raies larges très peu saturées

Nous connaissons deux mécanismes de refroidissement pertinents pour la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$. Le premier, seul présent sur les transitions $j_g = 0 \rightarrow j_e = 1$ et $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, est bien connu : c'est le refroidissement Doppler [38,14,40]. Le

second a été décrit qualitativement dans le I§2 : c'est le refroidissement à gradient de polarisation [16], qui intervient pour les transitions $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$ avec $j_g \geq 1$. Nous allons mettre ici en évidence, à partir de la résolution numérique des équations quantiques pour $j_g = 1$, des situations dans lesquelles tour à tour l'un des deux mécanismes impose presque seul l'impulsion quadratique moyenne stationnaire. L'idée essentielle est de se placer à très faible saturation s de la transition, de façon que les échelles de vitesse des deux mécanismes ($kv \sim \delta$ pour la force Doppler et $kv \sim \delta s$ pour les forces à gradient de polarisation) soient très distinctes. Nous avons choisi ici de caractériser la distribution stationnaire par l'impulsion quadratique moyenne plutôt que par une mi-largeur à mi-hauteur, pour obtenir une séparation plus nette des différents mécanismes de refroidissement.

(i) Les deux minima du refroidissement à saturation fixée

Pour deux valeurs fixées et très faibles (respectivement 10^{-2} et 10^{-3}) du paramètre de saturation s , nous représentons sur la fig. III-2, le carré de l'impulsion quadratique moyenne en unité de $\hbar k$ dans l'état stationnaire, en fonction du désaccord δ en pulsation entre atome et laser. Nous adoptons la définition suivante du paramètre de saturation :

$$s = \frac{\frac{1}{2}\Omega^2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (\text{III2b - 1})$$

où $\Omega = \Omega_+ = \Omega_-$ représente la pulsation de Rabi dans chaque onde laser progressive (cf. (III1a - 1)). Les masses choisies pour l'atome correspondent successivement à celles du césium ($M\Gamma = 1285\hbar k^2$), du rubidium ($M\Gamma = 770\hbar k^2$) et du sodium ($M\Gamma = 200\hbar k^2$). Notons que les transitions utilisées expérimentalement pour l'obtention de mélasses optiques avec ces atomes sont en fait de moment cinétique j_g plus grand que 1, et qu'elles correspondent toutes à des raies larges ($M\Gamma \gg \hbar k^2$). Le calcul numérique est effectué avec une discrétisation en impulsion de $\hbar k$ et une valeur maximale de p de $100\hbar k$, ce qui n'est pas tout à fait suffisant pour les distributions les plus chaudes de la fig. III-2, comme nous le verrons plus loin. L'intervalle de variation du désaccord δ en unité de largeur naturelle Γ n'est pas couvert expérimentalement, mais son extension va prouver l'intérêt, d'un point de vue théorique, du cas limite des grands désaccords ($|\delta| \gg \Gamma$).

Considérons d'abord la raie la plus large, associée à la masse du césium. Lorsque le paramètre de saturation s vaut 10^{-3} , $\langle p^2 \rangle$ présente nettement deux minima locaux. Le premier, de loin le plus chaud, est atteint pour un désaccord atome-laser proche de $-\frac{1}{2}\Gamma$. Le second, plus froid d'un ordre de grandeur ($\langle p^2 \rangle \simeq 100(\hbar k)^2$), est atteint à très grand

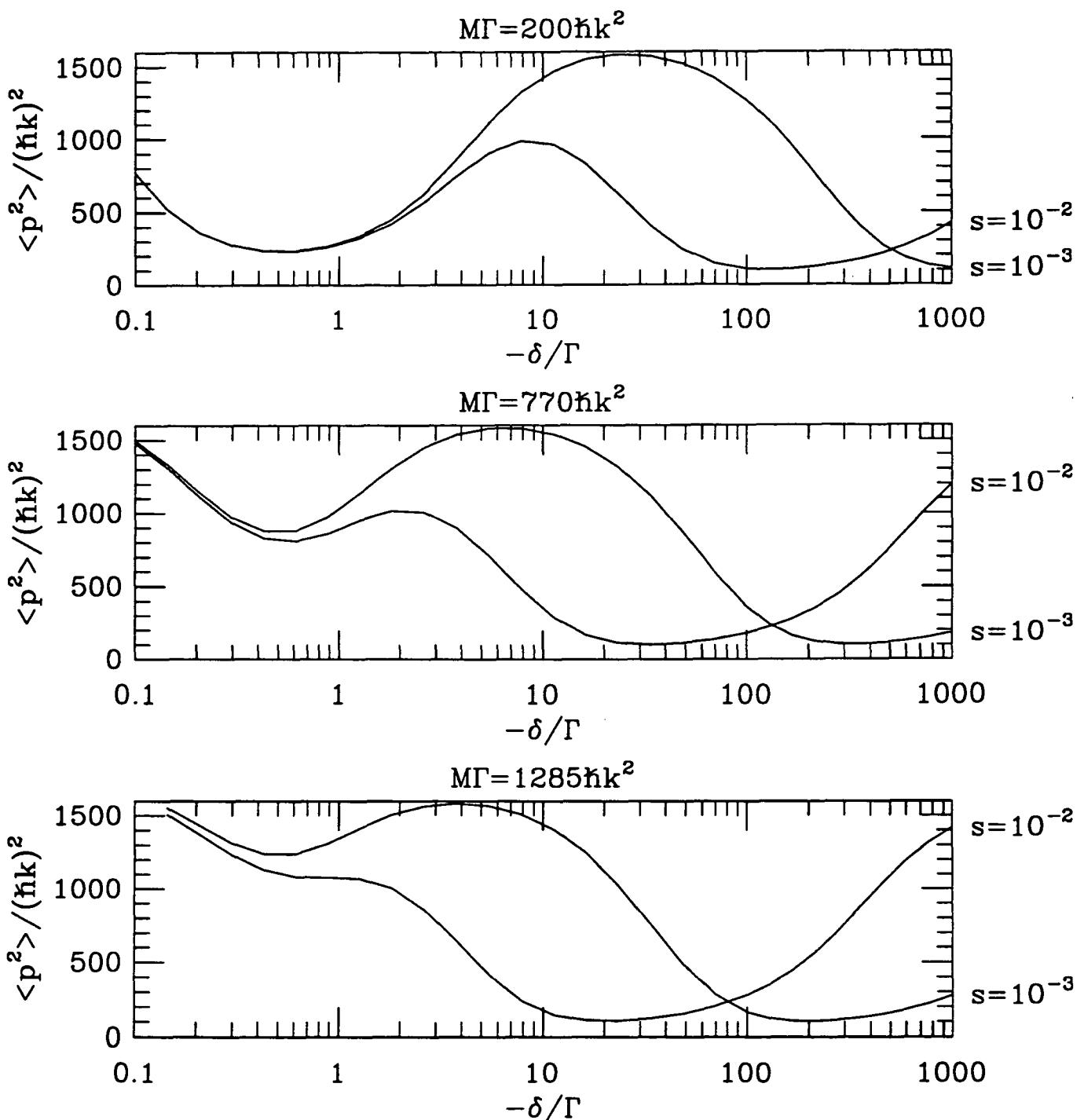


Fig. III-2 : Pour différentes masses atomiques, et sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, carré de l'impulsion quadratique moyenne stationnaire en fonction du désaccord atome-laser δ , à une saturation s fixée de 10^{-2} et 10^{-3} . $\langle p^2 \rangle$ est en unité de $(\hbar k)^2$, et δ est en unité de Γ . Une étude de l'allure des distributions en impulsion pour chacun des deux minima de $\langle p^2 \rangle$ est effectuée au §2b(ii) (voir fig. III-3) et au §3c (voir fig. III-14) respectivement.

désaccord ($\delta \simeq -200\Gamma$). Le comportement de ces minima avec le paramètre de saturation s est très différent. Lorsque s passe à 10^{-2} , le premier n'est plus qu'à peine esquisé ; sa position en fonction du désaccord a peu changé ($\delta \simeq -0.7\Gamma$) mais sa valeur est plus froide. C'est qu'il subit l'influence, en quelque sorte, de l'autre minimum, qui s'en est rapproché fortement en terme de désaccord ($\delta \simeq -20\Gamma$) mais dont la valeur de $\langle p^2 \rangle$ n'a pas bougé. Un calcul à saturation plus élevée montre que le premier minimum finit par disparaître, et que le second, tout en se rapprochant de $\delta \simeq -\Gamma$, devient plus chaud.

Il est bien sûr naturel d'interpréter ainsi ces observations. Le premier minimum, beaucoup plus chaud que le second, est une signature du mécanisme de refroidissement Doppler, ce qui explique sa position en désaccord (rappelons que le refroidissement Doppler pour un atome à deux niveaux est optimal à faible saturation et lorsque $\delta = -\frac{1}{2}\Gamma$). L'autre minimum, beaucoup plus froid, est dû aux nouveaux mécanismes de refroidissement. Il se produit à un désaccord tel que $\frac{\delta}{\Gamma}s = \text{cte}$, et l'impulsion quadratique moyenne correspondante, de l'ordre de $10\hbar k$, ne dépend pas de s tant que ce paramètre reste assez faible. Le fait que le minimum de $\langle p^2 \rangle$ attribué au refroidissement Doppler varie significativement lorsque s passe de 10^{-3} à 10^{-2} , semble indiquer en ce point une situation mixte, participant aussi des nouveaux mécanismes de refroidissement.

Examinons maintenant les résultats de la fig. III-2 pour des valeurs plus faibles de $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2}$. La séparation entre les deux minima précédemment observés est alors beaucoup plus nette. D'une part, le premier minimum est bien marqué, même pour $s = 10^{-2}$. Sa position en désaccord atome-laser est nettement $\delta = -\frac{1}{2}\Gamma$. La valeur de $\langle p^2 \rangle$ associée est pratiquement insensible, à masse fixée, au choix du paramètre de saturation, et varie proportionnellement à la masse de l'atome M . Ce comportement est compatible a priori avec une température optimale indépendante de la masse et de la saturation, ce à quoi nous ont habitués les théories du refroidissement Doppler sur raie large. D'autre part, il est très net que le second minimum est porté rapidement vers des valeurs très élevées de $\frac{|\delta|}{\Gamma}$ lorsque la masse diminue, jusqu'à sortir de l'intervalle en désaccord δ choisi pour la fig. III-2. On vérifie que le mouvement de ce minimum est compatible avec la loi simple $\frac{\hbar|\delta|s}{2E_R} = \text{cte}$, la constante étant un pur nombre, que l'on peut estimer ici à 250. La valeur de $\langle p^2 \rangle$ associée ne dépend pratiquement pas de la masse, et est donc rattrapée par le premier minimum, lorsque M diminue.

(ii) Etude simple du refroidissement Doppler

Nous voulons ici identifier quantitativement le premier minimum sur $\langle p^2 \rangle$ comme dû au refroidissement Doppler. Nous adaptons pour cela l'approche semi-classique traditionnelle de ce refroidissement au cas de la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$. Considérons donc, à très faible saturation s , des distributions en vitesse telles que^(*) :

$$|\delta|s \ll k\Delta v \ll |\delta| \quad (\text{III2b - 2})$$

ce qui est vérifié pour le premier minimum à la masse de l'atome de sodium ($M\Gamma = 200\hbar k^2$). La première inégalité dans (III2b - 2) nous permet, dans le prolongement de l'analyse des I§2c et I§2d, de négliger les cohérences de la matrice densité atomique interne entre des sous-niveaux de moment cinétique différent selon l'axe Oz , et ceci pour l'essentiel des atomes dans l'état stationnaire. Les équations de Bloch optiques habituelles peuvent alors être ramenées à de simples équations de taux entre populations, et nous prenons en compte ici, contrairement au chapitre I, l'influence de l'effet Doppler sur ces taux de pompage. La force moyenne issue des nouveaux mécanismes de refroidissement est négligeable, dans ces conditions, devant la force Doppler. La deuxième inégalité dans (III2b - 2) assure que la plupart des atomes se trouvent dans le domaine de linéarité en vitesse de cette force Doppler, ce qui permet de la caractériser par le coefficient de friction α_D . Un calcul un peu long, mais sans difficulté particulière, conduit pour la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$ à l'expression suivante :

$$\alpha_D = -\frac{25}{11} \cdot \hbar k^2 s \frac{\delta\Gamma}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (\text{III2b - 3})$$

Seul le facteur numérique $\frac{25}{11}$ n'est pas intuitif. La double condition (III2b - 2) permet d'accéder également facilement au coefficient de diffusion en impulsions D . Comme $k|v| \ll |\delta|$, nous négligeons dans le calcul de D , selon la procédure habituelle, l'effet Doppler. Les taux des équations de pompage sont alors exactement ceux qui ont servi à la détermination de D_∞ dans l'approche probabiliste du I§2d (voir appendice A_I). Ceci autorise l'identification $D = D_\infty$, l'expression de D_∞ étant donnée par (I2d - 9b). Dans ce modèle simple, nous considérons finalement que la distribution en vitesse stationnaire est boltzmannienne de température T telle que :

(*) Si l'on n'a pas $|\delta| \gg \Gamma$, remplacer $|\delta|$ par $\sqrt{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$.

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{M} = k_B T = \frac{D}{\alpha_D} = -\frac{1171}{1000} \hbar \frac{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}{\delta} \quad (\text{III2b - 4})$$

dont l'optimum, atteint pour $\delta = -\frac{1}{2}\Gamma$, ne dépend pas de s et vaut :

$$\inf \langle p^2 \rangle = \frac{1171}{1000} \hbar \Gamma M \quad (\text{III2b - 5})$$

Il est important de remarquer que cet optimum est environ le triple de celui de la transition $j_g = 0 \rightarrow j_e = 1$. Ce rapport défavorable est dû à la valeur plus élevée du coefficient de diffusion sur $j_g = 1$, conséquence des corrélations entre les pas de la marche au hasard analysées au I§2d. L'accord de (III2b - 5) avec les résultats numériques de la fig. III-2 pour la masse du sodium est remarquable. Le fait qu'il soit moins bon pour la masse du rubidium et du césium est justifiable a priori de deux explications. La première est révélée par la dépendance en s de $\langle p^2 \rangle$ du premier minimum, en particulier pour la masse du césium, ce qui est en contradiction avec (III2b - 5) et prouve que les nouveaux mécanismes de refroidissement ne sont pas sans effet sur $\langle p^2 \rangle$ pour ces valeurs de la saturation. La deuxième est d'ordre numérique : la valeur maximale de p prise en compte, soit p_{\max} , est seulement de $100\hbar k$, ce qui est insuffisant lorsque l'impulsion quadratique moyenne atteint presque $40\hbar k$. Pour prendre en compte ces deux explications, il suffit de reprendre le calcul, avec $p_{\max} = 150\hbar k$, en choisissant une saturation suffisamment faible pour que la condition (III2b - 2) soit largement respectée pour la masse du césium, soit $s = 10^{-4}$. Nous obtenons alors une impulsion quadratique moyenne de $38.7\hbar k$, dont (III2b - 5) est remarquablement proche.

Le modèle simple que nous venons d'exposer prédit de façon acceptable l'impulsion quadratique moyenne du premier minimum $\left(\delta \simeq -\frac{1}{2}\Gamma \right)$, dès que la saturation est assez faible, ce qui est d'autant plus facilement vérifié que l'atome est plus léger (cf. (III2b - 2)). Le fait que $\langle p^2 \rangle$ soit bien estimé ne prouve pas cependant qu'il y a bonne prédition de toute la dépendance en vitesse de la distribution stationnaire. Si la saturation n'est pas assez faible, les nouveaux mécanismes de refroidissement peuvent être responsables d'un écart non négligeable au comportement gaussien de la distribution du voisinage de $v = 0$, écart pour cette raison de peu de conséquence sur $\langle p^2 \rangle$. Une illustration spectaculaire en est donnée pour la masse du rubidium, sur la fig. III-3, dans un cas où (III2b - 5) est une approximation de l'impulsion quadratique moyenne à 3 % près par excès.

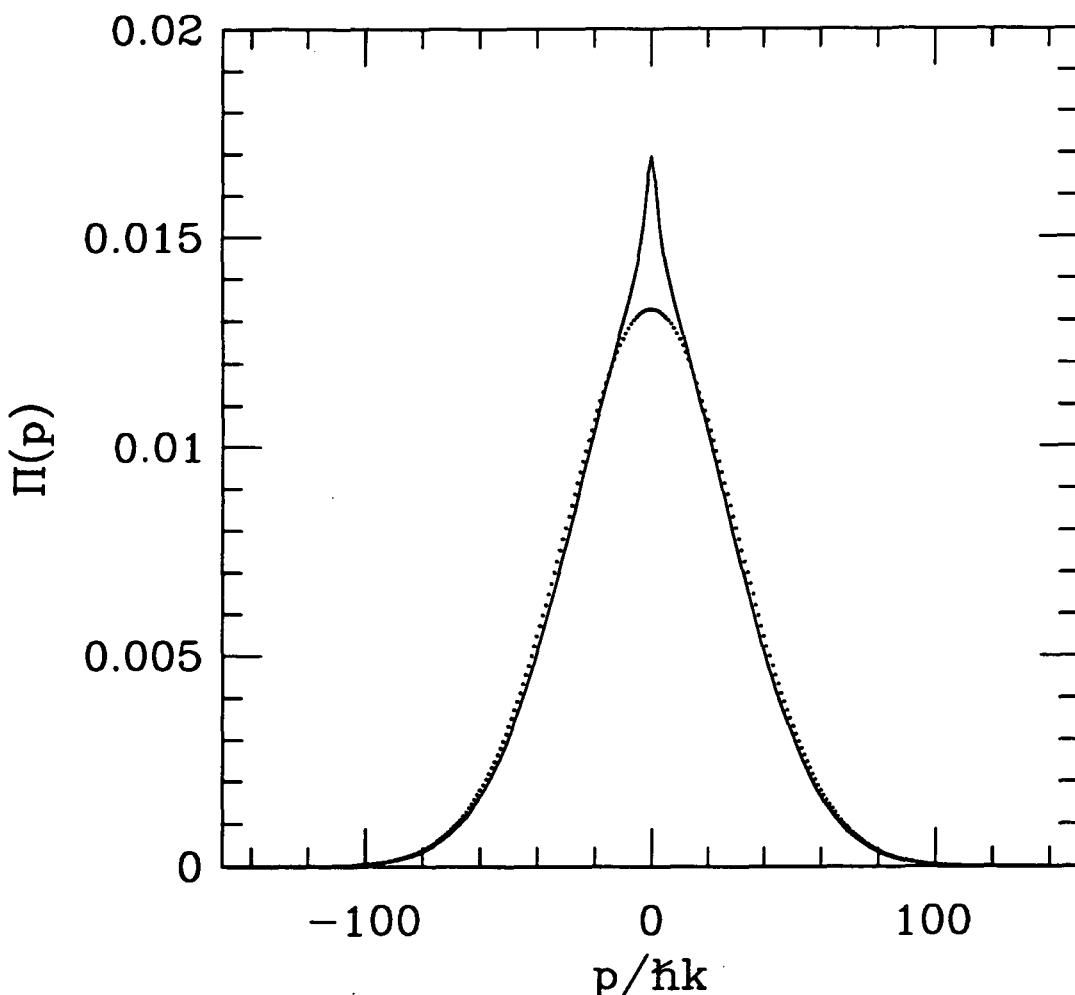


Fig. III-3 : Distribution en impulsion stationnaire pour la masse du rubidium ($M\Gamma = 770\hbar k^2$), à un désaccord $\delta = -\frac{1}{2}\Gamma$ et une saturation $s = 10^{-2}$. La courbe triangulaire est issue de la résolution numérique des équations quantiques avec $\delta p = \hbar k$, $p_{\max} = 150\hbar k$. La gaussienne en pointillés représente la prédition du modèle simple de refroidissement Doppler (voir (III2b - 5)). Les deux courbes sont normalisées à l'aire unité.

c) Recherche numérique de l'optimum absolu du refroidissement sur une raie large

Dans la section précédente, nous avons mis en évidence, à saturation s fixée très faible, deux minima de $\langle p^2 \rangle$ en fonction du désaccord. Le premier, proche de $\delta = -\frac{1}{2}\Gamma$, est interprétable essentiellement en terme de refroidissement Doppler. Le second bénéficie surtout des nouveaux mécanismes de refroidissement. Lorsque $M\Gamma \gg \hbar k^2$, il est beaucoup plus froid, à faible saturation, que le minimum Doppler. Nous allons montrer que l'optimum absolu sur $\langle p^2 \rangle$ à $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2}$ fixé en est issu, en effectuant un calcul pour des valeurs arbitraires de s . Nous chercherons ensuite une estimation assez précise de cet optimum.

(i) Le devenir des deux minima à saturation plus élevée

Nous généralisons les résultats de la fig. III-2 pour la masse de l'atome de rubidium ($M\Gamma = 770\hbar k^2$) à des valeurs plus élevées du paramètre de saturation s avec les mêmes valeurs de p_{\max} et δp . Le calcul jusqu'à $s = 1$ suffit pour comprendre l'évolution des deux minima (voir fig. III-4).

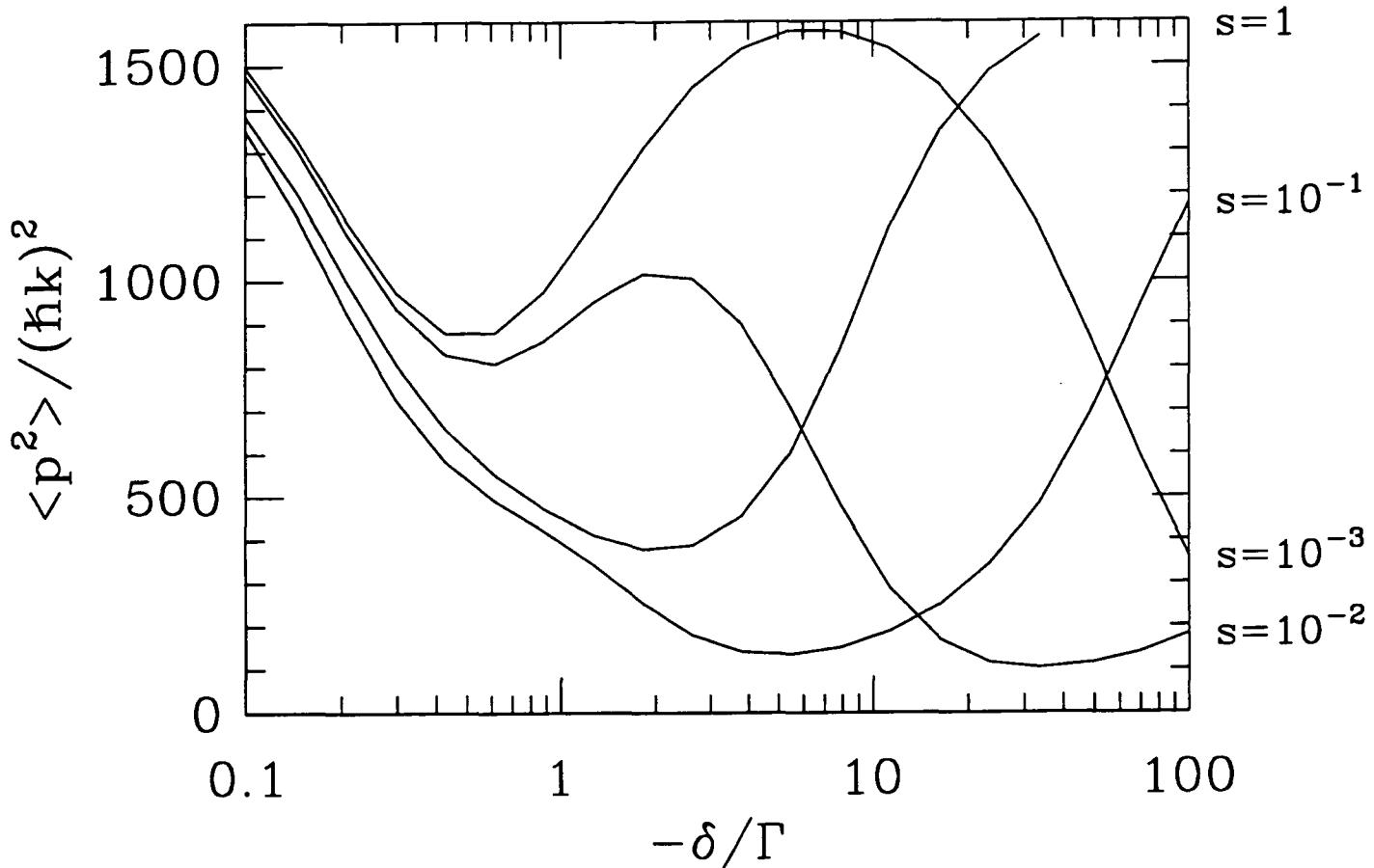


Fig. III-4 : Valeurs de $\frac{\langle p^2 \rangle}{(\hbar k)^2}$ en fonction du désaccord δ en unité de Γ , pour la masse du rubidium ($M\Gamma = 770\hbar k^2$). Le paramètre de saturation est fixé successivement à $s = 10^{-3}, 10^{-2}, \frac{1}{10}$ et 1.

Lorsque le paramètre de saturation augmente, le premier minimum de $\langle p^2 \rangle$ finit par disparaître, sous l'influence de la proximité du second minimum, dont la position en désaccord se rapproche de l'origine. Il est clair, d'autre part, sur la fig. III-4, que le second minimum, qui finit par être le seul, devient plus chaud lorsque le paramètre de saturation

est trop élevé. Ces courbes suggèrent, quand $M\Gamma \gg \hbar k^2$, que l'optimum absolu sur $\langle p^2 \rangle$ se produit à faible saturation (sans préjuger de la valeur précise de s correspondante). Cet optimum est donc issu du second minimum, au voisinage duquel nous allons maintenant faire une étude plus précise.

(ii) Evolution de $\langle p^2 \rangle$ selon un nouveau paramétrage

Pour déterminer l'optimum absolu de $\langle p^2 \rangle$, nous devons nous placer au voisinage du second minimum à s fixé. Il a été constaté, dans le §2b(i), que ce minimum suit, comme fonction de δ et de la masse, la loi approchée $\frac{\hbar|\delta|s}{2E_R} = \text{cte}$. Nous en déduisons un premier paramètre pertinent :

$$u_0 = -\frac{\hbar\delta s}{2E_R} \quad (\text{III2c - 1})$$

Le nombre sans dimension u_0 représente, au signe près, une valeur typique des déplacements lumineux à faible saturation, mesurée en unité d'énergie de recul $E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$. Suivant la convention choisie, u_0 est positif puisque le désaccord δ est négatif. Nous choisissons comme second paramètre $\frac{\delta}{\Gamma}$, plutôt que la saturation s . Il est clair que le paramétrage $\left(u_0, \frac{\delta}{\Gamma}\right)$ est équivalent à la représentation plus habituelle $\left(\frac{\Omega}{\Gamma}, \frac{\delta}{\Gamma}\right)$ d'un point de vue mathématique, mais nous allons voir qu'il est bien mieux adapté à l'étude des nouveaux mécanismes de refroidissement.

Pour les trois valeurs de $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2}$ de la fig. III-2, correspondant à la masse du sodium, du rubidium et du césium, nous représentons, sur la fig. III-5, la valeur de $\frac{\langle p^2 \rangle}{(\hbar k)^2}$ dans l'état stationnaire en fonction du déplacement lumineux réduit u_0 , à $\frac{\delta}{\Gamma}$ fixé. Le calcul numérique est effectué sur l'intervalle $[-100\hbar k, 100\hbar k]$ avec une discrétisation de pas $\hbar k$.

La séparation entre les courbes associées à des valeurs différentes du désaccord n'est pas toujours très nette sur la fig. III-5. Il est possible néanmoins d'effectuer les constatations suivantes.

Pour un désaccord donné, le minimum de $\langle p^2 \rangle$ est atteint au voisinage d'une valeur fixe de u_0 , du moins pour la gamme des désaccords envisagés, valeur de u_0 que l'on peut estimer à 250, pour toutes les masses M considérées. Notons bien que ce minimum se produit en fonction de la saturation, à désaccord fixé, ce qui est un point de vue différent

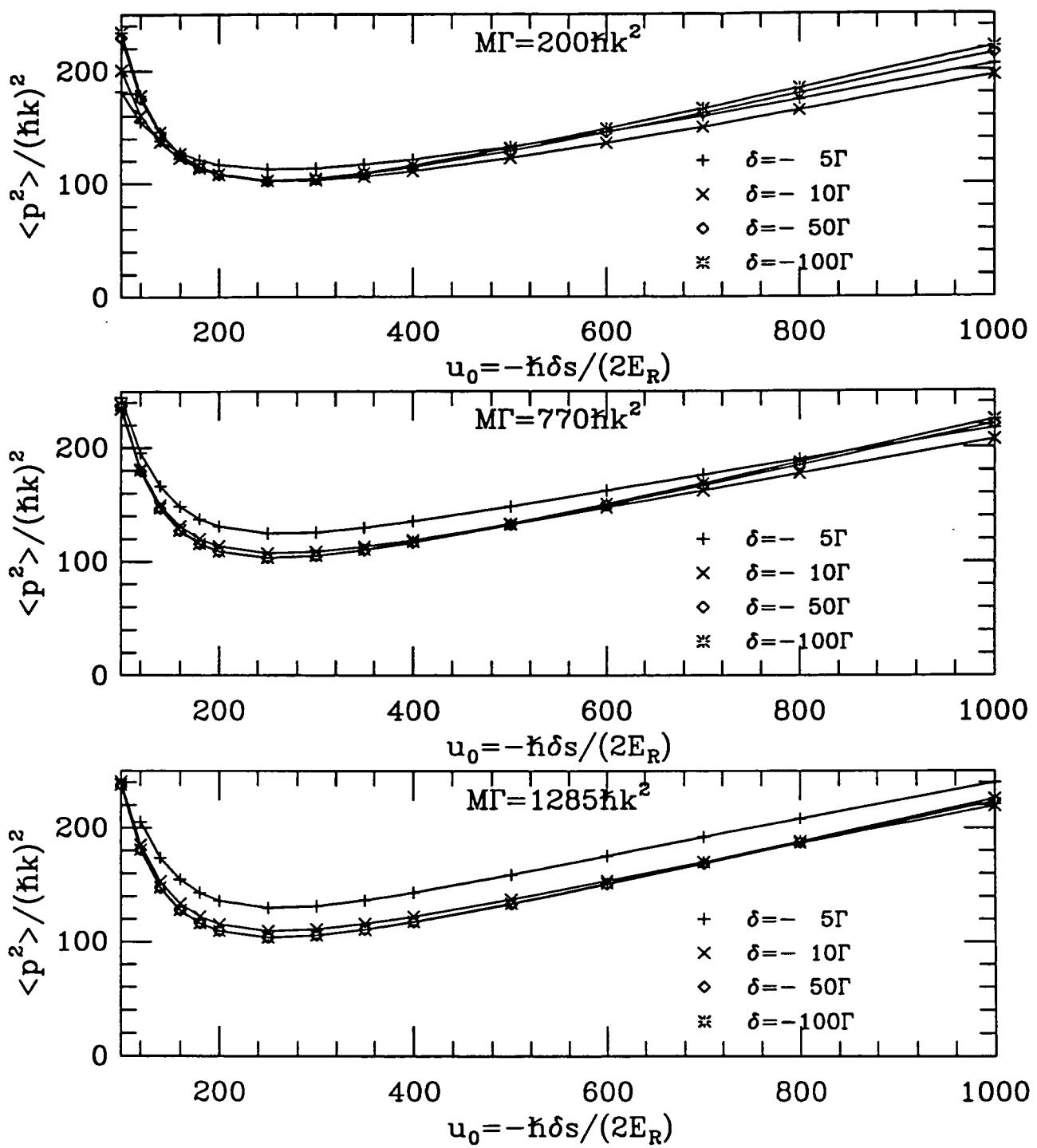


Fig. III-5 : Pour différentes masses atomiques, carré de l'impulsion quadratique moyenne stationnaire en fonction du paramètre u_0 de (III2c - 1), à un désaccord δ fixé de -5Γ , -10Γ , -50Γ et -100Γ respectivement. $\langle p^2 \rangle$ est en unité de $(\hbar k)^2$. et le calcul est effectué sur l'intervalle $[-100\hbar k, 100\hbar k]$. L'existence, à δ fixé, d'un minimum pour $\langle p^2 \rangle$ en fonction de u_0 est expliquée au §3c(v).

de celui des fig. III-2 et III-4.

La fig. III-5 montre également l'intérêt des situations à grand désaccord ($|\delta| \gg \Gamma$). Les valeurs de $\langle p^2 \rangle$ pour la masse du sodium et du césium sont nettement différentes à $\delta = -5\Gamma$, alors qu'elles sont très voisines à $\delta = -100\Gamma$. Cette limite a donc d'abord une vertu universalisante. Elle a de plus l'intérêt de conduire aux situations les plus froides. L'optimum absolu de $\langle p^2 \rangle$, s'il existe, se produit à très grand désaccord.

Cherchons maintenant, sur la fig. III-5, cet optimum absolu. On constate, pour les trois valeurs de $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2}$, et à une valeur donnée de u_0 assez élevée ($u_0 > 800$), l'existence d'une valeur de $\frac{\delta}{\Gamma}$ minimisant $\langle p^2 \rangle$. Lorsqu'on se rapproche de $u_0 = 250$, la situation est moins claire. Pour la masse du sodium, on observe, au voisinage de $u_0 = 250$, et lorsqu'on dispose de la version originale de la figure, que la courbe donnant $\langle p^2 \rangle$ à $\delta = -100\Gamma$ se trouve au-dessus de celle à $\delta = -50\Gamma$. Ceci suggère fortement l'existence d'un optimum absolu sur $\langle p^2 \rangle$ pour cette valeur de la masse. Les valeurs plus élevées de $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2}$ réclament un examen plus soigneux.

Afin de mettre en évidence numériquement un optimum absolu sur $\langle p^2 \rangle$ pour les trois valeurs de la masse de la fig. III-5, nous allons simplement montrer que $\langle p^2 \rangle$ est, à u_0 fixé, une fonction asymptotiquement croissante de $\frac{|\delta|}{\Gamma}$. Nous représentons sur la fig. III-6 les valeurs de $\langle p^2 \rangle$, calculées sur $[-100\hbar k, 100\hbar k]$ en double précision, pour $\delta = -50\Gamma$ et $\delta = -500\Gamma$, cette dernière valeur du désaccord étant assimilée à la limite $\frac{|\delta|}{\Gamma} \rightarrow +\infty$.

Les résultats de la fig. III-6 suggèrent l'existence d'un optimum absolu sur $\langle p^2 \rangle$. Cependant, la variation relative de $\langle p^2 \rangle$ avec le désaccord sur la fig. III-6 est extrêmement faible. En fait, cette variation est inférieure à l'incertitude sur $\langle p^2 \rangle$ issue de la troncature en p , comme le prouve le tableau suivant.

Il est donc difficile numériquement, lorsque $M\Gamma \gg \hbar k^2$, de prouver l'existence d'un optimum absolu sur $\langle p^2 \rangle$ et de déterminer précisément cet optimum, s'il existe. Cette difficulté est cependant sans conséquence physique, puisqu'elle met en jeu des variations extrêmement faibles de $\langle p^2 \rangle$, non mesurables. Il est seulement important de retenir que les situations les plus froides, lorsque $M\Gamma \gg \hbar k^2$, sont obtenues dans la limite $|\delta| \gg \Gamma$ à $u_0 = \frac{\hbar|\delta|s}{2E_R}$ fixé. La moyenne $\langle p^2 \rangle$ et, de façon plus générale, la partie significative de la distribution en impulsion stationnaire, ne dépendent alors plus de la masse de l'atome, mais seulement du paramètre u_0 . Nous résumons ainsi cette limite universalisante :

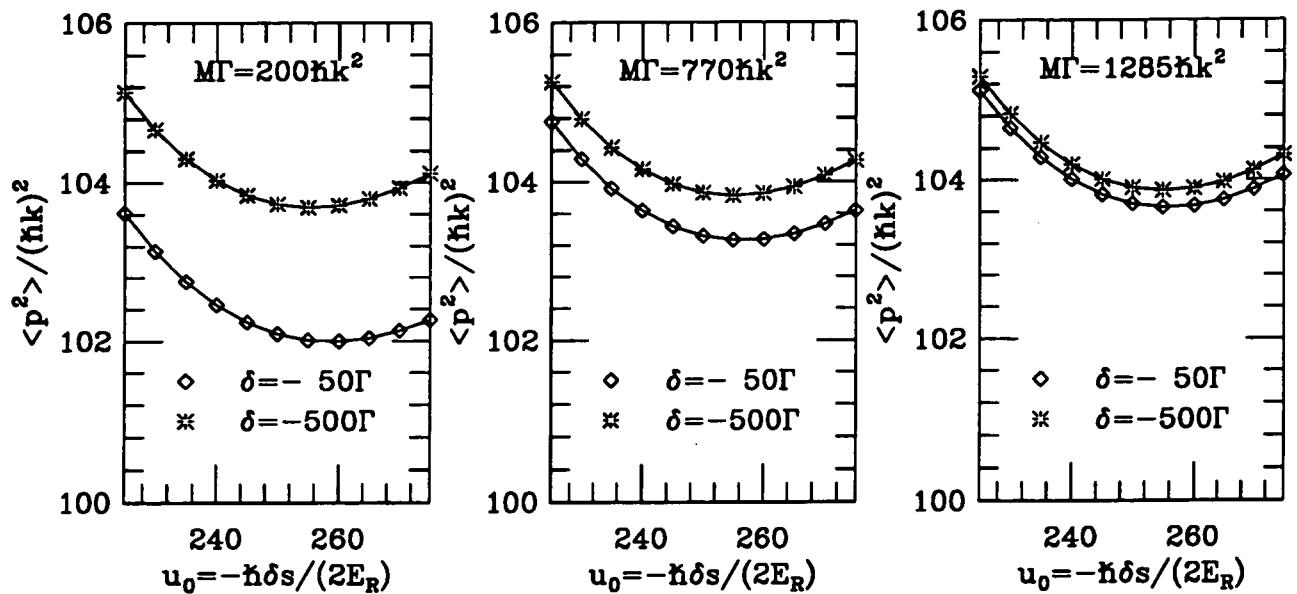


Fig. III-6 : Pour différents paramètres de masses, $\frac{\langle p^2 \rangle}{(\hbar k)^2}$ en fonction de u_0 , à un désaccord fixé δ de -50Γ et -500Γ . Le calcul est effectué en double précision sur $[-100\hbar k, 100\hbar k]$, avec $\delta p = \hbar k$ et un pas de 5 sur u_0 .

	$p_{\max} = 100\hbar k$	$p_{\max} = 120\hbar k$
$\delta = -50\Gamma$	103.70	104.76
$\delta = -500\Gamma$	103.90	104.99

Fig. III-7 : Valeurs de $\frac{\langle p^2 \rangle}{(\hbar k)^2}$ pour $u_0 = 250$, en fonction du désaccord et de p_{\max} . La masse est celle du cézium ($M\Gamma = 1285\hbar k^2$).

$$M\Gamma \gg \hbar k^2 \quad (\text{III2c - 2a})$$

$$|\delta| \gg \Gamma \quad (\text{III2c - 2b})$$

$$u_0 = -\frac{\hbar\delta s}{2E_R} = \text{seul paramètre} \quad (\text{III2c - 2c})$$

Nous allons montrer, dans la suite de ce chapitre III, que cette limite universalisante peut être étudiée à partir des équations quantiques ramenées dans l'état fondamental (cf. II§1c(iii)). En d'autres termes, elle est descriptible à partir des seuls nouveaux mécanismes de refroidissement, à l'exclusion du refroidissement Doppler.

3 - ANALYSE SEMI-CLASSIQUE DU REFROIDISSEMENT APPLICATION A LA TRANSITION $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$

L'approche entièrement quantique du §2 précédent montre que la dispersion Δp des distributions en impulsion stationnaires reste supérieure à $10\hbar k$, sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$. Il semble donc possible de retrouver ces résultats quantiques avec une bonne précision à partir d'un traitement semi-classique du refroidissement. Un tel traitement est intéressant lorsqu'il débouche sur une équation cinétique, de type Fokker-Planck, portant sur la distribution en vitesse [9,11,17,69]. Nous nous attendons à ce qu'une telle équation fasse intervenir la force moyenne $F(v)$ et le coefficient de diffusion en impulsion $D(v)$. Nous indiquons au §3a comment utiliser la procédure générale de calcul de $F(v)$ et $D(v)$ exposée au II§2 en tirant parti des propriétés particulières de la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$. Nous donnons au §3b le comportement de $F(v)$ et $D(v)$ dans le cas de la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$. Le §3c est consacré à l'établissement de l'équation de Fokker-Planck, dont nous avons signalé au I§2e que la forme n'était pas prévisible a priori, à cause de la dépendance en vitesse du coefficient de diffusion $D(v)$. Nous exploitons au §3d la forme stationnaire de cette équation de Fokker-Planck pour la transition atomique $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, sur laquelle les résultats quantiques sont disponibles, et nous examinons la validité de l'équation de Fokker-Planck pour l'étude des transitions à moment cinétique plus élevé ($j_g = 4$ est pris comme modèle).

a) Equations générales pour la force moyenne $F(v)$ et le coefficient de diffusion $D(v)$

(i) En point de vue de Wigner

Nous disposons, pour le calcul de la force moyenne $F(v)$ et du coefficient de diffusion en impulsion $D(v)$, du formalisme général développé dans le II§2b, dont le cadre naturel est la représentation de Wigner $W(z, p, t)$. Nous avons vu que la connaissance de $F(v)$ et $D(v)$ découle de celle des régimes forcés W_0^f et W_1^f selon (II2b - 18) et (II2b - 25). La forme générale du système différentiel à résoudre pour obtenir W_0^f et W_1^f est la suivante :

$$v\partial_z W = M_0(z)[W] + S(z) \quad (\text{III3a} - 1)$$

où $M_0(z)$ est l'opérateur associé aux équations de Bloch ordinaires au point z . Le terme source $S(z)$ est nul lorsque $W = W_0^f$, et se déduit de l'action de l'opérateur force $-M_1(z)$

sur W_0^f lorsque $W = W_1^f$.

Effectuons maintenant la transformation purement interne suivante sur $W(z)$:

$$W_{\text{RT}}(z) = e^{-ik_z j_z / \hbar} W(z) e^{ik_z j_z / \hbar} \quad (\text{III3a - 2})$$

Cette transformation, qui n'est autre que le passage dans le référentiel tournant du I§2b, fait disparaître les dépendances explicites en z des opérateurs $M_0(z)$ et $M_1(z)$, et fait apparaître le champ magnétique fictif proportionnel à la vitesse. Ainsi, l'équation sur \tilde{W}_0^f prend la forme :

$$v \partial_z W_{\text{RT},0}^f = \left\{ \frac{1}{i\hbar} [kvj_z, \cdot] + M_0(z=0) \right\} [W_{\text{RT},0}^f] \quad (\text{III3a - 3})$$

Dans les notations opératoires utilisées dans (III3a - 3) et dans la suite, nous marquons par un \cdot la place de l'argument. L'équation (III3a - 3) admet une solution $W_{\text{RT},0}^f$ indépendante de z , et c'est la solution cherchée, si l'on admet qu'il y a unicité. Par conséquent, le terme source qui détermine $W_{\text{RT},0}^f$ ne dépend pas de z , et $W_{\text{RT},1}^f$ non plus. La détermination des régimes forcés, après passage dans le référentiel tournant, se ramène donc simplement au calcul d'états stationnaires, solutions des équations linéaires :

$$\begin{cases} \frac{1}{i\hbar} [kvj_z, W_{\text{RT},0}^{\text{st}}] + M_0(0) [W_{\text{RT},0}^{\text{st}}] = 0 \\ \text{Tr} [W_{\text{RT},0}^{\text{st}}] = 1 \end{cases} \quad (\text{III3a - 4a})$$

$$\begin{cases} \frac{1}{i\hbar} [kvj_z, W_{\text{RT},1}^{\text{st}}] + M_0(0) [W_{\text{RT},1}^{\text{st}}] = M_1(0) [W_{\text{RT},0}^{\text{st}}] - W_{\text{RT},0}^{\text{st}} \text{Tr} \{ M_1(0) [W_{\text{RT},0}^{\text{st}}] \} \\ \text{Tr} [W_{\text{RT},1}^{\text{st}}] = 0 \end{cases} \quad (\text{III3a - 4b})$$

ce qui constitue une grande simplification et conduit naturellement à $F(v)$ et $D(v)$ indépendants de la position, à l'aide de (II2b - 23) et (II2b - 30).

(ii) Dans la base des familles

Nous avons montré, au §1c, l'intérêt, pour l'étude des équations quantiques, de la transformation unitaire S_F associée au passage dans la base des familles. Il suffit alors, si l'on n'est pas intéressé par le phénomène de diffusion spatiale, d'étudier la partie diagonale en p , $\rho_F(p)$, de la matrice densité. Nous désirons maintenant définir une force moyenne $F_F(v)$ et un coefficient de diffusion $D_F(v)$ pour un atome de vitesse v imposée en travaillant directement dans la représentation des familles :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} \langle p \rangle_F = F_F(v) \quad (\text{III3a - 5a})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\langle p^2 \rangle_F - \langle p \rangle_F^2] = D_F(v) \quad (\text{III3a - 5b})$$

Nous reportons à l'appendice A_{III} le soin de prouver que ces définitions vont conduire en fait à $F_F(v) = F(v)$ et $D_F(v) = D(v)$, ce qui n'est pas évident puisque c'est $P + kj_z$ et non pas P qui est l'opérateur impulsion dans la base des familles. Dans la suite, nous maintiendrons les notations $F_F(v)$ et $D_F(v)$ pour rappeler que le calcul est effectué dans la représentation des familles.

Les valeurs moyennes de p et p^2 sont déduites de $\rho_F(p)$, lorsque l'évolution temporelle de $\rho_F(p)$ correspond à la situation d'un atome de vitesse imposée. Le hamiltonien externe correspondant, après action de S_F , s'écrit :

$$H_{\text{at},F}^{\text{ext}} = S_F^\dagger P v S_F = Pv + kvj_z \quad (\text{III3a - 6})$$

et contient seulement comme terme supplémentaire le couplage au champ magnétique fictif, à l'exclusion du terme quadratique en j_z de (III1c - 7a). On obtient donc l'équation suivante pour $\rho_F(p)$:

$$\partial_t \rho_F(p, t) = \frac{1}{i\hbar} [kvj_z + V_{AL}(0) - \hbar\delta P_e, \rho_F(p)] + \partial_t \rho_F(p) |_{\text{relax}} \quad (\text{III3a - 7})$$

les termes de relaxation étant exactement ceux de (III1c - 11). Selon la procédure exposée dans II§2b, le calcul des comportements asymptotiques (III3a - 5) se déduit de (III3a - 7) par intégration sur p , après multiplication par p^0 , p^1 et p^2 successivement. Les matrices $W_0(z)$ et $W_1(z)$ sont remplacées ici par :

$$W_{F,0} = \int dp \rho_F(p) \quad (\text{III3a - 8a})$$

$$W_{F,1} = \int dp p\rho_F(p) \quad (\text{III3a - 8b})$$

dépendant seulement du temps (et plus de la position !), dépendance régie par des équations de la forme :

$$\frac{d}{dt} W_{F,0} = M_{F,0} [W_{F,0}] \quad (\text{III3a - 9a})$$

$$\frac{d}{dt} W_{F,1} = M_{F,0} [W_{F,1}] - M_{F,1} [W_{F,0}] \quad (\text{III3a - 9b})$$

Les expressions des opérateurs $M_{F,0}$ et $M_{F,1}$, ainsi que celle de $M_{F,2}$ utile pour le calcul du coefficient de diffusion, se déduisent de (III3a - 7) selon la procédure indiquée :

$$M_{F,0} = \frac{1}{i\hbar} [kvj_z, \cdot] + M_0(z=0) \quad (\text{III3a - 10a})$$

$$M_{F,1} = -\hbar k \Gamma \sum_{q=0,\pm 1} q \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger [\cdot] \Delta_q^{(+)} \quad (\text{III3a - 10b})$$

$$M_{F,2} = \frac{1}{2} \sum_{q=0,\pm 1} \left\langle (p_S - \hbar k q)^2 \right\rangle_q \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger [\cdot] \Delta_q^{(+)} \quad (\text{III3a - 10c})$$

Dans (III3a - 10c), p_S désigne l'impulsion des photons de fluorescence selon l'axe des ondes laser Oz . La moyenne notée $\langle \cdot \rangle_q$ est effectuée sur p_S selon les distributions $\mathcal{N}_q(p_S)$ données par (II1c - 30). Les états stationnaires utiles pour le calcul de la force moyenne et de la diffusion en impulsion sont définis, à l'image de (III3a - 4), par :

$$\begin{cases} M_{F,0} [W_{F,0}^{\text{st}}] = 0 \\ Tr [W_{F,0}^{\text{st}}] = 1 \end{cases} \quad (\text{III3a - 11a})$$

$$\begin{cases} M_{F,0} [W_{F,1}^{\text{st}}] = M_{F,1} [W_{F,0}^{\text{st}}] - W_{F,0}^{\text{st}} Tr \{ M_{F,1} [W_{F,0}^{\text{st}}] \} \\ Tr [W_{F,1}^{\text{st}}] = 0 \end{cases} \quad (\text{III3a - 11b})$$

On constate, en rapprochant (III3a - 4a), (III3a - 10a) et (III3a - 11a), que les états stationnaires internes $W_{RT,0}^{\text{st}}$ et $W_{F,0}^{\text{st}}$ coïncident exactement. Cependant, cette propriété ne s'étend pas a priori à $W_{RT,1}^{\text{st}}$ puisque l'opérateur force $-M_1(z = 0)$ dans le point de vue de Wigner est différent de l'opérateur force associé à (III3a - 10b). Alors que $M_1(z = 0)$ fait intervenir dans son action en particulier les cohérences optiques de la matrice densité interne, $M_{F,1}$ ne fait intervenir que les éléments de la matrice densité dans l'état excité. La raison en est que les termes non locaux en p ne sont pas les mêmes dans les deux représentations. Dans le point de vue habituel, c'est le couplage entre atome et modes laser qui contribue au changement moyen d'impulsion, les photons de fluorescence emportant une quantité de mouvement p_S nulle en moyenne. Comme ce couplage se fait par l'intermédiaire du dipôle atomique, $\text{Tr}(M_1[W_0])$ dépend directement des cohérences optiques de W_0 . Dans la représentation des familles, p ne représente plus l'impulsion atomique, et l'on constate sur (III1c - 11) que seuls les processus d'émission spontanée peuvent modifier le nombre p , d'une grandeur qui n'est pas simplement p_S . La force moyenne déduite de (III3a - 10b) a d'ailleurs l'expression suggestive :

$$F_F(v) = -\text{Tr}(M_{F,1}[W_{F,0}^{\text{st}}]) \quad (\text{III3a - 12a})$$

$$= \sum_{q=0,\pm 1} \hbar k q \sum_m \Gamma_{em \rightarrow gm-q} \langle e m | W_{F,0}^{\text{st}} | e m \rangle \quad (\text{III3a - 12b})$$

où les taux de désexcitation $\Gamma_{em \rightarrow gm'}$ sont définis par (II2b - 32). Cette expression (III3a - 12) prouve de façon très générale que, dans la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$, la force moyenne $F(v)$ est inférieure à $\hbar k \Gamma$ fois la fraction d'atomes excités dans l'état stationnaire interne à la vitesse imposée v . Cette propriété n'apparaît pas clairement en point de vue de Wigner, comme nous l'avions déjà constaté au I§2c.

Pour étudier la forme que prend le coefficient de diffusion dans la représentation des familles, reprenons la décomposition (II2b - 30a) en $D = D_0 + D_1$ du coefficient de diffusion. $D_{F,0}$ est la composante de ce coefficient directement déductible de l'état stationnaire interne $W_{F,0}^{\text{st}}$ via l'opérateur $M_{F,2}$. On peut l'écrire sous la forme :

$$D_{F,0}(v) = \text{Tr}(M_{F,2}[W_{F,0}^{\text{st}}]) \quad (\text{III3a - 13a})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{q=0,\pm 1} \left\langle (p_S - \hbar k q)^2 \right\rangle_q \sum_m \Gamma_{em \rightarrow gm-q} \langle e m | W_{F,0}^{\text{st}} | e m \rangle \quad (\text{III3a - 13b})$$

$D_{F,0}$ diffère donc de son homologue D_0 calculé en point de vue de Wigner, ce dernier décrivant seulement les fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence. Nous précisons plus loin ce que représente alors $D_{F,0}(v)$. Quant à $D_{F,1}$, il se déduit de la somme dans (III3a - 12) par changement de $W_{F,0}^{\text{st}}$ en $W_{F,1}^{\text{st}}$:

$$D_{F,1}(v) = -Tr (M_{F,1} [W_{F,1}^{\text{st}}]) \quad (\text{III3a - 14a})$$

$$= \sum_{q=0,\pm 1} \hbar k q \sum_m \Gamma_{em \rightarrow gm-q} \langle e m | W_{F,1}^{\text{st}} | e m \rangle \quad (\text{III3a - 14b})$$

Il diffère également de D_1 calculé en point de vue de Wigner, puisque l'on doit avoir $D_F(v) = D_{F,0}(v) + D_{F,1}(v) = D(v)$, comme le prouve l'appendice A_{III}.

Nous allons donner pour terminer une interprétation physique des expressions (III3a - 12) et (III3a - 13) de la force moyenne et de la composante $D_{F,0}$ de la diffusion. Cette interprétation repose sur le fait déjà signalé que, dans la représentation des familles, seuls les processus d'émission spontanée peuvent changer le nombre p , une diminution du moment cinétique atomique interne de $q\hbar$ selon Oz à l'issue de l'émission d'un photon de fluorescence d'impulsion p_S changeant p de :

$$\delta p = \hbar k q - p_S \quad (\text{III3a - 15})$$

Il est instructif d'examiner les prédictions d'un modèle extrêmement simple [12]. Considérons les changements de nombre p associés aux émissions spontanées successives comme des variables aléatoires δp_i . Plaçons-nous dans le régime où ces variables aléatoires sont stationnaires, ce qui revient à choisir un intervalle de temps T très long devant le temps de relaxation T_{int} des variables atomiques internes :

$$\langle \delta p_i \rangle = \langle \delta p \rangle \quad \forall i \quad (\text{III3a - 16a})$$

$$\langle (\delta p_i)^2 \rangle = \langle (\delta p)^2 \rangle \quad \forall i \quad (\text{III3a - 16b})$$

Il est facile de déterminer, à partir de $W_{F,0}^{\text{st}}$, les moyennes $\langle \delta p \rangle$ et $\langle (\delta p)^2 \rangle$, si l'on sait que le flux d'émission spontanée depuis le sous-niveau excité $|e m\rangle$ avec diminution du moment cinétique atomique interne de $q\hbar$ selon Oz est $\Gamma_{em \rightarrow gm-q} \langle e m | W_{F,0}^{\text{st}} | e m \rangle$. Il reste

alors à sommer sur la direction d'émission du photon de fluorescence à q fixé. On obtient finalement :

$$\langle(\delta p)^n\rangle = \frac{1}{\Gamma_{\text{fluo}}} \sum_{q=0,\pm 1} \langle(\hbar k q - p_S)^n\rangle_q \sum_m \Gamma_{em \rightarrow g_m - q} \langle e m | W_{F,0}^{\text{st}} | e m \rangle \quad (\text{III3a - 17})$$

où l'on a introduit le flux moyen de fluorescence :

$$\Gamma_{\text{fluo}} = \Gamma \sum_m \langle e m | W_{F,0}^{\text{st}} | e m \rangle \quad (\text{III3a - 18})$$

Nous voulons calculer les moyennes de Δp et $(\Delta p)^2$, où Δp désigne le changement de nombre p pendant T :

$$\Delta p = \sum_{i=1}^N \delta p_i \quad (\text{III3a - 19})$$

Notons que N , nombre d'émissions spontanées pendant T , est également une variable aléatoire, dont nous connaissons déjà la moyenne :

$$\langle N \rangle = \Gamma_{\text{fluo}} T \quad (\text{III3a - 20})$$

Le calcul de la force moyenne ne présente pas de difficulté particulière. Moyennons d'abord (III3a - 19) à N fixé, sur la séquence des émissions spontanées, puis moyennons sur N à T fixé :

$$\langle \Delta p \rangle_N = \langle \delta p \rangle N \quad (\text{III3a - 21a})$$

$$\langle \Delta p \rangle_T = \langle \delta p \rangle \langle N \rangle_T = F_F(v)T \quad (\text{III3a - 21b})$$

On retrouve ainsi exactement l'expression (III3a - 12b). En ce qui concerne la diffusion en impulsion, nous allons faire des hypothèses simplificatrices, dont l'intérêt est de préciser le sens physique de $D_{F,0}$. Supposons que les variables aléatoires δp_i sont indépendantes :

$$\langle \delta p_i \delta p_j \rangle = \langle \delta p_i \rangle \langle \delta p_j \rangle \quad \text{si} \quad i \neq j \quad (\text{III3a - 22})$$

et que N obéit à une statistique poissonienne :

$$\langle N(N - 1) \rangle_T = \langle N \rangle_T^2 \quad (\text{III3a} - 23)$$

Sous ces hypothèses, il est possible de calculer la moyenne de $(\Delta p)^2$ à N fixé puis à T fixé :

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle_N = N \langle (\delta p)^2 \rangle + N(N - 1) \langle \delta p \rangle^2 \quad (\text{III3a} - 24a)$$

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle_T = \langle N \rangle_T \langle (\delta p)^2 \rangle + \langle N \rangle_T^2 \langle \delta p \rangle^2 \quad (\text{III3a} - 24b)$$

Le coefficient de diffusion en p correspondant :

$$\frac{1}{2T} [\langle (\Delta p)^2 \rangle_T - \langle \Delta p \rangle_T^2] = \frac{1}{2} \Gamma_{\text{fluo}} \langle (\delta p)^2 \rangle \quad (\text{III3a} - 25)$$

vaut exactement $D_{F,0}(v)$, d'après (III3a - 13b). Ce modèle simple donne donc seulement une partie de la diffusion, ce qui était prévisible puisque l'on sait que les variables aléatoires δp_i ne sont en fait pas toujours indépendantes (voir I§2d). Le calcul que nous venons d'effectuer est néanmoins intéressant, puisqu'il prouve que la composante $D_{F,1}$ de la diffusion, donnée par (III3a - 14), représente tous les écarts à ce modèle simple, qu'ils soient dus à une statistique non poissonienne sur N (ce qui est visible, pour des variables δp_i indépendantes, seulement si $\langle \delta p \rangle \neq 0$) ou à des corrélations entre les δp_i successifs. C'est sur $D_{F,1}$ que se manifeste l'effet de mémoire discuté à propos de la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ dans le I§2d. Cette interprétation est confirmée par un calcul de $D_{F,0}$ et $D_{F,1}$ à vitesse nulle, pour la même transition atomique $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ et sans hypothèse de faible saturation de la transition [39].

b) Contribution à $F(v)$ et $D(v)$ des nouveaux mécanismes de refroidissement

Nous nous limitons aux situations de faible saturation, qui conduisent aux distributions les plus froides d'après les résultats quantiques du III§2. Nous présentons d'abord un calcul numérique de $F(v)$ et $D(v)$, réalisé sans approximation sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$. Grâce à la grande différence de leurs lois d'échelle en vitesse à faible saturation, nous pouvons séparer ainsi la contribution du refroidissement Doppler de celle des nouveaux mécanismes. Nous étudions ensuite la force $\bar{F}(v)$ et la diffusion

$\bar{D}(v)$ associées au refroidissement à gradient de polarisation. Nous présentons un traitement adapté à la limite des grands désaccords, qui permet d'obtenir, lorsque $|\delta| \gg \Gamma$, une expression de $\bar{F}(v)$ et $\bar{D}(v)$ pour $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$.

(i) Séparation à faible saturation des nouveaux mécanismes et du refroidissement Doppler sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$

Le calcul est effectué dans la représentation des familles. Les deux systèmes d'équations linéaires (III3a - 11a) et (III3a - 11b) sont résolus numériquement dans la base $\{|m\rangle_z\}$ [70]. Comme la matrice $M_{F,0}$ n'est pas inversible, on supprime l'une des équations dans chaque système pour la remplacer par la condition de "normalisation" portant sur la trace de $W_{F,0}^{\text{st}}$ et $W_{F,1}^{\text{st}}$. La structure à coefficients complexes des matrices est conservée pour la facilité d'écriture. Le résultat numérique est valable pour des valeurs arbitraires de la vitesse atomique et de l'intensité laser.

Examinons d'abord la dépendance en vitesse complète de la force et du coefficient de diffusion. Nous nous plaçons à faible saturation ($s = \frac{1}{50}$), dans l'intention de pouvoir séparer aisément les contributions des nouveaux mécanismes et du refroidissement Doppler. Nous choisissons de plus un désaccord assez élevé ($\delta = -5\Gamma$), ce qui nous situe au voisinage de l'optimum absolu sur $\langle p^2 \rangle$ dans l'état stationnaire pour un atome fictif de masse telle que $M\Gamma = 2500\hbar k^2$, d'après les calculs numériques quantiques du III§2. Les comportements de $F(v)$ et $D(v)$ en fonction de la vitesse, pour ce choix des paramètres, sont représentés sur la fig. III-8.

La variation de la force moyenne avec la vitesse v , sur la fig. III-8, est, au premier coup d'oeil, tout à fait typique du refroidissement Doppler, puisqu'elle présente bien les résonances attendues, centrées en $v = \pm \frac{\delta}{k}$. Un examen plus attentif révèle un comportement à très courte échelle autour de $v = 0$, attribuable au refroidissement à gradient de polarisation, que nous allons étudier plus loin. L'allure générale du coefficient de diffusion comme fonction de la vitesse est également de type Doppler résonnant. La structure en double pic en $v = \pm \frac{\delta}{k}$ est plus délicate à interpréter ; pour la comprendre, il faut réaliser que le paramètre de saturation de la transition dans l'onde polarisée σ_+ compte tenu de la vitesse de l'atome :

$$s_+(v) = \frac{\frac{1}{2}\Omega^2}{(\delta - kv)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \quad (\text{III3b - 1})$$

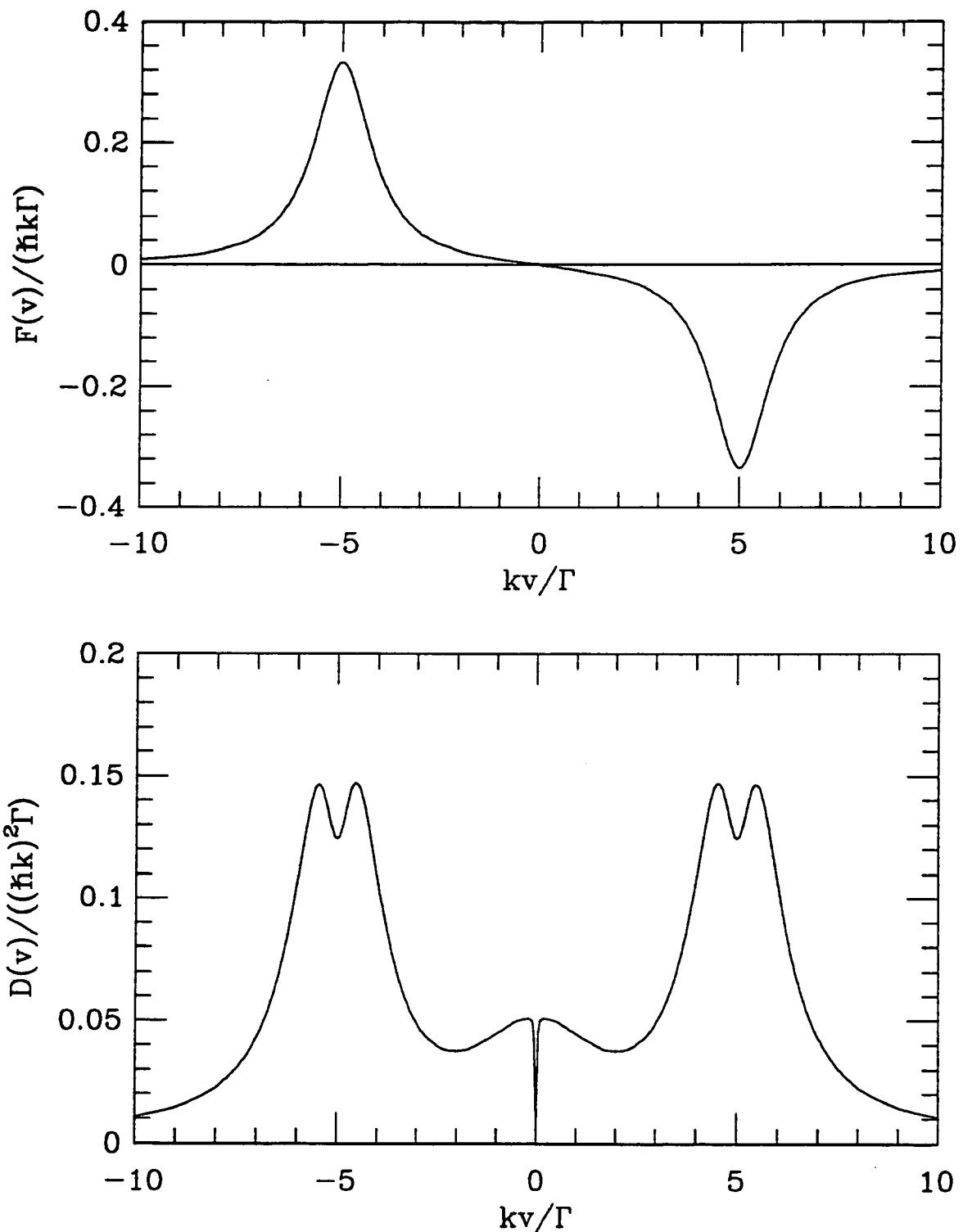


Fig. III-8 : Pour un désaccord $\delta = -5\Gamma$ et un paramètre de saturation $s = \frac{1}{50}$, comportement, sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, de la force moyenne $F(v)$ et du coefficient de diffusion en impulsion $D(v)$. La vitesse atomique est en unité de $\frac{\Gamma}{k}$. $F(v)$ et $D(v)$ sont exprimés respectivement en unité de $\hbar k \Gamma$ et $(\hbar k)^2 \Gamma$.

vaut environ 2 sur la fig. III-8 (puisque $\Omega \simeq \Gamma$), ce qui place les pics de résonance Doppler en dehors du régime de faible saturation. En utilisant l'expression bien connue du coefficient de diffusion en impulsion d'un atome à deux niveaux dans une onde plane progressive [9], on vérifie que la structure en double pic en $v = \pm \frac{\delta}{k}$ est due au caractère subpoissonien de la statistique des absorptions de photons par l'atome. Quant à la contribution des nouveaux mécanismes à la diffusion en impulsion, elle est ici parfaitement claire et prend la forme d'une "singularité" en $v = 0$.

Concentrons-nous maintenant, dans le régime $s \ll 1$, sur la contribution des nouveaux mécanismes à $F(v)$ et $D(v)$. Il est agréable, pour cela, d'effectuer quelques changements d'échelle. D'une part sur la vitesse : la discussion qualitative du I§2d désigne comme paramètre pertinent $\frac{kv}{\delta s}$ (ou $\frac{kv}{\Gamma s}$ lorsque δ est proche de Γ) au lieu de $\frac{kv}{\delta}$ ou $\frac{kv}{\Gamma}$. D'autre part sur les grandeurs étudiées elles-mêmes : nous savons que, au voisinage de $v = 0$, $F(v)$ reste inférieure à $\frac{1}{2}\hbar k\Gamma s$ et que $D(v)$ est d'ordre de grandeur $(\hbar k)^2\Gamma s$. On s'attend alors à ce que ces changements d'unité absorbent l'essentiel de la dépendance en s de $F(v)$ et $D(v)$ à désaccord fixé, du moins lorsque l'influence du mécanisme Doppler est petite. Cette prédiction est confirmée par la fig. III-9, obtenue pour $\delta = -5\Gamma$ et diverses valeurs du paramètre de saturation. Le comportement de $F(v)$ et $D(v)$ à $s = \frac{1}{10}$ est encore marqué fortement par le refroidissement Doppler, comme le montre son écart à la courbe $s = 0$, obtenue par extrapolation à la limite $s \rightarrow 0$. Il n'en va plus de même à $s = \frac{1}{50}$. On peut vérifier que cette extinction de la contribution Doppler à la limite $s \rightarrow 0$ se produit de façon relativement uniforme en désaccord δ en reprenant le calcul pour les valeurs de s de la fig. III-9 mais pour une valeur plus forte du désaccord ($\delta = -50\Gamma$ par exemple).

(ii) Force et diffusion dues aux nouveaux mécanismes

Dans le paragraphe précédent, nous avons constaté numériquement que la force moyenne $F(v)$ et le coefficient de diffusion $D(v)$ admettent, à désaccord fixé et lorsque le paramètre de saturation tend vers 0, une limite finie, à condition d'effectuer des changements d'échelle judicieuse, en particulier sur la vitesse, que nous rappelons ici :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar k \Gamma s} F \left(v = \frac{|\delta|s}{k} u; \frac{\delta}{\Gamma}; s \right) = \mathcal{F} \left(u; \frac{\delta}{\Gamma} \right) \quad (\text{III3b - 2a})$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(\hbar k)^2 \Gamma s} D \left(v = \frac{|\delta|s}{k} u; \frac{\delta}{\Gamma}; s \right) = \mathcal{D} \left(u; \frac{\delta}{\Gamma} \right) \quad (\text{III3b - 2b})$$

Cette propriété est générale, puisqu'elle est vérifiée pour toute transition $j_g \rightarrow j_e =$

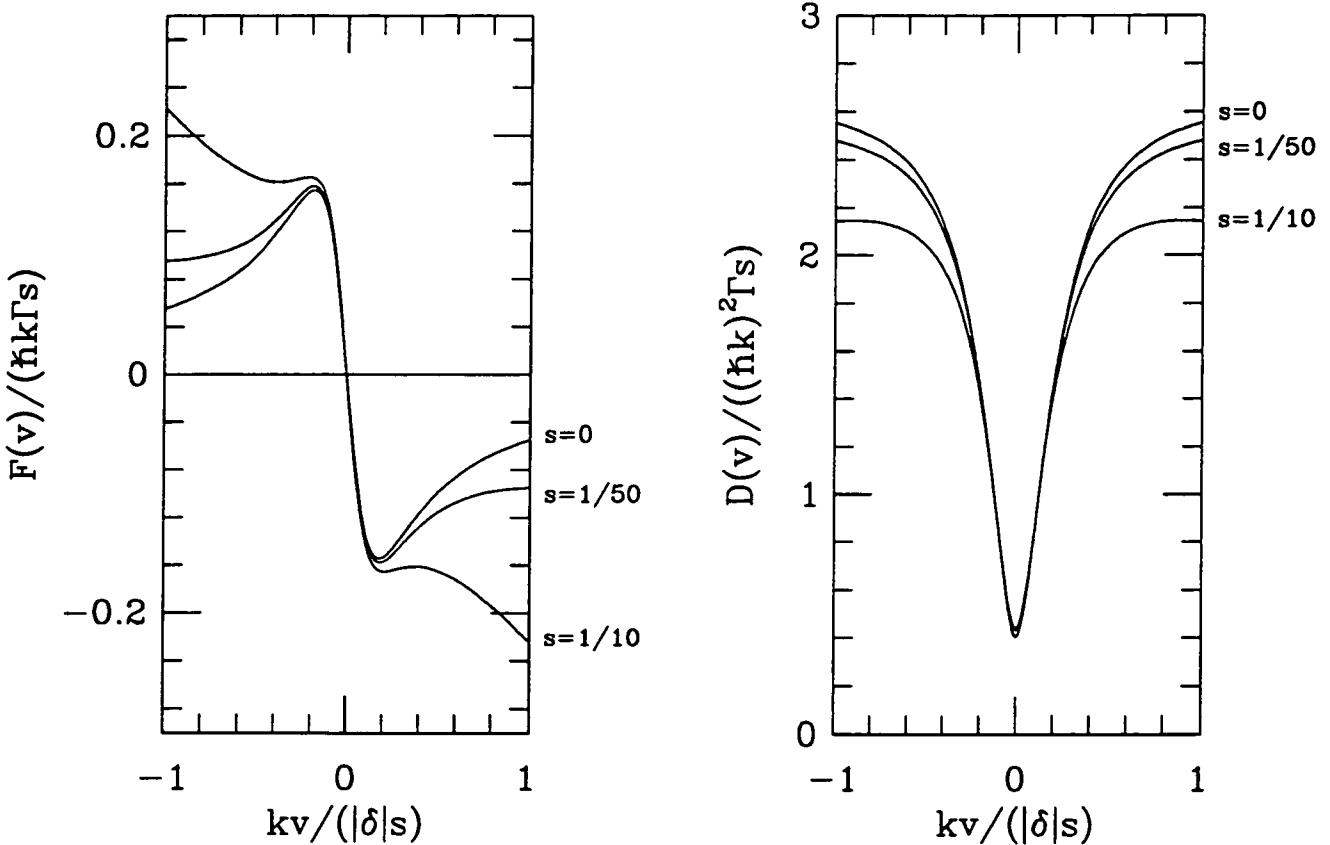


Fig. III-9 : Pour un désaccord $\delta = -5\Gamma$, comportement de $F(v)$ et $D(v)$ pour $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ au voisinage de la vitesse nulle. Les valeurs du paramètre de saturation s sont $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$ et la quantité très faible $s = 10^{-4}$ prise comme limite $s = 0$. Les unités de vitesse $\left(\frac{\delta s}{k}\right)$, de force $(\hbar k \Gamma s)$ et de diffusion $((\hbar k)^2 \Gamma s)$ sont adaptées aux nouveaux mécanismes de refroidissement.

$j_g + 1$. Nous allons ici identifier $\mathcal{F}(u)$ et $\mathcal{D}(u)$ comme les contributions des nouveaux mécanismes de refroidissement et étudier leur comportement en fonction de u . Notons que ce comportement de \mathcal{F} et \mathcal{D} à $\delta = -5\Gamma$ et pour la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ a déjà été représenté, sur la fig. III-9 (courbe correspondant au cas limite $s = 0$).

Les comportements asymptotiques (III3b - 2) peuvent être établis à partir de la procédure standard de réduction des équations de Bloch dans l'état fondamental. D'une part, la faiblesse de kv devant Γ à la limite $s \rightarrow 0$ permet de négliger l'influence de la vitesse de l'atome (donc, dans la présente configuration laser, du champ magnétique fictif) sur l'évolution des cohérences optiques et des éléments de matrice dans l'état excité. Cette

approximation fait disparaître les échelles de variation $kv \sim \Gamma$ ou $kv \sim \delta$ de $F(v)$ et de $D(v)$, donc fait disparaître tout ce qui, sur la fig. III-8, était typique du refroidissement Doppler. D'autre part, la faiblesse du paramètre de saturation s permet de négliger le couplage des cohérences optiques aux éléments de matrice dans l'état excité.

Cette procédure de réduction de la dynamique dans l'état fondamental a été effectuée en détail sur les équations entièrement quantiques dans le II§1c. Il suffit de la reprendre en l'appliquant aux équations quantiques (III3a - 7) écrites dans la représentation des familles pour un atome de vitesse v imposée. Nous donnons simplement la forme du résultat. Nous utilisons la notation $\bar{\rho}$ pour indiquer qu'il y a eu réduction dans l'état fondamental, et nous omettons l'indice F associé au passage dans la représentation des familles pour alléger l'écriture. L'évolution temporelle de $\bar{\rho}(p, t) = (\rho_F)_{gg}(p, t)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\rho}(p, t) &= \frac{1}{i\hbar} [\bar{H}(v), \bar{\rho}] - \frac{1}{4} \Gamma s \left\{ \mathcal{V}^{(-)}(0) \mathcal{V}^{(+)}(0), \bar{\rho} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \Gamma s \sum_{q=0, \pm 1} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_q(p_S) \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger \mathcal{V}^{(+)}(0) \bar{\rho}(p + p_S - \hbar k q) \mathcal{V}^{(-)}(0) \Delta_q^{(+)} \end{aligned} \quad (\text{III3b - 3})$$

Le hamiltonien interne paramétré par la vitesse $\bar{H}(v)$ décrit l'effet dans l'état fondamental d'un champ magnétique proportionnel à la vitesse et d'un champ électrique uniforme polarisé linéairement selon Oy :

$$\bar{H}(v) = kvj_z + \frac{1}{2}\hbar\delta s \mathcal{V}^{(-)}(0) \mathcal{V}^{(+)}(0) \quad (\text{III3b - 4a})$$

$$\mathcal{V}^{(+)}(0) = \left(\mathcal{V}^{(-)}(0) \right)^\dagger = \Delta_+^{(+)} + \Delta_-^{(+)} \quad (\text{III3b - 4b})$$

Pour obtenir, dans le cadre des approximations de cette réduction, les expressions de la force moyenne $\bar{F}(v)$ et du coefficient de diffusion en impulsion $\bar{D}(v)$, il suffit de reprendre la procédure générale du II§2b. Cette procédure générale a déjà été adaptée à la représentation des familles au §3a(ii). Les états stationnaires restreints dans l'état fondamental, notés \bar{W}_0^{st} et \bar{W}_1^{st} , sont les solutions d'équations de la même forme que (III3a - 11), à condition que tous les opérateurs M_F et les matrices W_F soient remplacés par les opérateurs \bar{M} et les matrices \bar{W} . Donnons l'expression des opérateurs \bar{M} déduits de (III3b - 3) par développement en puissances de $\hbar k$:

$$\begin{aligned}\bar{M}_0 [\bar{W}] &= \frac{1}{i\hbar} [\bar{H}(v), \bar{W}] - \frac{1}{4} \Gamma s \left\{ \mathcal{V}^{(-)}(0) \mathcal{V}^{(+)}(0), \bar{W} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Gamma s \sum_{q=0,\pm 1} \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger \mathcal{V}^{(+)}(0) \bar{W} \mathcal{V}^{(-)}(0) \Delta_q^{(+)}\end{aligned}\quad (\text{III3b - 5a})$$

$$\bar{M}_1 [\bar{W}] = -\frac{1}{2} \Gamma s \sum_{q=0,\pm 1} \hbar k q \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger \mathcal{V}^{(+)}(0) \bar{W} \mathcal{V}^{(-)}(0) \Delta_q^{(+)} \quad (\text{III3b - 5b})$$

$$\bar{M}_2 [\bar{W}] = \frac{1}{4} \Gamma s \sum_{q=0,\pm 1} \left[\langle p_S^2 \rangle_q + (\hbar k)^2 q^2 \right] \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger \mathcal{V}^{(+)}(0) \bar{W} \mathcal{V}^{(-)}(0) \Delta_q^{(+)} \quad (\text{III3b - 5c})$$

Il doit être alors clair que la force moyenne et le coefficient de diffusion obtenus à partir des relations habituelles :

$$\bar{F}(v) = -Tr (\bar{M}_1 [\bar{W}_0^{\text{st}}]) \quad (\text{III3b - 6a})$$

$$\bar{D}(v) = -Tr (\bar{M}_1 [\bar{W}_1^{\text{st}}]) + Tr (\bar{M}_2 [\bar{W}_0^{\text{st}}]) \quad (\text{III3b - 6b})$$

et qui sont dus aux nouveaux mécanismes, permettent de calculer les limites (III3b - 2) :

$$\bar{F}(v) = \hbar k \Gamma s \mathcal{F} \left(\frac{kv}{|\delta|s}; \frac{\delta}{\Gamma} \right) \quad (\text{III3b - 7a})$$

$$\bar{D}(v) = (\hbar k)^2 \Gamma s \mathcal{D} \left(\frac{kv}{|\delta|s}; \frac{\delta}{\Gamma} \right) \quad (\text{III3b - 7b})$$

Nous allons étudier maintenant, à titre d'exemple, la dépendance en u de la force \mathcal{F} et de la diffusion pour la transition atomique $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$. Les matrices densité dans l'état fondamental sont alors de petite taille. La structure en sous-famille interne (III2a - 8) permet de caractériser ces matrices par 5 composantes réelles associées à la base interne $\{|g m\rangle_z\}$, à savoir les 3 populations Π_m , $m = 0, \pm 1$ et les parties réelle et imaginaire de la cohérence entre $|g - 1\rangle_z$ et $|g 1\rangle_z$. Ces composantes ne sont pas indépendantes en fait, puisque les matrices \bar{W}_0^{st} et \bar{W}_1^{st} sont soumises à la condition $\Pi_1 + \Pi_0 + \Pi_{-1} = 1$ ou 0 respectivement. La forme de l'opérateur \bar{M}_0 , ainsi que d'autres éléments utiles au calcul de \mathcal{F} sont donnés dans [16]. Nous nous contentons ici d'aligner les résultats, les calculs étant lourds et de peu d'intérêt conceptuellement.

Il est possible d'obtenir l'expression exacte de la force moyenne des nouveaux mécanismes :

$$\mathcal{F}\left(u; \frac{\delta}{\Gamma}\right) = -\frac{30}{17} \frac{u}{1 + \frac{5\Gamma^2}{4\delta^2} + 33 \cdot \frac{16}{17} u^2} \quad (\text{III3b - 8})$$

Cette expression est donnée pour $\delta < 0$, il suffit d'en changer le signe si $\delta > 0$. On retrouve en particulier, à partir de (III3b - 8), l'expression (I2c - 8b) du coefficient de friction calculée dans [16]. On remarque de plus que le terme dominant du comportement de $\mathcal{F}(u)$ à grande vitesse ne dépend pas du désaccord. On peut déduire également de (III3b - 8) la valeur maximale de $\mathcal{F}(u)$ à $\frac{\delta}{\Gamma}$ fixé. Cependant, la remarque la plus intéressante à faire, dans le cadre de la recherche des basses températures, concerne la variation du module de la force à vitesse fixée en fonction du désaccord : $|\mathcal{F}(u)|$ croît lorsque $\frac{|\delta|}{\Gamma}$ augmente.

Le calcul analytique complet de $\mathcal{D}(u)$ est beaucoup plus lourd et nous n'en donnerons pas ici le résultat (voir néanmoins l'appendice B_{III}). En fait, des valeurs de $\mathcal{D}(u)$ ont été déjà présentées dans le I§2d. La limite de $\mathcal{D}(u)$ à grande vitesse ($|u| \rightarrow +\infty$) peut être obtenue à l'aide de l'approche probabiliste de l'appendice A_I, les cohérences dans la base $\{|g m\rangle_z\}$ devenant négligeables. Le calcul est également simple à vitesse nulle : le champ magnétique fictif est absent et l'atome "voit" seulement, dans la représentation des familles, un champ électrique uniforme polarisé linéairement selon Oz . Un tel calcul est décrit en détail dans un appendice de [16], dans la base $\{|g m\rangle_z\}$. Il est en fait possible d'obtenir $\mathcal{D}(0)$ en travaillant dans la base $\{|g m\rangle_y\}$, l'action du champ électrique y étant grandement simplifiée [39]. Pour la commodité de la lecture, rappelons les expressions de \mathcal{D} à $u = 0$ et ∞ :

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \mathcal{D}\left(u; \frac{\delta}{\Gamma}\right) = \frac{225}{88} + \frac{23}{220} \quad (\text{III3b - 9a})$$

$$\mathcal{D}\left(0; \frac{\delta}{\Gamma}\right) = \frac{36}{17} \frac{1}{1 + \frac{4\delta^2}{5\Gamma^2}} + \frac{29}{85} \quad (\text{III3b - 9b})$$

On notera que la limite (III3b - 9a) ne dépend pas du désaccord, et que la valeur de $\mathcal{D}\left(0; \frac{\delta}{\Gamma}\right)$ diminue lorsque $\frac{|\delta|}{\Gamma}$ augmente. Ce dernier point, dû à la destruction de l'effet de mémoire à grand désaccord, désigne comme très favorable le cas limite $|\delta| \gg \Gamma$. Pour voir ce qu'il en est à des vitesses intermédiaires, nous avons effectué une résolution numérique des équations conduisant à $\mathcal{D}(u)$. Les résultats correspondants, ainsi que le

comportement de la force moyenne, sont l'objet de la fig. III-10 pour différentes valeurs du désaccord. On y constate que la limite $|\delta| \gg \Gamma$ conduit très nettement aux valeurs les plus faibles de $\mathcal{D}(u; \frac{\delta}{\Gamma})$ pour $|u| \leq \frac{1}{2}$, cette tendance finissant par s'inverser pour des valeurs plus élevées de $|u|$, mais de façon pratiquement négligeable. Cette étude de la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ présente donc comme le plus favorable le régime $|\delta| \gg \Gamma$, ce qui va tout à fait dans le sens des résultats numériques quantiques du §2.

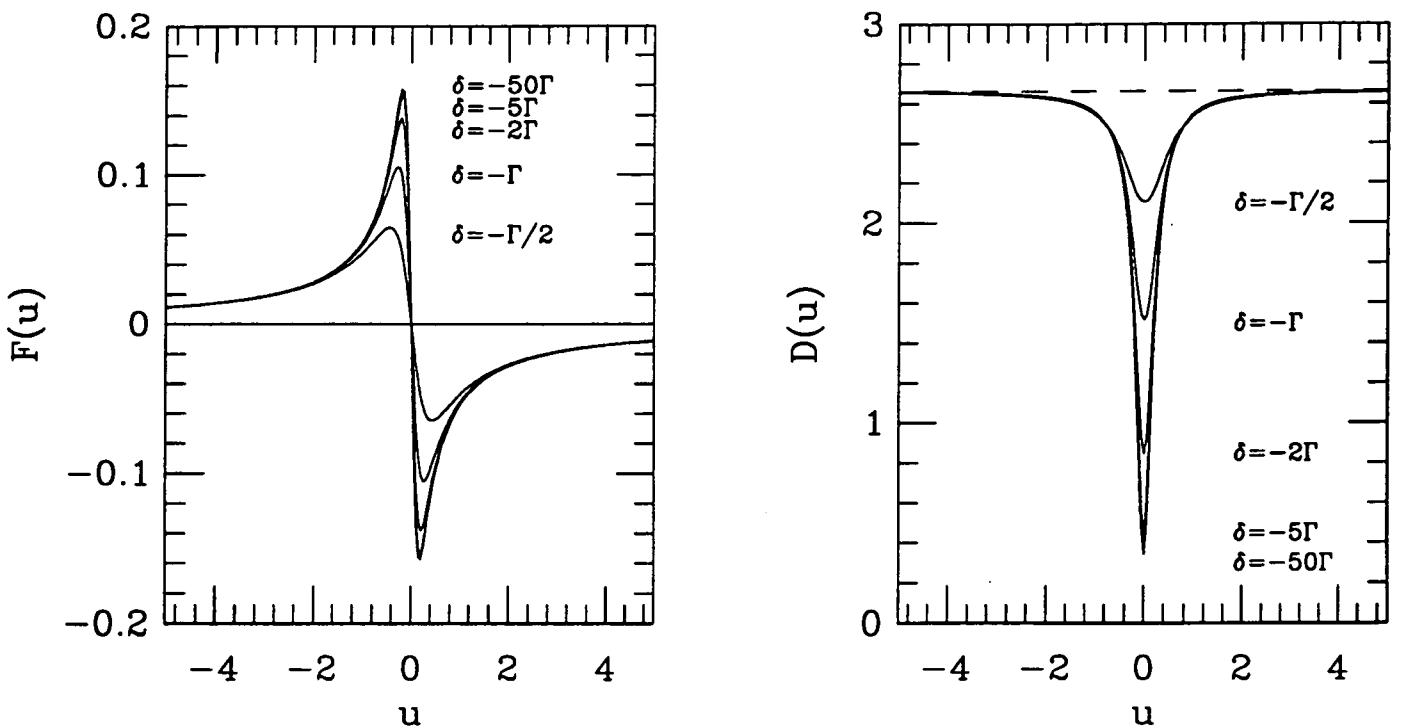


Fig. III-10 : Sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$, comportement de \mathcal{F} et \mathcal{D} en fonction de u , pour différentes valeurs du désaccord ($\delta = -\frac{1}{2}\Gamma, -\Gamma, -2\Gamma, -5\Gamma$ et -50Γ). Les tirets représentent la prédition de l'approche probabiliste.

Nous avons réalisé une étude numérique du comportement de \mathcal{F} et \mathcal{D} en fonction des paramètres u et $\frac{\delta}{\Gamma}$ pour une transition $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$ à moment cinétique j_g arbitraire. Nous en donnons les résultats pour $j_g = 2$ et $j_g = 4$ (transition utilisée sur les atomes de sodium et césum) sur la fig. III-11. On constate d'abord que les valeurs maximales de la force $\mathcal{F}(u)$ sont sensiblement plus élevées que sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$. C'est très net pour $j_g = 4$, la force se rapprochant du maximum $\frac{1}{2}\hbar k\Gamma s$ que l'on attend d'une pression de radiation. Pour voir si les transitions à moment cinétique élevé peuvent

conduire à des distributions plus froides, considérons le comportement du coefficient de diffusion. Celui-ci paraît au premier abord extrêmement défavorable. La valeur maximale de $\mathcal{D}(u)$ à $|u| \gg 1$ augmente de façon spectaculaire avec j_g . En effet, comme le suggère l'approche probabiliste de la diffusion, les corrélations entre les pas successifs de la marche au hasard dans l'espace des impulsions sont à très longue portée, lorsque j_g est élevé (voir discussion autour de (I2e - 20)). Cependant, les valeurs de \mathcal{D} au voisinage de $u = 0$ sont beaucoup plus faibles à grand désaccord, l'effet de mémoire étant détruit^(*), et sont alors de l'ordre de grandeur de celles sur $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$:

$$\lim_{\frac{|\delta|}{\Gamma} \rightarrow +\infty} \mathcal{D}\left(0; \frac{\delta}{\Gamma}\right) = \begin{cases} 0.3097\dots & \text{pour } j_g = 2 \\ 0.2941\dots & \text{pour } j_g = 4 \\ \frac{11}{40} = 0.275 & \text{pour } j_g = +\infty \text{ entier} \end{cases} \quad (\text{III3b} - 10)$$

limites à comparer à $\frac{29}{85} \simeq 0.3411\dots$ pour $j_g = 1$. On s'attend donc intuitivement à des situations beaucoup plus froides lorsque j_g est élevé.

En conclusion, l'étude de la force moyenne et du coefficient de diffusion suggère que le régime le plus intéressant pour le refroidissement est celui des grands désaccords entre atome et laser ($|\delta| \gg \Gamma$), et ceci pour toutes les transitions atomiques (dès que $j_g \geq 1$ bien entendu). Voilà qui nous motive donc pleinement pour le calcul des limites de \mathcal{F} et \mathcal{D} à grand désaccord :

$$\lim_{\frac{\delta}{\Gamma} \rightarrow -\infty} \mathcal{F}\left(u; \frac{\delta}{\Gamma}\right) = \mathcal{F}_\infty(u) \quad (\text{III3b} - 11a)$$

$$\lim_{\frac{\delta}{\Gamma} \rightarrow -\infty} \mathcal{D}\left(u; \frac{\delta}{\Gamma}\right) = \mathcal{D}_\infty(u) \quad (\text{III3b} - 11b)$$

d'autant plus que ces limites sont atteintes très rapidement ($|\delta| \geq 2\Gamma$) lorsque le moment cinétique j_g est élevé. Nous donnons dans l'appendice B_{III}, l'expression de $\mathcal{D}_\infty(u)$ pour la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$, obtenue selon une méthode générale adaptée au cas limite

^(*) On peut montrer que $\mathcal{D}_1(0)$, déduit de $D_{F,1}(v = 0)$, ne tend vers 0 lorsque $|\delta| \gg \Gamma$ que pour j_g entier ; il tend vers une valeur de l'ordre de $\mathcal{D}_0(0)$ pour j_g demi-entier.

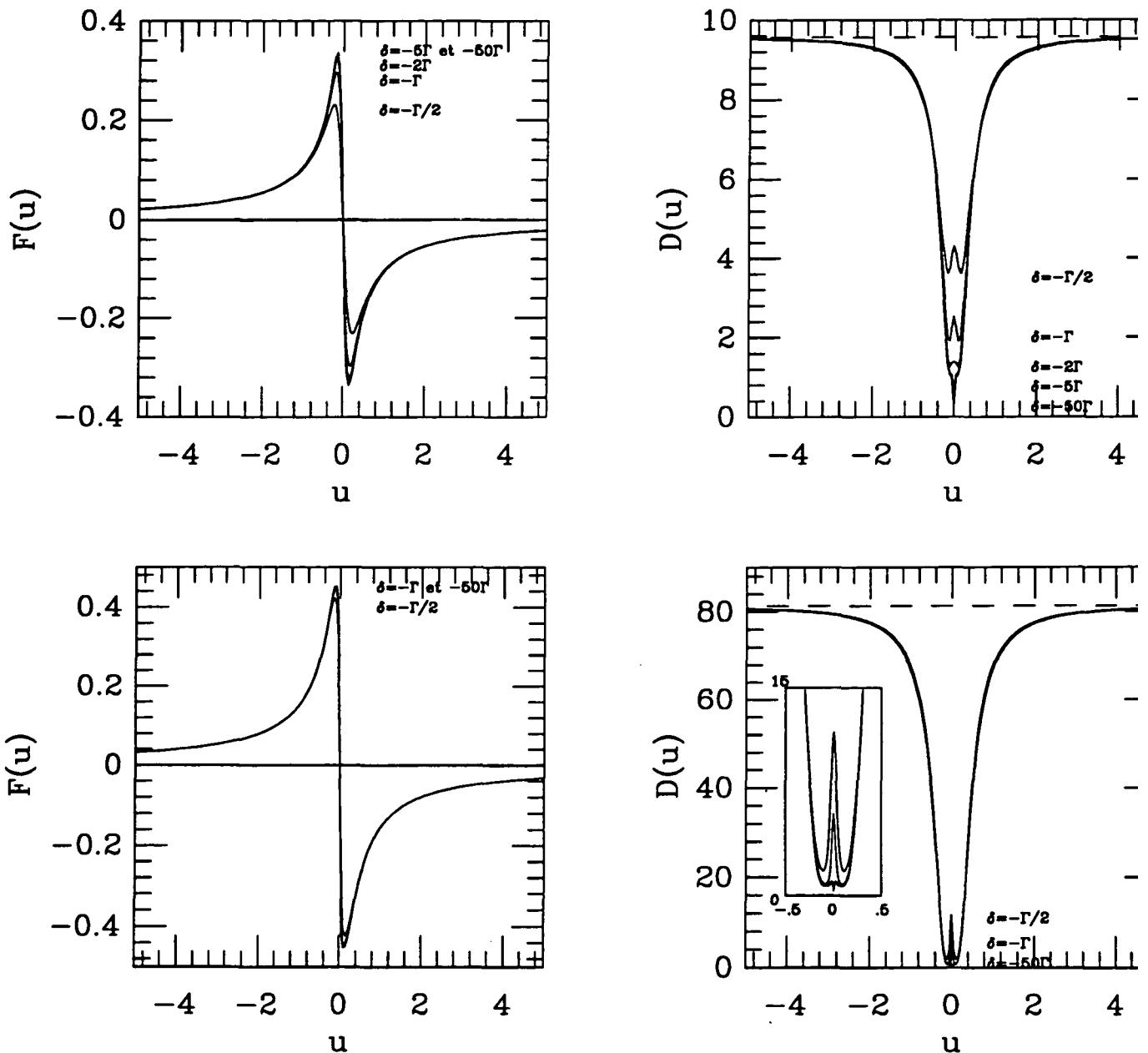


Fig. III-11 : Valeurs de \mathcal{F} et \mathcal{D} en fonction de la vitesse renormalisée u et pour diverses valeurs du désaccord :

- a) sur la transition $j_g = 2 \rightarrow j_e = 3, \delta = -\frac{1}{2}\Gamma, -\Gamma, -2\Gamma, -5\Gamma$ et -50Γ
- b) sur la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5, \delta = -\frac{1}{2}\Gamma, -\Gamma$ et -50Γ .

Les tirets représentent la prédition de l'approche probabiliste.

$|\delta| \gg \Gamma$, et qu'il est facile d'appliquer numériquement aux transitions à moment cinétique j_g arbitraire.

c) Equation de Fokker-Planck sur la distribution en impulsions

Nous avons étudié, dans le paragraphe précédent, le comportement de la force moyenne $F(v)$ et du coefficient de diffusion en impulsions $D(v)$ en fonction de la vitesse et des différents paramètres (saturation, désaccord). Nous voulons maintenant utiliser les valeurs de $F(v)$ et $D(v)$ pour obtenir les distributions en impulsions stationnaires et déterminer l'optimum du refroidissement. Il est bien connu qu'il est possible, dans le cas d'une particule soumise à des forces aléatoires dont la moyenne (caractérisée par F) et les fluctuations (caractérisées par D) sont connues, et sous certaines conditions (pas de la marche au hasard petits devant la largeur de la distribution), de déterminer l'évolution temporelle de la distribution à l'aide d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, appelée équation de Fokker-Planck. Une telle approche est habituelle dans l'étude du mouvement brownien [29]. Nous allons chercher ici à obtenir une telle équation de Fokker-Planck.

Nous choisissons comme point de départ les équations de l'approche semi-classique (cf. II§2a). Ces équations sont certes aux dérivées partielles du second ordre, mais elles portent aussi bien sur l'état atomique interne que sur le mouvement du centre de masse. Il faut donc réaliser d'abord une élimination adiabatique de l'état interne pour obtenir une équation sur la seule distribution en impulsions $\Pi(p, t)$, en se plaçant à des instants t tels que $t \gg T_{\text{int}}$. Nous allons voir qu'il est nécessaire d'effectuer une approximation supplémentaire pour que cette équation sur $\Pi(p, t)$ prenne la structure de Fokker-Planck. Après avoir précisé aussi bien la forme de l'équation de Fokker-Planck, rendue non évidente par la dépendance en vitesse de $D(v)$ (voir la discussion du I§2e), que ses conditions de validité, nous chercherons à retrouver les résultats quantiques sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, et nous examinerons la possibilité d'étudier, par Fokker-Planck, les transitions à moment cinétique élevé ($j_g = 4 \longrightarrow j_e = 5$).

(i) Principe de l'élimination adiabatique de l'état interne

Nous avons dit que le point de départ, dans la réalisation du programme fixé ici, est constitué par les équations de l'approche semi-classique traditionnelle. Ces équations, valables lorsque les distributions envisagées varient peu à l'échelle de l'impulsion $\hbar k$ d'un seul photon, sont obtenues à partir des équations quantiques écrites en point de vue de Wigner sur $W(z, p, t)$, suivant la procédure décrite au II§2a. Dans le cadre de la présente

configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, la seule source de dépendance en position de $Tr_{\text{int}}[W(z, p, t)]$ est le phénomène de diffusion spatiale, dont nous avons dit au III§1b(ii) qu'il était décrit par l'évolution des éléments de matrice interfamille. Comme ce phénomène ne nous intéresse pas ici, nous allons nous placer directement dans la représentation des familles et effectuer le développement semi-classique sur les équations d'évolution (III1c - 11) de $\rho_F(p, t)$. Nous nous limitons aux matrices densité $\rho_F(p, t)$ telles que :

$$\hbar k \|\partial_p (\rho_F)_{ee}(p, t)\| \ll \|(\rho_F)_{ee}(p, t)\| \quad (\text{III3c - 1})$$

ce qui nous permet de développer le terme d'alimentation par émission spontanée en "puissances de $\hbar k$ " :

$$(\rho_F)_{ee}(p + p_S - \hbar k q) = (\rho_F)_{ee}(p) + (p_S - \hbar k q) \partial_p (\rho_F)_{ee} + \frac{1}{2} (p_S - \hbar k q)^2 \partial_p^2 (\rho_F)_{ee} + \dots \quad (\text{III3c - 2})$$

On obtient alors, en utilisant les identités (III3a - 10) :

$$\partial_t \rho_F(p, t) = M_{F,0} [\rho_F] + M_{F,1} [\partial_p \rho_F] + M_{F,2} [\partial_p^2 \rho_F] \quad (\text{III3c - 3})$$

à condition de poser, dans la définition (III3a - 10a) de $M_{F,0}$:

$$v = \frac{p}{M} \quad (\text{III3c - 4})$$

(nous ne supposons plus l'atome de vitesse imposée !) et de négliger, dans la première ligne de (III1c - 11), le terme quadratique en j_z^2 ^(*).

Nous cherchons à obtenir, à partir de (III3c - 3), une équation portant seulement sur la distribution en p :

$$\Pi_F(p, t) = Tr_{\text{int}} [\rho_F(p, t)] \quad (\text{III3c - 5})$$

(*) Sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$, ce terme est sans influence sur l'évolution des éléments de matrice intrafamille, puisqu'il est scalaire dans chaque famille $\mathcal{F}_1(p)$ et $\mathcal{F}_2(p)$. Sur la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$, nous avons vérifié que son rôle est négligeable dans le domaine de validité de l'équation de Fokker-Planck.

qui diffère, rappelons-le, de la distribution en la véritable impulsion $\Pi(p, t)$. Il est possible d'obtenir une telle équation sur $\Pi_F(p, t)$ à condition de se limiter, pour les variations temporelles de cette distribution, à une échelle de temps beaucoup plus longue que celles, $T_{\text{int}}(v)$, de la relaxation de l'état atomique interne. Dans ces conditions, on peut, avec une bonne précision, exprimer l'état interne en fonction de $\Pi_F(p, t)$, dans un sens que nous allons préciser. On parle d'élimination adiabatique [41] des variables "rapides" décrivant l'état interne, par asservissement à la variable "lente" $\Pi_F(p, t)$. Notons que, sur les transitions qui nous intéressent (du type $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$), le système finit toujours par atteindre le régime de l'approximation adiabatique, puisque $T_{\text{int}}(v)$ est uniformément borné en vitesse. En particulier, cette élimination adiabatique de l'état interne, si elle est effectuée rigoureusement, n'introduit aucune erreur dans la détermination de l'état stationnaire.

Pour séparer les variables rapides de la variable lente, il est efficace [71], à nombre p fixé, de projeter $\rho_F(p, t)$ sur les matrices internes de trace nulle, parallèlement à l'état stationnaire $W_{F,0}^{\text{st}}$ des équations de Bloch ordinaires, défini par (III3a - 11a) :

$$\rho_F(p, t) = \Pi_F(p, t) W_{F,0}^{\text{st}}(v) + \tilde{\rho}_F(p, t) \quad (\text{III3c - 6})$$

Dans cette expression, v correspond à (III3c - 4) et $\tilde{\rho}_F(p, t)$, de trace interne nulle, contient les variables à éliminer adiabatiquement. Nous pouvons, de l'application de l'opération de projection (III3c - 6) aux équations semi-classiques (III3c - 3), déduire sans aucune approximation les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi_F(p, t) &= -\partial_p (F(v) \Pi_F(p, t)) + \partial_p^2 (D_{F,0}(v) \Pi_F(p, t)) \\ &\quad + Tr_{\text{int}} (\partial_p M_{F,1} [\tilde{\rho}_F] + \partial_p^2 M_{F,2} [\tilde{\rho}_F]) \end{aligned} \quad (\text{III3c - 7a})$$

$$\partial_t \tilde{\rho}_F(p, t) = M_{F,0} [\tilde{\rho}_F] + \tilde{M}_{F,1} [\partial_p \rho_F] + \tilde{M}_{F,2} [\partial_p^2 \rho_F] \quad (\text{III3c - 7b})$$

Dans ces expressions, v dépend de p selon (III3c - 4), donc l'opérateur de dérivation ∂_p agit sur $F(v)$ et $D_{F,0}(v)$, grandeurs que nous avons fait apparaître dans l'équation d'évolution de $\Pi_F(p, t)$ grâce aux identités (III3a - 12a) et (III3a - 13a). L'équation (III3c - 7a) contient ainsi, déjà, une partie de l'opérateur de Fokker-Planck recherché. Dans l'écriture de (III3c - 7b), sont utilisées les notations de forme générique :

$$\tilde{M} [\rho_F] = M [\rho_F] - W_{F,0}^{\text{st}} Tr_{\text{int}} (M [\rho_F]) \quad (\text{III3c - 8})$$

On remarquera que $M_{F,0} = \tilde{M}_{F,0}$ et que $\partial_p \tilde{M} \neq \tilde{M} \partial_p$. Nous allons en fait utiliser, dans la discussion qui va suivre, une forme approchée des équations (III3c - 7b), obtenue en négligeant la contribution du terme en $\tilde{M}_{F,2}$, ce qui conduit à :

$$\left(-\partial_t + M_{F,0} + \tilde{M}_{F,1} \partial_p \right) [\tilde{\rho}_F] = -\tilde{M}_{F,1} [\partial_p (\Pi_F W_{F,0}^{\text{st}})] \quad (\text{III3c - 9})$$

Adoptons, pour expliquer l'élimination adiabatique de $\tilde{\rho}_F(p,t)$, un point de vue temporel. L'équation (III3c - 9), qui régit l'évolution de $\tilde{\rho}_F$, contient des termes de relaxation (ceux de $M_{F,0}$) et un terme source dépendant du temps par l'intermédiaire de $\Pi_F(p,t)$. Sous l'influence des termes de relaxation, $\tilde{\rho}_F$ tend à s'ajuster aux valeurs successives du terme source, après un éventuel régime transitoire qui dure T_{int} , temps de relaxation des variables atomiques internes. $\tilde{\rho}_F$ tend donc vers un régime forcé, qu'il est possible de calculer en théorie et d'injecter ensuite dans (III3c - 7a). Cependant, l'équation ainsi obtenue sur $\Pi_F(p,t)$ n'est pas locale en la variable t , puisque le régime forcé pour $\tilde{\rho}_F$ dépend a priori de toutes les valeurs $\Pi_F(p,t-\tau)$, où le laps $\tau \geq 0$ reste de l'ordre de T_{int} . Le calcul est heureusement grandement facilité lorsque le terme source, donc $\Pi_F(p,t)$, varie très peu pendant T_{int} : il est possible alors d'obtenir le régime forcé avec une bonne approximation en négligeant le terme de dérivation temporelle ∂_t dans (III3c - 9) [41]. On parle, dans ce cas, de suivi adiabatique de $\Pi_F(p,t)$ par $\tilde{\rho}_F$, et l'on note $\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}$ la valeur de $\tilde{\rho}_F$ correspondante :

$$\left(M_{F,0} + \tilde{M}_{F,1} \partial_p \right) [\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}] = -\tilde{M}_{F,1} [\partial_p (\Pi_F W_{F,0}^{\text{st}})] \quad (\text{III3c - 10})$$

Il reste à résoudre (III3c - 10) pour exprimer $\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}$ en fonction de $\Pi_F(\cdot, t)$; la substitution de $\tilde{\rho}_F$ par $\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}$ dans (III3c - 7a) conduit à une équation d'évolution temporelle sur $\Pi_F(\cdot, t)$.

(ii) Régime de marche au hasard à petits pas effectifs

Il est possible d'obtenir une expression formelle de $\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}$ en fonction des dérivées successives de $\Pi_F(p,t)$ par rapport à p . Multiplions pour cela (III3c - 10) à gauche par l'inverse de la restriction de $M_{F,0}$ à l'hyperplan des matrices de trace nulle :

$$\left(\tilde{I} + M_{F,0}^{-1} \tilde{M}_{F,1} \partial_p \right) [\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}] = -M_{F,0}^{-1} \tilde{M}_{F,1} \partial_p [\Pi_F W_{F,0}^{\text{st}}] \quad (\text{III3c - 11})$$

On utilise ensuite le développement en série formelle de l'inverse de $(I + X)$, où X est un opérateur quelconque, ce qui donne pour $\tilde{\rho}_F$ en régime de suivi adiabatique :

$$\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}(p, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(M_{F,0}^{-1} \tilde{M}_{F,1} \partial_p \right)^n [\Pi_F W_{F,0}^{\text{st}}] \quad (\text{III3c - 12})$$

Compte tenu de (III3c - 6), $\rho_F(p, t)$ est donné par une somme équivalente, commençant à $n = 0$ au lieu de $n = 1$. Cependant, cette expression de $\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}(p, t)$ ne fait pas notre affaire. En effet, elle donne, par report dans (III3c - 7a), une équation comportant des dérivées en p de $\Pi_F(p, t)$ d'ordre arbitraire, alors que nous cherchons une équation de type Fokker-Planck, limitée à l'ordre 2. On constate en fait que, dans (III3c - 7a), $\tilde{\rho}_F$ apparaît toujours dérivé au moins une fois en p , puisque $M_{F,1}$ et $M_{F,2}$ ne dépendent pas de p . Il faut donc chercher à obtenir une expression de $\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}$ qui dépende linéairement seulement de $\Pi_F(p, t)$ et $\partial_p \Pi_F(p, t)$, au prix d'une résolution nécessairement approchée de (III3c - 10). Il suffit de se placer, pour cela, dans des situations telles que l'on puisse se limiter au seul terme $n = 1$ dans (III3c - 12), ce qui revient, comme on peut le vérifier, à négliger le terme en $\partial_p \tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}$ dans (III3c - 10).

Nous allons identifier ces situations par une analyse simple du problème, qui a le mérite de conduire à une condition de validité pour l'équation de Fokker-Planck facilement interprétable. L'idée est de comparer le terme en $\tilde{M}_{F,1} \partial_p \tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}$ au membre de droite de l'égalité (III3c - 10). On peut espérer alors que ce terme est négligeable lorsque :

$$\|\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}(p, t)\| \ll \Pi_F(p, t) \|W_{F,0}^{\text{st}}(v)\| \quad (\text{III3c - 13})$$

ce qui conduit à l'expression approchée suivante :

$$\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}} \simeq -M_{F,0}^{-1} \tilde{M}_{F,1} [\partial_p (\Pi_F W_{F,0}^{\text{st}})] \quad (\text{III3c - 14})$$

Interprétons physiquement la condition (III3c - 13). Au sens strict, elle signifie, si l'on se souvient de la décomposition (III3c - 6), que l'état interne adiabatique de l'atome associé au nombre p est très proche de l'état stationnaire $W_{F,0}^{\text{st}}$ des équations de Bloch optiques ordinaires à la vitesse $v = \frac{p}{M}$. Pour accéder à une compréhension plus profonde, estimons l'ordre de grandeur de $\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}$ donné par (III3c - 14). $\tilde{M}_{F,1}$ est obtenue à partir de $M_{F,1}$, qui est l'opposé de l'opérateur force dans la représentation des familles, par soustraction de la force moyenne parallèlement à l'état atomique interne. $\tilde{M}_{F,1} [W_{F,0}^{\text{st}}]$ représente donc les fluctuations des forces radiatives autour de leur valeur moyenne. Ces fluctuations, que nous notons symboliquement $\Delta F(v)$, correspondent microscopiquement aux pas successifs de

la marche au hasard en p de l'atome, chaque émission spontanée changeant p de $\hbar k q - p_s$. Nous avons vu, dans le I§2d, que ces pas successifs sont susceptibles d'être corrélés via l'état atomique interne. Les fluctuations $\Delta F(v)$ restent ainsi corrélées pendant le temps typique d'évolution de l'état interne, $T_{\text{int}}(v)$, ce qui permet de définir un pas effectif de marche au hasard de l'atome autour de son mouvement moyen :

$$\delta p_{\text{eff}}(v) = |\Delta F(v)T_{\text{int}}(v)| = \left\| M_{F,0}^{-1} \tilde{M}_{F,1} [W_{F,0}^{\text{st}}] \right\| \quad (\text{III3c - 15})$$

L'approche probabiliste de la diffusion du I§2d a montré, à faible saturation s et pour $k|v| \gg |\delta|s$, que l'atome peut effectuer un grand nombre de cycles de fluorescence pendant T_{int} , ce qui donne alors à δp_{eff} des valeurs beaucoup plus élevées que $\hbar k$ (cf. (I2e - 20))^(*). Si $\Pi_F(p, t)$ varie plus rapidement en p que l'état stationnaire interne $W_{F,0}^{\text{st}}$, ce qui est le cas en général, on peut simplifier (III3c - 14) et l'on obtient :

$$\left\| \tilde{\rho}_F^{\text{adiab}} \right\| \simeq |\partial_p \Pi_F| \delta p_{\text{eff}} \quad (\text{III3c - 16})$$

ceci permet d'exprimer (III3c - 13) sous la forme :

$$\delta p_{\text{eff}} |\partial_p \Pi_F| \ll \Pi_F \quad (\text{III3c - 17})$$

ce qui indique simplement que la distribution $\Pi_F(p, t)$ doit varier peu à l'échelle du pas effectif de la marche au hasard en p . Cette contrainte est tout à fait habituelle dans l'établissement d'une équation de Fokker-Planck. Ce qui est moins habituel, c'est l'existence de deux pas de marche au hasard : l'un élémentaire, $\hbar k$, qui reste petit à l'échelle des distributions étudiées ici, ce qui permet de passer à la limite semi-classique (la condition (III3c - 1) est toujours vérifiée), et l'autre, effectif, δp_{eff} , qui peut devenir de l'ordre de grandeur de la largeur en p de Π_F . C'est ce second pas qui compte pour l'établissement de l'équation de Fokker-Planck, et la condition (III3c - 17) n'est pas toujours vérifiée.

(iii) Equation de Fokker-Planck

Plaçons-nous dans le régime de marche au hasard à pas effectifs petits : la condition (III3c - 13) est satisfaite, et il est légitime, d'après l'étude du (ii) précédent, d'adopter

^(*) Notons que la définition de $\delta p_{\text{eff}}(v)$ dans (III3c - 15), bien qu'assez formelle, conduit à des valeurs qui sont à peu près celles de (I2e - 20) lorsque $k|v| \gg |\delta|s$, à condition de remplacer $\|W\|$ par $|2\text{Tr}W|$.

l'expression (III3c - 14). Afin de la reporter efficacement dans (III3c - 7a), développons-la, en faisant usage de (III3a - 11b) et (III3c - 4) :

$$W_{F,1}^{\text{st}} = M_{F,0}^{-1} \tilde{M}_{F,1} [W_{F,0}^{\text{st}}] \quad (\text{III3c - 18a})$$

$$\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}} \simeq -(\partial_p \Pi_F) W_{F,1}^{\text{st}} + \Pi_F \delta \tilde{W}_F \quad (\text{III3c - 18b})$$

$$\delta \tilde{W}_F = -\frac{1}{M} \cdot M_{F,0}^{-1} \tilde{M}_{F,1} [\partial_v W_{F,0}^{\text{st}}] \quad (\text{III3c - 18c})$$

où M est la masse de l'atome. La matrice $\delta \tilde{W}_F$ constitue une petite correction à l'état atomique interne, due au fait que la matrice stationnaire $W_{F,0}^{\text{st}}(v)$ varie lorsque l'atome se déplace en p de δp_{eff} . Utilisons de plus la faiblesse de $\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}$ devant $\Pi_F W_{F,0}^{\text{st}}$ pour négliger le terme en $\partial_p^2 M_{F,2}$ de la seconde ligne de (III3c - 7a) :

$$Tr_{\text{int}} (M_{F,2} [\Pi_F W_{F,0}^{\text{st}}]) \gg Tr_{\text{int}} (M_{F,2} [\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}]) \quad (\text{III3c - 19})$$

En transformant, selon (III3c - 18b), le terme en $\partial_p M_{F,1}$ de la seconde ligne de (III3c - 7a), on aboutit à :

$$\partial_p Tr_{\text{int}} (M_{F,1} [\tilde{\rho}_F^{\text{adiab}}]) = \partial_p [D_{F,1}(v) \partial_p \Pi_F] - \partial_p [\delta F(v) \Pi_F] \quad (\text{III3c - 20})$$

Le terme de diffusion provient, grâce à (III3a - 14a) et (III3c - 18a), du premier terme de (III3c - 18b). La correction à la force moyenne, $\delta F(v)$, issue de $\delta \tilde{W}_F$ dans (III3c - 18b), vaut :

$$\delta F(v) = -Tr_{\text{int}} (M_{F,1} [\delta \tilde{W}_F]) = \frac{1}{M} Tr_{\text{int}} (M_{F,1} M_{F,0}^{-1} \tilde{M}_{F,1} [\partial_v W_{F,0}^{\text{st}}]) \quad (\text{III3c - 21})$$

Tout ceci conduit finalement à l'équation de Fokker-Planck cherchée :

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi_F(p, t) &= -\partial_p [(F(v) + \delta F(v)) \Pi_F(p, t)] \\ &\quad + \partial_p [D_{F,1}(v) \partial_p \Pi_F(p, t)] + \partial_p^2 [D_{F,0}(v) \Pi_F(p, t)] \end{aligned} \quad (\text{III3c - 22})$$

L'équation de Fokker-Planck (III3c - 22) a bien la structure annoncée au I§2e ; elle a en particulier, et heureusement, la propriété de conserver la population totale $\int dp \Pi_F(p, t)$. Nous savons maintenant préciser la place de chaque composante du coefficient de diffusion par rapport aux dérivations en p . La diffusion compréhensible par un modèle simple, au sens du III§3a(ii), négligeant en particulier les corrélations entre les pas élémentaires successifs de la marche au hasard en p , se place sous ∂_p^2 . Cette partie est petite et dépend en fait peu de la vitesse v imposée à l'atome : on peut s'en convaincre sur l'expression analytique (B_{III} - 16) de $D_{F,0}(v)$ dans le cas de la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$ à grand désaccord, et cette propriété est générale. Ceci signifie, en pratique, que la place précise affectée à $D_{F,0}$ est de faible importance. Il n'en va pas de même pour l'autre composante $D_{F,1}$, responsable de la sévère dépendance en vitesse du coefficient de diffusion représentée sur la fig. III-8 ou sur la fig. III-11. Il est donc important de maintenir $D_{F,1}$, dans l'équation de Fokker-Planck, entre les deux opérateurs de dérivation ∂_p . Notons que, selon (III3c - 20), l'existence de $D_{F,1}$, qui domine $D_{F,0}$ sur une grande plage de vitesse, est due au fait que l'état interne d'un atome en régime de suivi adiabatique ($t \gg T_{\text{int}}$) diffère de l'état stationnaire $W_{F,0}^{\text{st}}(v)$ des équations de Bloch ordinaires à la vitesse v . La différence est supposée ici assez petite, puisqu'elle est traitée perturbativement, mais les corrélations entre états atomiques internes et externes qu'elle représente ont quand même une influence essentielle sur l'évolution diffusive de $\Pi_F(p, t)$. En ce qui concerne la correction à la force, $\delta F(v)$, nous en reportons l'étude aux calculs explicites sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

Nous ne nous intéressons pas ici à l'aspect temporel du refroidissement, aspect qui peut être caractérisé par les modes propres de l'équation de Fokker-Planck. Disons simplement que la détermination de ces modes peut être ramenée à la diagonalisation d'un opérateur hermitien [63] et que toutes les valeurs propres de l'opérateur de Fokker-Planck sont réelles négatives. Nous utiliserons par contre, dans la suite, l'expression de la distribution stationnaire $\Pi_F^{\text{st}}(p)$:

$$\Pi_F^{\text{st}}(p) = \Pi_F^{\text{st}}(0) \exp \left\{ \int_0^v dv' \frac{M \delta F + \partial_{v'} D_{F,0}}{D(v')} \right\} \exp \left\{ \int_0^v dv' \frac{F(v')}{D(v')} M \right\} \quad (\text{III3c - 23})$$

Le premier facteur exponentiel ne dépend pas, à v fixé, de la masse de l'atome (même si l'expression $M \delta F(v')$ semble indiquer le contraire ; voir (III3c - 21)). Son échelle de variation en vitesse est essentiellement celle de l'état stationnaire interne à la vitesse v ,

$W_{F,0}^{\text{st}}(v)$, donc celle de $F(v)$ et $D(v)$. Ce premier facteur constitue, en général, une amplitude lentement variable. Il n'en va pas de même pour le second facteur, dont l'exposant est proportionnel à la masse. La présence de M , et le fait que $M\Gamma \gg \hbar k^2$ dans les situations étudiées ici, peut donner à ce facteur une variation très brutale avec v , beaucoup plus brutale que celle de $\frac{F(v)}{D(v)}$. C'est là toute la clé du refroidissement. La forme de ce facteur dominant montre clairement que, ce qui importe pour obtenir une distribution stationnaire très froide, c'est d'avoir non pas une force de friction F intense, mais un rapport $\frac{F}{D}$ le plus négatif possible. L'intensité de F agit par contre, bien sûr, sur le temps nécessaire pour atteindre l'état stationnaire.

Nous pouvons, pour terminer, à l'aide de (III3c - 23), exprimer à quelle condition l'état stationnaire $\Pi_F^{\text{st}}(p)$ est bien prévu par l'équation de Fokker-Planck. De façon à obtenir un critère simple, plaçons-nous dans le cas où $W_{F,0}^{\text{st}}(v)$ varie beaucoup plus lentement que $\Pi_F^{\text{st}}(p)$. Négligeons donc le dernier terme en $\delta\tilde{W}_F$ dans (III3c - 18a), ce qui revient à omettre la dépendance en p de l'amplitude lentement variable dans (III3c - 23). L'inégalité (III3c - 13) est assimilable alors à (III3c - 17), ce qui, avec (III3c - 15) et (III3c - 18a), conduit à la condition :

$$\|W_{F,1}^{\text{st}}(v)\| \cdot \frac{|F(v)|}{D(v)} \ll 1 \quad (\text{III3c - 24})$$

à satisfaire pour toutes les vitesses v telles que $\Pi_F^{\text{st}}(p = Mv)$ ne soit pas extrêmement faible. Dans le même ordre d'approximation, la condition qui exprime que le premier terme négligé dans (III3c - 12) (d'indice $n = 2$) est petit devant le terme pris en compte (d'indice $n = 1$) peut s'écrire :

$$\left\| \left(M_{F,0}^{-1} \tilde{M}_{F,1} \right)^2 [W_{F,0}^{\text{st}}] \right\| \cdot \frac{|F(v)|}{D(v)} \ll \|W_{F,1}^{\text{st}}(v)\| \quad (\text{III3c - 25})$$

Nous exploiterons ces deux critères de validité de l'équation de Fokker-Planck sur les exemples à venir.

(iv) Comparaison sur $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ du traitement quantique et de l'approche par Fokker-Planck

La détermination au (iii) précédent de la forme de l'équation de Fokker-Planck nous permet d'effectuer des prédictions sur les distributions en vitesse stationnaires sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$. Nous comparons ici ces prédictions avec les résultats numériques

quantiques du §2, pour une masse atomique réduite $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2}$ correspondant à celle du césium.

La plupart des coefficients de l'équation de Fokker-Planck sont déjà connus : la force moyenne $F(v)$, les deux composantes $D_{F,0}(v)$ et $D_{F,1}(v)$ du coefficient de diffusion $D(v)$ sont obtenues après résolution des systèmes linéaires (III3a - 4a) et (III3a - 4b), sans approximation de faible vitesse ($k|v| \ll \Gamma$) ou de faible saturation de la transition. La connaissance de la matrice purement interne $\delta\tilde{W}_F(v)$, définie par (III3c - 18c), nécessite la résolution d'un troisième système linéaire, lui aussi de la forme $M_0[W] = S$. On déduit alors de $\delta\tilde{W}_F$ la correction à la force moyenne $\delta F(v)$. Il reste à calculer numériquement les intégrales dans (III3c - 23) pour obtenir la distribution en nombre p stationnaire, $\Pi_F^{st}(p)$. Comme nous sommes intéressé par la distribution stationnaire en la véritable impulsion $\Pi^{st}(p)$, nous n'oublions pas de quitter la représentation des familles, en inversant la relation (III1c - 5). Cette conversion nécessite la connaissance des populations de la matrice $\rho_F^{st}(p)$. Nous les déduisons de (III3c - 6) et de l'expression (III3c - 18b) de la première correction à l'état interne par rapport à $W_{F,0}^{st}(v)$.

Pour effectuer une comparaison soigneuse entre les résultats quantiques et le calcul par Fokker-Planck, il ne faut pas oublier que les équations quantiques ont été discrétisées au §2, avec un pas en p de $\delta p = \hbar k$. L'effet de cette discréttisation est de remplacer le véritable diagramme d'émission spontanée par un diagramme approché. C'est ce diagramme approché que nous allons utiliser dans le calcul du coefficient de diffusion $D(v)$. Seule la partie sans mémoire de la diffusion, $D_{F,0}(v)$, est affectée ; nous utilisons dans (III3a - 13b) les valeurs des moments $\langle p_S^2 \rangle_q$, déduites des poids de Simpson $\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$ associés au pas $\delta p = \hbar k$:

$$\langle p_S^2 \rangle_q = \frac{1}{2}(\hbar k)^2, 0, \frac{1}{2}(\hbar k)^2 \quad \text{avec} \quad q = -1, 0, 1 \quad (\text{III3c - 26})$$

Cette précaution étant prise sur l'équation de Fokker-Planck, nous choisissons, pour la figure comparative, deux situations complémentaires. La première est à faible désaccord ($\delta = -\Gamma$) et comporte des points à forte saturation, pour lesquels il est difficile de ramener la dynamique dans l'état fondamental. La seconde, à désaccord élevé ($\delta = -5\Gamma$), contient des distributions proches de l'optimum sur $\langle p^2 \rangle$, dont nous nous attendons à ce qu'elles soient dominées par les nouveaux mécanismes de refroidissement. Nous représentons sur la fig. III-12, pour ces deux valeurs du désaccord et en fonction du paramètre $u_0 = -\frac{\hbar\delta s}{2E_R}$, le comportement de l'impulsion quadratique moyenne carrée $\langle p^2 \rangle$ et de p_e^2 , où p_e désigne

la mi-largeur à la hauteur relative $e^{-1/2}$ de la distribution en impulsion stationnaire. L'introduction d'une mi-largeur pour $\Pi^{\text{st}}(p)$ permet de mieux caractériser la forme en p de l'état stationnaire ; le choix particulier de la hauteur relative $e^{-1/2}$ fait que Δp et p_e sont égales pour des distributions rigoureusement gaussiennes en p . Nous constatons, dans les deux situations de la fig. III-12, que les deux grandeurs $\langle p^2 \rangle$ et p_e^2 ont qualitativement le même comportement en fonction du paramètre u_0 : toutes deux dépendent linéairement de u_0 aux grandes valeurs de u_0 , et remontent brutalement aux faibles valeurs de u_0 . Il est cependant quantitativement très différent de minimiser $\langle p^2 \rangle$ et p_e^2 , l'optimum sur p_e^2 étant bien plus faible et se produisant à saturation plus basse. Le fait que $p_e \ll \Delta p$ correspond, comme nous l'avons vérifié, à l'apparition de longues ailes sur $\Pi^{\text{st}}(p)$, ce qui est discuté physiquement au (v) suivant. Nous prenons ici simplement note de l'accord satisfaisant entre les résultats numériques quantiques et les prédictions de l'approche par Fokker-Planck sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

Nous ne serions par ailleurs pas complet si nous ne donnions pas une idée des résultats de Fokker-Planck lorsque la véritable distribution d'émission spontanée est prise en compte. Les seconds moments des diagrammes $\mathcal{N}_q(p_S)$ ne sont plus donnés par (III3c - 26), mais par :

$$\langle p_S^2 \rangle_q = \frac{2}{5}(\hbar k)^2, \frac{1}{5}(\hbar k)^2, \frac{2}{5}(\hbar k)^2 \quad \text{avec} \quad q = -1, 0, 1 \quad (\text{III3c - 27})$$

Nous calculons alors la valeur du coefficient de diffusion $D(v)$ associée aux poids (III3c - 27). Il faudrait ensuite en toute rigueur reprendre la fig. III-12 avec $D(v)$ ainsi corrigé. Nous nous contentons d'indiquer, simplement, que cette correction sur $D(v)$ fait passer Δp de $10.9 \hbar k$ à $10.8 \hbar k$, dans le calcul par Fokker-Planck, lorsque $u_0 = 250$, $\delta = -5\Gamma$ et pour le paramètre de masse du césium. Ceci suggère que l'optimum sur Δp prévu pour $j_g = 1$ par le calcul numérique du §2 est trop chaud d'environ $0.1 \hbar k$. Nous avons vérifié que c'est le bon ordre de grandeur en faisant passer la discrétisation en p de $\hbar k$ à $\frac{1}{2}\hbar k$ dans le calcul quantique du §4b suivant, effectué dans la limite $|\delta| \gg \Gamma$ pour la même valeur de u_0 . Dans toute la suite du présent §3, le calcul par Fokker-Planck est effectué selon le véritable diagramme d'émission spontanée.

(v) Interprétation des différents régimes du refroidissement

Nous voulons présenter ici une vision synthétique du refroidissement sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$. Rappelons que la résolution numérique des équations quantiques du §2 a

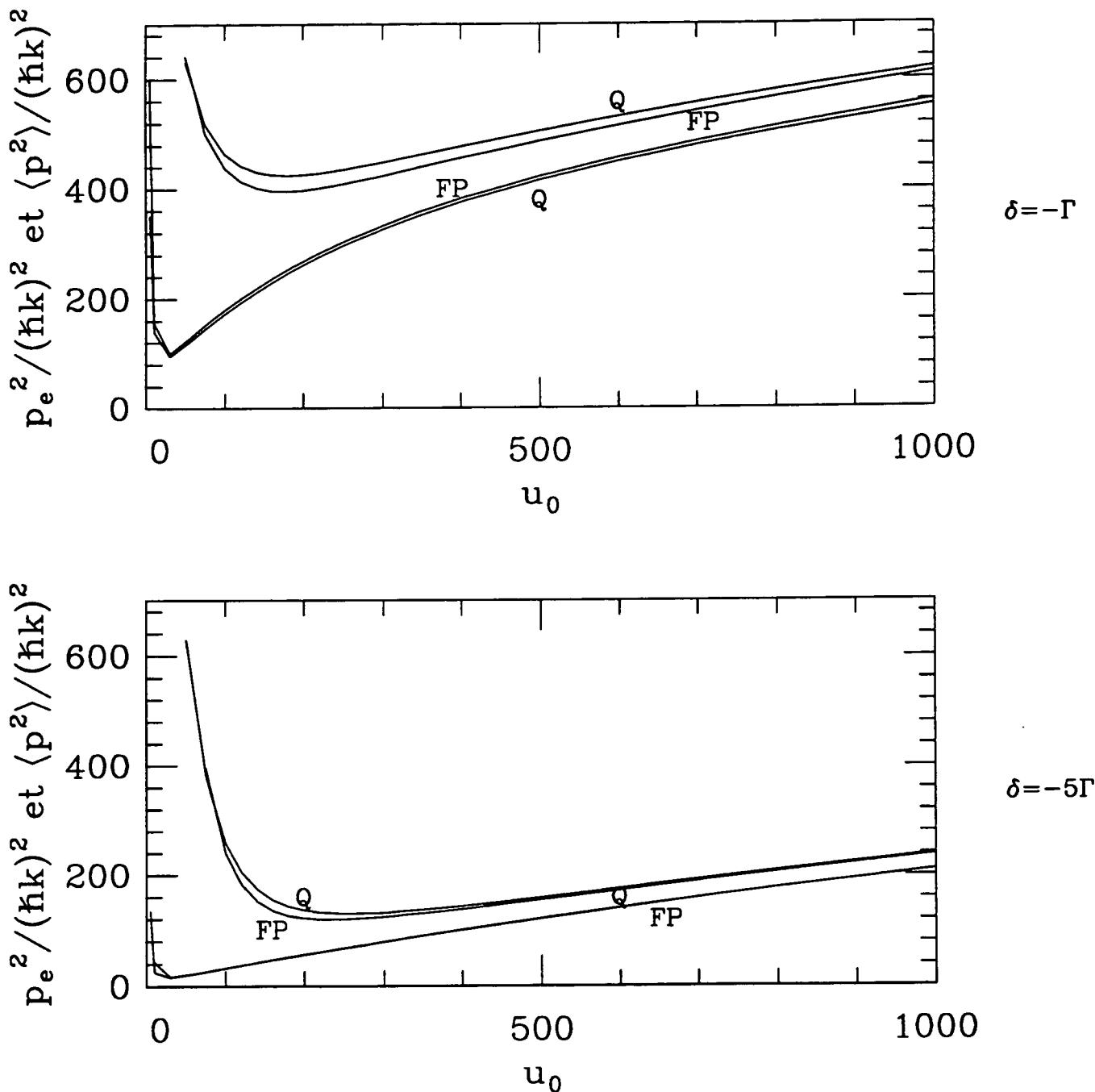


Fig. III-12 : Sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, variation de $\langle p^2 \rangle$ et p_e^2 en unité de $(\hbar k)^2$ en fonction de u_0 , pour la masse de l'atome de cézium ($M\Gamma = 1285\hbar k^2$) et un désaccord $\delta = -\Gamma$ ou $\delta = -5\Gamma$. Pour chaque valeur du désaccord, les prédictions du calcul quantique ($\delta p = \hbar k$, $p_{\max} = 100\hbar k$), notées Q , et de l'équation de Fokker-Planck (même valeur de p_{\max} , moments (III3c - 26)), notées FP , sont représentées.

mis en évidence, à désaccord fixé assez élevé et pour des atomes assez lourds ($M\Gamma \gg \hbar k^2$), un domaine de comportement universel des distributions stationnaires, celles-ci dépendant de u_0 seulement. Nous allons nous placer au voisinage de ce comportement universel en résolvant l'équation de Fokker-Planck en présence des seuls nouveaux mécanismes de refroidissement. Nous étudions ensuite la forme des distributions en dehors de ce domaine, toujours à l'aide de Fokker-Planck, en particulier sous le seuil des nouveaux mécanismes ; il est alors nécessaire de prendre en compte l'effet Doppler dans le calcul de la force moyenne et du coefficient de diffusion. L'intervention d'une très grande échelle de variation de la distribution stationnaire (échelle associée au refroidissement Doppler) oblige à considérer des intervalles très larges en p , ce qui rend le calcul quantique numérique très coûteux et constitue une bonne illustration de l'intérêt de l'équation de Fokker-Planck.

Dans un premier temps, nous allons effectuer quelques approximations sur l'équation de Fokker-Planck (III3c - 22). L'intérêt n'est pas seulement calculatoire, il est aussi d'obtenir une expression ne contenant pas d'autres fonctions que la force moyenne $F(v)$ et le coefficient de diffusion en impulsions $D(v)$, ces fonctions ayant un sens physique clair et ayant fait l'objet d'une étude détaillée aux §3a et §3b. Pour cela, négligeons la correction à la force $\delta F(v)$ dans (III3c - 22), regroupons $D_{F,0}(v)$, qui dépend peu de v , avec $D_{F,1}(v)$ et assimilons $\Pi_F(p)$ à la véritable distribution en impulsions $\Pi(p)$. Ceci conduit à l'équation de Fokker-Planck simplifiée :

$$\partial_t \Pi(p) = -\partial_p [F(v)\Pi(p)] + \partial_p [D(v)\partial_p \Pi(p)] \quad (\text{III3c} - 28)$$

Nous avons calculé l'erreur qu'entraîne cette approximation dans l'état stationnaire, pour un désaccord $\delta = -5\Gamma$ et le paramètre de masse de l'atome de césium, et pour différentes valeurs de u_0 . On constate, sur la fig. III-13, que son effet va toujours dans le sens d'un accroissement de Δp et p_e , d'une quantité d'autant plus petite que u_0 est plus grand. Comme tous ces accroissements, calculés sur un grand intervalle en u_0 , sont très faibles en valeur relative, nous utilisons, dans toute la suite du présent (v), seulement la forme simplifiée (III3c - 28).

L'équation de Fokker-Planck simplifiée (III3c - 28) permet une étude analytique simple des nouveaux mécanismes de refroidissement. Elle conduit, en l'absence de refroidissement Doppler, à la distribution en impulsions stationnaire :

u_0	50	100	250	2500
$(\Delta p)_{ex}$	38.39	17.34	10.79	20.72
$(\Delta p)_{simp}$	39.36	17.70	10.78	20.73
$(p_e)_{ex}$	4.43	5.58	8.11	20.11
$(p_e)_{simp}$	4.47	5.61	8.12	20.12

Fig. III-13 : Sur $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, pour $\delta = -5\Gamma$ et la masse du césium, valeurs de Δp et p_e pour différents u_0 , calculées selon l'équation de Fokker-Planck exacte et selon l'équation simplifiée (III3c - 28). L'intervalle en impulsions correspond à $p_{max} = 400\hbar k$, et la discréétisation en p est de $\frac{1}{2}\hbar k$.

$$\bar{\Pi}^{st}(p) = \bar{\Pi}^{st}(0) \exp \left[u_0 \int_0^{p/(\hbar k u_0)} du \frac{\mathcal{F}(u; \frac{\delta}{\Gamma})}{\mathcal{D}(u; \frac{\delta}{\Gamma})} \right] \quad (\text{III3c - 29})$$

où, selon les notations du §3b, \mathcal{F} et \mathcal{D} désignent la force moyenne et la diffusion des nouveaux mécanismes convenablement renormalisées. La forme (III3c - 29) permet d'expliquer le comportement universel (III2c - 2) prévu numériquement. D'abord, il est clair qu'elle conduit à une distribution stationnaire $\bar{\Pi}^{st}(p)$ fonction seulement de $\frac{\delta}{\Gamma}$ et $u_0 = -\hbar\delta s/(2E_R)$, lorsque l'impulsion p est exprimée en unité de $\hbar k$; le troisième paramètre $M\Gamma/(\hbar k^2)$ n'intervient plus, alors qu'il est nécessaire si l'on veut caractériser complètement l'état stationnaire, c'est-à-dire en tenant compte du refroidissement Doppler. De plus, l'étude effectuée au §3b(ii) a montré que $\mathcal{F}(u; \frac{\delta}{\Gamma})$ et $\mathcal{D}(u; \frac{\delta}{\Gamma})$ ne dépendent pratiquement pas du désaccord lorsqu'il est assez grand (voir fig. III-10). Dans la limite $|\delta| \gg \Gamma$, $\mathcal{F}(u; \frac{\delta}{\Gamma})$ et $\mathcal{D}(u; \frac{\delta}{\Gamma})$ peuvent être remplacés avec une bonne approximation par \mathcal{F}_∞ et \mathcal{D}_∞ de (III3c - 11), dont les expressions explicites figurent, pour $j_g = 1$, dans l'appendice B_{III}; la distribution (III3c - 29) ne dépend alors plus que de u_0 .

Pour comprendre le comportement de $\bar{\Pi}^{st}(p)$ en fonction de u_0 , il suffit de remarquer que la largeur en $u = \frac{kv}{|\delta|s}$ de $\bar{\Pi}^{st}(p)$ a la propriété de diminuer lorsque u_0 augmente. En effet, l'intégrale dans (III3c - 29) est toujours négative lorsque $\delta < 0$, donc l'argument de \exp devient d'autant plus négatif que u_0 est plus élevé, ce qui accélère la décroissance de $\bar{\Pi}^{st}(p)$ en fonction de $|u|$. Cette propriété désigne immédiatement le régime des u_0 élevés comme celui de l'approche semi-classique traditionnelle : si u_0 est assez grand, $\Delta u = \frac{\Delta p}{\hbar k u_0}$ est assez faible, ce qui autorise la linéarisation en u de la force et de la diffusion. On retrouve la gaussienne habituelle, de température donnée par (I2e - 9b). Par contre, aux faibles

valeurs de u_0 , on est dans la situation inverse : les distributions stationnaires deviennent très larges en u , ce qui autorise à remplacer \mathcal{F} et \mathcal{D} dans (III3c - 29) par leur développement asymptotique au voisinage de $u = \infty$. On obtient ainsi, à l'aide de (III3b - 8) et (III3b - 9a) et pour $\delta < 0$:

$$\frac{\mathcal{F}(u; \frac{\delta}{\Gamma})}{\mathcal{D}(u; \frac{\delta}{\Gamma})} \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{25}{1171} \frac{1}{u} \quad (\text{III3c - 30})$$

résultat qui, remarquons-le, ne dépend pas de $\frac{\delta}{\Gamma}$ et donne, après substitution dans (III3c - 29), la décroissance asymptotique de $\bar{\Pi}^{\text{st}}(\mathbf{p})$:

$$\bar{\Pi}^{\text{st}}(p) \underset{k|v| \gg |\delta|s}{\sim} A \left(\frac{\hbar k}{|p|} \right)^{\frac{25}{1171} u_0} \quad (\text{III3c - 31})$$

Ceci permet d'établir une propriété fondamentale des nouveaux mécanismes, qui est d'être à seuil en fonction de l'intensité laser. En effet, $\bar{\Pi}^{\text{st}}(p)$ n'est pas d'énergie cinétique finie lorsque u_0 est inférieur à la valeur critique :

$$(u_0)_{\text{seuil}} = \frac{3513}{25} = 140.52 \quad (\text{III3c - 32})$$

Lorsqu'on abaisse encore la valeur de u_0 , la distribution $\bar{\Pi}^{\text{st}}(p)$ finit même par devenir non normalisable. On conçoit alors que de longues ailes apparaissent sur $\bar{\Pi}^{\text{st}}(p)$. Par contre, les nouveaux mécanismes, toujours efficaces au voisinage de $p = 0$, imposent à la distribution une mi-largeur en p très faible. En guise de confirmation, nous avons représenté, sur la fig. III-14, des distributions $\bar{\Pi}^{\text{st}}(p)$ pour deux valeurs de u_0 , l'une bien sous le seuil ($u_0 = 10$), l'autre au voisinage de l'optimum sur $\Delta p(u_0 = 250)$.

Apportons maintenant quelques corrections au modèle simple précédent. Ainsi, au sens strict, la divergence sur $\langle p^2 \rangle$ constatée en présence des seuls nouveaux mécanismes ne se produit pas physiquement. Le refroidissement Doppler vient en effet limiter l'extension des ailes de la distribution, et l'on s'attend à retrouver simplement, lorsque $u_0 \rightarrow 0$, les valeurs de $\frac{\langle p^2 \rangle}{M}$ associées à la température Doppler T_D sur $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$. Ceci a été vérifié numériquement au §2b, et nous avons donné à cette occasion, en (III2b - 4)

(*) On peut montrer que la prise en compte du préfacteur dans (III3c - 23), en présence des seuls nouveaux mécanismes, ne change pas l'exposant dans (III3c - 31).

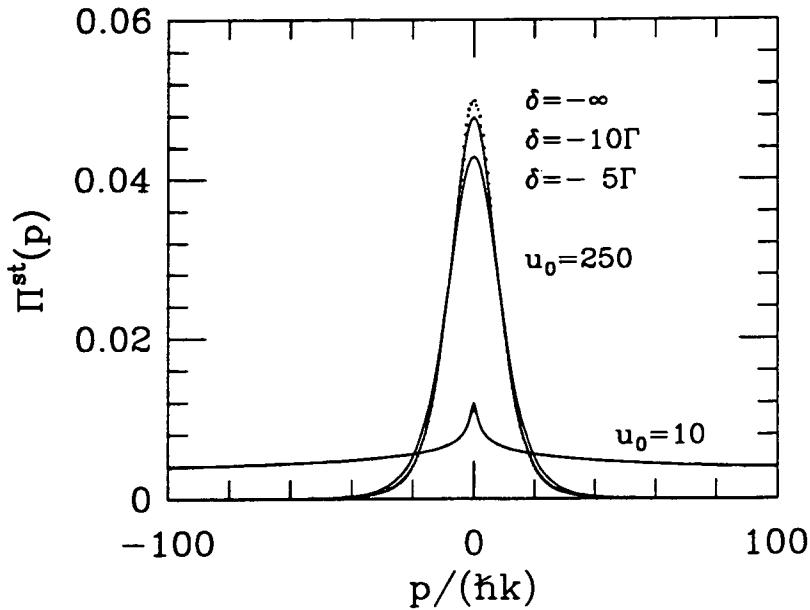


Fig. III-14 : Sur $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, distributions en impulsion stationnaires calculées selon l'équation de Fokker-Planck simplifiée, en présence des seuls nouveaux mécanismes de refroidissement, pour $u_0 = 10$ et $u_0 = 250$. Le désaccord vaut $\delta = -5\Gamma$ pour les courbes en trait plein ; les pointillés correspondent à la limite $|\delta| \gg \Gamma$ (\mathcal{F} et \mathcal{D} remplacés par \mathcal{F}_∞ et \mathcal{D}_∞ dans (III3c - 29)). Les courbes sont normalisées sur $[-100\hbar k, 100\hbar k]$.

l'expression de T_D , qui conduit à $\Delta p \simeq 87\hbar k$ pour la masse du césium et $\delta = -5\Gamma^{(*)}$. Par ailleurs, les prédictions de (III3c - 29) ne sont pas non plus correctes aux très grandes valeurs de u_0 , l'importance du paramètre de saturation s ne permettant plus de ramener la dynamique dans l'état fondamental. Nous avons donc repris le calcul de la solution stationnaire de l'équation de Fokker-Planck simplifiée (III3c - 28) sans faire ni l'approximation de faible vitesse ($k|v| \ll \Gamma$) ni celle de faible saturation dans l'obtention des coefficients $F(v)$ et $D(v)$. La dépendance correspondante de Δp et p_e en fonction de $\sqrt{u_0}$, toujours pour $\delta = -5\Gamma$, fait l'objet de la fig. III-15. Nous avons représenté également, en pointillés, les valeurs "universelles" de Δp et p_e obtenues par la distribution approchée (III3c - 29). On confirme ainsi que l'influence des mécanismes Doppler sur p_e se produit à partir de valeurs de u_0 beaucoup plus faibles que pour Δp .

(*) Nous avons également constaté numériquement (voir fig. III-3) que, dans ce domaine des valeurs de u_0 , $\Pi^{\text{st}}(p)$ présentait une structure très étroite autour de $p = 0$ [5], due aux nouveaux mécanismes de refroidissement. On peut montrer alors que la condition (III3c - 13) de marche à petits pas effectifs n'est pas vérifiée au niveau de cette structure, lorsque u_0 est très faible, ce qui interdit localement l'usage de l'équation de Fokker-Planck complète (III3c - 22).

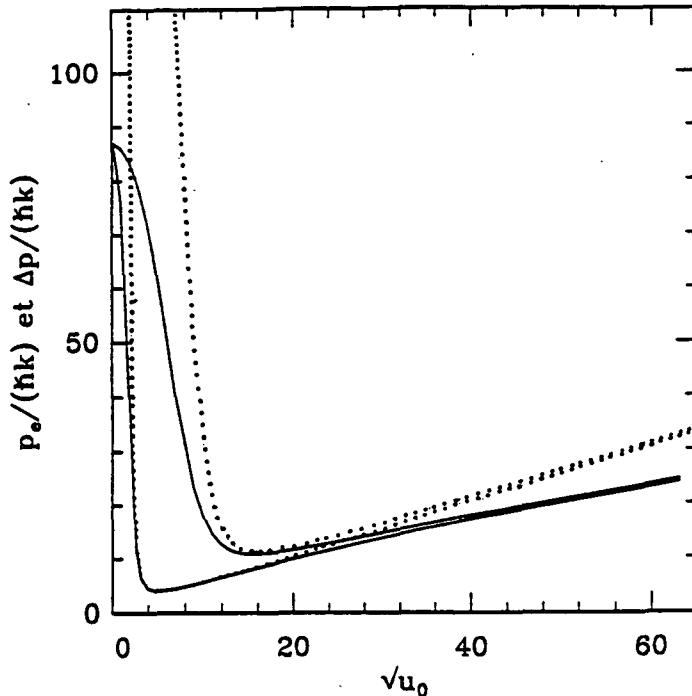


Fig. III-15 : Sur $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ et pour la masse du césium, dépendance de Δp et p_e (en unité de $\hbar k$) en fonction de $\sqrt{u_0}$, telle qu'elle est prédictée par l'équation de Fokker-Planck simplifiée (III3c - 28), avec les valeurs exactes de $F(v)$ et $D(v)$, et pour $\delta = -5\Gamma$. Les prédictions de (III3c - 29) sont représentées en pointillés. Les calculs sont effectués sur l'intervalle en p $[-400\hbar k, 400\hbar k]$.

(vi) Difficultés de l'approche par Fokker-Planck sur la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$

La comparaison directe avec le calcul quantique a montré que les prédictions de Fokker-Planck étaient fiables sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$. Nous souhaitons montrer que ce n'est plus le cas sur la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ de l'atome de césium. Afin de donner plus de poids à la démonstration, nous nous plaçons ici systématiquement au voisinage de l'optimum du refroidissement, dans le régime $|\delta| \gg \Gamma$, avec prise en compte des seuls nouveaux mécanismes de refroidissement. Nous examinons d'abord pour quelles valeurs de la vitesse atomique v les conditions de marche à petits pas effectifs, soit (III3c - 24) et (III3c - 25), sont remplies lorsque $j_g = 4$. On trouve ainsi que $k|v|$ doit être assez faible en unité de $|\delta|s$. Pour mieux évaluer l'échec de l'approche par Fokker-Planck, nous utilisons ensuite, de façon anticipée, les résultats quantiques du §4, toujours pour $j_g = 4$.

Nous avons vu, au (iii), que l'équation de Fokker-Planck est obtenue à l'aide d'une approximation du développement en série (III3c - 12) par troncature, le premier terme négligé étant d'indice $n = 2$. La fig. III-16 représente donc, en fonction de la vitesse renormalisée $u = \frac{kv}{|\delta|s}$, la grandeur des termes successifs d'indice $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ dans le développement de $\frac{1}{\Pi_F^{st}(p)} \rho_F^{st}(p)$. Le calcul est effectué, pour $j_g = 1$ et $j_g = 4$, selon les

considérations de l'appendice B_{III}, et l'expression retenue pour $\Pi_F^{st}(p)$ est celle déduite de (III3c - 23) par omission de l'amplitude lentement variable.

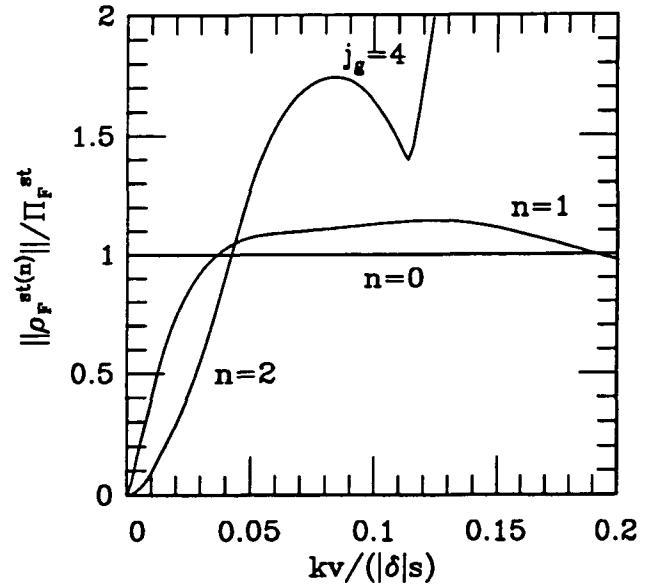
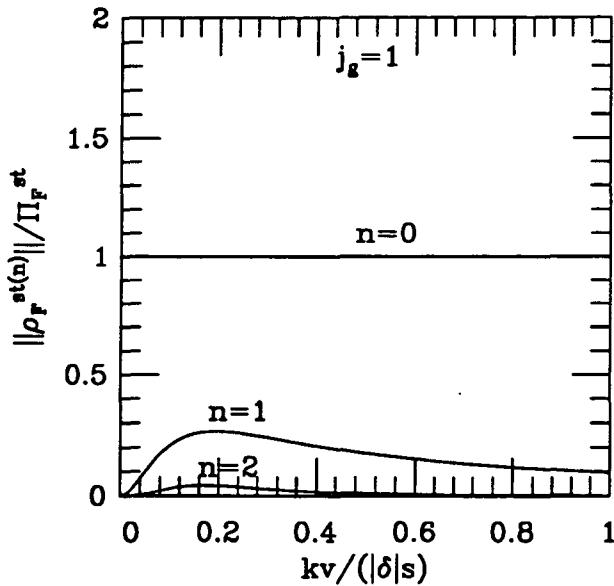


Fig. III-16 : Pour les transitions $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ et $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$, comportement en fonction de $u = \frac{kv}{|\delta|s}$, des trois premiers termes du développement de $\rho_F^{st}(p)$ déduit de (III3c - 12). Le calcul est effectué dans le cadre de l'appendice B_{III}.

Nous constatons, sur la fig. III-16, que le premier terme négligé dans Fokker-Planck (d'indice $n = 2$) est très petit lorsque $j_g = 1$, quelle que soit la vitesse atomique. La condition de marche à petits pas effectifs est donc parfaitement vérifiée sur cette transition, ce qui explique le succès de Fokker-Planck constaté au (iv). Il n'en va pas de même sur la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$: pour certaines valeurs de la vitesse, le premier terme négligé est plus grand que les termes d'indice $n = 0$ et $n = 1$, ce qui suggère une divergence du développement (III3c - 12) en ces points ! On remarque cependant qu'il est raisonnable d'estimer la condition de validité de Fokker-Planck satisfait sur $j_g = 4$ lorsque la vitesse est assez faible :

$$|u| \leq 10^{-2} \quad \text{donc} \quad k|v| \leq 10^{-2}|\delta|s \quad (\text{III3c - 33})$$

L'équation de Fokker-Planck ne peut donc pas rendre compte, sur la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ du césium, de distributions $\Pi(p)$ dont la vitesse quadratique moyenne Δv est très en dehors de la plage (III3c - 33).

Il est important de remarquer, à ce stade, que nous pouvions être certain de l'existence d'un intervalle de vitesse autour de 0 sur lequel l'équation de Fokker-Planck est utilisable. En effet, il a été prouvé (voir [17] et le II§2c) que l'on peut écrire, dans le cadre de l'approche semi-classique traditionnelle, une équation de Fokker-Planck avec une force linéaire en vitesse et un coefficient de diffusion constant. La condition de validité de Fokker-Planck ainsi "linéarisée" est simplement $\Delta v \ll v_{\text{lin}}$, où v_{lin} est le domaine de linéarité en vitesse de $F(v)$. Un examen d'un agrandissement de la fig. III-11 permet d'estimer v_{lin} pour la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ dans la limite $|\delta| \gg \Gamma$, ce qui conduit à une condition de même forme que (III3c - 33) pour la validité de l'approche semi-classique traditionnelle, si ce n'est que l'inégalité ($<$) est remplacée par la domination (\ll) :

$$k\Delta v \ll kv_{\text{lin}} \sim 10^{-2}|\delta|s \quad (\text{III3c - 34})$$

Notre équation de Fokker-Planck écrite sur $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ avec toute la dépendance en vitesse de $F(v)$ et $D(v)$ semble donc souffrir des mêmes limitations que l'approche semi-classique traditionnelle. On s'attend à ce qu'elle soit valable aux grandes valeurs de u_0 , pour lesquelles nous avons vu que la largeur de u de la distribution en vitesse devient très faible, mais on peut douter qu'elle permette d'obtenir l'optimum du refroidissement. Pour répondre à cette question, nous faisons appel de façon anticipée aux résultats quantiques du §4 suivant. La méthode utilisée est valable dans la limite des grands désaccords, et permet de choisir une discrétisation en p assez fine ($\delta p = \frac{1}{2}\hbar k$) pour décrire fidèlement le véritable diagramme d'émission spontanée. Dans le calcul par Fokker-Planck, nous retenons une forme simplifiée de (III3c - 23) en omettant l'amplitude lentement variable mais, au vu des résultats de la fig. III-16, nous devons effectuer de façon rigoureuse le passage de la représentation des familles à la représentation habituelle, en prenant en compte la première correction à l'état interne (d'indice $n = 1$) par rapport à la solution stationnaire des équations de Bloch ordinaires. Le comportement de $\langle p^2 \rangle$ avec u_0 selon les approches quantiques et de Fokker-Planck est représenté sur la fig. III-17a, la direction asymptotique de $\langle p^2 \rangle$ aux grands u_0 étant obtenue par l'approche semi-classique traditionnelle. Nous avons choisi, à l'aide de cette figure, deux valeurs de u_0 , l'une ($u_0 = 100$) pour laquelle Fokker-Planck est inapplicable, l'autre ($u_0 = 500$) pour laquelle Fokker-Planck

convient. Les distributions en impulsion quantiques et de Fokker-Planck correspondantes sont l'objet de la fig. III-17b.

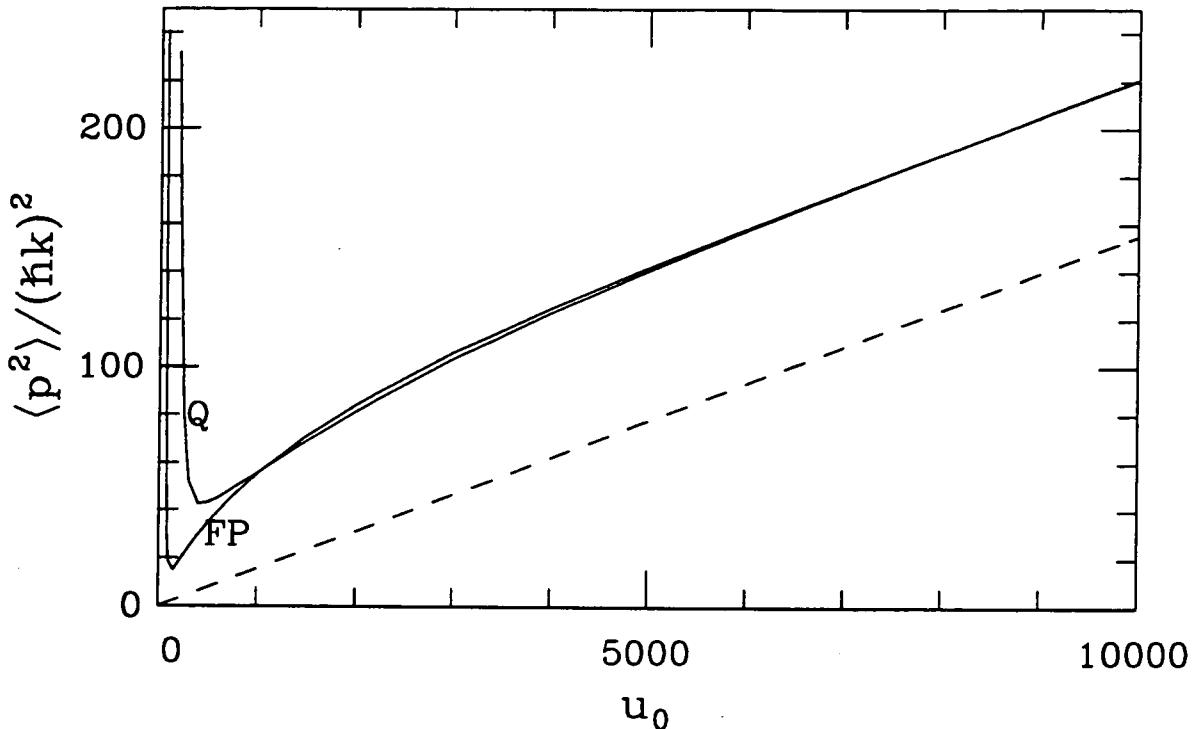


Fig. III-17a : Pour la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ dans la limite $|\delta| \gg \Gamma$, variance $\langle p^2 \rangle$ de l'impulsion en unité de $(\hbar k)^2$ en fonction de u_0 , selon le calcul quantique (Q) du §4 et selon Fokker-Planck (FP). La ligne pointillée représente la prédition de l'approche semi-classique traditionnelle. Dans le calcul numérique, $p_{\max} = 100\hbar k$ et $\delta p = \frac{1}{2}\hbar k$.

Les résultats de la fig. III-17a confirment l'analyse des conditions de marche à petits pas effectifs : l'approche de type Fokker-Planck est légitime pour l'obtention des distributions stationnaires sur des transitions à moment cinétique élevé ($j_g = 4$) seulement lorsque u_0 est assez grand, ce qui correspond à des valeurs faibles de $\Delta u = \frac{\Delta p}{\hbar k u_0}$, l'accord avec le calcul quantique étant alors remarquable (voir la fig. III-17b pour $u_0 = 500$). Par contre, elle est tenue en échec pour des valeurs plus faibles de u_0 : on constate sur la fig. III-17b qu'elle prédit, lorsque $u_0 = 100$, une distribution très froide, d'allure gaussienne, alors que la véritable distribution stationnaire présente de très longues ailes.

Notons, pour terminer, que notre équation de Fokker-Planck, même si elle est incapable de déterminer précisément l'optimum sur $\langle p^2 \rangle$, a quand même l'avantage, sur

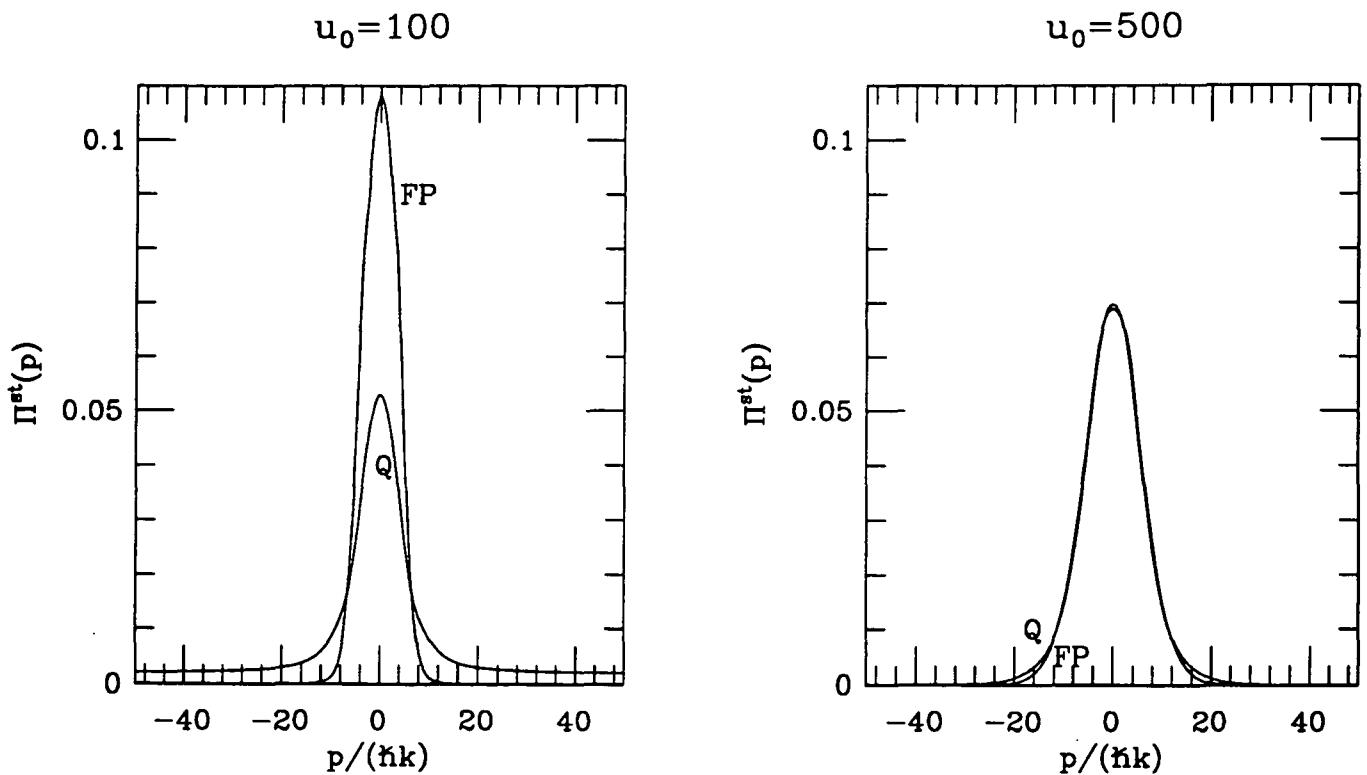


Fig. III-17b : Dans les conditions de la figure a, distributions en impulsion stationnaires quantiques (Q) ou par Fokker-Planck (FP), sur l'intervalle $[-50\hbar k, 50\hbar k]$, pour $u_0 = 100$ et $u_0 = 500$ respectivement.

l'approche semi-classique traditionnelle, de rendre compte exactement de l'existence d'un seuil en u_0 pour les nouveaux mécanismes de refroidissement. Il est en effet un autre domaine de vitesse, hors de l'intervalle choisi pour la fig. III-16, sur lequel l'usage de Fokker-Planck est légitime. C'est celui des vitesses élevées ($k|v| \gg |\delta|s$), pour lesquelles, suivant les notations de (III3c - 15), $\delta p_{\text{eff}} \frac{|F|}{D}$ peut être rendu arbitrairement petit, puisque δp_{eff} tend vers une valeur finie (voir (I2e - 20)), alors que $\frac{|F|}{D}$ tend vers 0. Ceci signifie que l'équation de Fokker-Planck donne la bonne loi de puissance en u pour la décroissance de $\Pi^{\text{st}}(p)$ à l'infini, donc la bonne valeur du seuil sur u_0 dans la condition d'existence de $\langle p^2 \rangle$ en l'absence de refroidissement Doppler. Ceci constitue cependant une trop maigre consolation pour que nous ne nous attaquions pas, dans le §4 suivant, à la résolution des équations entièrement quantiques avec j_g arbitraire.

4 - ÉTUDE ENTIEREMENT QUANTIQUE DU REFROIDISSEMENT POUR UNE TRANSITION $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$ ARBITRAIRE

Nous avons montré, au §3 précédent, que l'étude semi-classique du refroidissement, conduite dans l'approximation supplémentaire de la marche à petit pas i.e. sous la forme d'une équation de Fokker-Planck, est mise en échec pour certaines valeurs des paramètres, lorsque $j_g = 4$. Nous reprenons donc comme point de départ, pour déterminer les distributions en impulsion les plus étroites sur les transitions à moment cinétique élevé, le traitement entièrement quantique du refroidissement. Nous présentons ici deux méthodes de résolution des équations quantiques. La première réalise l'évolution temporelle selon les équations de Bloch complètes, sans hypothèse de faible vitesse ($k|v| \ll \Gamma$) ou de faible saturation. La seconde, adaptée à la recherche de l'optimum du refroidissement sur raies larges ($M\Gamma \gg \hbar k^2$), effectue dans la limite des grands désaccords ($|\delta| \gg \Gamma$) l'approximation séculaire sur les équations quantiques ramenées dans l'état fondamental, seuls les nouveaux mécanismes étant pris en compte.

a) Résolution numérique des équations quantiques complètes

Nous voulons déterminer numériquement l'état stationnaire des équations de Bloch quantiques, en prenant en compte aussi bien le refroidissement Doppler que les effets de saturation à forte intensité laser. La première étape, comme au §2, qui traitait du cas particulier $j_g = 1$, est d'écrire l'opérateur de Bloch régissant l'évolution des éléments de la matrice densité intrafamille. Nous travaillons dans la représentation des familles (voir le §1) ce qui donne :

$$\partial_t \rho_F(p, t) = (\text{Bloch}_F [\rho_F])(p, t) \quad (\text{III4a - 1})$$

L'action de Bloch_F , indépendante de t mais non locale en p , est indiquée dans (III1c - 11). Nous discrétisons le nombre p , avec le choix des poids de Simpson pour l'intégrale d'alimentation par émission spontanée, puis nous effectuons une troncature sur p , selon les conditions aux limites choisies dans le §2a. Nous utilisons la structure en familles internes, comme au §2a, mais nous choisissons, pour la simplicité d'écriture, la base des dyades internes $|a m\rangle\langle a' m'|$, où $a, a' = e$ ou g , et $m - m'$ est pair ou impair selon que $a = a'$ ou $a \neq a'$. Le point important est que la matrice Bloch_F possède dans cette base un petit nombre d'éléments non nuls sur chaque ligne (cf. §2a). Le terme d'alimentation

par émission spontanée est décrit par une somme sur q et p_S non locale en p mais dont les poids sont simplement des produits de coefficients de Clebsch-Gordan, comme le prouve (III1b - 3). L'expression de ces coefficients pour un moment cinétique j_g arbitraire fait l'objet de la fig. II-4.

La deuxième étape consiste en la recherche de la solution de (III4a - 1) indépendante du temps. Lorsque j_g est élevé, nous ne pouvons plus procéder par inversion directe d'une grosse matrice de bande, comme nous l'avions fait à l'aide de la bibliothèque IMSL pour $j_g = 1$. Le nombre de lignes de la matrice à inverser, à δp et p_{\max} fixés, varie en effet comme $(2j_g + 1)^2 + (2j_g + 3)^2$. L'astuce consiste alors à effectuer une évolution temporelle selon (III4a - 1) pour un état initial $\rho_F(p, 0)$ quelconque, $\rho_F(p, t)$ convergeant lorsque $t \rightarrow +\infty$ vers l'unique état stationnaire $\rho_F^{\text{st}}(p)$. La méthode d'intégration numérique choisie est celle de Runge-Kutta à l'ordre N , dont la forme est ici particulièrement simple puisque (III4a - 1) est linéaire à coefficients constants. Elle consiste à exprimer de façon approchée $\rho_F(t + dt)$ en fonction de $\rho_F(t)$, par un développement de la solution exacte à l'ordre N en dt :

$$\rho_F(t + dt) = e^{dt \text{Bloch}_F} [\rho_F(t)] \simeq \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (\text{Bloch}_F dt)^n [\rho_F(t)] \quad (\text{III4a - 2})$$

Le polynôme en dt dans (III4a - 2) est évalué selon la méthode de Horner [68], ce qui permet d'éviter le stockage des coefficients des puissances successives de Bloch_F . Il reste à choisir l'ordre N de façon que le nombre d'opérations à effectuer pour faire évoluer ρ_F pendant T soit minimal. Comme ce nombre varie proportionnellement à $\frac{NT}{dt}$, il nous reste à déterminer, en fonction de N , le pas dt maximal admissible. Notons bien que notre objectif n'est pas de réaliser une simulation fidèle de l'évolution temporelle de ρ_F , mais de construire une suite qui converge en le minimum d'opérations vers ρ_F^{st} . La contrainte sur dt est donc seulement une condition de stabilité de l'itération de (III4a - 2), qu'il est facile d'écrire en diagonalisant formellement l'opérateur Bloch_F . Elle fait intervenir le spectre $z_j = -\gamma_j + i\omega_j$ de cet opérateur, où $\gamma_j > 0$ sauf pour l'état stationnaire d'indice j_{st} ($z_{j_{\text{st}}} = 0$). On obtient alors que l'interaction converge toujours vers l'état stationnaire si et seulement si :

$$\forall j \neq j_{\text{st}} \quad dt \cdot z_j \in C_N \quad (\text{III4a - 3a})$$

$$C_N = \left\{ z \in \mathbb{C} / \left| \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| < 1 \right\} \quad (\text{III4a - 3b})$$

Les frontières de C_1 et C_4 sont représentées sur la fig. III-18. On y constate que C_1 est contenu dans C_4 . Ceci ne prouve pas directement que le choix $N = 4$ l'emporte sur $N = 1$, puisque c'est $\frac{dt}{N}$ et non pas dt qu'il faut maximiser. Nous représentons donc également sur la fig. III-18 les ensembles "renormalisés" \tilde{C}_N tels que :

$$\tilde{C}_N = \left\{ \frac{z}{N} / z \in C_N \right\} \quad (\text{III4a - 4})$$

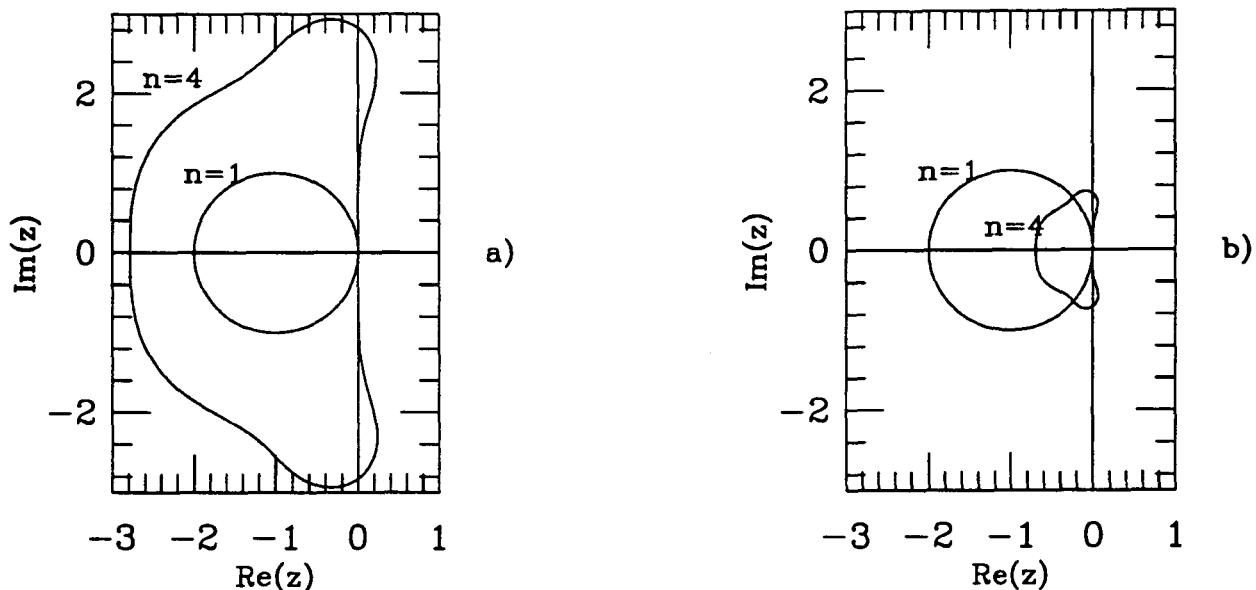


Fig. III-18 : Comparaison des ordres $N = 1$ et $N = 4$ de la méthode d'intégration de Runge-Kutta pour les systèmes linéaires à coefficients constants. Sont représentées, dans le plan complexe, les frontières des domaines de stabilité C_1 et C_4 (voir (III4a - 3b)) en a, et les frontières de \tilde{C}_1 et \tilde{C}_4 (voir (III4a - 4)) en b.

Comme \tilde{C}_1 et \tilde{C}_4 ne sont pas emboîtés, le choix $N = 4$ ou $N = 1$ l'emporte suivant la nature des z_j . Si les z_j sont près de l'axe réel, $N = 1$ est préférable d'un facteur ~ 2.5 en temps de calcul, puisque la frontière de C_1 coupe l'axe des réels négatifs en (-2) , au lieu de (~ -3) pour C_4 . Il n'en va pas de même pour des z_j proches de l'axe des imaginaires purs. Le choix $N = 4$ l'emporte alors $N = 1$ de façon spectaculaire, le domaine de stabilité C_4 contenant même des complexes de partie réelle positive ! Dans le problème particulier qui nous intéresse, les z_j ont une partie dissipative de l'ordre de Γ au plus, alors que leur partie

oscillante vaut couramment plusieurs Γ , dès que $|\delta| \gg \Gamma$ par exemple. Physiquement, nous serons donc confronté à des valeurs propres à petite partie réelle mais à partie imaginaire élevée, ce qui rend de loin préférable le choix $N = 4$, choix dont on peut montrer en fait qu'il est optimal au voisinage de l'axe imaginaire, en étudiant tous les ensembles \tilde{C}_N . Nous effectuons pour cette raison l'évolution temporelle avec $N = 4$, et nous retenons comme critère de stabilité approché $|\omega_{\max} dt| < 2\sqrt{2}$, où ω_{\max} est la valeur maximale estimée des parties imaginaires des z , et $\pm 2\sqrt{2}$ sont les ordonnées des points d'intersection, autres que l'origine, de l'axe imaginaire avec la frontière de C_4 . Une estimation grossière de ω_{\max} conduit au choix heuristique :

$$\left[2(j_g + 1) \frac{k p_{\max}}{M} + |\delta| + |\Omega| \right] dt = 2.5 < 2\sqrt{2} \quad (\text{III4a - 5})$$

où la pulsation de Rabi Ω est définie par (III1c - 8) et (III1a - 1).

Comme première illustration de cette évolution temporelle numérique, nous choisissons une situation, analogue à celle de la fig. III-4, très en-dessous du seuil des nouveaux mécanismes de refroidissement. Ceux-ci interviennent alors seulement au voisinage de la vitesse nulle, par formation d'une structure très étroite sur la distribution en impulsions $\Pi(p)$. Il est donc nécessaire, pour obtenir précisément cette distribution, de prendre en compte à la fois les nouveaux mécanismes et le refroidissement Doppler. La transition considérée est celle utilisée expérimentalement sur l'atome de sodium : il s'agit de $j_g = 2 \rightarrow j_e = 3$, de masse réduite $\frac{M\Gamma}{\hbar k^2} = 200$. Les valeurs des paramètres ($\delta = -3\Gamma, s = 10^{-2}$) permettent la comparaison avec des mesures expérimentales faites à une dimension [6]. La distribution en impulsions présentée sur la fig. III-19 est issue de l'évolution pendant $9000\Gamma^{-1}$ d'un état initial thermique d'impulsion quadratique moyenne $40\hbar k$, les modifications survenues à $\Pi(p)$ depuis l'instant $6000\Gamma^{-1}$ étant négligeables. Les valeurs du nombre p prises en compte sont les multiples de $\hbar k$ dans l'intervalle $[-200\hbar k, 200\hbar k]$.

Nous avons appliqué ensuite de façon systématique cette approche à la recherche de l'optimum du refroidissement sur la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ utilisée expérimentalement sur l'atome de césium ($\frac{M\Gamma}{\hbar k^2} = 1285$). Afin de mettre en évidence, comme pour $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$, l'intérêt de la limite universalisante (III2c - 2), nous représentons, sur la fig. III-20, le comportement de $\langle p^2 \rangle$ en fonction de $u_0 = \frac{-\hbar\delta s}{2E_R}$, pour différentes valeurs du désaccord δ . En pratique, comme on s'attend à ce que les distributions stationnaires dépendent peu de $\frac{\delta}{\Gamma}$ à u_0 fixé dès que $|\delta| \gg \Gamma$, on calcule à u_0 fixé pour les valeurs successives

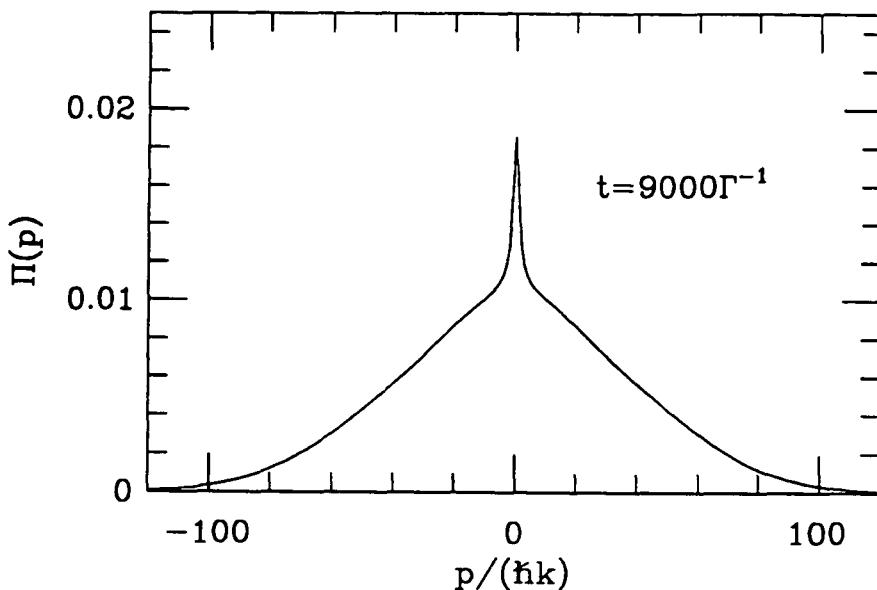


Fig. III-19 : Sur la transition $j_g = 2 \rightarrow j_e = 3$ du sodium ($M\Gamma = 200\hbar k^2$) , résultat de l'évolution temporelle pendant $9000\Gamma^{-1}$ d'une distribution en impulsion initiale thermique de $\Delta p = 40\hbar k$. Le désaccord entre atome et laser est $\delta = -3\Gamma$, le paramètre de saturation par onde vaut $s = 10^{-2}$. Les choix pour le calcul numérique sont $\delta p = \hbar k$, $p_{\max} = 200\hbar k$ et $dt = \frac{1}{4}\Gamma^{-1}$.

sives du désaccord, en choisissant comme état initial la matrice densité considérée comme stationnaire pour la valeur précédente de $\frac{\delta}{\Gamma}$.

Bien qu'elle constitue un traitement numérique assez brutal du problème, la présente approche a pour nous le mérite de prouver que la situation est qualitativement la même pour $j_g = 1$ et $j_g = 4$: les distributions en impulsion les plus froides sont obtenues, sur les raies larges, à faible saturation et à grand désaccord. Cette approche va permettre également d'estimer la pertinence des traitements approchés à venir.

b) Réduction des équations quantiques au voisinage de l'optimum du refroidissement

La résolution numérique précédente des équations quantiques complètes nous incite, dans la recherche du minimum de $\langle p^2 \rangle$, à effectuer d'importantes réductions de ces équations. La première réduction exploite la faiblesse du paramètre de saturation et de l'effet Doppler ($k\Delta v \ll \Gamma$) dans les situations stationnaires les plus froides. Elle consiste à ramener la dynamique dans l'état fondamental, ce qui fait disparaître le mécanisme de refroidissement Doppler. Cette réduction, effectuée en détail dans le II§1c, conduit, dans la représentation des familles (il suffit d'effectuer la transformation (III1c - 5)), aux équa-

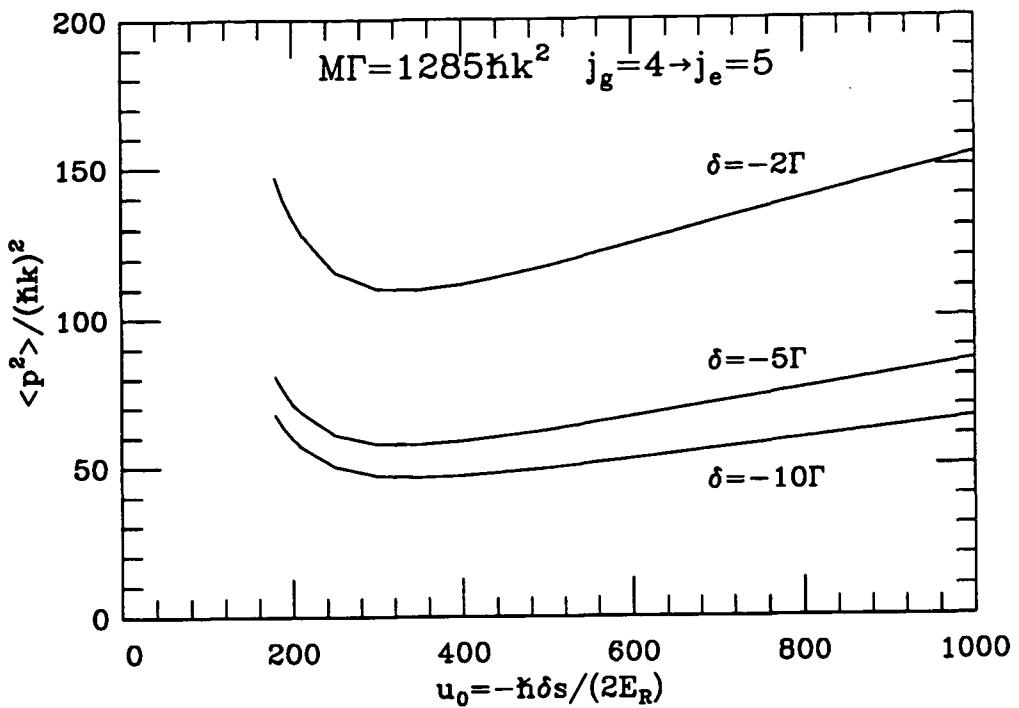


Fig. III-20 : Sur la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ du césium ($M\Gamma = 1285\hbar k^2$), comportement, dans l'état stationnaire obtenu par évolution temporelle, de $\frac{\langle p^2 \rangle}{(\hbar k)^2}$ en fonction de u_0 , pour différentes valeurs du désaccord : $\delta = -2\Gamma, -5\Gamma$ et -10Γ . Le calcul est effectué sur l'intervalle en $p [-50\hbar k, 50\hbar k]$, avec un pas $\delta p = \hbar k$.

tions d'évolution suivantes pour la partie diagonale en p de la restriction $\bar{\rho}_F$ de ρ_F dans l'état fondamental :

$$\partial_t \bar{\rho}_F(p, t) = \frac{1}{i\hbar} [\bar{H}_F(p), \bar{\rho}_F] + (\partial_t \bar{\rho}_F)_{\text{relax}} \quad (\text{III4b - 1a})$$

$$\bar{H}_F(p) = \frac{(p + kj_z)^2}{2M} + \frac{\hbar\delta s}{2} \mathcal{V}^{(-)}(0) \mathcal{V}^{(+)}(0) \quad (\text{III4b - 1b})$$

Les termes de relaxation dans (III4b - 1a) sont identiques à ceux des équations (III3b - 3) que nous avions écrites pour un atome de vitesse v imposée. Il n'en va pas de même pour la partie hamiltonienne : $\bar{H}_F(p)$ contient, dans (III4b - 1b), le terme quadratique en j_z déjà rencontré au §1, et qui est absent de (III3b - 4a).

Nous voulons effectuer ici une seconde approximation sur les équations quantiques, en réduisant la forme stationnaire de (III4b - 1a) dans la limite $|\delta| \gg \Gamma$, selon une tech-

nique déjà utilisée pour le calcul de \mathcal{F}_∞ et \mathcal{D}_∞ dans l'appendice B_{III}, et qui est celle de l'approximation séculaire.

(i) Etude de la partie réactive des équations quantiques dans l'état fondamental

Il s'agit de déterminer les fréquences de Bohr les plus faibles associées au commutateur de (III4b - 1a). Cette détermination passe par la diagonalisation, pour toutes les valeurs utiles de p , du hamiltonien purement interne $\bar{H}_F(p)$; les états propres correspondants, également purement internes mais fonction de p , sont notés $|n, p\rangle$:

$$\bar{H}_F(p)|n, p\rangle = E_n(p)|n, p\rangle \quad (\text{III4b} - 2a)$$

$$\langle n, p|n', p\rangle = \delta_{n,n'} \quad (\text{III4b} - 2b)$$

Il n'y a, sauf cas particulier, pas d'axe de quantification privilégié, \bar{H}_F contenant, en conflit, des termes imposant l'axe Oz (champ magnétique fictif et terme de recul en j_z^2) et d'autres imposant l'axe Oy (champ électrique). Nous avons choisi, par simplicité, la base des états fondamentaux de moment cinétique bien défini selon Oz , $\{|m\rangle_z; -j_g \leq m \leq j_g\}$, dans laquelle l'action de \bar{H}_F est :

$$\begin{aligned} \bar{H}_F(p)|m\rangle_z &= \left[\frac{(p + \hbar km)^2}{2M} + \frac{\hbar \delta s}{2} (c_m^{+2} + c_m^{-2}) \right] |m\rangle_z \\ &\quad + \frac{\hbar \delta s}{2} [c_m^+ c_{m+2}^- |m+2\rangle_z + c_m^- c_{m-2}^+ |m-2\rangle_z] \end{aligned} \quad (\text{III4b} - 3)$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan c_m^q sont donnés dans la fig. II-4. Le couplage dans (III4b - 3) modifie le nombre quantique m d'un nombre pair, ce qui est le reflet de la décomposition en deux familles internes stables par $\bar{H}_F(p)$, familles internes déjà présentes dans (III1a - 3). A l'intérieur de chaque famille, la matrice représentant $\bar{H}_F(p)$ est symétrique tridiagonale, donc tombe sous le coup d'algorithmes de diagonalisation numérique efficaces [68]. Nous donnons le résultat d'un tel calcul pour la transition $j_g = 4 \longrightarrow j_e = 5$ sur la fig. III-21 : les niveaux d'énergie, diminués du terme cinétique $\frac{p^2}{2M}$, sont représentés dans chaque famille interne, en unité d'énergie de recul, comme des fonctions de la grandeur sans dimension $\frac{p}{\hbar k}$. Avec ce choix d'unités, ces courbes d'énergie ne dépendent plus que du paramètre u_0 , dont la valeur est prise à 500 sur la fig. III-21. Notons qu'il est possible, après un effort calculatoire modéré, d'obtenir analytiquement, pour $j_g = 4$,

le spectre E sous la forme $\left(\frac{p}{\hbar k}\right)^2 = f\left(\frac{E - \frac{p^2}{2M}}{E_R}\right)$, où E_R est l'énergie de recul et la fonction f découle de la résolution d'une équation du second degré en $\left(\frac{p}{\hbar k}\right)^2$.

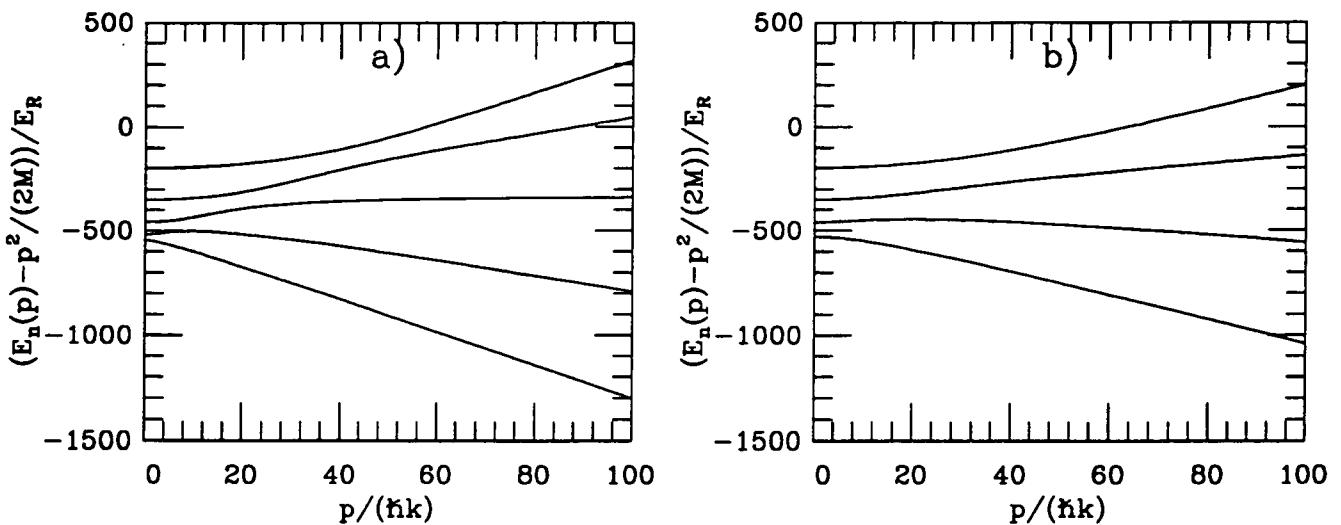


Fig. III-21 : Pour la transition atomique $j_g = 4 \longrightarrow j_e = 5$, représentation du spectre de $\bar{H}_F(p)$ diminué de $\frac{p^2}{2M}$ et exprimé en unité de recul $\frac{(\hbar k)^2}{2M}$, en fonction de $\frac{p}{\hbar k}$. Le seul paramètre ajustable, u_0 , vaut 500. La figure a correspond à la famille interne dans l'état fondamental à $m + j_g$ pair, b correspond à $m + j_g$ impair.

La forme des spectres de la fig. III-21 est facilement interprétable à grande vitesse $\left(\frac{p}{\hbar k u_0}$ assez grand) : l'effet du champ magnétique fictif $k v j_z$ est alors dominant dans $\bar{H}_F(p)$, et $E_n(p) - \frac{p^2}{2M}$ devient équivalent à $\hbar k \frac{p}{M} m$, où $-j_g \leq m \leq j_g$, ce qui permet d'ailleurs une numérotation des courbes $E_n(p)$. À $p = 0$, il est cependant important de remarquer que l'on n'est pas exactement dans la situation d'un atome de vitesse nulle imposée : $\bar{H}_F(p = 0)$ diffère de son homologue (III3b - 4a) pris à $v = 0$ du terme de recul $\frac{k^2 j_z^2}{2M}$. La présence de ce terme empêche de diagonaliser rigoureusement $\bar{H}_F(p = 0)$ en se plaçant dans la base $|m\rangle_y$, comme nous aurions pu le faire au §3c. C'est seulement à la limite des grands u_0 que ce terme de recul devient négligeable devant l'action du champ électrique correspondant aux déplacements lumineux :

$$E_n(p = 0) \underset{u_0 \rightarrow +\infty}{\sim} \hbar \delta s \ c_m^0 \quad (\text{III4b - 4})$$

La connaissance du spectre $E_n(p)$ permet la détermination de la grandeur importante en vue de l'approximation séculaire, c'est à dire la fréquence de Bohr la plus petite imposée par $\bar{H}_F(\cdot)$. Notons bien qu'il faut se limiter en fait aux fréquences de Bohr entre des états $|n, p\rangle$ d'une même famille, puisque toutes les cohérences interfamille sont nulles dans l'état stationnaire. L'omission de cette simplification conduirait à l'introduction de fréquences de Bohr beaucoup trop petites (de l'ordre de l'énergie de recul) lorsque $u_0 \gg 1$, ce qui donnerait l'impression trompeuse que la limite séculaire est très difficile à atteindre. Soit donc à calculer :

$$\Delta E_{\text{inf}}^{\text{intra}} = \inf_p \{|E_n(p) - E_{n'}(p)|, \quad n \neq n' \text{ de la même famille}\} \quad (\text{III4b - 5})$$

Nous représentons, sur la fig. III-22, $\Delta E_{\text{inf}}^{\text{intra}}$ en unité d'énergie de recul, en fonction de u_0 , pour j_g (pair) allant de 1 à 4. Lorsque u_0 est assez grand pour que le comportement asymptotique (III4b - 4) soit valable, $\Delta E_{\text{inf}}^{\text{intra}}$ est atteint tout près de $\frac{p}{\hbar k} = 0$, et devient proportionnel à $\hbar \delta s$:

$$\Delta E_{\text{inf}}^{\text{intra}} \underset{u_0 \rightarrow +\infty}{\sim} \hbar |\delta| s \left[(c_0^0)^2 - (c_1^0)^2 \right] = \frac{\hbar |\delta| s}{(j_g + 1)(2j_g + 1)} \quad (\text{III4b - 6})$$

Lorsque u_0 est plus faible, on constate que le comportement de $\Delta E_{\text{inf}}^{\text{intra}}$ est bien différent, sauf pour $j_g = 1$; on peut prouver, par exemple, que $\Delta E_{\text{inf}}^{\text{intra}}$ varie comme $u_0^{j_g}$ au voisinage de $u_0 = 0^{(*)}$. Ce domaine des valeurs faibles de u_0 n'est cependant guère intéressant ici, puisqu'il se trouve, comme nous le verrons plus loin, sous le seuil du refroidissement à nouveaux mécanismes.

(ii) Forme des équations quantiques dans l'approximation séculaire

Nous définissons le régime de l'approximation séculaire comme l'ensemble des situations dans lesquelles la partie réactive des équations quantiques dans l'état fondamental, représentée par le hamiltonien \bar{H}_F , introduit dans l'évolution du système des pulsations de Bohr intrafamille $\frac{1}{\hbar} (E_n - E_{n'})$, $n \neq n'$, toutes bien plus grandes que les taux de relaxation associés à la partie dissipative de (III4b - 1a). Une estimation grossière, à $\frac{1}{2} \Gamma s$, de ces taux de relaxation aboutit à la condition suivante d'approximation séculaire :

(*) Utiliser la méthode de la résolvante en $p = 0$.

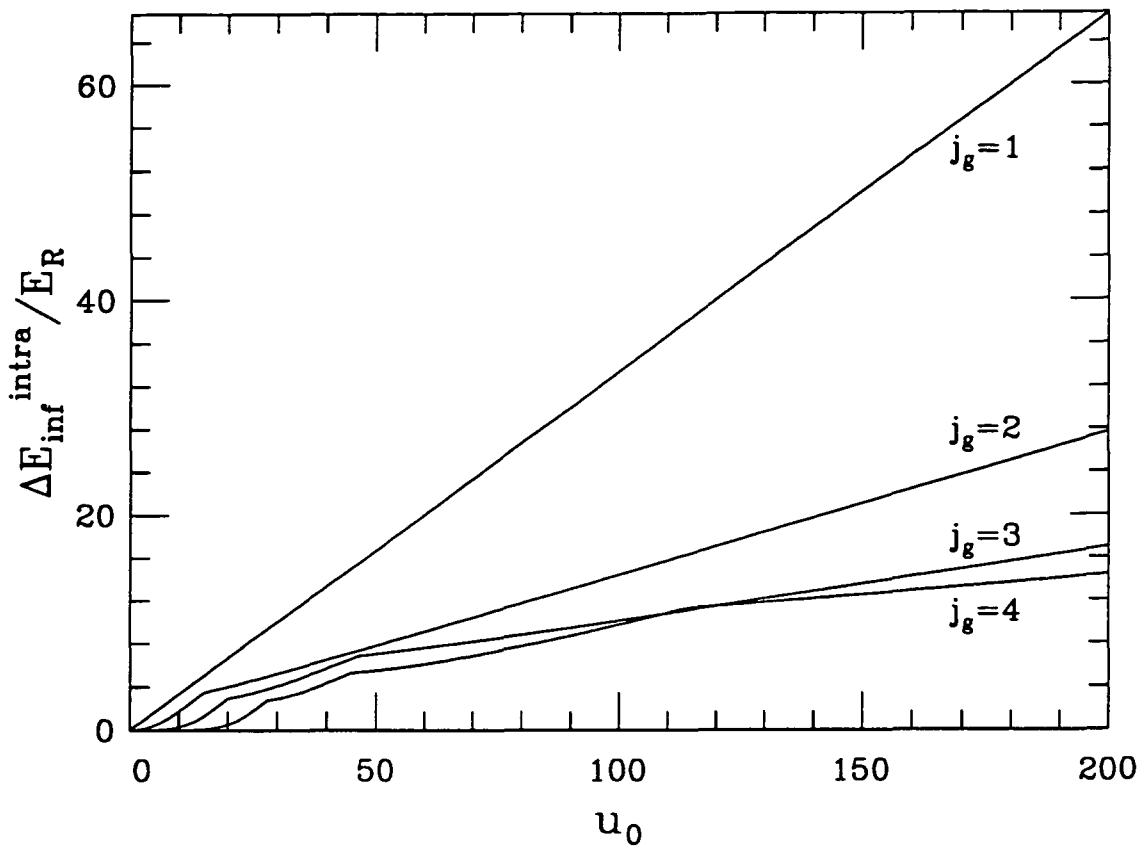


Fig. III-22 : Pour les transitions $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$, où j_g entier va de 1 à 4, comportement de $\Delta E_{\text{intra}}^{\text{intra}}$ (défini par (III4b - 5)) en unité d'énergie de recul en fonction du paramètre u_0 . Les courbes prises de haut en bas correspondent à des valeurs croissantes de j_g .

$$\Delta E_{\text{intra}}^{\text{intra}} \gg \frac{1}{2} \hbar \Gamma s \quad (\text{III4b - 7})$$

L'étude spectrale de \bar{H}_F précédente permet de situer assez précisément le domaine défini par cette condition, à l'aide en particulier de la fig. III-22. Il est possible de fournir une écriture simple de la condition (III4b - 7) lorsque le paramètre u_0 est assez élevé. Nous bénéficions alors de l'expression asymptotique (III4b - 6), et la contrainte de sécularité devient une exigence de grand désaccord, comme c'est toujours le cas pour la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$:

$$\frac{|\delta|}{\Gamma} \gg (j_g + 1)(j_g + \frac{1}{2}) \quad (\text{III4b - 8})$$

mais l'on constate que la borne sur $\frac{|\delta|}{\Gamma}$ devient de plus en plus défavorable lorsque j_g augmente. La condition (III4b - 8) paraît même particulièrement sévère pour $j_g = 4$. Il faut noter cependant que (III4b - 7) est seulement qualitative, puisqu'elle repose sur une estimation assez crue de la partie dissipative des équations de Bloch. Nous attendons donc, pour juger très précisément du domaine de validité de l'approximation séculaire, une confrontation avec les résultats numériques de l'évolution temporelle du §4a précédent.

Effectuons maintenant le développement des équations quantiques (III4b - 1a) dans l'état stationnaire en puissances du petit paramètre défini par (III4b - 7), ce qui prend la forme suivante pour la matrice densité stationnaire :

$$\bar{\rho}_F^{\text{st}} = \bar{\rho}_F^{(0)} + \bar{\rho}_F^{(1)} + \dots \quad (\text{III4b} - 9)$$

On obtient ainsi, à l'ordre 0 :

$$[\bar{H}_F, \bar{\rho}_F^{(0)}] = 0 \quad (\text{III4b} - 10)$$

L'absence de dégénérescence intrafamille des $|n, p\rangle$ à p fixé, absence à l'origine de l'approche séculaire, conduit de façon nécessaire à une matrice densité $\bar{\rho}_F^{(0)}(p)$ diagonale :

$$\bar{\rho}_F^{(0)}(p) = \sum_n \Pi_n(p) |n, p\rangle \langle n, p| \quad (\text{III4b} - 11a)$$

$$1 = \sum_n \int dp \Pi_n(p) \quad (\text{III4b} - 11b)$$

A l'ordre 1, nous sommes conduit à l'égalité opératorielle :

$$0 = \frac{1}{i\hbar} [\bar{H}_F, \bar{\rho}_F^{(1)}] + \left(\partial_t \bar{\rho}_F^{(0)} \right)_{\text{relax}} \quad (\text{III4b} - 12)$$

dont les éléments diagonaux dans la base $|n, p\rangle$ sont exempts de toute contribution de $\bar{\rho}_F^{(1)}$:

$$\langle n, p | \left(\partial_t \bar{\rho}_F^{(0)} \right)_{\text{relax}} |n, p\rangle = 0 \quad (\text{III4b} - 13)$$

et dont les éléments non diagonaux fournissent, en fonction de $\bar{\rho}_F^{(0)}$, les cohérences de $\bar{\rho}_F^{(1)}$:

$$\langle n, p | \bar{\rho}_F^{(1)} | n', p \rangle = \frac{-i\hbar}{E_n(p) - E_{n'}(p)} \langle n, p | \left(\partial_t \bar{\rho}_F^{(0)} \right)_{\text{relax}} | n', p \rangle \quad n \neq n' \quad (\text{III4b - 14})$$

Cette dernière relation, qui conduit à des cohérences pour $\bar{\rho}_F^{\text{st}}$ d'ordre de grandeur $\hbar\Gamma_s / (2\Delta E_{\text{inf}}^{\text{intra}})$ fois plus petit que ses populations, ne nous intéresse pas vraiment ici. Nous allons voir que l'équation (III4b - 13), jointe à la condition de normalisation (III4b - 11b), suffit à déterminer les Π_n .

Montrons maintenant que le système (III4b - 13) peut être mis sous la forme d'équations de taux :

$$0 = -\gamma_{n,p} \Pi_n(p) + \sum_{n'} \int dp' \gamma_{n',p' \rightarrow n,p} \Pi_{n'}(p') \quad (\text{III4b - 15})$$

où tous les coefficients introduits sont positifs. Pour cela, explicitons à l'aide de (III3b - 3) les termes de relaxation dans la représentation des familles. Une première partie décrit le départ par cycle de fluorescence :

$$\left(\partial_t \bar{\rho}_F^{(0)} \right)_{\text{relax}}^{\text{départ}} = -\frac{1}{4} \Gamma_s \left\{ \mathcal{V}^{(-)}(0) \mathcal{V}^{(+)}(0), \bar{\rho}_F^{(0)} \right\} \quad (\text{III4b - 16})$$

dont l'élément de matrice dans $\{|n, p\rangle\}$, compte tenu de (III4b - 11a), conduit à :

$$\mathcal{T}_{n,p}^{\text{départ}} = -\frac{1}{2} \Gamma_s \langle n, p | \mathcal{V}^{(-)}(0) \mathcal{V}^{(+)}(0) | n, p \rangle \Pi_n(p) \quad (\text{III4b - 17})$$

Une deuxième partie, non locale en p , décrit les retombées à l'issue des cycles de fluorescence :

$$\left(\partial_t \bar{\rho}_F^{(0)} \right)_{\text{relax}}^{\text{alim}}(p) = \frac{1}{2} \Gamma_s \sum_{q=0,\pm 1} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_q W_q \bar{\rho}_F^{(0)}(p + p_S - \hbar k q) W_q^\dagger \quad (\text{III4b - 18a})$$

$$W_q = \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger \mathcal{V}^{(+)}(0) \quad (\text{III4b - 18b})$$

L'élément de matrice de (III4b - 18a) diagonal en $|n, p\rangle$ apporte, compte tenu de (III4b - 11a) :

$$T_{n,p}^{\text{alim}} = \sum_{n'} \frac{1}{2} \Gamma_s \sum_{q=0,\pm 1} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_q(p_S) |\langle n, p | W_q | n', p + p_S - \hbar k q \rangle|^2 \Pi_{n'}(p + p_S - \hbar k q) \quad (\text{III4b - 19})$$

Cette expression suggère fortement l'introduction des taux de transition $\gamma_{n,p \rightarrow n',p'}$ de l'état $|n, p\rangle$ vers l'état $|n', p'\rangle$, taux dont la valeur, tout à fait conforme à l'intuition, est nulle pour $|p - p'| > 2\hbar k$:

$$\gamma_{n,p \rightarrow n',p'} = \frac{1}{2} \Gamma_s \sum_{q=0,\pm 1} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_q(p_S) |\langle n', p' | W_q | n, p \rangle|^2 \delta(p + \hbar k q - p_S - p') \quad (\text{III4b - 20})$$

Il est possible de calculer le taux total de départ de l'état $|n, p\rangle$ en sommant (III4b - 20) sur toutes les valeurs de n' et p' . A l'aide des relations de fermeture suivantes :

$$\sum_{n'} |n', p'\rangle \langle n', p'| = P_g \quad \forall p' \quad (\text{III4b - 21a})$$

$$\sum_{q=0,\pm 1} \Delta_q^{(+)} \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger = P_e \quad (\text{III4b - 21b})$$

où P_g et P_e représentent les projecteurs internes sur l'état fondamental et excité, on obtient :

$$\gamma_{n,p} = \sum_{n'} \int dp' \gamma_{n,p \rightarrow n',p'} \quad (\text{III4b - 22a})$$

$$\gamma_{n,p} = \frac{1}{2} \Gamma_s \langle n, p | \mathcal{V}^{(-)}(0) \mathcal{V}^{(+)}(0) | n, p \rangle \quad (\text{III4b - 22b})$$

ce qui permet de mettre le système (III4b - 13) sous la forme annoncée (III4b - 15).

(iii) Résolution numérique des équations de taux

Nous allons déterminer numériquement les populations dans $\{|n, p\rangle\}$ de la matrice densité stationnaire $\bar{\rho}_F^{\text{st}}(p)$ à l'ordre 0 de l'approximation séculaire. Il est d'abord nécessaire, pour cela, de connaître les états internes $|n, p\rangle$ en fonction de p : la diagonalisation

numérique de $\bar{H}_F(p)$ a déjà été envisagée au (i) précédent. Il faut ensuite discréteriser les équations quantiques en la variable p , suivant une procédure décrite en détail dans le §2a. L'opération de discréterisation, de pas δp , revient ici à évaluer l'intégrale sur p_S dans (III4b - 19) selon la méthode de Simpson, avec les poids (III2a - 6). Il serait maladroit de discréteriser directement la forme (III4b - 15), les taux $\gamma_{n,p \rightarrow n',p'}$ tels qu'ils sont définis par (III4b - 20) n'étant pas des fonctions régulières de p' , mais devant être considérés comme des distributions (des effets de bord apparaissent lorsqu'on cherche à évaluer, par exemple, $\gamma_{n,p \rightarrow n',p+2\hbar k}$). Après troncature sur p comme au §2a, le système à résoudre est de la forme $A[X] = 0$, où la matrice réelle A , de bande, conserve aux effets de bord près la population totale prise à l'unité :

$$\frac{\delta p}{\hbar k} \sum_{i=-N}^N \sum_n \Pi_n(i\delta p) = 1 \quad (\text{III4b - 23})$$

On peut se ramener, comme au §2a, à un système $A'[X] = B$, que l'on résout ensuite à l'aide d'algorithmes exploitant la structure de bande de A' . On peut également utiliser une simulation Monte-Carlo, puisqu'il s'agit de résoudre des équations de taux. Une troisième voie détermine les populations comme le résultat stationnaire d'une évolution temporelle. La réduction considérable sur l'état interne que constitue l'approximation séculaire (il est décrit par seulement $2j_g + 1$ populations, au lieu de $j_g^2 + (j_g + 1)^2$ nombres réels indépendants associés aux populations et aux cohérences) permet d'envisager des transitions à moment cinétique élevé ($j_g = 10$, par exemple !) ou des discréterisations en impulsion plus fines que $\hbar k$; le choix de $\delta p = \frac{1}{2}\hbar k$ au lieu de $\delta p = \hbar k$ diminue d'un facteur $2^4 = 16$ ce que l'on propose habituellement comme majoration de l'erreur commise par Simpson [68], et donne comme seconds moments des distributions d'émission spontanée $\mathcal{N}_q(p_S)$:

$$\frac{\langle p_S^2 \rangle_q}{(\hbar k)^2} = \frac{13}{32}, \frac{3}{16}, \frac{13}{32} \quad \text{avec} \quad q = -1, 0, 1 \quad (\text{III4b - 24})$$

ce qui constitue effectivement une bien meilleure approximation des valeurs exactes (III3c - 27) que celle fournie en (III3c - 26) par $\delta p = \hbar k$.

Nous présentons les résultats de l'approche séculaire en trois figures. La première compare les prédictions séculaires avec celles obtenues par évolution temporelle des équations quantiques complètes. L'intérêt de la fig. III-23 est double. Elle permet d'abord d'évaluer, par le choix de deux désaccords ($\delta = -5\Gamma$ et $\delta = -10\Gamma$), dans quelle mesure

l'approximation de sécularité est justifiée. Elle donne ensuite des valeurs de u_0 pour lesquelles il est manifestement légitime de ramener la dynamique dans l'état fondamental. Le calcul est effectué pour la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ du césium. On constate ainsi que $\delta = -10\Gamma$ est mieux décrit par la limite séculaire que la condition (III4b - 8) ne le laissait prévoir, et que le refroidissement Doppler est effectivement négligeable au voisinage de l'optimum.

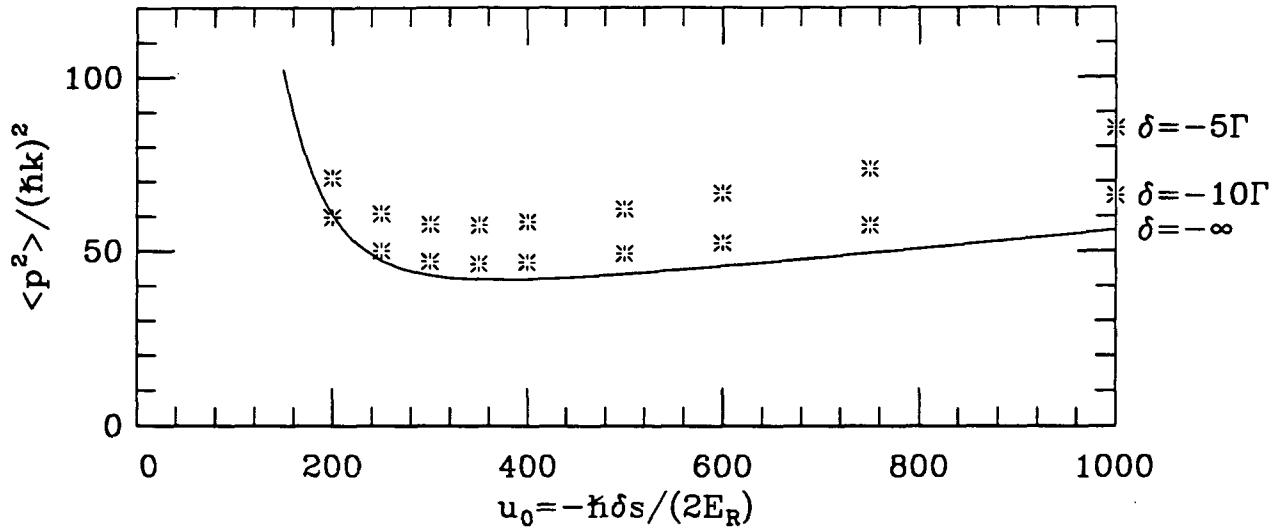


Fig. III-23 : Pour la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$ de l'atome de césium ($M\Gamma = 1285\hbar k^2$), comportement de $\frac{\langle p^2 \rangle}{(\hbar k)^2}$ avec u_0 , où p désigne l'impulsion. Les points, obtenus par évolution temporelle des équations quantiques complètes, correspondent, de haut en bas, à $\delta = -5\Gamma$ et $\delta = -10\Gamma$. La courbe est issue de l'approximation séculaire (III4b - 15) et dépend donc seulement de u_0 . Dans tous les cas, $\delta p = \hbar k$ et $p_{\max} = 50\hbar k$ pour le calcul numérique.

Mis en confiance par la fig. III-23, nous disposons, sur la fig. III-24a, la courbe de $\langle p^2 \rangle$ en fonction de u_0 , telle qu'elle est prédite dans la limite séculaire, pour j_g entier allant de 1 à 5, en nous offrant le luxe, à $p_{\max} = 100\hbar k$, de la discrétisation fine $\delta p = \frac{1}{2}\hbar k$. Pour tous les j_g , le comportement de $\langle p^2 \rangle$ avec u_0 est qualitativement le même : brusque remontée près du seuil, et comportement linéaire aux grands u_0 . Il est à noter que les pentes de cette partie linéaire sont d'autant plus faibles que j_g est plus élevé. On sait que ces pentes sont accessibles par l'approche semi-classique traditionnelle (voir la discussion pour $j_g = 1$ au §3c(v)). Leur comportement sur la fig. III-24a avec j_g est bien en accord avec l'observation, au §3b, que $D_\infty(0)$ dépend peu de j_g , alors que la pente à l'origine

pour $\mathcal{F}_\infty(u)$ augmente avec j_g (voir la fig. III-11 par exemple). On remarque d'autre part, sur la fig. III-24a, que l'optimum sur $\langle p^2 \rangle$ se produit pour des u_0 croissants, lorsque j_g augmente au delà de 2, et surtout que la valeur correspondante de $\langle p^2 \rangle$ devient nettement plus faible lors du passage de $j_g = 1$ à $j_e = 2$. Quant aux valeurs des minima pour $j_g = 3, 4$ et 5, ils sont tout juste classables graphiquement. Nous donnons donc leurs valeurs et leurs positions sous forme numérique, dans la fig. III-24b. On constate que la transition $j_g = 4$ sort vainqueur, d'une fraction de $\hbar k$. Pour voir le rôle de la discrétisation en p , nous avons examiné l'effet du passage $\delta p = \hbar k$ à $\delta p = \frac{1}{2}\hbar k$. Les valeurs de Δp diminuent alors d'environ $5.10^{-2} \hbar k$, pour ces trois valeurs de j_g .

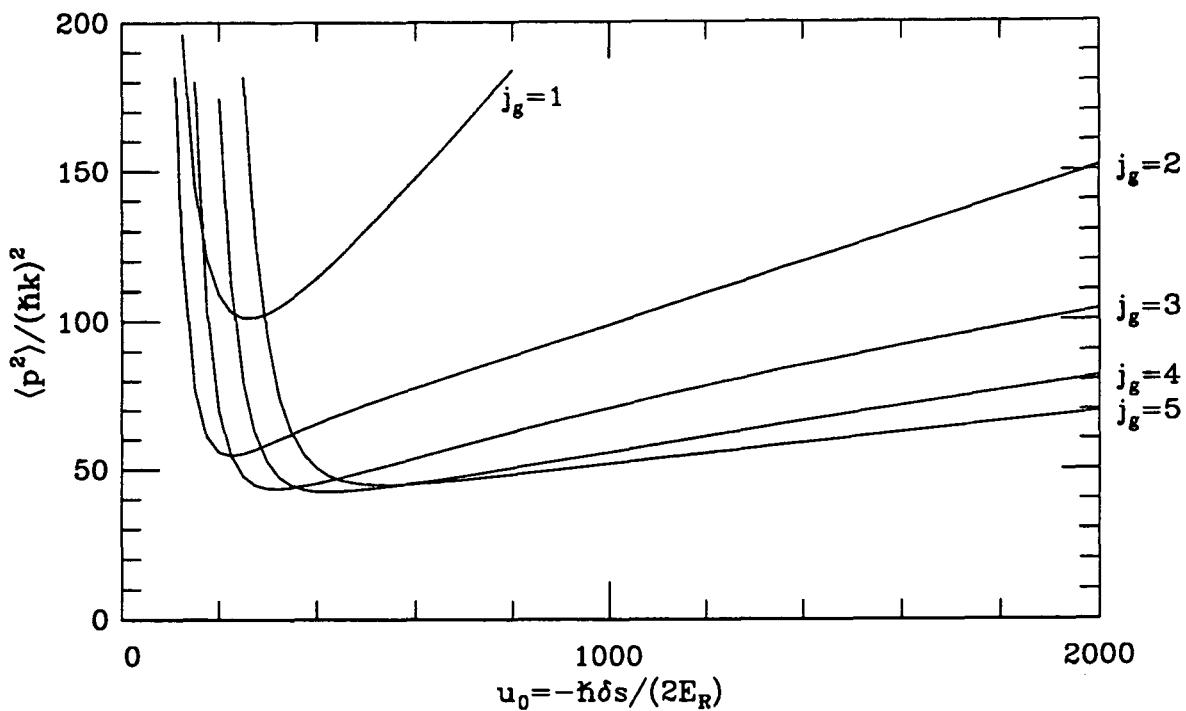


Fig. III-24a : Comportement de l'impulsion quadratique moyenne au carré, $\langle p^2 \rangle$, en fonction de u_0 , calculé dans la limite séculaire, pour j_g allant de 1 à 5. Les minima se déplacent vers des valeurs croissantes de u_0 lorsque j_g augmente ($j_g \geq 2$). Pour le calcul numérique, $\delta p = \frac{1}{2} \hbar k$ et $p_{\max} = 100 \hbar k$.

j_g	$\inf \frac{\Delta p}{\hbar k}$	$(u_0)_{\text{optimum}}$
3	6.59	315
4	6.51	425
5	6.68	535

Fig. III-24b : Dans les mêmes conditions que la fig. a, valeurs et positions en u_0 des impulsions quadratiques moyennes minimales.

Appendice A_{III}

Equivalence des représentations de Wigner et des familles pour le calcul de F(v) et D(v)

Nous avons défini, au §3a(ii), une force moyenne $F_F(v)$ et un coefficient de diffusion en impulsion $D_F(v)$ à partir du comportement aux temps longs des moyennes du nombre p dans la représentation des familles (voir (III3a - 5)), pour un atome de vitesse imposée (le hamiltonien externe a la forme (III3a - 6) dans le point de vue des familles). Il n'est pas clair a priori que $F_F(v)$ et $D_F(v)$ coïncident avec les grandeurs $F(v)$ et $D(v)$ calculées en point de vue de Wigner, puisque c'est $P + kj_z$, et non pas P , qui représente l'impulsion atomique dans la représentation des familles. Nous nous plaçons, pour tout ce qui suit, dans cette représentation, et nous calculons les moments de la véritable impulsion.

Examinons d'abord le cas de la force moyenne, à partir de l'identité :

$$F(v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} [\langle p \rangle_F + k \langle j_z \rangle_F] \quad (\text{A}_{\text{III}} - 1)$$

La valeur moyenne $\langle j_z \rangle_F$ se déduit simplement de la matrice interne $W_{F,0}$ définie en (III3a - 8a) :

$$\langle j_z \rangle_F = \text{Tr} [j_z W_{F,0}] \quad (\text{A}_{\text{III}} - 2)$$

Comme $W_{F,0}(t)$ tend (exponentiellement) vers l'état stationnaire $W_{F,0}^{\text{st}}$, $\langle j_z \rangle_F$ tend vers une valeur finie, donc ne contribue pas à (A_{III} - 1). On a ainsi obtenu facilement que $F(v) = F_F(v)$.

Le cas de la diffusion en impulsion est à peine plus délicat. Le point de départ est le même :

$$D(v) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} \left[\left\langle (p + kj_z)^2 \right\rangle_F - (\langle p \rangle_F + k \langle j_z \rangle_F)^2 \right] \quad (\text{A}_{\text{III}} - 3)$$

En développant les carrés dans (A_{III} - 3) et en omettant les termes $\langle j_z^2 \rangle_F$, $\langle j_z \rangle_F^2$ qui admettent une limite finie aux temps longs, nous obtenons :

$$D(v) = D_F(v) + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} [\langle pj_z \rangle_F - \langle p \rangle_F \langle j_z \rangle_F] \quad (\text{A}_{\text{III}} - 4)$$

La moyenne $\langle pj_z \rangle_F$ se déduit de la matrice $W_{F,1}$, définie en (III3a - 8b), selon :

$$\langle pj_z \rangle_F = Tr [j_z W_{F,1}] \quad (\text{A}_{\text{III}} - 5)$$

Nous avons vu que, pour l'étude aux temps longs, il est utile de décomposer $W_{F,1}$ selon l'hyperplan des matrices de trace nulle et la matrice $W_{F,0}$ (voir (II2b - 24)) :

$$W_{F,1} = \tilde{W}_{F,1} + \langle p \rangle_F W_{F,0} \quad (\text{A}_{\text{III}} - 6)$$

Dans cette expression, $\tilde{W}_{F,1}$ admet un état stationnaire, alors que le terme proportionnel à $\langle p \rangle_F$ diverge linéairement en temps comme $tF(v)W_{F,0}^{\text{st}}$ (lorsque $F(v) \neq 0$). En utilisant la décomposition (A_{III} - 6), on peut récrire (A_{III} - 5) sous la forme :

$$\langle pj_z \rangle_F = Tr [j_z \tilde{W}_{F,1}] + \langle p \rangle_F \langle j_z \rangle_F \quad (\text{A}_{\text{III}} - 7)$$

et (A_{III} - 4) ainsi :

$$D(v) = D_F(v) + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} Tr [j_z \tilde{W}_{F,1}] \quad (\text{A}_{\text{III}} - 8)$$

Comme $\tilde{W}_{F,1}$ converge (exponentiellement) vers l'état stationnaire $W_{F,1}^{\text{st}}$, la différence entre $D(v)$ et $D_F(v)$ est nulle, ce que nous voulions établir.

Appendice B_{III}

Force et diffusion dues aux nouveaux mécanismes pour

$$|\delta| \gg \Gamma \text{ sur } j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$$

Dans le §3b, nous montrons que le refroidissement dû aux nouveaux mécanismes est optimal à la limite des grands désaccords ($|\delta| \gg \Gamma$). Nous voulons ici calculer les limites correspondantes $\mathcal{F}_\infty(u)$ et $\mathcal{D}_\infty(u)$ pour la force et le coefficient de diffusion (voir (III3b - 11)) dans le cas de la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

La première étape consiste à montrer que la limite $|\delta| \gg \Gamma$ coïncide essentiellement avec le régime de l'approximation séculaire, régime dans lequel la partie dissipative des équations de Bloch (voir (III3b - 5a)) peut être traitée perturbativement. Nous établissons ce fait de façon générale, sur les équations entièrement quantiques, dans le §4, et nous nous contentons ici d'en indiquer les grandes lignes. Donnons l'écriture de l'opérateur de Bloch M_0 associé à la décomposition en parties réactive et dissipative ($\delta < 0$) :

$$\bar{M}_0 [\bar{W}] = \frac{1}{i\hbar} [\bar{H}(v), \bar{W}] + \text{Relax} [\bar{W}] \quad (\text{B}_{\text{III}} - 1\text{a})$$

$$\bar{H}(v) = \frac{1}{2}\hbar|\delta|s \left[2u \frac{j_z}{\hbar} - \mathcal{V}^{(-)}(0)\mathcal{V}^{(+)}(0) \right] \quad (\text{B}_{\text{III}} - 1\text{b})$$

$$\begin{aligned} \text{Relax} [\bar{W}] &= -\frac{1}{4}\Gamma s \left\{ \mathcal{V}^{(-)}(0)\mathcal{V}^{(+)}(0), \bar{W} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\Gamma s \sum_{q=0,\pm 1} \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger \mathcal{V}^{(+)}(0) \bar{W} \mathcal{V}^{(-)}(0) \Delta_q^{(+)} \end{aligned} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 1\text{c})$$

Introduisons la base propre de $\bar{H}(v)$ pour la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, base propre qui dépend de la vitesse renormalisée u seulement, d'après (B_{III} - 1b), et que nous notons $|n\rangle_u$, $n = 0, \pm 1$:

$$\bar{H}(v)|n\rangle_u = \frac{1}{2}\hbar|\delta|s \check{E}_n(u)|n\rangle_u \quad (\text{B}_{\text{III}} - 2)$$

Dans les calculs qui vont suivre, nous allons utiliser implicitement la structure en double famille interne (III2a - 8), et nous ne considérerons que les éléments de matrice intrafamille pour \bar{W}_0 et \bar{W}_1 . Le calcul du spectre réduit $\check{E}_n(u)$ pour $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$ est sans difficulté compte tenu des carrés des coefficients de Clebsch-Gordan, directement accessibles sur la fig. I-6 :

$$\check{E}_0(u) = -1 \quad (\text{B}_{\text{III}} - 3\text{a})$$

$$\check{E}_{\pm 1}(u) = -\frac{7}{6} \pm \sqrt{4u^2 + \frac{1}{36}} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 3\text{b})$$

Indiquons également l'expression des vecteurs propres associés :

$$|0\rangle_u = |g\ 0\rangle_z \quad (\text{B}_{\text{III}} - 4\text{a})$$

$$|1\rangle_u = \cos \theta |g\ 1\rangle_z + \sin \theta |g\ -1\rangle_z \quad (\text{B}_{\text{III}} - 4\text{b})$$

$$|-1\rangle_u = -\sin \theta |g\ 1\rangle_z + \cos \theta |g\ -1\rangle_z \quad (\text{B}_{\text{III}} - 4\text{c})$$

la dépendance en u de l'angle de rotation θ étant telle que :

$$\cos 2\theta = \frac{12u}{\sqrt{1+144u^2}} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 5\text{a})$$

$$\sin 2\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+144u^2}} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 5\text{b})$$

Nous sommes dans le régime de l'approximation séculaire à condition que la différence d'énergie entre $|1\rangle_u$ et $|-1\rangle_u$, qui traduit l'importance de la partie réactive de $\bar{M}_0(v)$, soit beaucoup plus grande que les éléments de matrice de la partie dissipative de $\bar{M}_0(v)$, éléments de matrice que nous estimons grossièrement par le taux de pompage $\frac{1}{2}\Gamma s$. Ceci impose :

$$\frac{|\delta|}{\Gamma} \cdot 2\sqrt{4u^2 + \frac{1}{36}} \gg 1 \quad (\text{B}_{\text{III}} - 6)$$

La condition de sécularité ($\text{B}_{\text{III}} - 6$) est donc essentiellement une condition de grand désaccord ; pour que ($\text{B}_{\text{III}} - 6$) soit satisfaite uniformément en vitesse, il faut que :

$$|\delta| \gg 3\Gamma \quad (\text{B}_{\text{III}} - 7)$$

ce qui n'est pas trop contraignant. Il est alors possible de traiter perturbativement la partie dissipative de \bar{M}_0 devant la partie réactive, comme nous allons le faire maintenant pour obtenir \bar{W}_0^{st} et \bar{W}_1^{st} .

Cherchons d'abord l'état stationnaire \bar{W}_0^{st} , matrice densité de trace unité telle que :

$$\bar{M}_0(v) [\bar{W}_0^{\text{st}}] = \frac{1}{i\hbar} [\bar{H}(v), \bar{W}_0^{\text{st}}] + \text{Relax} [\bar{W}_0^{\text{st}}] = 0 \quad (\text{B}_{\text{III}} - 8)$$

A l'ordre 0 en $\frac{\Gamma}{|\delta|}$, on ne garde que le commutateur (partie réactive de \bar{M}_0) dans (B_{III} - 8).

On trouve alors que \bar{W}_0^{st} à l'ordre 0, noté $\bar{W}_0^{\text{st}(0)}$, commute avec $\bar{H}(v)$, donc ne comporte que des populations dans la base $\{|n\rangle_u\}$:

$$\bar{W}_0^{\text{st}(0)}(u) = \sum_{n=0,\pm 1} \Pi_{0,n}(u) |n\rangle_u \langle n| \quad (\text{B}_{\text{III}} - 9a)$$

$$\sum_{n=0,\pm 1} \Pi_{0,n}(u) = 1 \quad (\text{B}_{\text{III}} - 9b)$$

L'écriture de (B_{III} - 8) à l'ordre 1 en $\frac{\Gamma}{|\delta|}$ donne :

$$\frac{1}{i\hbar} [\bar{H}(v), \bar{W}_0^{\text{st}(1)}] + \text{Relax} [\bar{W}_0^{\text{st}(0)}] = 0 \quad (\text{B}_{\text{III}} - 10)$$

On se débarrasse de la contribution de l'ordre 1 de \bar{W}_0^{st} en considérant seulement les éléments diagonaux dans la base propre de la relation matricielle (B_{III} - 10) : le commutateur disparaît et l'on obtient :

$$_u \langle n \| \text{Relax} [\bar{W}_0^{\text{st}(0)}(u)] \| n \rangle_u = 0, \quad \forall n \quad (\text{B}_{\text{III}} - 11)$$

En utilisant la forme des termes de relaxation (B_{III} - 1c) et l'expression (B_{III} - 9a), on accède à des équations de taux sur les populations $\Pi_{0,n}(u)$:

$$0 = -\gamma_n(u) \Pi_{0,n}(u) + \sum_{n'} \gamma_{n' \rightarrow n}(u) \Pi_{0,n'}(u) \quad (\text{B}_{\text{III}} - 12a)$$

$$\gamma_n(u) = \frac{1}{2} \Gamma s_u \langle n \| \mathcal{V}^{(-)}(0) \mathcal{V}^{(+)}(0) \| n \rangle_u \quad (\text{B}_{\text{III}} - 12b)$$

$$\gamma_{n' \rightarrow n}(u) = \frac{1}{2} \Gamma s \sum_{q=0,\pm 1} \left| _u \langle n \| \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger \mathcal{V}_{(0)}^{(+)} \| n' \rangle_u \right|^2 \quad (\text{B}_{\text{III}} - 12c)$$

Le terme contenant le taux total de départ du niveau $\|n\rangle_u$, soit $\gamma_n(u)$, provient de l'anticommuteur dans (B_{III} – 1c). Les taux de transition $\gamma_{n' \rightarrow n}(u)$ de $\|n'\rangle_u$ vers $\|n\rangle_u$ (avec éventuellement $n = n'$) proviennent des termes d'alimentation par émission spontanée (dernière ligne de (B_{III} – 1c)). L'interprétation de $\gamma_n(u)$ comme taux total de départ de $\|n\rangle_u$ est justifiée par l'identité :

$$\gamma_n(u) = \sum_{n'} \gamma_{n \rightarrow n'}(u) \quad (\text{B}_{\text{III}} - 13)$$

Donnons l'expression des taux $\gamma_{n \rightarrow n'}(u)$ pour la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$:

$$\begin{cases} \gamma_{+-+}(u) = \frac{37}{36} + \frac{7}{36} \sin 2\theta - \frac{1}{3} \sin^2 2\theta \\ \gamma_{+--}(u) = \frac{1}{36} - \frac{5}{36} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin^2 2\theta \\ \gamma_{+-0}(u) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 14\text{a})$$

$$\begin{cases} \gamma_{0-0}(u) = \frac{1}{2} \\ \gamma_{0--}(u) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \\ \gamma_{0-+}(u) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 14\text{b})$$

$$\begin{cases} \gamma_{--+}(u) = \frac{37}{36} + \frac{5}{36} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin^2 2\theta \\ \gamma_{---}(u) = \frac{37}{36} - \frac{7}{36} \sin 2\theta - \frac{1}{3} \sin^2 2\theta \\ \gamma_{--0}(u) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 14\text{c})$$

On en déduit, par résolution d'un système 2×2 (il suffit d'éliminer $\Pi_{0,0}(u)$ grâce à (B_{III} – 9b)), la valeur de \bar{W}_0^{st} , ce qui permet de calculer la force moyenne :

$$\mathcal{F}_\infty(u) = -\frac{1}{2} \cos 2\theta [\Pi_{0,+} - \Pi_{0,-}] = -\frac{30}{17} \cdot \frac{u}{1 + \frac{16 \times 33}{17} u^2} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 15)$$

Cette limite de $\mathcal{F}\left(u; \frac{\delta}{\Gamma}\right)$ lorsque $\frac{\delta}{\Gamma} \rightarrow -\infty$ est en accord avec (III3b - 8). La connaissance des $\Pi_n(u)$ permet également d'obtenir la composante $D_{F,0}$ de la diffusion à la limite

$|\delta| \gg \Gamma$:

$$\mathcal{D}_{0,\infty}(u) = \left[\frac{23}{220} + \frac{1}{40}\sigma \right] + \left[\frac{21}{88} - \frac{1}{16}\sigma \right] \quad (\text{B}_{\text{III}} - 16)$$

où l'on a posé :

$$\sigma = \Pi_{0,0}(u) - \frac{2}{11} = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{17 + 16 \times 33u^2} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 17)$$

Le premier crochet de (B_{III} - 16) correspond aux fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence.

Pour obtenir la seconde composante du coefficient de diffusion, il reste à calculer \bar{W}_1^{st} à l'ordre le plus bas en $\frac{\Gamma}{|\delta|}$. \bar{W}_1^{st} est la solution de trace nulle de l'équation matricielle :

$$0 = \bar{M}_0(v) [\bar{W}_1^{\text{st}}] + \tilde{\bar{S}}(u) \quad (\text{B}_{\text{III}} - 18)$$

Le terme source $\tilde{\bar{S}}(u)$ est obtenu par projection de $\bar{S}(u)$ sur les matrices de trace nulle, parallèlement à \bar{W}_0^{st} :

$$\tilde{\bar{S}}(u) = \bar{S}(u) - \text{Tr} [\bar{S}(u)] \bar{W}_0^{\text{st}}(u) \quad (\text{B}_{\text{III}} - 19)$$

Quant au terme $\bar{S}(u)$, il se déduit au signe près de (III3b - 5b) par division par $\hbar k \Gamma \cdot s$ (cf. (III3b - 7)) :

$$\bar{S}(u) = \frac{1}{2} \sum_{q=0,\pm 1} q \left(\Delta_q^{(+)} \right)^{\dagger} \mathcal{V}^{(+)}(0) \bar{W}_0^{\text{st}} \mathcal{V}^{(-)}(0) \Delta_q^{(+)} \quad (\text{B}_{\text{III}} - 20)$$

A l'ordre 0 de l'approximation séculaire, \bar{W}_1^{st} est diagonal dans la base $\{|n\rangle_u\}$:

$$\bar{W}_1^{\text{st}(0)} = \sum_n \Pi_{1,n} |n\rangle_u \langle n| \quad (\text{B}_{\text{III}} - 21a)$$

$$\sum_{n=0,\pm 1} \Pi_{1,n} = 0 \quad (\text{B}_{\text{III}} - 21b)$$

Au même ordre en $\frac{\Gamma}{|\delta|}$, seuls les éléments diagonaux de $\bar{S}(u)$ interviennent, et (B_{III} - 18) devient :

$$0 = -\gamma_n(u)\Pi_{1,n}(u) + \sum_{n'} \gamma_{n' \rightarrow n}(u)\Pi_{1,n'}(u) + {}_u \langle n | \tilde{\bar{S}}^{(0)}(u) | n \rangle_u \quad (\text{B}_{\text{III}} - 22)$$

La notation $\tilde{\bar{S}}^{(0)}(u)$ signifie que $\tilde{\bar{S}}(u)$ est calculé selon (B_{III} – 20) lorsque \bar{W}_0^{st} est remplacé par sa valeur à l'ordre 0 en $\frac{\Gamma}{|\delta|}$. Un calcul assez long conduit à :

$${}_u \langle + | \tilde{\bar{S}}^{(0)}(u) | + \rangle_u = -\frac{1}{2} \cos 2\theta \left[\frac{35}{36} \Pi_{0,+} - \frac{1}{36} \Pi_{0,-} + \frac{5}{36} \sin 2\theta (\Pi_{0,+} - \Pi_{0,-}) \right] \quad (\text{B}_{\text{III}} - 23a)$$

$${}_u \langle - | \tilde{\bar{S}}^{(0)}(u) | - \rangle_u = -\frac{1}{2} \cos 2\theta \left[\frac{1}{36} \Pi_{0,+} - \frac{35}{36} \Pi_{0,-} - \frac{5}{36} \sin 2\theta (\Pi_{0,+} - \Pi_{0,-}) \right] \quad (\text{B}_{\text{III}} - 23b)$$

$${}_u \langle 0 | \tilde{\bar{S}}^{(0)}(u) | 0 \rangle_u = 0 \quad (\text{B}_{\text{III}} - 23c)$$

La résolution de (B_{III} – 22), facilitée par la prise comme nouvelles inconnues de $\Pi_{1,+} \pm \Pi_{1,-}$, conduit enfin à $\mathcal{D}_{1,\infty}(u)$:

$$\mathcal{D}_{1,\infty}(u) = -\frac{1}{2} \cos 2\theta [\Pi_{1,+} - \Pi_{1,-}] \quad (\text{B}_{\text{III}} - 24a)$$

$$\mathcal{D}_{1,\infty}(u) = \frac{72u^2}{1 + \frac{16 \times 33}{17}u^2} \left[1 - \frac{985}{6 \times 17}\sigma + 2 \cdot \frac{11 \times 107}{17}\sigma^2 \right] \quad (\text{B}_{\text{III}} - 24b)$$

σ est défini par (B_{III} – 17). Il est important de remarquer que le trinôme en σ dépend faiblement de u , comme on peut le constater sur la fig. B_{III} – 1. Selon que u est proche de 0 ou $\pm\infty$, on peut obtenir une bonne approximation de $\mathcal{D}_{1,\infty}(u)$ en remplaçant le trinôme en σ dans (B_{III} – 24b) par ses valeurs au repos (soit $\frac{12964}{14739}$) ou à grande vitesse (soit 1).

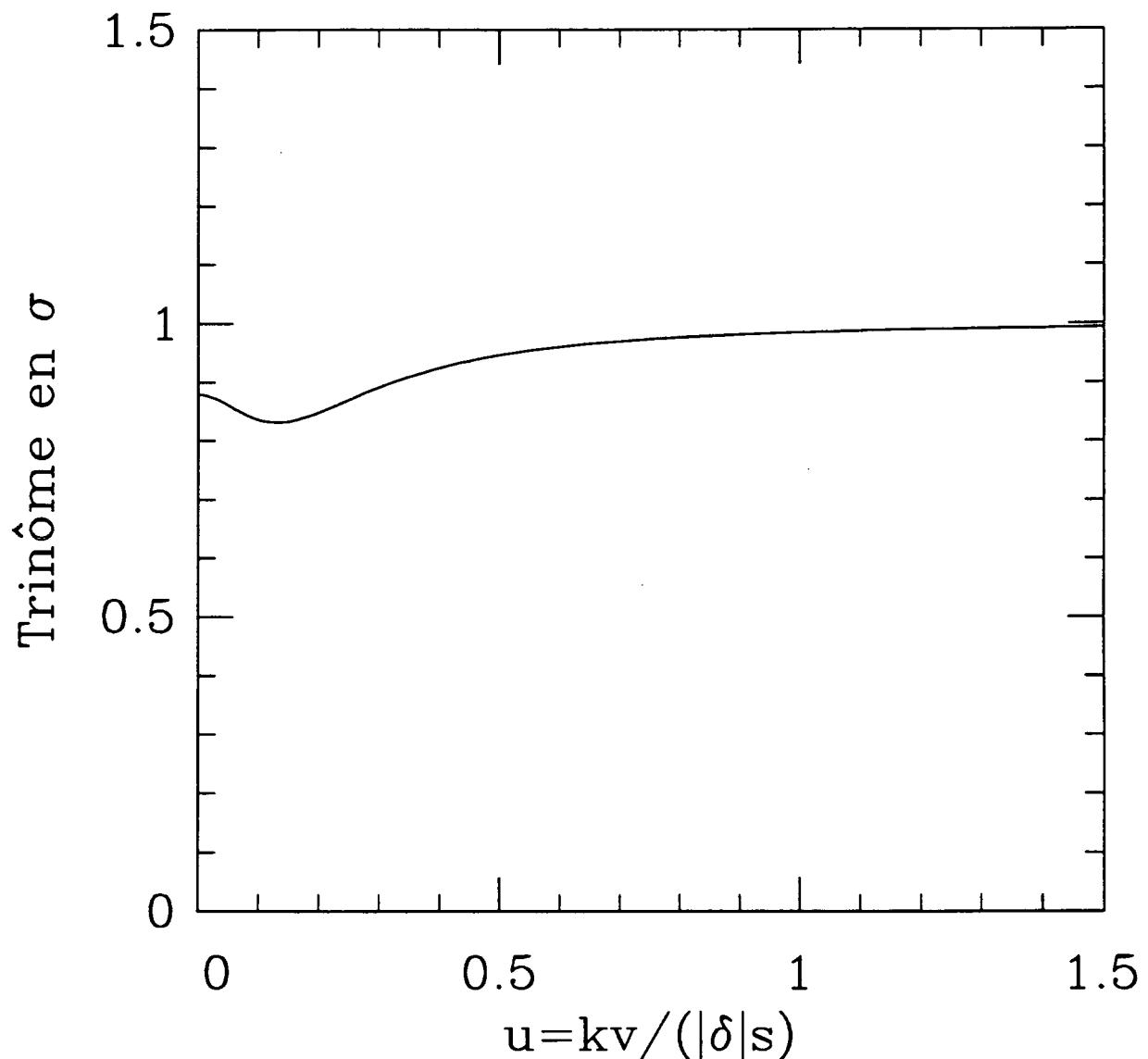


Fig. B_{III} – 1 : Dépendance en la vitesse renormalisée u du terme entre crochets dans l'expression (B_{III} – 24b) de la composante du coefficient de diffusion déduite de $\bar{W}_1^{\text{st}(0)}$.

CHAPITRE IV

**CONFIGURATION LASER
A POLARISATIONS LINÉAIRES ORTHOGONALES**

INTRODUCTION DU CHAPITRE IV

Nous avons déjà vu, par des considérations essentiellement qualitatives au I§1, que cette configuration laser donne naissance au refroidissement par effet Sisyphe sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$. Rappelons que les ingrédients importants étaient la dépendance spatiale des déplacements lumineux et des taux de départ par pompage optique de chacun des sous-niveaux $|g \pm 1/2\rangle_z$ de l'état fondamental. Cette configuration laser, obtenue par superposition de deux ondes planes progressives de vecteurs d'onde $k\mathbf{e}_z$ et $-k\mathbf{e}_z$ et polarisées linéairement respectivement selon Ox et Oy , est donc très différente de la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ du chapitre III. Dans la configuration $Ox - Oy$, les distributions ne sont plus caractérisées seulement par leur largeur en impulsion, mais il est nécessaire de déterminer également leur modulation spatiale à l'échelle de la longueur d'onde optique λ . Cette propriété la rend d'intérêt plus général que $\sigma_+ - \sigma_-$, puisque les situations de mélasses optiques à trois dimensions présentent nécessairement une dépendance spatiale. Elle rend cependant l'étude de cette configuration plus délicate, aussi bien d'un point de vue quantique que semi-classique.

D'une part, la configuration laser $Ox - Oy$ rend délicat le traitement quantique général du refroidissement, à cause de la redistribution non limitée de photons entre les deux ondes. Ainsi, par la seule action du laser, un vecteur d'état d'impulsion p dans l'état fondamental est couplé à un nombre infini d'états fondamentaux d'impulsion $p + 2n\hbar k$. Les objets à manipuler (matrice densité) sont alors de très grande taille. Nous verrons cependant, au §1 et sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$, que la bonne utilisation des symétries de l'état stationnaire en point de vue de Wigner permet de simplifier la résolution numérique des équations quantiques réduites dans l'état fondamental, ce qui sera utile pour tester les approximations à venir.

D'autre part, nous allons voir, au §2 et sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$, qu'il est difficile d'extraire des équations semi-classiques une équation utilisable de type Fokker-Planck, portant uniquement sur la distribution en position-impulsion $\Pi(z, p, t)$. La dépendance spatiale de la distribution des atomes à l'échelle de la longueur d'onde optique λ , jointe au fait que l'état atomique interne des atomes en mouvement garde une mémoire des variations du champ électrique ressenti pendant le temps typique de pompage optique

τ_p , rend en général non locale en z l'équation sur $\Pi(z, p)$. Nous obtiendrons donc une équation de Fokker-Planck seulement dans deux cas limites. Dans le premier cas, les atomes ne sont pas localisés dans les trous de potentiel, et la dépendance spatiale de $\Pi(z, p)$ est très faible. Dans l'autre cas, les atomes peuvent être localisés au fond des trous mais leur pulsation d'oscillation Ω_{osc} est suffisamment faible pour que $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \ll 1$ (régime sautant), ce qui permet d'éliminer l'état atomique interne selon l'approche semi-classique traditionnelle. En ce qui concerne le régime oscillant ($\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$) avec forte modulation spatiale de $\Pi(z, p)$, nous renonçons à écrire une équation sur $\Pi(z, p)$, mais nous étudions $\Pi_{\pm 1/2}(z, p)$ en utilisant comme nouvelle variable lente l'énergie mécanique $E_{\pm 1/2}$ des atomes dans chaque sous-niveau.

La difficulté de mise en œuvre de l'approche semi-classique dans le régime oscillant, régime qui contient l'optimum absolu du refroidissement, incite à un retour vers les équations quantiques, au §3. L'idée essentielle, qui aboutit à une description du refroidissement proche de celui des ions piégés, est d'introduire les états propres de l'énergie associés à la quantification du mouvement des atomes dans les trous de potentiel que constituent les déplacements lumineux. Comme ces potentiels sont périodiques spatialement, le spectre est constitué non pas de niveaux discrets mais d'une succession de bandes d'énergie. L'écart en énergie entre les bandes les plus profondes est d'ordre de grandeur $\hbar\Omega_{\text{osc}}$. Dans le régime oscillant, cet écart doit donc être beaucoup plus grand que la "largeur" des niveaux, d'ordre de grandeur $\frac{\hbar}{\tau_p}$, associée à leur durée de vie rendue finie par le pompage optique, ce qui constitue une interprétation entièrement quantique de la condition $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$. Nous montrons alors que, dans ce régime, on peut considérer que la matrice densité stationnaire comporte seulement des populations dans la base des états propres de l'énergie. C'est l'approximation séculaire, qui nous ramène à de simples équations de taux entre populations et nous permet d'estimer l'optimum absolu du refroidissement sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

Pour terminer, décrivons la présentation adoptée pour ce chapitre IV. L'étude de la configuration $Ox - Oy$ a fait l'objet de notre part de publications, regroupées dans les appendices A_{IV} et D_{IV}, et dont plusieurs parties du présent chapitre ne sont que des guides de lecture. L'appendice A_{IV} réalise le programme du §1 sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$; il ne remplit pas complètement celui du §2, puisqu'il présente seulement la forme limite des équations semi-classiques pour $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \ll 1$ et $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$. La résolution de ces équations doit figurer dans un article à venir; nous en présentons donc ici brièvement le résultat, sans donner trop d'intermédiaires de calcul. L'appendice

D_{IV} exploite la réduction des équations quantiques dans la limite séculaire ($\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$) sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$. Nous apportons ici quelques précisions utiles pour la compréhension et la mise en œuvre pratique de cette méthode, ainsi qu'un exposé bref de ses prédictions sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

1 - FORME GÉNÉRALE DU TRAITEMENT QUANTIQUE

Nous présentons dans la partie 3 de l'appendice A_{IV} des méthodes de résolution numérique des équations de Bloch optiques généralisées et leur application à la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$. Les résultats numériques obtenus seront utiles pour tester les approximations à venir. D'une part, nous nous sommes attaqués aux équations quantiques complètes, sans approximation de faible vitesse ($k|v| \ll \Gamma$) ou de faible saturation de la transition par le laser. La grande taille des systèmes d'équations mis en jeu dans le calcul de la matrice densité stationnaire interdit, d'un point de vue pratique, de les résoudre par inversion directe. Nous faisons donc appel à la méthode d'évolution temporelle, exposée en détail pour la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ dans le III§4a. Les temps de calcul nécessaires interdisent à cette approche une étude exhaustive dans l'espace des paramètres (M, δ, Ω). D'autre part, nous avons résolu numériquement, par inversion directe, la forme stationnaire des équations quantiques réduites dans l'état fondamental. L'omission du refroidissement Doppler et des effets de saturation, jointe à l'utilisation judicieuse des symétries de l'état stationnaire dans la représentation de Wigner (voir l'appendice B_{IV} pour plus de précisions), permet une réduction considérable du problème et une exploration méthodique de l'influence des divers paramètres.

Qu'il s'agisse des équations quantiques complètes ou ramenées dans l'état fondamental, la résolution numérique exploite l'existence de familles $\mathcal{F}_1(p)$ et $\mathcal{F}_2(p)$, stables par l'action du laser et du hamiltonien atomique. Tout l'intérêt de ces familles repose sur le fait que les éléments de matrice intrafamille (c'est-à-dire entre deux états d'une même famille) de l'opérateur densité atomique ne sont couplés qu'entre eux par évolution temporelle, même lorsqu'on prend en compte également les processus d'émission spontanée. Nous donnons explicitement l'expression de ces familles dans le cas de la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(p) = \text{Vect} \{ & |e - 3/2\rangle_z \otimes |p + (2n + 1)\hbar k\rangle, |g - 1/2\rangle_z \otimes |p + 2n\hbar k\rangle, \\ & |e 1/2\rangle_z \otimes |p + (2n + 1)\hbar k\rangle, \quad n \in \mathbb{Z} \} \end{aligned} \quad (\text{IV1 - 1a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(p) = \text{Vect} \{ & |e - 1/2\rangle_z \otimes |p + (2n + 1)\hbar k\rangle, |g 1/2\rangle_z \otimes |p + 2n\hbar k\rangle, \\ & |e 3/2\rangle_z \otimes |p + (2n + 1)\hbar k\rangle, \quad n \in \mathbb{Z} \} \end{aligned} \quad (\text{IV1 - 1b})$$

Nous avons déjà rencontré une structure en familles dans la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$ (voir le III§1). Cependant, les familles $\mathcal{F}_1(p)$ et $\mathcal{F}_2(p)$ sont ici non plus de dimension fi-

nie mais de dimension infinie, ce qui traduit simplement le fait que la redistribution de photons laser entre les deux ondes progressives polarisées Ox et Oy n'est plus limitée. On remarque de plus que les familles $\mathcal{F}_j(p)$ et $\mathcal{F}_j(p')$ ($j = 1$ ou 2) coïncident dès que p et p' diffèrent d'un multiple entier de $2\hbar k$. L'indice p des familles n'a donc de sens que modulo $2\hbar k$, il peut être choisi dans l'intervalle $]-\hbar k, \hbar k]$. Notons que l'existence des familles est liée à la périodicité spatiale du champ électrique laser, qui se reproduit identique à lui-même (au signe près) tous les $\frac{\lambda}{2}$. On observe en effet que les états d'une famille d'indice p se comportent de la même façon au signe près sous l'effet de la translation spatiale du centre de masse de $\frac{\lambda}{2}$, puisqu'ils prennent un facteur de phase $\pm \exp\left(-\frac{ip\lambda}{2\hbar}\right)$, selon qu'ils sont fondamentaux ou excités. En fait, notre indice p n'est autre que $\hbar q$, où q est l'indice de Bloch que l'on introduit couramment dans la diagonalisation des hamiltoniens périodiques. Nous retrouverons ces notions au §3. En ce qui concerne la réalisation pratique du calcul numérique, nous avons cherché à limiter au minimum le nombre d'indices p (modulo $2\hbar k$) à prendre en compte. Pour cela, nous avons choisi un diagramme simplifié d'émission spontanée : les photons de fluorescence sont soit polarisés circulairement selon Oz , avec une impulsion $\pm\hbar k\mathbf{e}_z$, soit polarisés linéairement selon Oz , avec une impulsion perpendiculaire à cet axe. Ceci permet de retenir comme seuls indices p les deux valeurs p_0 et $p_0 + \hbar k$, où p_0 est choisi librement. Notons que l'évolution temporelle a été effectuée avec $p_0 = -\frac{1}{2}\hbar k$, et que la résolution dans le point de vue de Wigner utilise $p_0 = 0$, les propriétés de symétrie imposées n'étant pas les mêmes dans les deux cas.

Les résultats exposés dans la partie 3 de l'appendice A_{IV} concernent essentiellement le calcul à basse vitesse et faible saturation, et caractérisent de façon précise seulement le comportement de la distribution en impulsion en fonction de la profondeur des trous $U_0 = -\frac{2}{3}\hbar\delta s_0$ pour diverses valeurs du désaccord. La fig. IV-0 est une vue d'ensemble de ce comportement ; elle représente les courbes de niveaux pour l'impulsion quadratique moyenne Δp dans l'espace des deux paramètres $\left(\frac{U_0}{E_R}, -\frac{\delta}{\Gamma}\right)$, lorsque les équations quantiques sont réduites dans l'état fondamental. Nous reviendrons au §3 sur l'optimum du refroidissement et la modulation spatiale, à l'aide d'un calcul quantique plus précis, valable dans la limite $\Omega_{osc}\tau_p \gg 1$ mais reproduisant fidèlement la véritable distribution d'émission spontanée. Nous exposerons également sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$ une prévision de l'évolution temporelle. À ce stade, le point important à retenir des résultats quantiques de l'appendice A_{IV} est l'existence pour la configuration $Ox - Oy$ d'une limite universalisante :

$$M\Gamma \gg \hbar k^2 \quad (\text{IV1 - 2a})$$

$$\Omega_{\text{osc}}\tau_p = 6 \frac{|\delta|}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_R}{U_0}} \gg 1 \quad (\text{IV1 - 2b})$$

$$u_0 = \frac{U_0}{E_R} = \text{seul paramètre} \quad (\text{IV1 - 2c})$$

Cette limite ressemble beaucoup à celle qui a été étudiée dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ (voir (III2c - 2)), la condition de grand désaccord prenant ici la forme un peu différente (IV1 - 2b), ce qui sera justifié quantiquement au §3.

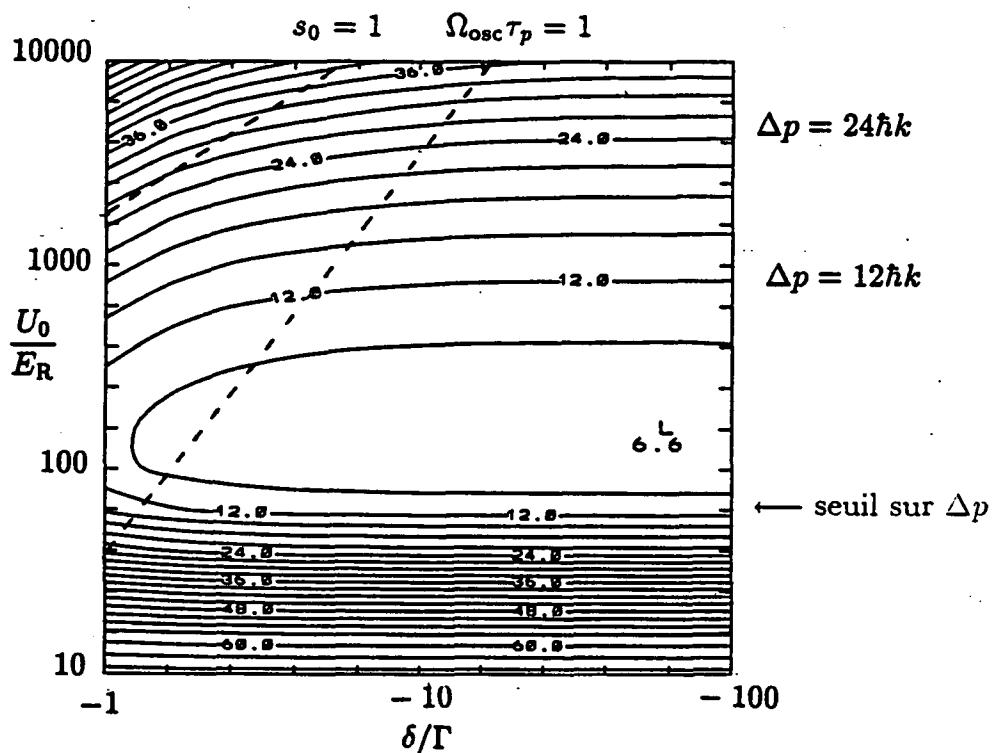


Fig. IV-0 : Lignes d'isovaleurs de l'impulsion quadratique moyenne stationnaire Δp en unité de $\hbar k$, obtenues par résolution numérique des équations quantiques ramenées dans l'état fondamental ($k\nu \ll \Gamma, s_0 \ll 1$), en fonction des deux paramètres U_0/E_R et δ/Γ . Le diagramme d'émission spontanée est simplifié ; le seuil sur Δp vaut alors $U_0 = 66E_R$. Les lignes en pointillés correspondent à $s_0 = 1$ et $\Omega_{\text{osc}}\tau_p = 1$ pour la masse de l'atome de cézium ($M\Gamma = 1285\hbar k^2$).

2 - APPROCHE SEMI-CLASIQUE

POUR LA TRANSITION $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$

Les équations semi-classiques sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$ ont été données au I§1e, dans l'approximation des faibles vitesses et des faibles saturations. Rappelons qu'elles portent sur les distributions dans l'espace des position-impulsion $\Pi_{\pm 1/2}(z, p, t)$ associées aux sous-niveaux fondamentaux $|g \pm 1/2\rangle_z$, et qu'elles sont déduites, par développement au second ordre en $\frac{\hbar k}{\Delta p}$, des équations quantiques en point de vue de Wigner ramenées dans l'état fondamental (voir l'appendice BIV). Pour résoudre les équations semi-classiques, une démarche naturelle consiste à tenter d'éliminer l'état atomique interne, de façon à obtenir une équation portant seulement sur la distribution $\Pi(z, p, t)$. Nous mettons en œuvre une telle démarche au §a. Cependant, nous ne sommes pas parvenu à obtenir une équation simple sur $\Pi(z, p)$ dans le régime oscillant ($\Omega_{osc}\tau_p \gg 1$), du moins lorsque la dépendance spatiale de $\Pi(z, p)$ n'est pas très faible. Comme ce régime oscillant contient l'optimum du refroidissement, nous faisons appel au §b à une approche entièrement différente, qui ne cherche plus à éliminer l'état interne mais substitue, à la représentation habituelle en position-impulsion, un paramétrage en position-énergie sur chaque sous-niveau interne.

a) Obtenir une équation sur $\Pi(z, p, t)$

(i) Considérations générales sur l'élimination de l'état interne

Nous avons décrit en grand détail comment éliminer l'état interne dans le cas de la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, de façon à obtenir une équation de Fokker-Planck sur la distribution en p (voir III§3c). Nous nous contentons d'expliquer ici qualitativement dans quelle mesure on peut espérer généraliser une telle approche dans la configuration $Ox - Oy$, configuration qui impose une dépendance en position à la distribution des atomes dans l'état stationnaire, contrairement à $\sigma_+ - \sigma_-$.

Pour mener cette discussion, appuyons-nous sur le résultat suivant, que l'on peut démontrer en généralisant la procédure d'élimination de l'état interne exposée au III§3c. Il est possible d'obtenir, à partir des équations semi-classiques et de façon entièrement formelle, une équation d'évolution sur la seule distribution $\Pi(z, p, t)$, valable au bout de quelques temps de pompage τ_p après le branchement du couplage atome-champ et ayant la structure :

$$\partial_t \Pi(z, p, t) = \int dz' dt' \mathcal{N}(z', p', t'; z, p, t) \Pi(z', p', t') \quad (\text{IV2a - 1})$$

Notons que le noyau \mathcal{N} intervenant dans (IV2a - 1) est en général extrêmement singulier (c'est-à-dire qu'il doit être compris au sens des distributions). Nous allons dans la suite mesurer la non-localité en t, p et z qu'il introduit, en estimant l'écart à t, p et z des points t', p' et z' ayant une contribution non négligeable dans l'intégrale de (IV2a - 1).

La non-localité en t est facile à estimer : elle correspond au temps de relaxation typique des variables internes, de l'ordre du temps de pompage optique τ_p , ce qui conduit à $|t' - t| \lesssim \tau_p$ (avec $t' < t$ bien entendu !). Cette non-localité temporelle devient négligeable si on attend suffisamment longtemps après le branchement du couplage atome-champ. $\Pi(z, p, t)$ varie alors peu pendant τ_p et l'on peut raisonnablement assimiler $\Pi(z', p', t')$ à $\Pi(z', p', t)$ dans (IV2a - 1).

L'action des forces radiatives pendant τ_p est responsable de la non-localité en impulsion. Dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, nous avons estimé l'ordre de grandeur de $|p' - p|$, soit δp_{eff} , et nous avons montré (voir III§3c) qu'il est nécessaire de se placer dans l'approximation des petits pas effectifs ($\Pi(p)$ varie peu à l'échelle de δp_{eff}) pour que l'équation de Fokker-Planck soit valable. Dans la présente configuration $Ox - Oy$, il est possible de déterminer qualitativement l'importance de δp_{eff} . Supposons d'abord que l'on est sous le seuil des nouveaux mécanismes de refroidissement ($U_0 \lesssim 50E_R$), la majorité des atomes ont une énergie E bien supérieure à U_0 ; leur variation d'énergie pendant τ_p est alors très faible en valeur relative, comme on l'a vu au I§1 (voir (I1c - 11)), ce qui correspond à un pas δp_{eff} petit devant leur impulsion typique. La variation de $\Pi(z, p)$ sur δp_{eff} est donc également petite, et l'on peut développer $\mathcal{N}(p'; p)\Pi(p')$ au second ordre en $p - p'$. Plaçons-nous maintenant dans le cas où la plupart des atomes ont une énergie cinétique inférieure à la profondeur des trous U_0 (nous sommes donc assez au-dessus du seuil : $U_0 > 100E_R$). Lorsque $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \ll 1$, l'atome n'a pas le temps de décrire une oscillation pendant τ_p , et δp_{eff} correspond à l'action de la force typique kU_0 pendant τ_p :

$$\delta p_{\text{eff}} \sim kU_0\tau_p \quad (\text{IV2a - 2})$$

Comme l'énergie cinétique associée à Δp est de l'ordre de U_0 , la condition de marche à petits pas effectifs dans le régime sautant est automatiquement vérifiée :

$$\frac{\delta p_{\text{eff}}}{\Delta p} \sim \Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1 \quad (\text{IV2a - 3})$$

Par contre, dans le régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$, l'atome peut décrire une oscillation complète pendant τ_p , et le changement d'impulsion correspondant est de l'ordre de grandeur de Δp :

$$\delta p_{\text{eff}} \sim \Delta p \quad (\text{IV2a - 4})$$

ce qui met en échec l'approche par Fokker-Planck.

Le déplacement spatial des atomes pendant τ_p est responsable de la non-localité en position ($|z - z'| \sim \delta z_{\text{eff}}$), ce qui constitue une difficulté nouvelle par rapport à $\sigma_+ - \sigma_-$. Comme cette difficulté n'existe pas sous le seuil du refroidissement (la dépendance en position de Π y est négligeable), nous nous plaçons directement, pour estimer cette non-localité, assez au-dessus du seuil ($U_0 > 100E_R$). Il existe alors une modulation spatiale de $\Pi(z, p)$ à l'échelle de $\frac{1}{2}\lambda$, liée à la localisation des atomes au fond des trous. Dans le régime sautant, la vitesse atomique change peu pendant τ_p , ce qui conduit à l'estimation :

$$\delta z_{\text{eff}} \sim \frac{\Delta p}{M} \tau_p \quad (\text{IV2a - 5})$$

La non-localité spatiale peut alors être négligée si δz_{eff} est petit devant $\frac{1}{2}\lambda$, ce qui est automatiquement le cas :

$$k \delta z_{\text{eff}} \sim \Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1 \quad (\text{IV2a - 6})$$

Par contre, dans le régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$, δz_{eff} n'est plus négligeable devant $\frac{1}{2}\lambda$, ce qui nous interdit d'obtenir, par notre approche, une équation locale en z .

En conclusion, dans le domaine des valeurs de U_0 conduisant à une modulation spatiale de la distribution $\Pi(z, p, t)$, notre tentative d'écriture d'une équation de Fokker-Planck sur $\Pi(z, p, t)$ n'aboutit que dans le régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$; elle est doublement compromise dans le régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$, parce que δp_{eff} et δz_{eff} sont simultanément trop grands. Par contre, dans le domaine de faible modulation spatiale de $\Pi(z, p)$, l'approche par Fokker-Planck est toujours justifiée. Nous résumons cette discussion sur la fig. IV-1. Notons que le régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$ en l'absence de localisation spatiale correspond à des situations de faible désaccord ($|\delta| \ll \Gamma$), très chaudes et peu intéressantes en pratique.

	$\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$	$\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$
sans modulation spatiale de $\Pi(z, p)$	oui (1)	oui (3)
avec modulation spatiale de $\Pi(z, p)$	oui (2)	non (4)

Fig. IV-1 : Possibilité, suivant les différentes situations, d'écrire une équation de Fokker-Planck (locale en z et en p) sur la distribution $\Pi(z, p)$.

(ii) Le régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$ pour $|\delta| \geq \Gamma$ (case (2))

Ecrivons explicitement la condition $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$ sous la forme :

$$\sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \gg 6 \frac{|\delta|}{\Gamma} \quad (\text{IV2a - 7})$$

Comme nous n'envisageons ici que des désaccords δ tels que $|\delta| \geq \Gamma$, la condition (IV2a - 7) impose que l'on considère des puits U_0 très profonds en unité d'énergie de recul. Comme on peut le vérifier à l'aide des calculs quantiques exposés au §1, l'énergie cinétique atomique moyenne devient proportionnelle à U_0 dans l'état stationnaire, et une forte modulation spatiale de $\Pi(z, p)$ apparaît.

Il s'agit donc d'étudier ici, à $\frac{\delta}{\Gamma}$ fixé, la limite $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}^{(1)}$, où $T_{\text{ext}}^{(1)}$ désigne, suivant les notations du chapitre II, le temps externe associé au mouvement d'oscillation des atomes au fond des puits. Nous sommes alors dans le régime de l'approche semi-classique traditionnelle. La démarche habituelle dans ce cas consiste à écrire une équation de Fokker-Planck avec force linéaire en vitesse et coefficient de diffusion pris à vitesse nulle. Nous reproduisons cette démarche dans l'appendice A_{IV}.

Rappelons que l'équation de Fokker-Planck obtenue décrit le mouvement d'une particule sans structure interne dans le potentiel dipolaire moyen :

$$U(z) = \frac{U_0}{4} \sin^2(2kz) \quad (\text{IV2a - 8})$$

en présence de forces aléatoires de moyenne la force de friction $-\alpha(z)v$ et dont les fluctuations sont décrites par un coefficient de diffusion en impulsions à vitesse nulle $D(z)$. L'expression de ces différentes grandeurs figure dans le I§1 et dans l'appendice A_{IV}. Les

temps caractéristiques d'évolution introduits par cette équation de Fokker-Planck concernent bien sûr seulement les variables atomiques externes, puisque les variables atomiques internes ont été éliminées par remplacement par leur régime forcé à la vitesse v . Le premier temps externe $T_{\text{ext}}^{(1)}$ associé à l'équation de Fokker-Planck est réactif et décrit le mouvement d'oscillation de la particule au fond du puits de potentiel $U(z)$. On trouve que la pulsation d'oscillation correspondante est exactement Ω_{osc} car $U(z)$ est quatre fois moins profond que $U_{\pm 1/2}(z)$ et a une période spatiale deux fois plus faible. Le second temps externe $T_{\text{ext}}^{(2)}$ est dissipatif, c'est l'inverse du taux d'amortissement $\frac{\alpha}{M}$ de la vitesse par la force de friction. Un calcul simple montre précisément que :

$$\frac{\alpha(z)}{M\Omega_{\text{osc}}} \leq \Omega_{\text{osc}}\tau_p \ll 1 \quad (\text{IV2a - 9})$$

ce qui correspond à $T_{\text{ext}}^{(1)} \ll T_{\text{ext}}^{(2)}$, donc à un mouvement fortement sous-amorti pour la particule fictive dans le potentiel dipolaire moyen $U(z)$. Ceci permet de résoudre l'équation de Fokker-Planck de façon approchée, en traitant perturbativement l'action des termes de friction et de diffusion. C'est la limite des frictions faibles [30,31] dont le domaine de validité, soit $T_{\text{ext}}^{(1)} \ll T_{\text{ext}}^{(2)}$, coïncide d'après (IV2a - 9) avec celui de l'équation de Fokker-Planck elle-même.

La démarche exposée au II§2c va nous permettre d'arriver plus directement au même résultat. Rappelons-en les grandes lignes. Le développement des équations semi-classiques au second ordre inclus par rapport au paramètre $\Omega_{\text{osc}}\tau_p$ permet d'obtenir la distribution $\Pi^{\text{st}}(z, p)$ à l'ordre 0 en $\Omega_{\text{osc}}\tau_p$. On trouve qu'à l'ordre 0, cette distribution dépend seulement de l'énergie mécanique totale de la particule fictive dans le potentiel dipolaire moyen $U(z)$:

$$\Pi^{\text{st}(0)}(z, p) = \varphi \left(\frac{p^2}{2M} + U(z) \right) \quad (\text{IV2a - 10})$$

La fonction $\varphi(E)$ est déterminée par l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d}{dE} \ln \varphi(E) = - \frac{\int_{-Z(E)}^{Z(E)} dz v(z, E)\alpha(z)}{\int_{-Z(E)}^{Z(E)} dz v(z, E)D(z)} \quad (\text{IV2a - 11})$$

Lorsque l'énergie E est inférieure à la valeur maximale de $U(z)$, soit $\frac{1}{4}U_0$, $-Z(E)$ et $Z(E)$ désignent les points de rebroussement de la trajectoire d'énergie E oscillant autour de

$z = 0$. Lorsque $E \geq \frac{1}{4}U_0$, il suffit de prendre $Z(E) = \frac{\lambda}{8}$, ce qui correspond à la moitié de la période spatiale du mouvement, cette fois non borné. Dans (IV2a - 11), $v(z, E)$ désigne simplement la vitesse en z pour une particule d'énergie E :

$$\text{si } -Z(E) \leq z \leq Z(E) \quad v(z, E) = \sqrt{\frac{2}{M}(E - U(z))} \quad (\text{IV2a - 12})$$

Le second membre de (IV2a - 11) vaut donc simplement le rapport des moyennes de $\alpha(z)$ et $D(z)$ sur la trajectoire d'énergie E , moyennes calculées selon un poids il est vrai peu intuitif. On vérifie bien que ce rapport, donc $\varphi(E)$, ne dépendent pas de la masse de l'atome, ce qui est normal puisque nous sommes dans le cadre de l'approche semi-classique traditionnelle.

Bien que les intégrales définissant les moyennes dans (IV2a - 11) ne soient pas calculables analytiquement (elles font intervenir des intégrales elliptiques de seconde espèce), il est possible d'étudier leur comportement pour les valeurs extrêmes de l'énergie E . Nous ne détaillons pas ici les calculs, qui feront l'objet d'une publication. D'une part, l'annulation du coefficient de friction (mais pas celle de la diffusion !) au fond du puits de $U(z)$ en $z = 0$ conduit à :

$$\frac{d}{dE}\varphi(E)|_{E=0} = 0 \quad (\text{IV2a - 13})$$

ce qui prouve que $\Pi^{\text{st}(0)}$ n'est pas gaussienne en p lorsque $E \ll \frac{1}{4}U_0$. D'autre part, aux énergies élevées ($E \gg \frac{1}{4}U_0$ mais $E \ll \frac{1}{2}Mv_c^2$ pour rester dans la plage de linéarité en vitesse de la force de friction), on peut négliger la modulation spatiale de la vitesse $v(z, E)$, et l'on retrouve partiellement le comportement exponentiel qu'aurait une distribution thermique :

$$\varphi(E) \underset{E \gg \frac{1}{4}U_0}{\sim} \frac{A}{E^\gamma} e^{-\beta E} \quad (\text{IV2a - 14a})$$

$$\gamma = \frac{1}{36} \frac{1 - \frac{22\Gamma^2}{15\delta^2}}{\left(1 + \frac{74\Gamma^2}{135\delta^2}\right)^2} \quad (\text{IV2a - 14b})$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\langle D(z) \rangle}{\langle \alpha(z) \rangle} = \frac{3}{8}U_0 \left[1 + \frac{74\Gamma^2}{135\delta^2}\right] \quad (\text{IV2a - 14c})$$

Cette “température”, déjà obtenue par les auteurs de [16] lorsque $|\delta| \gg \Gamma$, ne permet a priori pas, en toute rigueur, d’obtenir l’énergie cinétique moyenne $\frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$, puisqu’elle intervient seulement dans un comportement asymptotique. Cependant, nous avons constaté numériquement sur l’intervalle en désaccord ($\Gamma \leq |\delta| \leq 5\Gamma$) que la formule approchée :

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2M} \simeq \frac{1}{2\beta} \quad (\text{IV2a - 15})$$

constitue une approximation à mieux que 20 % de la valeur véritable déduite de toute la dépendance en E de $\varphi(E)$.

Pour clore cette discussion sur le régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \ll 1$, nous comparons les prédictions de l’approche semi-classique traditionnelle aux calculs quantiques du §1. Pour une valeur assez faible du désaccord ($\delta = -\Gamma$) et une profondeur de puits élevée ($U_0 = 1000E_R$), nous calculons, par résolution des équations quantiques ramenées dans l’état fondamental, la trace interne $f(z, p)$ de la distribution de Wigner stationnaire. Comme la condition (IV2a - 7) est satisfaite, $f(z, p)$ doit dépendre seulement de l’énergie mécanique E des atomes dans $U(z)$, et selon une loi qui coïncide avec $\varphi(E)$. Pour vérifier ceci, il est commode de représenter graphiquement les $(\frac{p_n^2}{2M} + U(z_{n'}), f(z_{n'}, p_n))$ pour les différentes valeurs des indices de discrétisation n (en impulsion) et n' (en position). Le nuage des points ainsi obtenus doit former une courbe, et cette courbe doit être proche du graphe en E de $\varphi(E)$. Nous avons effectué ces représentations sur la fig. IV-2, ce qui permet de constater le bon accord entre les résultats quantiques et ceux de l’approche semi-classique traditionnelle.

Nous n’avons pas eu à préciser la masse de l’atome pour obtenir la fig. IV-2, puisque les seuls paramètres du calcul quantique dans l’état fondamental sont $\frac{U_0}{E_R}$ et $\frac{\delta}{\Gamma}$, lorsque E est exprimée en unité de U_0 . Si nous voulions néanmoins proposer une valeur réaliste pour la masse, il faudrait choisir celle-ci assez élevée, de façon que le paramètre de saturation s_0 et l’effet Doppler moyen $\frac{k\Delta v}{\Gamma}$ soient assez faibles pour justifier nos approximations. On peut vérifier sur la fig. I-4b que, même dans le cas de l’atome le plus lourd utilisé habituellement ($\frac{M\Gamma}{\hbar k^2} = 1285$ sur le césium), le régime sautant $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \ll 1$ est d’extension réduite.

(iii) En l’absence de modulation spatiale sur $\Pi(z, p)$ (cases (1) et (3))

Nous démontrons dans l’appendice A_{IV} le résultat suivant, indépendamment de toute hypothèse sur la valeur de $\Omega_{\text{osc}}\tau_p$. Lorsque la modulation spatiale de $\Pi(z, p)$ dans l’état stationnaire est suffisamment faible sur l’intervalle en impulsion I_p :

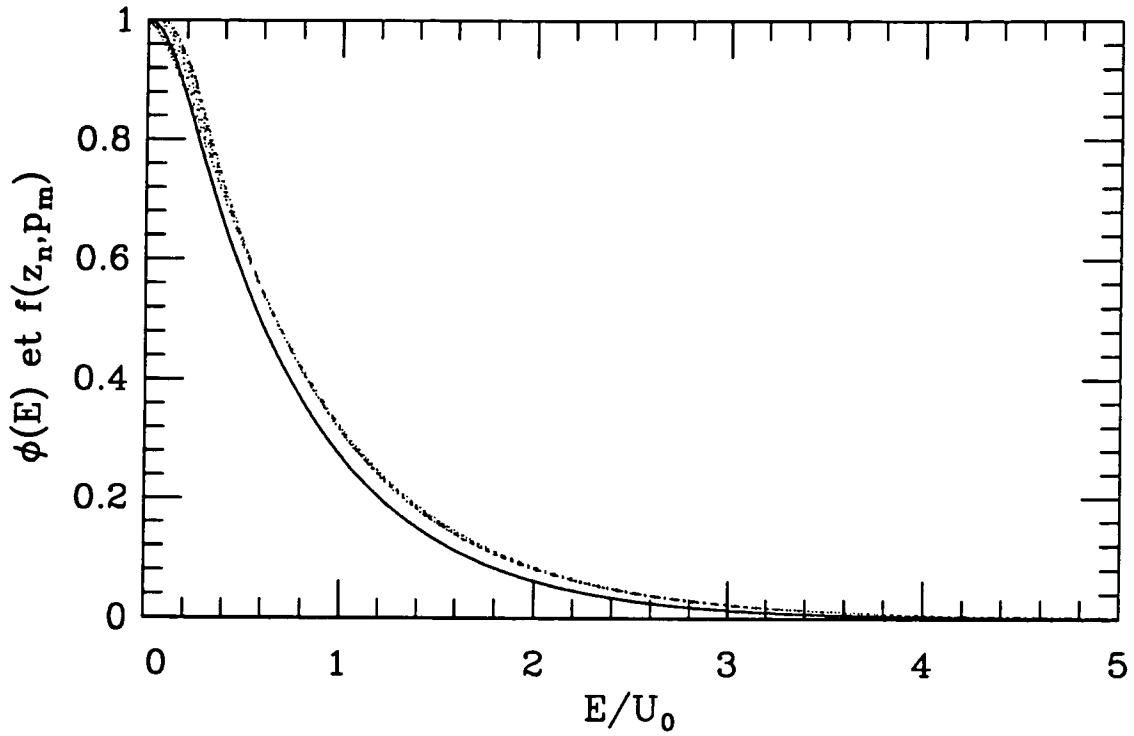


Fig. IV-2 : Sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$, pour $\delta = -\Gamma$ et $U_0 = 1000E_R$, dépendance en l'énergie $E = \frac{p^2}{2M} + U(z)$ des distributions en position-impulsion obtenues par le calcul quantique (nuage de points) et par l'approche semi-classique traditionnelle (trait continu). Dans cette dernière approche, le coefficient de diffusion $D(z)$ prend en compte le diagramme simplifié d'émission spontanée utilisé pour le calcul quantique. L'énergie E est exprimée en unité de U_0 .

$$\forall p \in I_p \quad C(p) = \frac{\sup_z \Pi(z, p) - \inf_z \Pi(z, p)}{\sup_z \Pi(z, p) + \inf_z \Pi(z, p)} \ll 1 \quad (\text{IV2a - 16})$$

alors la distribution en impulsion $\Pi^{st}(p) = \int dz \Pi^{st}(z, p)$ vérifie sur l'intervalle I_p une équation différentielle ayant la forme d'une équation de Fokker-Planck^(*). L'idée de la démonstration est d'obtenir une équation intégrale en z sur $\Pi^{st}(z, p)$ exacte dans la limite semi-classique et de négliger la dépendance en position de $\Pi^{st}(z, p)$ sous l'intégrale. Il est facile de résoudre explicitement l'équation différentielle sur $\Pi^{st}(p)$, et l'on obtient

(*) L'équation obtenue sur $\Pi^{st}(p)$ n'est pas la "véritable" équation de Fokker-Planck au sens du chapitre III, car le coefficient de diffusion effectif qui intervient dans cette équation diffère de la moyenne spatiale du coefficient de diffusion "vrai" $D(z, v)$ lorsque $|v| \lesssim v_c$ (cf. remarque dans l'appendice A_{IV}).

finalement, sur tout intervalle I_p vérifiant la condition (IV2a - 16), la dépendance en p suivante :

$$\Pi^{\text{st}}(p) = \frac{A}{(1 + p^2/\bar{p}_c^2)^{\frac{5}{164} \frac{U_0}{E_R}}} \quad (\text{IV2a - 17a})$$

$$\bar{p}_c = 3\sqrt{\frac{10}{41}} M v_c \left[\frac{37}{90} + \left(\frac{\delta}{\Gamma} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{IV2a - 17b})$$

Les valeurs données dans (IV2a - 17) diffèrent de celles figurant dans l'appendice A_{IV} car nous avons pris ici en compte le véritable diagramme d'émission spontanée.

Cherchons maintenant à caractériser les situations dans lesquelles la condition (IV2a - 16) est vérifiée. Il s'agit pour cela de déterminer l'intervalle I_p admissible en fonction des divers paramètres de la transition atomique et du laser. Une première contrainte sur I_p vient naturellement à l'esprit : il s'agit d'imposer que l'énergie cinétique $\frac{p^2}{2M}$ soit plus grande que la profondeur des puits U_0 . Nous prenons note de cette contrainte intuitive, mais nous constatons qu'elle n'est pas suffisante. Plaçons-nous en effet dans le régime sautant ($\Omega_{\text{osc}} \tau_p \ll 1$), à une énergie cinétique intermédiaire entre U_0 et $\frac{1}{2} M v_c^2$. L'expression approchée (IV2a - 14) est alors utilisable et permet le calcul de la modulation spatiale de $\Pi^{\text{st}}(z, p)$ à p fixé. On trouve $C(p) \simeq 0.32$, ce qui n'est pas très petit devant 1 et ce qui interdit en toute rigueur d'utiliser (IV2a - 17a). Pour obtenir une seconde contrainte sur I_p , cette fois non intuitive, nous avons eu recours à un développement asymptotique des équations semi-classiques du I§1e en puissances de $\frac{1}{p}$. Nous présentons ici seulement les résultats d'un tel calcul. On trouve que la dépendance spatiale de $\Pi^{\text{st}}(z, p)$ est négligeable lorsque $|p| \gg \bar{p}_c$, où \bar{p}_c est défini par (IV2a - 17b). On vérifie également que la loi de puissance avec laquelle $\Pi^{\text{st}}(p)$ décroît aux grands p est exactement la même que celle déduite de (IV2a - 17a) :

$$\Pi^{\text{st}}(p) \underset{|p| \gg \bar{p}_c}{\sim} \frac{A}{|p|^{\frac{5}{82} \frac{U_0}{E_R}}} \quad (\text{IV2a - 18})$$

Nous déduisons en particulier de l'exposant apparaissant dans (IV2a - 18) que l'action des seuls nouveaux mécanismes (en l'absence de l'effet Doppler) conduit à une distribution stationnaire d'énergie cinétique finie seulement si :

$$U_0 > \frac{246}{5} E_R \quad (\text{IV2a - 19})$$

Nous prouvons également que le seuil déduit de considérations heuristiques au I§1c correspond précisément à la limite de normalisabilité de $\Pi^{\text{st}}(p)$.

En guise de conclusion à ce §a, voyons dans quelle mesure les éliminations de l'état interne décrites successivement permettent d'estimer l'optimum du refroidissement. Les résultats de la case (2) indiquent simplement que l'énergie cinétique moyenne devient proportionnelle à la profondeur des puits U_0 , lorsqu'on augmente suffisamment U_0 à désaccord $\frac{\delta}{\Gamma}$ fixé. Si l'on cherche les distributions les plus froides, on est conduit naturellement à diminuer U_0 , ce qui nous fait sortir de ladite case (2). Nous nous retrouvons ainsi dans l'une des cases (1), (3) ou (4). Supposons, dans un premier temps, que l'optimum du refroidissement soit très peu modulé spatialement. Sous cette hypothèse, l'expression (IV2a - 17a) est utilisable. Elle place alors, comme il est montré dans l'appendice A_{IV}, l'optimum du refroidissement dans la limite des grands désaccords (donc dans le régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$), la valeur et la position en U_0 prédictes pour l'optimum sur $\langle p^2 \rangle$ (avec prise en compte du vrai diagramme d'émission spontanée) étant :

$$\Delta p = \sqrt{\frac{246}{5}} \hbar k \simeq 7 \hbar k \quad (\text{IV2a - 20a})$$

$$U_0 = \frac{492}{5} E_R \quad (\text{IV2a - 20b})$$

On constate cependant que $\frac{\Delta p^2}{2M}$ et U_0 sont alors du même ordre de grandeur, ce qui rend suspecte l'hypothèse de très faible modulation spatiale. L'optimum absolu du refroidissement se trouve donc selon toute probabilité dans la case (4), ce qui rend nécessaire la mise en oeuvre d'un traitement des équations semi-classiques adapté au régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$ et indépendant de toute hypothèse sur la dépendance en position de $\Pi^{\text{st}}(z, p)$.

b) Etude du régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$

Comme nous l'avons exposé au §2a précédent, on ne peut pas obtenir, dans le régime oscillant, une équation simple sur la distribution $\Pi^{\text{st}}(z, p)$ qui soit locale en position et en impulsion. Nous faisons donc appel ici à une approche différente. Nous ne cherchons plus à éliminer l'état atomique interne, mais nous effectuons un traitement perturbatif des

équations semi-classiques sur $\Pi_{\pm 1/2}^{\text{st}}(z, p)$, par développement de la solution stationnaire en puissances de $\frac{1}{\Omega_{\text{osc}} \tau_p}$, pour une valeur fixée de $\frac{U_0}{E_R}$. L'équation obtenue n'est pas locale mais a l'avantage de porter sur une fonction d'une seule variable E , ce qui rend accessibles certains résultats analytiques simples.

Le développement en puissances successives de $\frac{1}{\Omega_{\text{osc}} \tau_p}$ est effectué dans l'appendice A_{IV}. Rappelons-en les principales étapes. A l'ordre 0, les populations stationnaires $\Pi_{\pm 1/2}^{\text{st}}(z, p)$ dépendent seulement de l'énergie mécanique des atomes dans le potentiel $U_{\pm 1/2}(z)$ associé à chaque sous-niveau :

$$\Pi_{+1/2}^{\text{st}(0)}(z, p) = \Phi \left(\frac{p^2}{2M} + U_0 \cos^2 kz \right) \quad (\text{IV2b - 1a})$$

$$\Pi_{-1/2}^{\text{st}(0)}(z, p) = \Phi \left(\frac{p^2}{2M} + U_0 \sin^2 kz \right) \quad (\text{IV2b - 1b})$$

C'est la même fonction Φ qui intervient pour $m = +1/2$ et $m = -1/2$, à cause de la propriété de symétrie (B_{IV} – 10). L'écriture des équations semi-classiques à l'ordre 1 conduit, après élimination de $\Pi_m^{\text{st}(1)}$ selon une procédure proche de celle du II§2c, à une équation intégrale-différentielle sur $\Phi(E)$:

$$\begin{aligned} 0 = & - \oint_{-Z(E)}^{Z(E)} \frac{dZ}{v(Z, E)} \gamma_{-1/2 \rightarrow 1/2}(Z) \Phi(E) \\ & + \oint_{-Z(E)}^{Z(E)} \frac{dZ}{v(Z, E)} \gamma_{1/2 \rightarrow -1/2}(Z) \Phi(E + U_{1/2}(Z) - U_{-1/2}(Z)) \\ & + \partial_E \oint_{-Z(E)}^{Z(E)} dZ v(Z, E) [D_{-1/2 \rightarrow -1/2}(Z) \partial_E \Phi(E) + \\ & \quad D_{1/2 \rightarrow -1/2}(Z) \partial_E \Phi(E + U_{1/2}(Z) - U_{-1/2}(Z))] \end{aligned} \quad (\text{IV2b - 2})$$

On a introduit la notation $v(Z, E)$ pour désigner la vitesse algébrique en Z des atomes d'énergie $E = \frac{1}{2} M v^2 + U_0 \sin^2 kz$ dans le sous-niveau $|g - 1/2\rangle$: $v \geq 0$ lorsqu'on intègre dans le sens des Z croissants, $v < 0$ sinon. Lorsque les atomes ont une énergie inférieure aux collines du potentiel ($E < U_0$), $Z(E)$ est le point de rebroussement positif de la trajectoire passant par $z = 0$ et d'énergie E dans le potentiel $U_0 \sin^2 kz$. Lorsque $E > U_0$, la

trajectoire d'énergie E n'est plus bornée, et l'on montre qu'il suffit de prendre $Z(E) = \frac{1}{4}\lambda$, demi-période spatiale du mouvement. On constate que l'équation (IV2b - 2) sur $\Phi(E)$ se compose de deux parties distinctes. La première, constituée par les deux premières lignes de (IV2b - 2), exprime les transferts de population d'un sous-niveau à l'autre par pompage optique ; elle fait donc intervenir les taux de pompage $\gamma_{\pm 1/2 \rightarrow \mp 1/2}(z)$ définis par (I1b - 4). La deuxième partie, constituée par les deux dernières lignes de (IV2b - 2), contient des termes de diffusion décrivant les fluctuations de l'impulsion atomique à l'issue d'un cycle de fluorescence, ce cycle s'accompagnant d'un changement (dernière ligne de (IV2b - 2)) ou non (troisième ligne de (IV2b - 2)) de sous-niveau interne ; les coefficients de diffusion correspondants, d'ordre de grandeur $(\hbar k)^2 \Gamma s_0$, ont une dépendance spatiale précisée par (I1e - 6). Nous allons étudier successivement la contribution de ces deux parties.

(i) En l'absence des termes de diffusion

Par une analyse rapide, nous constatons que les termes de diffusion sont $\left(\frac{\hbar k}{\Delta p}\right)^2$ fois plus petits que les termes de pompage. Lorsque l'énergie cinétique moyenne est de l'ordre de grandeur de la profondeur de puits U_0 , le rapport de la diffusion au pompage varie donc comme $\frac{E_R}{U_0}$. Cette constatation donne l'idée d'étudier la limite des puits très profonds à l'aide du modèle simple qui consiste à négliger les termes de diffusion dans (IV2b - 2). La fonction $\Phi(E)$ vérifie alors l'équation obtenue en ne retenant que les deux premières lignes de (IV2b - 2).

Avant d'étudier l'équation simplifiée sur $\Phi(E)$, montrons comment l'obtenir de façon intuitive. Comme les termes de diffusion sont négligés, l'énergie $E_{\pm 1/2}$ des atomes sur chaque sous-niveau interne reste constante entre deux transitions $\pm 1/2 \longleftrightarrow \mp 1/2$, et ces transitions se font avec des taux $\gamma_{\pm 1/2 \rightarrow \mp 1/2}(z)$ sans changement d'impulsion atomique. L'équation sur $\Phi(E)$ est alors déduite d'une simple comptabilité des départs et des arrivées pour un paquet spatialement localisé d'atomes d'énergie E dans le sous-niveau $|g - 1/2\rangle$ par exemple. Considérons le cas des atomes d'énergie inférieure aux sommets du potentiel $U_0 \sin^2 kz$. Ces atomes ont en moyenne le temps d'osciller entre les points de rebroussement $-Z(E)$ et $Z(E)$ avant d'être pompés optiquement vers le sous-niveau $|g 1/2\rangle$, puisque $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$ par hypothèse. Le nombre de départs, en valeur relative, du paquet localisé d'atomes pendant une période d'oscillation est obtenu par intégration sur la trajectoire d'énergie E du taux $\gamma_{-1/2 \rightarrow +1/2}(z)$, compte tenu du fait que le temps mis par ce paquet pour parcourir dZ n'est autre que $\frac{dZ}{v}$. Comme nous avons intégré sur une pé-

riode complète, le taux de départ obtenu pour un paquet localisé d'atomes ne dépend pas de la position initiale du paquet, et s'applique aussi à la classe totale, de population $\Phi(E)$, des atomes d'énergie E dans $|g - 1/2\rangle$. On obtient ainsi la première ligne de (IV2b - 2). Le flux d'arrivée est déduit par un raisonnement similaire, en prenant en compte le fait que les atomes contribuant à ce flux d'arrivée ont subi, à la transition interne $+1/2 \rightarrow -1/2$, un changement d'énergie dû à la variation brusque d'énergie potentielle. En effet, si la transition effectuée en z les a amenés sur la trajectoire d'énergie E , c'est que leur énergie initiale était $E + U_{1/2}(z) - U_{-1/2}(z)$. On obtient ainsi la deuxième ligne de (IV2b - 2), la présence du même facteur $\frac{1}{v}$ qu'en première ligne de (IV2b - 2) (alors que le mouvement se fait maintenant dans le potentiel $U_0 \cos^2 kz$) découlant du fait que la transition $+1/2 \rightarrow -1/2$ s'effectue sans changement de la vitesse atomique dans le présent modèle.

Passons maintenant à l'étude de l'équation simplifiée sur $\Phi(E)$. Le terme d'alimentation précédemment décrit rend cette équation intégrale fortement non locale en E . Il est en particulier impossible de se ramener à une équation différentielle ordinaire en effectuant un développement de la deuxième ligne de (IV2b - 2) en puissances de U_0 , puisque l'échelle de variation attendue pour $\Phi(E)$ est précisément U_0 . On peut par contre obtenir les comportements asymptotiques de $\Phi(E)$ pour les valeurs extrêmales de l'énergie.

Envisageons d'abord le cas limite $0 < E \ll U_0$. Les points de rebroussement $-Z(E)$ et $Z(E)$ sont très proches et dans le domaine de variation harmonique de $U_0 \sin^2 kz$ et de $\gamma_{-1/2 \rightarrow +1/2}(z)$ avec z , ce qui permet d'estimer l'intégrale dans la première ligne de (IV2b - 2) :

$$v(Z, E) \underset{E \ll U_0}{\simeq} \mp \sqrt{\frac{2}{M} (E - U_0 k^2 Z^2)} \quad (\text{IV2b - 3a})$$

$$\int_{-Z(E)}^{Z(E)} \frac{dZ}{v(Z, E)} \gamma_{-1/2 \rightarrow +1/2}(z) \underset{E \ll U_0}{\simeq} \frac{\pi}{2} \frac{E/U_0}{\Omega_{\text{osc}} \tau_p} \quad (\text{IV2b - 3b})$$

L'intégrale de la deuxième ligne de (IV2b - 2) fait intervenir les valeurs de Φ au voisinage du maximum du potentiel $U_0 \cos^2 kz$, donc au voisinage de U_0 , puisque $U_0 \sin^2 kz$ et E sont très petits devant U_0 . Si l'on admet que Φ varie peu au voisinage de U_0 :

$$\Phi(E + U_{1/2}(Z) - U_{-1/2}(Z)) \simeq \Phi(U_0) \quad (\text{IV2b - 4})$$

nous pouvons sortir ce terme non local en E de l'intégrale et évaluer comme précédemment :

$$\int_{-Z(E)}^{Z(E)} \frac{dZ}{v(Z, E)} \gamma_{+1/2--1/2}(z) \underset{E \ll U_0}{\underset{\sim}{\sim}} \pi \frac{1}{\Omega_{\text{osc}} \tau_p} \quad (\text{IV2b - 5})$$

Nous aboutissons finalement au comportement asymptotique :

$$\Phi(E) \underset{E \ll U_0}{\underset{\sim}{\sim}} \frac{2U_0}{E} \Phi(U_0) \quad (\text{IV2b - 6})$$

Les distributions $\Pi_{\pm 1/2}^{\text{st}}(z, p)$ obtenues par ce modèle simple sans diffusion ne sont donc pas normalisables : les atomes s'accumulent sans limite au fond des puits de potentiel de $U_{\pm 1/2}(z)$, car le taux de départ du fond des puits intégré sur une période d'oscillation s'annule linéairement en E (cf. (IV2b - 3b)), alors que le taux de pompage optique au voisinage des collines de potentiel est maximal donc non nul !

Considérons, pour terminer l'étude de ce modèle simple, le comportement de $\Phi(E)$ aux grandes énergies. Lorsque $E \gg U_0$, il est légitime de négliger la dépendance en position de la vitesse :

$$v(Z, E) \underset{E \gg U_0}{\underset{\sim}{\sim}} \pm \sqrt{\frac{2E}{M}} \quad (\text{IV2b - 7})$$

En effectuant cette approximation sur v dans les deux premières lignes de (IV2b - 2), on est conduit, après le changement de variable $x = kz$, à :

$$0 \underset{E \gg U_0}{\underset{\sim}{\sim}} \frac{1}{\Omega_{\text{osc}} \tau_p} \sqrt{\frac{U_0}{E}} \left[- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \sin^2 x \Phi(E) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \cos^2 x \Phi(E + U_0 \cos 2x) \right] \quad (\text{IV2b - 8})$$

Cette équation admet une exponentielle comme solution exacte, la "température" correspondante pouvant être déterminée numériquement. On en déduit :^(*)

$$\Phi(E) \underset{E \gg U_0}{\underset{\sim}{\sim}} A e^{-\beta E} \quad (\text{IV2b - 9a})$$

$$\beta U_0 = 3.1718... \quad (\text{IV2b - 9b})$$

^(*) Un calcul plus précis fait intervenir une amplitude lentement variable, qui est une puissance non entière de E .

Nous savons en fait que les $\Pi_{\pm 1/2}^{\text{st}}(z, p)$ décroissent en $\frac{1}{|p|^\alpha}$ aux grands p (voir (IV2a - 18)), ce qui est à l'origine de l'existence d'un seuil pour le refroidissement. Nous avons vu, dans la discussion qualitative du I§1c, tout le rôle de la diffusion en impulsions qui accompagne les cycles de fluorescence : c'est l'échauffement qu'elle produit qui est responsable du seuil, ce dont notre modèle simple sans diffusion ne peut évidemment pas rendre compte.

(ii) Prise en compte des termes de diffusion

La prise en compte de la diffusion grâce aux deux dernières lignes de (IV2b - 2) permet de résoudre les problèmes rencontrés précédemment. Ceci introduit en effet une unité d'énergie autre que U_0 , l'énergie de recul E_R . Nous allons voir que E_R se combine avec U_0 pour donner deux échelles d'énergie sur lesquelles la présence des termes de diffusion modifie profondément les comportements asymptotiques (IV2b - 6) et (IV2b - 9). La première échelle d'énergie, que nous appelons E_1 , est d'ordre de grandeur $\sqrt{U_0 E_R}$, donc beaucoup plus petite que U_0 . La présence des termes de diffusion restreint le domaine de validité de la loi (IV2b - 6) en $\frac{1}{E}$ pour $\Phi(E)$ à $E \gg E_1$, et donne à $\Phi(E)$ un comportement non divergent au fond du puits de potentiel. La seconde échelle, E_2 , est proportionnelle à $\frac{U_0^2}{E_R}$, donc beaucoup plus grande que U_0 . Pour des énergies $E \gtrsim E_2$, la loi exponentielle (IV2b - 9a) n'est plus valable lorsque la diffusion en impulsions est prise en compte ; nous allons constater qu'elle doit être remplacée par une loi de puissance en $E^{-\gamma}$. Ces résultats, et leur comparaison avec la forme de $\Phi(E)$ en l'absence de diffusion, sont résumés sur la fig. IV-3.

Examinons d'abord le comportement de $\Phi(E)$ pour $E \ll U_0$. Nous effectuons sur les deux premières lignes de (IV2b - 2) les approximations précédentes (IV2b - 3) et (IV2b - 4). Nous négligeons de plus les termes non diagonaux $D_{m \rightarrow -m}(z)$ du tenseur de diffusion dans (IV2b - 2), ce qui est justifié par leur faiblesse relativement aux éléments diagonaux (voir (I1e - 6)). La diffusion est alors décrite seulement par la troisième ligne de (IV2b - 2), à laquelle la petitesse de kZ (pour $|Z| \leq Z(E)$) nous permet d'apporter les simplifications suivantes :

$$\int_{-Z(E)}^{Z(E)} dz v(Z, E) D_{-1/2 \rightarrow -1/2}(Z) \underset{E \ll U_0}{\approx} D_{-1/2 \rightarrow -1/2}(0) \int_{-Z(E)}^{Z(E)} dz v(Z, E) \quad (\text{IV2b - 10a})$$

$$\underset{E \ll U_0}{\approx} \frac{14}{5} \pi \frac{E \cdot E_R}{\Omega_{\text{osc}} \tau_p} \quad (\text{IV2b - 10b})$$

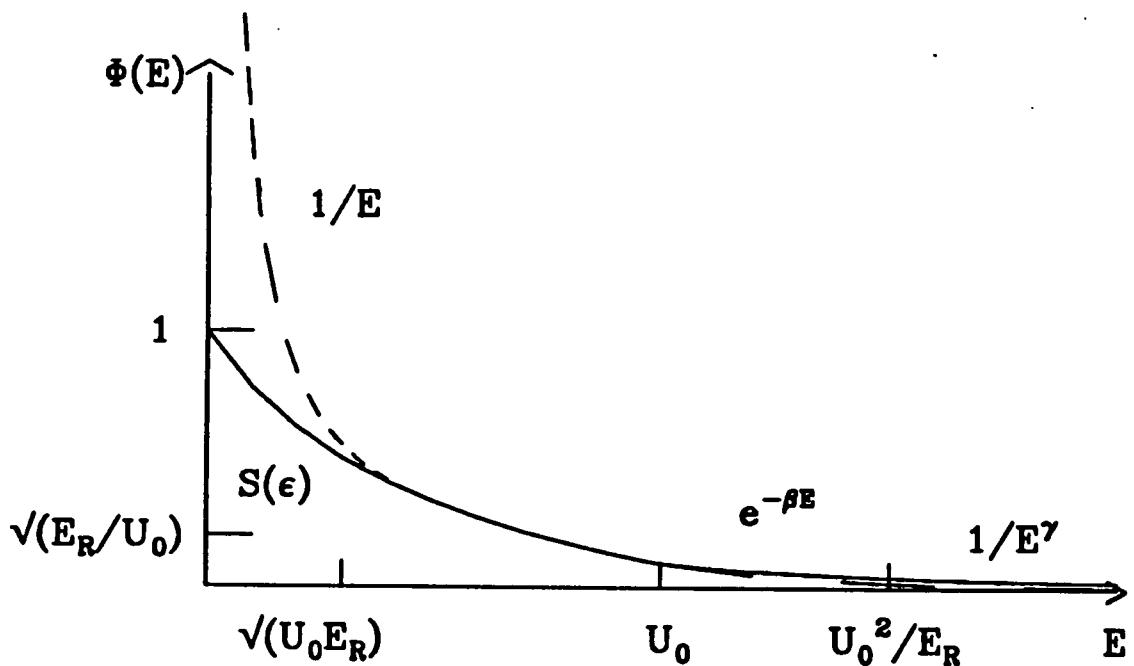


Fig. IV-3 : Représentation schématique des différentes échelles d'énergie E et des comportements de $\Phi(E)$ associés, lorsque $\Phi(E)$ est la solution de l'équation (IV2b - 2) du régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$. Le trait plein correspond à la solution de l'équation intégro-différentielle complète, le trait pointillé correspond au modèle simple qui néglige les termes de diffusion.

ce qui nous amène à l'équation approchée pour $\Phi(E)$ au fond du puits :

$$0 \underset{E \ll U_0}{\underset{\Omega_{\text{osc}} \tau_p}{\approx}} \frac{\pi}{\Omega_{\text{osc}} \tau_p} \left[-\frac{E}{2U_0} \Phi(E) + \Phi(U_0) + \frac{14}{5} E_R \partial_E (E \partial_E \Phi(E)) \right] \quad (\text{IV2b - 11})$$

Nous déduisons de (IV2b- 11) l'échelle de variation typique de Φ pour $E \ll U_0$ imposée par la diffusion :

$$E_1 = \sqrt{\frac{14}{5} U_0 E_R} \quad (\text{IV2b - 12})$$

En effet, un simple changement de variables montre que, dans le domaine de validité de (IV2b - 11), $\Phi(E)$ peut être mise sous la forme :

$$\Phi(E) \underset{E \ll U_0}{\underset{E_1}{\approx}} \frac{U_0}{E_1} S \left(\varepsilon = \frac{E}{E_1} \right) \quad (\text{IV2b - 13})$$

où la fonction $S(\varepsilon)$ est la solution, régulière en 0^+ et de limite nulle en $\varepsilon = +\infty$, de l'équation réduite :

$$0 = -\frac{1}{2}\varepsilon S(\varepsilon) + \Phi(U_0) + \partial_\varepsilon [\varepsilon \partial_\varepsilon S(\varepsilon)] \quad (\text{IV2b - 14})$$

Nous laissons le soin à l'appendice C_{IV} d'établir mathématiquement les propriétés de $S(\varepsilon)$. Nous retenons ici seulement les résultats que l'on en déduit pour $\Phi(E)$:

$$\Phi(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_0}{E_1} \cdot \Phi(U_0) \quad (\text{IV2b - 15a})$$

$$\Phi(E) \underset{E_1 \ll E \ll U_0}{\sim} \frac{2U_0}{E} \Phi(U_0) \quad (\text{IV2b - 15b})$$

ce qui constitue une heureuse correction à (IV2b - 6) en supprimant la divergence en $E = 0$: il n'est pas légitime de négliger la diffusion au fond des puits de potentiel lorsque $E \lesssim E_1$.

La deuxième échelle E_2 introduite par la diffusion intervient pour des énergies très au-dessus des puits de potentiel. Elle restreint le domaine de validité de (IV2b - 9) à un domaine borné :

$$\Phi(E) \underset{U_0 \ll E \ll E_2}{\sim} A e^{-\beta E} \quad (\text{IV2b - 16})$$

en dehors duquel $\Phi(E)$ adopte le comportement asymptotique correspondant à (IV2a - 18). Nous définissons ainsi E_2 par :

$$\Phi(E) \underset{E \gg E_2}{\simeq} \frac{A'}{\left[E \left(1 + \frac{E_2}{E} + \dots \right) \right]^\gamma} \quad (\text{IV2b - 17})$$

où γ peut être déduit de (IV2a - 18). En procédant par développement asymptotique de $\Phi(E)$ dans l'équation complète (IV2b - 2) :

$$\Phi(E) \underset{E \gg \gamma E_2}{\simeq} \frac{A'}{E^\gamma} \left[1 - \frac{\gamma E_2}{E} + \dots \right] \quad (\text{IV2b - 18})$$

on aboutit, après des calculs assez longs, à E_2 d'ordre de grandeur $\frac{U_0^2}{E_R}$ (pour $U_0 \gg E_R$).

(iii) Comparaison avec le calcul quantique

De façon à obtenir toute la dépendance en E de $\Phi(E)$, nous avons résolu numériquement l'équation intégro-différentielle sur Φ , en négligeant le couplage par diffusion en impulsion entre les deux sous-niveaux $1/2$ et $-1/2$ (dernière ligne de (IV2b - 2)). Nous devons ensuite vérifier que la distribution stationnaire $\Pi_{-1/2}^{\text{st}}(z, p)$ déduite des équations quantiques ramenées dans l'état fondamental dépend seulement de l'énergie $E = \frac{p^2}{2M} + U_0 \sin^2 kz$, et que cette dépendance est bien décrite par $\Phi(E)$. Il est commode d'utiliser pour cela la même méthode graphique qu'au §2a(ii), en représentant, sur une seule fig. IV-4, le graphe de $\Phi(E)$ et le nuage de points $(\frac{p_n^2}{2M} + U_0 \sin^2 kz_{n'}, \Pi_{-1/2}^{\text{st}}(z_{n'}, p_n))$. La profondeur de puits choisie ($U_0 = 500E_R$) est assez grande pour que la plage de dépendance de $\Phi(E)$ en $\frac{1}{E}$ soit visible.

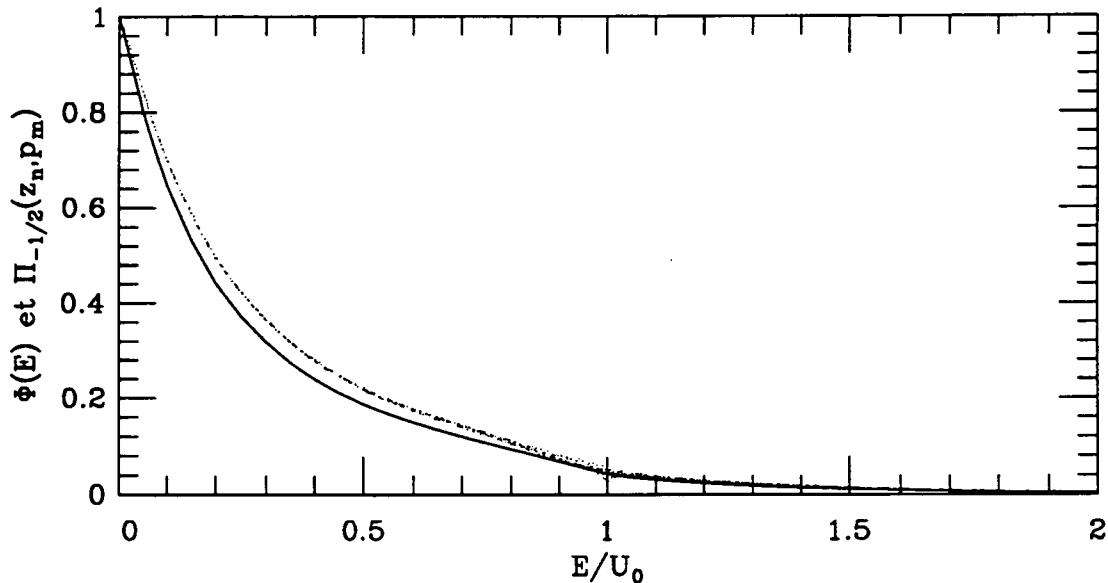


Fig. IV-4 : Sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$, pour $U_0 = 500E_R$ et dans la limite $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$, comparaison des dépendances en E de $\Pi_{-1/2}^{\text{st}}(z, p)$ associées à la distribution de Wigner quantique (nuage de points) et à la distribution $\Phi(E)$ semi-classique (trait continu). Le calcul quantique est effectué à $\delta = -50\Gamma$. L'équation sur $\Phi(E)$ prend en compte la distribution simplifiée d'émission spontanée (voir le §1).

Nous effectuons dans l'appendice A_{IV} une comparaison plus globale entre le calcul quantique et le calcul semi-classique de $\Phi(E)$, en représentant la dépendance de $\frac{\langle p^2 \rangle}{(\hbar k)^2}$ en fonction de $\frac{U_0}{E_R}$. L'accord entre les différentes prédictions est alors tout à fait acceptable.

(iv) Cette approche est-elle généralisable à d'autres transitions ?

Nous avons prouvé, sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$, l'efficacité d'une nouvelle méthode de développement des équations semi-classiques. Le petit paramètre est l'inverse de celui, $\Omega_{\text{osc}}\tau_p$, utilisé dans l'approche semi-classique traditionnelle. L'équation obtenue est très différente d'une équation de Fokker-Planck, puisqu'elle est intégro-différentielle, et qu'elle ne porte pas sur $\Pi^{\text{st}}(z, p)$ mais sur $\Pi_{+1/2}^{\text{st}}(z, p)$ ou $\Pi_{-1/2}^{\text{st}}(z, p)$.

Examinons donc brièvement la possibilité d'étendre cette méthode à des transitions de moment cinétique j_g plus élevé. Il faut d'abord résoudre les équations semi-classiques à l'ordre 0 en $\frac{1}{\Omega_{\text{osc}}\tau_p}$, ce qui conduit de façon générale au système :

$$v\partial_z W^{(0)} = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{U}(z), W^{(0)}] + \left\{ \partial_z \mathcal{U}(z), \partial_p W^{(0)} \right\} \quad (\text{IV2b - 19})$$

$\mathcal{U}(z)$ est l'opérateur purement interne, paramétré en z , dont les valeurs propres sont les déplacements lumineux. La résolution du système (IV2b - 19) est sans difficulté lorsqu'on peut trouver une base de vecteurs propres de $\mathcal{U}(z)$ indépendante de z ; c'est la situation rencontrée sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$. Il en va autrement sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$: on peut être tenté alors de négliger dans (IV2b - 19) le couplage des populations aux cohérences de $W^{(0)}$ dans la base propre de $\mathcal{U}(z)$. La justification d'une telle approximation adiabatique réclame cependant une étude sérieuse : on sait qu'il existe des situations dans lesquelles les transitions non adiabatiques jouent un rôle important, comme celles donnant naissance aux dopplerons [73,40].

Nous ne nous sommes donc pas engagé plus avant dans la réduction des équations semi-classiques à l'aide de $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$. Nous avons préféré nous tourner vers la réduction des équations quantiques, qui est conceptuellement aussi simple et introduit des images physiques esthétiques et originales.

3 - L'APPROCHE QUANTIQUE ADAPTÉE AU RÉGIME OSCILLANT

a) Introduction

L'étude du refroidissement par effet Sisyphe sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$ aux §1 et §2 précédents a montré l'intérêt du régime oscillant $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$. Nous avons constaté, par résolution numérique brutale des équations quantiques au §1, que ce régime contient l'optimum du refroidissement par nouveaux mécanismes. L'analyse semi-classique du §2 a prouvé que ce régime est nouveau, en ce sens qu'il est à l'extrême opposé du domaine de l'approche semi-classique traditionnelle, et qu'il n'est pas descriptible par une simple équation de Fokker-Planck sur $\Pi(z, p, t)$.

Nous allons développer un moyen de réduction des équations quantiques adapté au régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$, et dont on peut donner la présentation intuitive suivante. Nous avons déjà vu que l'influence du rayonnement sur la dynamique atomique présente une partie réactive hamiltonienne (couplage de l'atome aux modes laser) et une partie dissipative non hamiltonienne (couplage de l'atome aux fluctuations du champ). Lorsque la dynamique atomique est ramenée dans l'état fondamental et que l'énergie cinétique des atomes est prise en compte, la partie réactive décrit le mouvement des atomes dans les trous de potentiel lumineux $U_{\pm 1/2}(z)$ (cf. I§1c). Nous introduisons les niveaux d'énergie qui lui sont associés, afin d'étudier quantiquement ce mouvement^(*). On constate qu'ils imposent une pulsation de Bohr typique Ω_{osc} dans l'évolution de la fonction d'onde du centre de masse atomique, où Ω_{osc} est la pulsation du mouvement classique d'oscillation des atomes dans les trous ; en effet, $\hbar \Omega_{\text{osc}}$ est aussi la différence d'énergie typique entre niveaux d'énergie voisins. Prenons en compte maintenant la partie dissipative du couplage atome-rayonnement. La durée de vie finie de l'état atomique excité, ramenée dans l'état fondamental par le laser, rend instables les niveaux d'énergies précédemment introduits ; on attribue ainsi à ces niveaux une "largeur" en énergie, de l'ordre de $\frac{\hbar}{\tau_p}$, où τ_p est le temps typique de pompage optique. L'interprétation entièrement quantique de la condition $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$ est alors claire : cette condition réclame simplement que l'écart entre les niveaux d'énergie soit plus grand que leur "largeur" (fig. IV-5). Dans ce cas, il est connu [48] que la matrice densité du système dans l'état stationnaire σ^{st} peut être décrite avec une bonne approximation

(*) Une telle introduction a déjà été effectuée pour un atome à deux niveaux dans une onde stationnaire, en l'absence d'émission spontanée pour [78] et avec prise en compte de l'émission spontanée dans une méthode numérique de "splitting" pour [79].

par les seules populations des différents niveaux d'énergie, l'effet de la partie dissipative étant des transferts de population entre ces niveaux. Les équations de Bloch optiques généralisées se ramènent ainsi simplement à des équations de taux dans l'état stationnaire. Ce régime, et la description approchée en termes de populations que l'on y effectue sur σ^{st} , sont qualifiés couramment de séculaires.

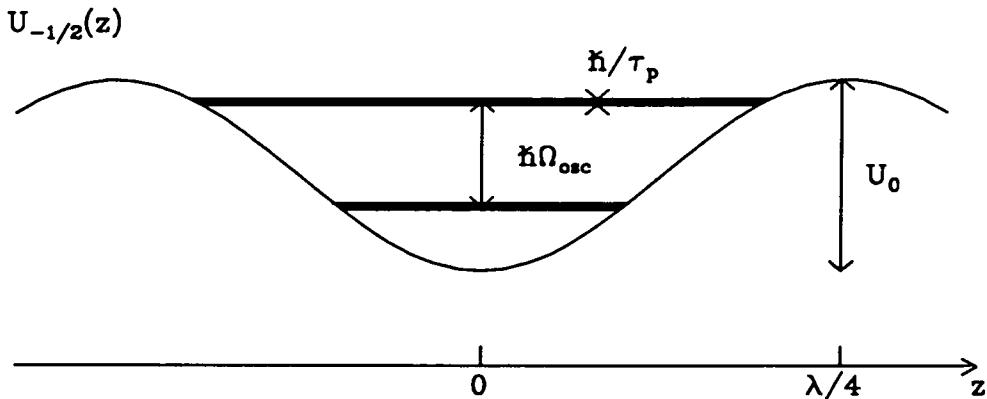


Fig. IV-5 : Pour $j_g = 1/2$, représentation naïve des niveaux d'énergie dans un puits de $U_{-1/2}(z)$ ainsi que leur "largeur" due au départ par pompage optique, dans le régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$. Nous verrons que ces niveaux d'énergie ne sont pas discrets mais sont en fait groupés en bandes d'énergie continues. La largeur de ces bandes, due à un effet purement hamiltonien (passage par effet tunnel d'un puits de $U_{-1/2}(z)$ à un puits voisin de $U_{-1/2}(z)$), devient vite négligeable devant $\frac{\hbar}{\tau_p}$, lorsque $U_0 \gg E_R$.

L'introduction des niveaux d'énergie associés à la quantification du mouvement des atomes dans les puits de potentiel fait penser aux situations rencontrées dans le refroidissement d'ions piégés [8,21,24]. Il est possible d'ailleurs de pousser l'analogie très loin, en proposant des schémas de refroidissement de type Sisyphe pour les ions [74]. En général, les puits de potentiel utilisés dans les expériences sur les ions peuvent être considérés, avec une approximation suffisante, comme harmoniques. Dans le cas des atomes neutres, par contre, nous sommes confronté à des situations plus complexes, et il convient d'apporter quelques corrections à l'image naïve de la fig. IV-5.

L'étude de la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ nous permet de présenter, de façon simple, au §b, quelques propriétés du spectre en énergie que l'on ne retrouve pas chez les ions piégés. Les potentiels lumineux $U_{\pm 1/2}(z)$ dans lesquels évoluent les atomes sont

périodiques : les spectres des hamiltoniens correspondants sont constitués en fait d'une alternance de bandes d'énergie permises et interdites. Comme une particule oscillant au fond d'un puits de $U_{-1/2}(z)$ a une amplitude très faible de passer par effet tunnel dans un autre puits de $U_{-1/2}(z)$, dès que la profondeur de puits U_0 dépasse quelques énergies de recul, on s'attend à ce que les bandes d'énergie profondes soient très étroites, même par rapport à $\frac{\hbar}{\tau_p}$. L'écart entre les bandes est donc bien de l'ordre de $\hbar\Omega_{\text{osc}}$, ce qui convient pour effectuer l'approximation séculaire. Cependant, nous avons vu qualitativement au I§1c qu'il est important de bien décrire aussi le mouvement des atomes au-dessus des puits de potentiel, si l'on veut connaître le seuil du refroidissement. Or, on s'attend à ce que les bandes se touchent presque donc que le spectre soit pratiquement continu pour des énergies supérieures aux collines des potentiels $U_{\pm 1/2}(z)$. Ceci semble remettre en question la possibilité d'effectuer toute approximation séculaire sur les équations quantiques. Nous verrons heureusement qu'il n'en est rien au §c, et nous donnerons la forme réduite des équations quantiques stationnaires à la limite $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$. Ces équations portent seulement sur les populations des niveaux d'énergie, dont elles expriment le couplage mutuel à l'aide de taux de transition. Nous identifions au §d, sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, l'effet sur la dynamique atomique externe des divers taux, certains étant associés au refroidissement par effet Sisyphe (transitions avec changement de sous-niveau interne fondamental), les autres n'introduisant que du chauffage (transitions à l'issue desquelles le sous-niveau interne fondamental n'est pas changé). Les expressions approchées obtenues pour les taux donnent accès, au §e, à une estimation des valeurs relatives des populations des bandes d'énergie les plus profondes. Quant aux distributions en impulsion et position, déduites de la résolution numérique des équations quantiques séculaires, elles font l'objet du §f, toujours dans le cas $j_g = 1/2$.

Le refroidissement des atomes neutres présente une autre différence avec celui des ions piégés. Dans la situation qui nous intéresse, ce sont les faisceaux laser de refroidissement eux-mêmes, et non pas un autre champ électrique, qui créent le potentiel. Ainsi, les ions réagissent au champ extérieur indépendamment de leur état interne, alors que les déplacements lumineux subis par les atomes en dépendent manifestement. Lorsque les états internes de déplacement lumineux bien définis dépendent de la position, le modèle simple de l'effet Sisyphe incarné par la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ ne suffit pas. Une telle difficulté surgit dans l'étude de la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$. Nous consacrons ainsi tout le §g à la réduction des équations quantiques dans le régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$ sur cette transition, et ceci pour prouver la généralité de notre approche.

b) Etude de la partie réactive sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$

(i) Expression du hamiltonien

La réduction des équations quantiques dans l'état fondamental en régime de faible saturation ($s_0 \ll 1$) et de faible vitesse atomique ($k|v| \ll \Gamma$) a été effectuée dans le cas général au II§1c. Les équations quantiques portent alors sur la matrice densité atomique σ , interne et externe mais restreinte dans l'état fondamental. Rappelons que l'expression correspondante (II1c - 22) pour $\frac{d\sigma}{dt}$ comporte un commutateur $\frac{1}{i\hbar}[\mathcal{H}, \sigma]$, qui contient la partie réactive du couplage atome-rayonnement dans l'état fondamental et fait intervenir le hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2M} + \frac{\hbar\delta s_0}{2} \mathcal{V}^{(-)}(Z) \mathcal{V}^{(+)}(Z) \quad (\text{IV3b - 1})$$

$\mathcal{V}^{(+)}(Z)$ et $\mathcal{V}^{(-)}(Z)$ désignent la partie ascendante et descendante du couplage réduit entre l'atome et les modes laser (cf. (II1c - 17)). Pour le choix de phase des ondes polarisées selon Ox et Oy du I§1, qui est aussi celui de l'appendice A_{IV}, nous obtenons l'expression (B_{IV} - 2) de $\mathcal{V}^{(+)}(Z)$, dont nous déduisons la valeur explicite du hamiltonien \mathcal{H} sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$:

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2M} + U(Z) \quad (\text{IV3b - 2a})$$

$$U(Z) = \sum_{m=\pm 1/2} U_m(Z) |g\ m\rangle_z \langle g\ m| \quad (\text{IV3b - 2b})$$

où les potentiels $U_m(z)$ ne sont autres que les déplacements lumineux des sous-niveaux $|g\ m\rangle_z$, dont nous avons déjà vu toute l'importance au I§1 :

$$U_{-1/2}(z) = U_0 \sin^2(kz) - \frac{3}{2}U_0 \quad (\text{IV3b - 3a})$$

$$U_{+1/2}(z) = U_0 \cos^2(kz) - \frac{3}{2}U_0 \quad (\text{IV3b - 3b})$$

La profondeur de ces trous est notée U_0 et vaut :

$$U_0 = -\frac{2}{3}\hbar\delta s_0 \quad (\text{IV3b - 4})$$

Il s'agit maintenant de caractériser l'importance de la partie hamiltonienne des équations de Bloch, ce qui permettra de la comparer à leur partie dissipative. Cette caractérisation est effectuée à l'aide des pulsations de Bohr associées au commutateur $\frac{1}{i\hbar}[\mathcal{H}, \sigma]$, que l'on déduit de la diagonalisation de \mathcal{H} , ce à quoi nous nous consacrons maintenant.

(ii) Utilisation de quelques symétries de \mathcal{H}

Une première propriété importante du hamiltonien \mathcal{H} est que le potentiel $U(z)$ qu'il contient est périodique spatialement, de plus petite période $\frac{\lambda}{2}$. Cette propriété vient du fait que $U(z)$ dépend quadratiquement du champ électrique laser, qui se reproduit spatialement, identique à lui-même au signe près, tous les $\frac{\lambda}{2}$. Cette périodicité du potentiel $U(z)$ nous incite à utiliser le théorème de Bloch [52,75], qui autorise à chercher les états propres de \mathcal{H} sous la forme :

$$|\psi\rangle_q = e^{iqZ} |\varphi\rangle_q \quad (\text{IV3b - 5})$$

où l'indice de Bloch q est réel et où le vecteur d'état $|\varphi\rangle_q$ est périodique spatialement de période $\frac{\lambda}{2}$. L'état $|\varphi\rangle_q$ est ainsi défini par :

$$\left[\frac{(P + \hbar q)^2}{2M} + U(Z) \right] |\varphi\rangle_q = E_q |\varphi\rangle_q \quad (\text{IV3b - 6a})$$

$$\forall z \quad \langle z + \frac{\lambda}{2} | \varphi \rangle_q = \langle z | \varphi \rangle_q \quad (\text{IV3b - 6b})$$

Tout l'intérêt de cette décomposition est qu'à q fixé, les énergies E_q solution de (IV3b - 6) forment, à cause de la condition (IV3b - 6b), un spectre discret, que l'on peut indexer par des entiers. Pour effectuer au mieux cette indexation à q fixé, numérotions les énergies propres par (n, r) , où n est un entier positif et r désigne des nombres quantiques associés à des symétries du hamiltonien \mathcal{H} autres que la périodicité spatiale de $\frac{\lambda}{2}$ (cf. l'appendice BIV). Il n'y a alors, à q et r fixés, plus de dégénérescence en énergie, sauf accidentelle. On aboutit finalement à la structure suivante pour le spectre complet de \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}|n, q, r\rangle = E_{n,q,r} |n, q, r\rangle \quad (\text{IV3b - 7})$$

Dans la suite, compte tenu de la périodicité spatiale de $\frac{\lambda}{2}$ du hamiltonien, nous choisirons l'indice de Bloch q à valeurs dans l'intervalle :

$$-k < q \leq k \quad (\text{IV3b - 8})$$

Cet intervalle est appelé première zone de Brillouin en physique de l'état solide.

Le hamiltonien (IV3b - 2) possède une autre propriété, particulière cette fois à la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$: il conserve le moment cinétique interne selon Oz . Ceci est dû au fait que la lumière laser ne peut, dans l'état fondamental, coupler que des états dont la différence des nombres quantiques m est un nombre pair. Cette propriété autorise à chercher des états propres de \mathcal{H} de moment cinétique interne m bien défini, soit $m = +1/2$ ($r = +$), soit $m = -1/2$ ($r = -$). On se ramène ainsi à l'étude quantique du mouvement d'une particule sans structure interne évoluant dans un potentiel $U_m(z)$. Il suffit alors de diagonaliser le problème pour $m = -1/2$ seulement, les états propres pour l'autre potentiel $U_{+1/2}(z)$ s'en déduisant par translation spatiale de $\frac{\lambda}{4}$ et ayant bien sûr la même énergie :

$$\langle z|n, q, -\rangle = |g - 1/2\rangle \otimes \langle z|n, q\rangle \quad (\text{IV3b - 9a})$$

$$\langle z|n, q, +\rangle = |g + 1/2\rangle \otimes \langle z - \frac{\lambda}{4}|n, q\rangle \quad (\text{IV3b - 9b})$$

$$E_{n,q,+} = E_{n,q,-} = E_{n,q} \quad (\text{IV3b - 9c})$$

On a noté $|n, q\rangle$ l'état externe de $|n, q, -\rangle$, et $E_{n,q}$ son énergie. On se ramène ainsi, en considérant seulement $m = -1/2$, à la résolution de :

$$H = \frac{P^2}{2M} + U_0 \sin^2(kZ) - \frac{3}{2}U_0 \quad (\text{IV3b - 10a})$$

$$H|n, q\rangle = E_{n,q}|n, q\rangle \quad (\text{IV3b - 10b})$$

$$\langle z - \frac{\lambda}{2}|n, q\rangle = e^{-iq\frac{\lambda}{2}} \langle z|n, q\rangle \quad (\text{IV3b - 10c})$$

avec des conventions de normalisation exposées dans l'appendice F_{IV}. Notons que le système (IV3b - 10) n'est autre que la célèbre équation de Mathieu, dont on peut montrer que les solutions $|n, q\rangle$ à q fixé ne présentent aucune dégénérescence en énergie, lorsque $U_0 \neq 0$ bien entendu [76]. On peut lui donner une formulation universelle en choisissant comme variable d'espace sans dimension $x = kz$. On vérifie alors que le spectre $E_{n,q}$ exprimé

en énergie de recul et les états propres $|n, q\rangle$ considérés comme fonctions d'onde en x ne dépendent que de $\frac{U_0}{E_R}$.

(iii) Le spectre du hamiltonien calculé numériquement

Donnons maintenant quelques représentations graphiques du spectre de \mathcal{H} , obtenues par résolution numérique de l'équation de Mathieu, selon une procédure exposée dans l'appendice F_{IV}.

Plaçons-nous d'abord à profondeur de puits fixée : $U_0 = 100E_R$, ce qui est une valeur proche de l'optimum sur $\langle p^2 \rangle$. La dépendance en q des premières fonctions $E_{n,q}$ ($n = 0$ à 7) pour ce choix de U_0 est l'objet de la fig. IV-6a. On constate que, pour les faibles valeurs de n ($0 \leq n \leq 4$), la dépendance en q de $E_{n,q}$ est pratiquement négligeable. En particulier, l'amplitude de variation de $E_{n=0,q}$ est de l'ordre de $10^{-6}E_R$. L'interprétation physique de cette faible amplitude de variation est, bien entendu, la petitesse du couplage par effet tunnel entre les minima voisins de $U_{-1/2}(z)$, lorsqu'on considère des états localisés au fond des puits de potentiel. Par contre, pour n plus élevé ($n \geq 6$), $E_{n,q}$ présente une très forte modulation en q . De plus, on observe alors une quasi-dégénérescence au voisinage de $q = 0$ et $q = \pm k$, tandis que les courbes $q \mapsto E_{n,q}$ étaient bien séparées pour $n \leq 5$.

Etudions ensuite la dépendance du spectre en fonction de la profondeur de puits U_0 . Il est commode, pour cela, d'adopter une terminologie habituelle en physique des solides. A U_0 fixé, l'ensemble des valeurs d'énergie du spectre est une réunion d'intervalles I_n ; chaque intervalle I_n regroupe tous les $E_{n,q}$, $-k < q \leq k$ et porte le nom de "bande" d'énergie permise. Les écarts entre les intervalles I_n forment les "bandes" d'énergie interdites. Nous représentons en gris sur la fig. IV-6b, et pour chaque valeur de U_0 , les différentes bandes d'énergie permises $I_n(U_0)$. On voit ainsi très nettement que la frontière en énergie entre le domaine des bandes très étroites et le domaine des bandes larges dépend linéairement de U_0 , comme $-\frac{1}{2}U_0$. Or cette valeur de l'énergie n'est autre que celle séparant les mouvements classiques bornés $\left(-\frac{3}{2}U_0 \leq E \leq -\frac{1}{2}U_0\right)$ des mouvements classiques non bornés $\left(E > -\frac{U_0}{2}\right)$ dans le potentiel $U_{\pm 1/2}(z)$. Aussi appelons-nous dans la suite bandes "liées" celles qui contiennent des énergies inférieures à $-\frac{1}{2}U_0$, et bandes "quasi-libres" toutes les autres.

(iv) Etude analytique des états "liés"

Nous voulons rendre compte ici des propriétés des bandes d'énergie "liées" mises en

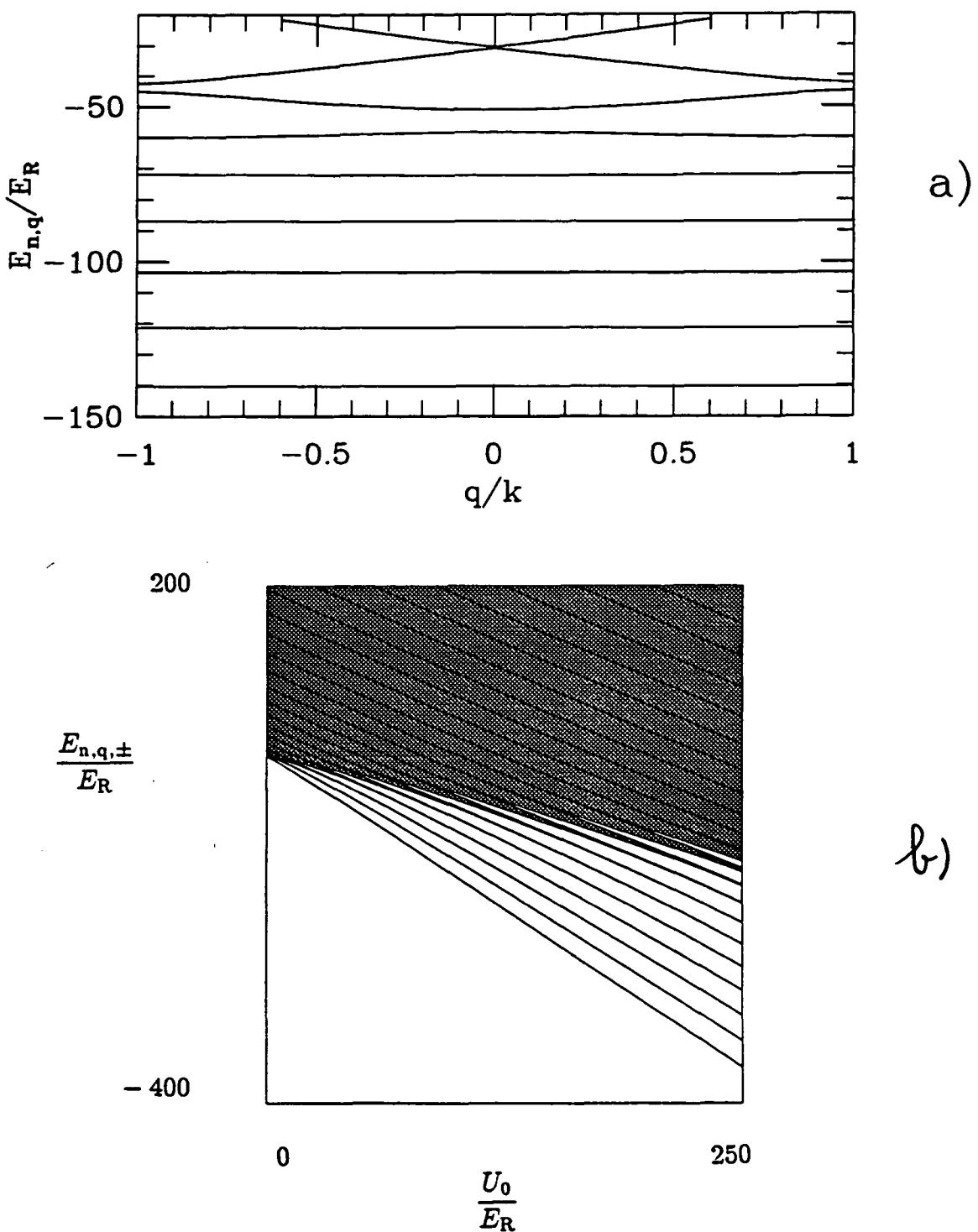


Fig. IV-6 : Valeurs propres $E_{n,q}$ du hamiltonien sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, en unité d'énergie de recul. Sur la fig. a est représentée la dépendance en q pour $U_0 = 100E_R$ et $0 \leq n \leq 7$. La fig. b montre, en fonction de $\frac{U_0}{E_R}$, l'évolution des premières bandes d'énergie permises (zones grisées).

évidence numériquement au paragraphe (iii) précédent. Il est pour cela utile de partir d'un résultat général, bien connu en physique de l'état solide, et dont nous rappellerons ensuite l'interprétation intuitive. Ce résultat affirme la possibilité d'exprimer, sans approximation, tous les états d'indice de Bloch q ($-k < q \leq k$) d'une même bande d'énergie, d'indice n , à l'aide d'une seule fonction d'onde Φ_n , appelée fonction de Wannier. On dispose ainsi de la relation suivante :

$$\langle z|n, q\rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{l=-N}^N e^{iql\frac{\lambda}{2}} \Phi_n(z - l\frac{\lambda}{2}) \quad (\text{IV3b - 11})$$

La démonstration, exposée en détail dans [75], utilise essentiellement le fait qu'à z fixé, $\langle z|n, q\rangle$ puisse être considérée comme une fonction périodique de q , de période $2k$, dont (IV3b - 11) n'est autre que le développement en série de Fourier. Il est facile d'inverser (IV3b - 11) pour exprimer la fonction de Wannier $\Phi_n(z)$ en fonction des états de Bloch de la bande d'indice n :

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2k} \int_{-k}^k dq \langle z|n, q\rangle \quad (\text{IV3b - 12})$$

Cette relation (IV3b - 12) montre clairement que des fonctions de Wannier Φ_n et $\Phi_{n'}$ d'indices n et n' distincts sont orthogonales, puisqu'elles sont des combinaisons linéaires d'états propres du hamiltonien associés à des bandes d'énergie différentes. Cette relation permet également de prouver qu'une fonction de Wannier $\Phi_n(z)$ est orthogonale à toutes ses translatées $\Phi_n(z - l\frac{\lambda}{2})$ d'un nombre entier l de périodes $\frac{\lambda}{2}$, ce qui est plus remarquable ! On peut donc générer ainsi, à l'aide des fonctions de Wannier, une base orthonormale indexée par les deux entiers (l, n) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \Phi_n^*(z - l\frac{\lambda}{2}) \Phi_{n'}(z - l'\frac{\lambda}{2}) = \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \quad (\text{IV3b - 13})$$

Notons qu'il est possible d'effectuer un choix de phase sur les états propres $|n, q\rangle$ de telle façon que les fonctions de Wannier soient réelles et de parité bien définie :

$$\Phi_n(z) = \Phi_n(z)^* \quad (\text{IV3b - 14a})$$

$$\Phi_n(-z) = (-1)^n \Phi_n(z) \quad (\text{IV3b - 14b})$$

Ceci tient au fait que le potentiel dans (IV3b - 10a) est à la fois réel et pair, ce qui fait que les fonctions d'onde $(\langle z|n, q \rangle)^*$ et $\langle -z|n, q \rangle$ sont des solutions du même problème aux valeurs propres (IV3b - 10) que $\langle z|n, -q \rangle$, avec l'énergie $E_{n,q}$; comme ces fonctions sont de la forme de Bloch (IV3b - 5), avec un indice $(-q)$ au lieu de q , elles sont proportionnelles à $\langle z|n, -q \rangle$. Seule l'alternance de la parité en $(-1)^n$ dans (IV3b - 14b) n'est pas évidente.

Les propriétés énoncées jusqu'à présent sont vérifiées sur toute l'étendue du spectre. Examinons maintenant plus particulièrement le cas des bandes "liées", en nous plaçant à des profondeurs de puits U_0 assez élevées pour que la largeur de ces bandes soit négligeable devant leur séparation en énergie. On voit sur la fig. IV-6b que c'est le cas lorsque $U_0 \geq 25E_R$. L'extrême étroitesse de ces bandes est révélatrice de la faiblesse de l'amplitude de passage par effet tunnel d'un puits à un puits voisin distant de $\frac{\lambda}{2}$, pour une particule oscillant au fond du puits. On a envie alors d'introduire la notion d'"état propre d'un seul puits", localisée à l'intérieur d'un puits. L'intérêt des fonctions de Wannier est qu'elles constituent une réponse idéale à cette question. Pour des puits U_0 assez profonds, on peut vérifier en effet que les états $\Phi_n(z)$, pour les premiers indices n , sont localisés spatialement autour de $z = 0$, sur un domaine petit devant $\frac{\lambda}{2}$. Il est naturel de construire les états de Bloch $|n, q\rangle$ comme une superposition des états localisés $\Phi_n(z - l\frac{\lambda}{2})$, avec des amplitudes dépendant de l de telle façon que $\langle z|n, q \rangle$ prenne un facteur de phase $e^{-iq\frac{\lambda}{2}}$ sous l'effet d'une translation spatiale de $\frac{\lambda}{2}$. Cette superposition est très précisément celle qui est effectuée dans (IV3b - 11). Dans cette image, qui est à la base de l'approximation des liaisons fortes courante en physique de l'état solide, la largeur des bandes est due au fait que $\Phi_n(z)$ n'est pas exactement un état propre du hamiltonien ; une particule initialement dans l'état $\Phi_n(z)$ a une amplitude non nulle de transition vers $\Phi_n(z \pm \frac{\lambda}{2})$ sous l'action de H . Un calcul assez classique montre précisément que :

$$E_{n,q} \simeq E_n + \delta E_n \cos\left(q\frac{\lambda}{2}\right) \quad (\text{IV3b - 15a})$$

$$E_n = \langle \Phi_n | H | \Phi_n \rangle \quad (\text{IV3b - 15b})$$

$$\delta E_n = 2 \langle \Phi_n | HT_{\frac{\lambda}{2}} | \Phi_n \rangle \quad (\text{IV3b - 15c})$$

où $T_{\frac{\lambda}{2}}$ désigne l'opérateur de translation spatiale de $\frac{\lambda}{2}$. Nous profitons ici du fait que l'équation de Mathieu est un sujet abondamment traité (et depuis longtemps !) dans la littérature. Les résultats d'une étude asymptotique des solutions de (IV3b - 10) à la limite

des puits profonds, disponibles par exemple dans [76], permettent d'estimer la mi-largeur de la bande n ; ceci donne, avec nos notations :

$$\delta E_n \simeq \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{U_0}{E_R} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\left(8 \sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \right)^{n+1}}{n!} e^{-2\sqrt{U_0/E_R}} E_R \quad (\text{IV3b - 16})$$

Cette expression conduit rapidement, lorsque $\frac{U_0}{E_R}$ augmente, à des largeurs de bande "liées" extrêmement faibles. On trouve ainsi, selon (IV3b - 16) et pour $U_0 = 100E_R$, une largeur de la bande fondamentale de l'ordre de $10^{-6}E_R$, ce que confirme d'ailleurs le calcul numérique du spectre. Ceci montre que les intervalles sur lesquels les fonctions de Wannier $\Phi_n(z - l\frac{\lambda}{2})$ et $\Phi_n(z - l'\frac{\lambda}{2})$, avec $l \neq l'$, prennent des valeurs non négligeables peuvent, avec une excellente approximation, être considérés comme disjoints. Nous utiliserons cette remarque dans la suite, pour le calcul d'éléments de matrice définissant les taux de transition entre états propres $|n, q, r\rangle$, au §3d. La connaissance des largeurs de bande permet également d'estimer le temps $\frac{\hbar}{\delta E_0}$ de délocalisation spatiale, sous l'action de H , d'un état initialement localisé au fond d'un des puits de $U_{-1/2}(z)$. Notons que ce processus de délocalisation, associé à une évolution purement hamiltonienne (passage par effet tunnel à travers la barrière du potentiel $U_{-1/2}(z)$ séparant deux sites voisins), ne doit pas être confondu avec le phénomène de diffusion spatiale qu'entraînent les cycles de fluorescence (passage d'un puits de potentiel de $U_{-1/2}(z)$ à un puits de potentiel de $U_{1/2}(z)$ décalé de $\frac{\lambda}{4}$, à l'issue d'un changement d'état interne). Le temps associé à la diffusion spatiale, de l'ordre du temps de pompage optique, est en général beaucoup plus court que $\frac{\hbar}{\delta E_0}$.

Nous allons terminer cette étude des bandes "liées" en proposant une expression approchée des fonctions de Wannier au voisinage de $z = 0$. Cette approximation, qui définit ce qu'on appelle le régime de Lamb-Dicke [77] (en particulier dans le refroidissement des ions piégés [24]), exploite le fait que l'extension spatiale des premières fonctions de Wannier $\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots$ devient beaucoup plus faible que $\frac{\lambda}{2\pi}$ lorsque U_0 est assez grand. Dans ce cas, il est légitime de remplacer $U_{-1/2}(z)$ par son approximation harmonique :

$$U_{-1/2}(z) \underset{k|z| \ll 1}{\simeq} -\frac{3}{2}U_0 + k^2 U_0 z^2 \quad (\text{IV3b - 17})$$

La fonction de Wannier $\Phi_n(z)$ ressemble alors à l'état propre d'indice n , $|n\rangle_{OH}$, de l'oscillateur harmonique associé à (IV3b - 17), du moins pour $k|z| \ll 1$. Les énergies des

premières bandes des puits profonds sont ainsi bien approchées par les niveaux d'énergie de l'oscillateur :

$$E_n \simeq -\frac{3}{2}U_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\Omega_{\text{osc}} \quad (\text{IV3b} - 18\text{a})$$

$$\hbar\Omega_{\text{osc}} = 2\sqrt{U_0 E_R} \quad (\text{IV3b} - 18\text{b})$$

où Ω_{osc} désigne, comme auparavant, la pulsation d'oscillation du mouvement harmonique classique. On vérifie effectivement, sur la fig. IV-6b, que les premières bandes "liées" sont pratiquement équidistantes, lorsque U_0 est assez grand. Nous rappelons, pour finir, l'expression de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique :

$$\langle z|0\rangle_{OH} = \frac{\sqrt{k}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{U_0}{E_R}\right)^{1/8} e^{-\frac{1}{2}(kz)^2} \sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \quad (\text{IV3b} - 19)$$

On en déduit son extension spatiale Δz , donc le petit paramètre de développement dans le régime de Lamb-Dicke :

$$k\Delta z \sim \left(\frac{E_R}{U_0}\right)^{\frac{1}{4}} \ll 1 \quad (\text{IV3b} - 20)$$

Cette condition est certes bien plus contraignante que celle qui permet de négliger le recouvrement des fonctions de Wannier prises en des sites voisins, puisque cette dernière bénéficie d'une décroissance exponentielle (cf. (IV3b - 16)). L'approximation harmonique peut néanmoins être considérée comme raisonnable pour $U_0 \geq 100E_R$, dans la mesure où le développement correspondant va jusqu'à l'ordre deux inclus en $k\Delta z$.

(v) Etude analytique des états "quasi-libres"

Pour achever notre étude analytique du spectre de H , passons à l'étude des bandes "quasi-libres". Afin d'obtenir des résultats simples, limitons-nous à l'examen des bandes dont les énergies $E_{n,q}$ sont supérieures aux maxima (soit $-\frac{1}{2}U_0$) des potentiels $U_{\pm 1/2}(z)$ de plusieurs profondeurs de puits. On pourrait être tenté alors d'assimiler les états propres de H correspondants à ceux d'une particule libre. Cependant, ceci est impossible : l'écart des fonctions $\langle z|n, q\rangle$ aux ondes planes, même s'il est petit, joue un rôle essentiel pour décrire le refroidissement Sisyphe, car il traduit la modulation de la vitesse de la particule en mouvement dans le potentiel $U_{\pm 1/2}(z)$. On obtient une description plus satisfaisante des états

propres $|n, q\rangle$ dans le cadre de l'approximation WKB [80,81]. Rappelons que les fonctions d'onde WKB d'énergie $E_{n,q}$ dans le potentiel $U_{-1/2}(z)$ introduites habituellement sont le produit d'une amplitude lentement variable, de la forme $[E_{n,q} - U_{-1/2}(z)]^{-\frac{1}{4}}$, et d'une combinaison linéaire d'ondes progressives $e^{\pm iS(z)/\hbar}$, où la phase $S_{n,q}(z)$ vaut :

$$S_{n,q}(z) = \int^z dz' \sqrt{2M(E_{n,q} - U_{-1/2}(z'))} \quad (\text{IV3b - 21})$$

Nous nous limitons ici aux ondes progressives, et nous exploitons l'hypothèse sur les fortes valeurs de $E_{n,q}$ en négligeant la dépendance en position de l'amplitude lentement variable et en simplifiant celle de la phase $S_{n,q}(z)$. On retient ainsi :

$$\langle z|n, q\rangle \simeq A e^{iS_{n,q}(z)/\hbar} \quad (\text{IV3b - 22a})$$

$$S_{n,q}(z) \simeq \hbar \left(\frac{E_{n,q} + U_0}{E_R} \right)^{\frac{1}{2}} \left[kz + \frac{U_0}{8(U_0 + E_{n,q})} \sin(2kz) \right] \quad (\text{IV3b - 22b})$$

La condition de quantification associée à ce traitement par WKB est plus facile à obtenir que dans le cas d'une particule liée, dans la mesure où elle n'est pas confrontée au problème de la réflexion de l'onde incidente par le potentiel. Elle exprime simplement le fait que $|n, q\rangle$ est de la forme de Bloch (IV3b - 5), c'est-à-dire que la phase accumulée par $e^{-iqz}\langle z|n, q\rangle$ sur une période $\frac{\lambda}{2}$ est un multiple entier de 2π :

$$\frac{1}{\hbar} \left[S_{n,q} \left(\frac{\lambda}{2} \right) - S_{n,q}(0) \right] = q \frac{\lambda}{2} + 2l\pi \quad \text{avec } l \text{ entier} \quad (\text{IV3b - 23})$$

La valeur des énergies correspondant à (IV3b - 23) est déduite alors de (IV3b - 22b) :

$$E_{n,q} \simeq \frac{\hbar^2(q + 2lk)^2}{2M} - U_0 \quad (\text{IV3b - 24a})$$

$$E_{n,q} \simeq \frac{\hbar^2(q + 2lk)^2}{2M} + \langle U_{-1/2}(z) \rangle \quad (\text{IV3b - 24b})$$

L'expression (IV3b - 24b) est assez parlante, puisqu'elle fait intervenir la moyenne spatiale du potentiel $U_{\pm 1/2}(z)$. Pour établir le lien entre l'entier l de (IV3b - 23) et l'indice de bande

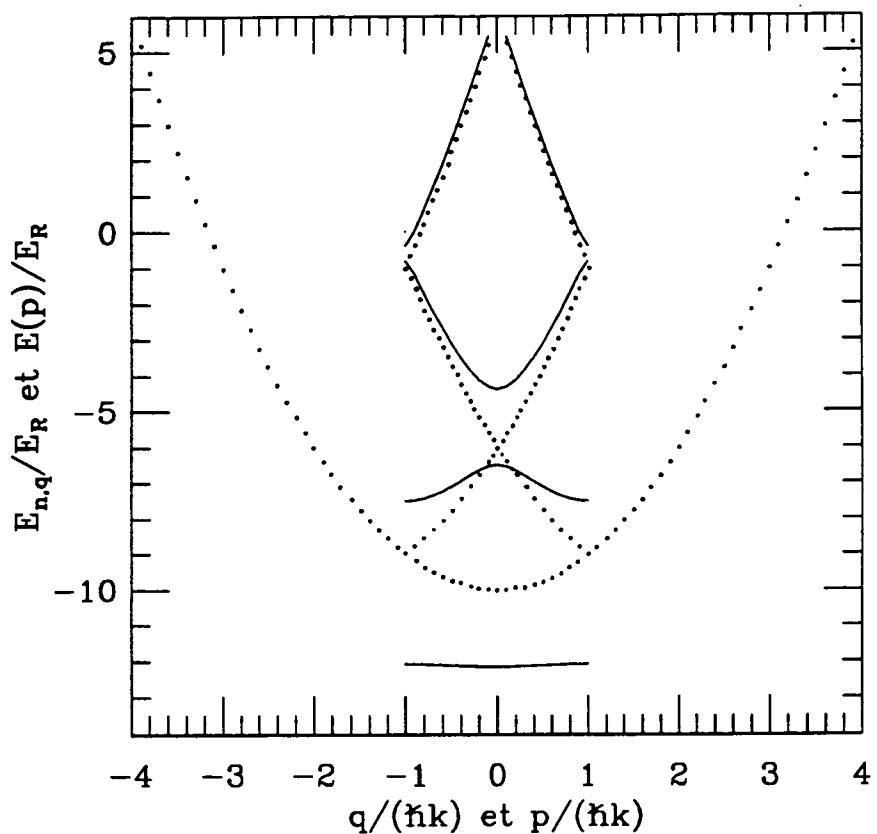


Fig. IV-7a : Pour $U_0 = 10E_R$, premières bandes d'énergie en fonction de l'indice de Bloch q . En trait plein sont indiqués les résultats du calcul numérique. La relation approchée (IV3b - 24) est représentée en pointillés, avant et après repliement dans la première zone de Brillouin.

	$-k < q < 0$	$0 < q < k$
n pair	$-\frac{1}{2}n$	$\frac{1}{2}n$
n impair	$\frac{1}{2}(n+1)$	$-\frac{1}{2}(n+1)$

Fig. IV-7b : A partir de la fig. a, valeur de l'entier l dans la condition de quantification (IV3a - 23) en fonction de l'indice de bande n et de l'indice de Bloch q . L'exclusion des valeurs $q = 0$ et $q = k$ est justifiée dans le texte.

n , nous étudions le cas $U_0 \ll E_R$, qui tend vers celui bien connu d'une particule libre. Nous comparons sur la fig. IV-7a la relation de dispersion $E_{n,q}$ calculée numériquement à la loi approchée (IV3b - 24) ; la loi approchée est obtenue graphiquement en repliant, dans la première zone de Brillouin $] -k, k]$, la parabole $E = \frac{p^2}{2M} - U_0$, ce qui donne en fig. IV-7b la correspondance $l \leftrightarrow n$ attendue.

Le calcul sommaire que nous venons de présenter, à l'aide de l'analyse WKB, prévoit des dégénérescences en énergie pour les valeurs particulières $q = 0$ et $q = k$, ce qui donne comme image du spectre un continuum sans hiatus en énergie, les bandes d'indice n et $n + 1$ se rencontrant en $q = k$ ou en $q = 0$ selon que n est pair ou impair. Cette dégénérescence à $U_0 \neq 0$ est infirmée aussi bien par la propriété fondamentale de l'équation de Mathieu mentionnée après (IV3b - 10), que par les résultats numériques de la fig. IV-7a : les bandes d'énergie permises sont séparées par des bandes d'énergie interdites, de largeur devenant très faible devant E_R mais jamais rigoureusement nulle, lorsque n augmente. Notons de plus que les états propres $|n, 0\rangle$ et $|n, k\rangle$ sont de parité bien définie $(-1)^n$, en vertu de (IV3b - 11) et (IV3b - 14b) ; les états d'indice de Bloch $q = 0$ (ou $q = k$) situés de part et d'autre d'une même bande d'énergie interdite (donc quasi-dégénérés) sont de parités différentes. Cette remarque va jouer par la suite un rôle important dans la possibilité d'effectuer l'approximation séculaire sur les équations quantiques dans le domaine des bandes "quasi-libres".

c) Présentation de l'approximation séculaire sur $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$

Nous avons étudié, au §3b précédent, les propriétés de la partie réactive des équations de Bloch entièrement quantiques ramenées dans l'état fondamental, pour la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$. Nous voulons maintenant identifier le régime dans lequel cette partie réactive l'emporte sur la partie dissipative des équations de Bloch. Il est alors possible, dans ce régime dit "séculaire", de traiter perturbativement les processus de relaxation. Le calcul perturbatif correspondant a déjà été mené en détail, au III§4b, dans le cas de la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$, et l'on sait qu'il conduit à réduire les équations quantiques à des équations de taux entre les populations des niveaux d'énergie de \mathcal{H} . Nous passerons donc ici assez rapidement sur ces calculs, et nous renvoyons le lecteur à l'appendice F_{IV} pour quelques compléments sur la mise en œuvre pratique de l'approximation séculaire.

(i) Le régime de l'approximation séculaire

Afin de rappeler, dans un premier temps, l'idée essentielle de l'approximation sé-

culaire, il est commode d'écrire ainsi les équations quantiques sur la matrice densité σ restreinte dans l'état fondamental (cf. le II§1c) :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \sigma] + \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\text{relax}} \quad (\text{IV3c - 1a})$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\text{relax}} = \frac{1}{\tau_p} \mathcal{R}[\sigma] \quad (\text{IV3c - 1b})$$

Le hamiltonien \mathcal{H} est défini par (IV3b - 2). Par mise en facteur du taux de pompage typique τ_p^{-1} dans la partie dissipative, nous mettons en évidence dans (IV3c - 1b) des termes de relaxation \mathcal{R} "réduits" dont les coefficients sont d'ordre de grandeur l'unité. L'expression explicite de ces termes réduits figure dans l'appendice D_{IV}. Projetons maintenant la forme stationnaire de (IV3c - 1a) dans la base propre $\{|n, q, r = \pm\rangle\}$ de \mathcal{H} , en ne considérant que les éléments de σ^{st} diagonaux en r , puisque les autres sont rigoureusement nuls par symétrie de σ^{st} . On obtient :

$$0 = \frac{1}{i\hbar} (E_{n,q} - E_{n',q'}) \langle n, q, r | \sigma^{\text{st}} | n', q', r \rangle + \frac{1}{\tau_p} \langle n, q, r | \mathcal{R}[\sigma^{\text{st}}] | n', q', r \rangle \quad (\text{IV3c - 2})$$

L'approximation séculaire dans l'état stationnaire consiste alors simplement à négliger les éléments de matrice de σ^{st} entre deux états dont la différence des énergies ΔE est grande devant $\frac{\hbar}{\tau_p}$. On constate en effet, à l'aide de (IV3c - 2), qu'ils sont $\frac{\hbar}{\Delta E \cdot \tau_p}$ fois plus petits que les éléments diagonaux de σ^{st} intervenant dans le terme de relaxation réduit. Il nous reste à examiner l'importance des différences d'énergie $E_{n,q} - E_{n',q'}$ à l'aide de l'étude du spectre effectuée au §3b précédent. Nous allons voir que les différences d'énergie à prendre en compte pour l'approximation séculaire sont d'ordre $\hbar\Omega_{\text{osc}}$ ou plus, lorsqu'on utilise les propriétés de symétrie de σ^{st} .

On constate immédiatement que l'approximation séculaire ne s'applique pas entre deux éléments $|n, q\rangle$ et $|n, q'\rangle$ d'une même bande d'énergie "liée". La différence ΔE correspondante est en effet inférieure à la largeur de la bande ; le temps $\frac{\hbar}{\Delta E}$ associé est donc, nous l'avons vu, beaucoup plus long que le temps de pompage optique τ_p . Heureusement, il est possible de prouver que les éléments $\langle n, q, r | \sigma^{\text{st}} | n, q', r \rangle$ sont en fait rigoureusement nuls lorsque $q \neq q'[2k]$. L'idée est que les équations de Bloch généralisées (IV3c - 1) sont

invariantes par action de $T_{\frac{\lambda}{2}}$, translation spatiale de $\frac{\lambda}{2}$: si $\sigma(t)$ est solution de ces équations, $T_{\frac{\lambda}{2}}\sigma(t)T_{\frac{\lambda}{2}}^\dagger$ est donc encore une solution. L'unicité de l'état stationnaire conduit alors nécessairement à :

$$\sigma^{\text{st}} = T_{\frac{\lambda}{2}} \sigma^{\text{st}} T_{\frac{\lambda}{2}}^\dagger \quad (\text{IV3c - 3})$$

Or, les états propres $|n, q, r\rangle$ se transforment de façon bien précise sous l'action de $T_{\frac{\lambda}{2}}$, cette propriété étant d'ailleurs à la base du théorème de Bloch. On obtient, à partir de (IV3b - 5) :

$$T_{\frac{\lambda}{2}}|n, q, r\rangle = \left(T_{\frac{\lambda}{2}} e^{iqZ} T_{\frac{\lambda}{2}}^\dagger \right) T_{\frac{\lambda}{2}} |\varphi\rangle_q \quad (\text{IV3c - 4a})$$

$$= e^{-iq\frac{\lambda}{2}} |n, q, r\rangle \quad (\text{IV3c - 4b})$$

L'égalité (IV3c - 3) prend ainsi la forme simple :

$$\langle n, q, r | \sigma^{\text{st}} | n', q', r \rangle = e^{-i(q-q')\frac{\lambda}{2}} \langle n, q, r | \sigma^{\text{st}} | n', q', r \rangle \quad (\text{IV3c - 5})$$

Il est facile de vérifier que $-2\pi < (q - q')\frac{\lambda}{2} < 2\pi$, lorsque $-k < q, q' \leq k$. Le facteur de phase au second membre de (IV3c - 5) est donc différent de 1 lorsque $q \neq q'[2k]$, ce qui conduit à l'annulation souhaitée :^(*)

$$\langle n, q, r | \sigma^{\text{st}} | n', q', r \rangle = 0 \quad \text{si} \quad q \neq q'[2k] \quad (\text{IV3c - 6})$$

et ce qui permet de formuler la condition d'approximation séculaire de façon mieux adaptée à notre problème : on peut négliger la cohérence de $|n, q, r\rangle$ avec tout autre état propre si :

$$\Delta E_{\text{inf}}(n, q) \gg \frac{\hbar}{\tau_p} \quad (\text{IV3c - 7a})$$

$$\Delta E_{\text{inf}}(n, q) = \inf_{n' \neq n'} |E_{n, q} - E_{n', q}| \quad (\text{IV3c - 7b})$$

(*) On remarquera que cette annulation correspond simplement à celles des éléments de matrice $\langle p | \sigma^{\text{st}} | p' \rangle$, où $|p\rangle$ et $|p'\rangle$ ne sont pas couplés par le laser (éléments interfamille, au sens du IV§1).

La contribution à ΔE_{inf} des bandes liées pour des profondeurs de puits U_0 assez grandes est ensuite déduite directement de l'approximation harmonique (IV3b - 18a) :

$$\Delta E_{\text{inf}}^{\text{liées}}(n, q) \simeq \hbar \Omega_{\text{osc}} \quad (\text{IV3c} - 8)$$

La condition (IV3c - 7b) d'approximation séculaire restreinte aux éléments de matrice entre des états de ces bandes liées n'est donc autre que $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$. On retrouve ainsi quantiquement la définition semi-classique du régime oscillant et l'on justifie l'image naïve de la fig. IV-5.

Examinons maintenant la possibilité d'effectuer l'approximation séculaire sur les éléments de matrice de σ^{st} entre des états de bandes "quasi-libres". Notons bien que cet examen n'a rien d'académique : même si l'on s'intéresse aux situations telles que la population totale des atomes "hors" des puits de potentiel soit très faible, il est absolument nécessaire de décrire correctement le devenir de ces atomes, si l'on veut obtenir la valeur exacte de l'impulsion quadratique moyenne Δp dans l'état stationnaire. A l'aide de la forme approchée (IV3b - 24) du spectre "quasi-libre" et du tableau de la fig. IV-7b, nous obtenons pour des indices n assez grands :

$$\Delta E_{\text{inf}}^{\text{quasi-libres}}(n, q) \underset{E_{n,q} \gg U_0}{\simeq} 2 \sqrt{\frac{E_{n,q} + U_0}{U_0}} (\hbar \Omega_{\text{osc}}) \inf \left(\frac{|q|}{k}, 1 - \frac{|q|}{k} \right) \quad (\text{IV3c} - 9)$$

La seule condition $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$ suffit donc largement à justifier l'approximation séculaire parmi les états quasi-libres, sauf lorsque q est proche de 0 ou k . On a vu en effet, au (v) du §b précédent, qu'il apparaît une quasi-dégénérescence en énergie pour ces valeurs de q . Il est ainsi impossible d'invoquer l'approximation séculaire pour négliger les cohérences $\langle n, k, r | \sigma^{\text{st}} | n+1, k, r \rangle$ (n pair) ou $\langle n, 0, r | \sigma^{\text{st}} | n+1, 0, r \rangle$ (n impair). Heureusement, nous sommes sauvé une nouvelle fois par les propriétés de symétrie des équations de Bloch. Elles sont invariantes par parité ($z \rightarrow -z$) ce qui impose à l'unique état stationnaire :

$$\langle z | \sigma^{\text{st}} | z \rangle = \langle -z | \sigma^{\text{st}} | -z \rangle \quad (\text{IV3c} - 10)$$

Or les états $|n, 0 \text{ ou } k\rangle$ quasi-dégénérés sont de parités opposées, comme nous l'avions noté au §3b(v), ce qui prouve que les éléments de matrice de σ^{st} sont rigoureusement nuls entre eux. Des arguments de continuité conduisent à penser que les éléments $\langle n, q, r | \sigma^{\text{st}} | n+1, q, r \rangle$

restent faibles au voisinage de $q = 0, \pm k$; on est donc amené à retenir comme condition nécessaire et suffisante d'approximation séculaire sur l'ensemble du spectre en énergie :

$$\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1 \quad (\text{IV3c - 11})$$

On aboutit ainsi à la condition de limite universaliste (IV1 - 2b) vérifiée numériquement au §1.

(ii) Réduction des équations quantiques stationnaires pour $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$

Supposons donc maintenant la condition (IV3c - 11) satisfaite et déterminons la forme réduite correspondante des équations quantiques, en développant la matrice densité stationnaire en puissances de $(\Omega_{\text{osc}} \tau_p)^{-1}$:

$$\sigma^{\text{st}} = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} + \dots \quad (\text{IV3c - 12})$$

A l'ordre 0, les termes de relaxation dans (IV3c - 1a) sont négligeables, ce qui donne :

$$0 = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \sigma^{(0)}] \quad (\text{IV3c - 13})$$

La solution générale de (IV3c - 13), compte tenu des propriétés de symétrie de σ^{st} donc de $\sigma^{(0)}$, ne comporte que des populations dans la base propre de \mathcal{H} :

$$\sigma^{(0)} = \sum_{r=\pm} \sum_n \int_{-k}^k dq \Pi_{n,q,r} |n, q, r\rangle \langle n, q, r| \quad (\text{IV3c - 14})$$

A l'ordre 1 en $(\Omega_{\text{osc}} \tau_p)^{-1}$, on voit apparaître la matrice a priori non diagonale $\sigma^{(1)}$:

$$0 = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \sigma^{(1)}] + \left(\frac{d\sigma^{(0)}}{dt} \right)_{\text{relax}} \quad (\text{IV3c - 15})$$

dont on se débarrasse en n'envisageant les éléments de matrice de (IV3c - 15) qu'entre deux mêmes états $|n, q, r\rangle$:

$$0 = \langle n, q, r | \left(\frac{d\sigma^{(0)}}{dt} \right)_{\text{relax}} |n, q, r\rangle \quad (\text{IV3c - 16})$$

Comme les termes de relaxation ont essentiellement la même structure que pour la transition $\sigma_+ - \sigma_-$, l'évaluation explicite de (IV3c - 16) s'effectue comme au III§4. On sait en particulier qu'on aboutit nécessairement à des équations de taux sur les populations $\Pi_{n,q,r}$, qui déterminent de façon unique ces populations (compte tenu d'une condition de normalisation) :

$$0 = -\gamma_{n,q,r}\Pi_{n,q,r} + \sum_{r'=\pm} \sum_{n'} \int_{-k}^k dq' \gamma_{n',q',r' \rightarrow n,q,r} \Pi_{n',q',r'} \quad (\text{IV3c - 17a})$$

$$\gamma_{n,q,r} = \sum_{r'=\pm} \sum_{n'} \int_{-k}^k dq' \gamma_{n,q,r \rightarrow n',q',r'} \quad (\text{IV3c - 17b})$$

Il est intéressant de garder une formulation assez générale pour le calcul des taux de transition, ce qui aboutit à des expressions plus suggestives et qui nous seront utiles pour la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ au §g suivant. Ne prenons donc pas en compte tout de suite le fait que nous étudions la situation particulière de $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ dans la configuration laser $Ox - Oy$. Les considérations très générales du II§1c conduisent à la forme suivante des termes de relaxation de la matrice densité atomique :

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\text{relax}} = -\frac{1}{4} \Gamma_{s_0} \left\{ \mathcal{V}^{(-)}(Z) \mathcal{V}^{(+)}(Z), \sigma \right\} + \frac{1}{2} \Gamma_{s_0} \sum_{q_s=0,\pm 1} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_{q_s}(p_S) W_{q_s}(p_S) \sigma W_{q_s}^\dagger(p_S) \quad (\text{IV3c - 18a})$$

$$W_{q_s}(p_S) = e^{-ip_S Z/\hbar} \left(\Delta_{q_s}^{(+)} \right)^\dagger \mathcal{V}^{(+)}(Z) \quad (\text{IV3c - 18b})$$

ce qui nous permet d'expliciter (IV3c - 16). En utilisant de plus la propriété (IV3c - 14) qu'à $\sigma^{(0)}$ d'être diagonale dans la base propre de \mathcal{H} , on est conduit aux simplifications :

$$\langle n, q, r | \left\{ \mathcal{V}^{(-)} \mathcal{V}^{(+)}, \sigma^{(0)} \right\} | n, q, r \rangle = 2 \langle n, q, r | \mathcal{V}^{(-)} \mathcal{V}^{(+)} | n, q, r \rangle \Pi_{n,q,r} \quad (\text{IV3c - 19a})$$

$$\langle n, q, r | W_{q_s}(p_S) \sigma W_{q_s}^\dagger(p_S) | n, q, r \rangle = \sum_{r'=\pm} \sum_{n'} \int_{-k}^k dq' |\langle n, q, r | W_{q_s}(p_S) | n', q', r' \rangle|^2 \Pi_{n',q',r'} \quad (\text{IV3c - 19b})$$

L'équation (IV3c - 16) conduit donc bien à un système de même structure que (IV3c - 17a), pourvu que l'on affecte la valeur suivante aux coefficients :

$$\gamma_{n,q,r} = \frac{1}{2} \Gamma s_0 \langle n, q, r | \mathcal{V}^{(-)}(Z) \mathcal{V}^{(+)}(Z) | n, q, r \rangle \quad (\text{IV3c - 20a})$$

$$\gamma_{n,q,r \rightarrow n',q',r'} = \frac{1}{2} \Gamma s_0 \sum_{q_s=0,\pm 1} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_{qs}(p_S) |\langle n', q', r' | W_{qs}(p_S) | n, q, r \rangle|^2 \quad (\text{IV3c - 20b})$$

On constate que les éléments de matrice dans (IV3c - 20) ne dépendent en fait que du rapport sans dimension $\frac{U_0}{E_R}$, comme nous l'avons remarqué après l'énoncé du problème aux valeurs propres (IV3b - 10). Le facteur $\frac{1}{2} \Gamma s_0$ commun à tous les coefficients $\gamma_{n,q,r \rightarrow n',q',r'}$ a certes une influence sur le temps de relaxation typique de la matrice densité atomique vers σ^{st} , mais il n'en a aucune sur la valeur de σ^{st} à l'ordre 0 en $(\Omega_{\text{osc}} \tau_p)^{-1}$, puisqu'il peut être simplifié dans (IV3c - 17a). Les populations $\Pi_{n,q,r}$ de $\sigma^{(0)}$ sont donc des fonctions de $\frac{U_0}{E_R}$ seulement : la limite séculaire envisagée ici est donc bien universalisante au sens de (IV1 - 2).

On vérifie de plus que $\gamma_{n,q,r \rightarrow n',q',r'}$ est toujours positif, ce qui est nécessaire si l'on veut l'interpréter comme un taux de transition. L'expression (IV3c - 20b) est d'ailleurs assez parlante. L'élément de matrice $\langle n', q', r' | W_{qs}(p_S) | n, q, r \rangle$ qu'elle fait intervenir est clairement proportionnel à l'amplitude de transition de $|n, q, r\rangle$ vers $|n', q', r'\rangle$ par absorption d'un photon laser et émission d'un photon de fluorescence d'impulsion p_S selon Oz , avec diminution du moment cinétique atomique interne de $q_S \hbar$ selon Oz . En effet, dans l'expression (IV3c - 18b) de $W_{qs}(p_S)$, $\mathcal{V}^{(+)}(Z)$ décrit l'absorption d'un photon laser, avec prise en compte, bien sûr, de la cohérence entre les deux ondes laser Ox et Oy ; l'atome passe dans l'état excité et l'impulsion atomique est changée. L'opérateur dipôle réduit $(\Delta_{qs}^{(+)})^\dagger$ ramène l'atome dans l'état fondamental, ce qui correspond à l'émission d'un photon de fluorescence. L'opérateur $e^{-ip_S Z/\hbar}$, finalement, translate l'impulsion atomique de $-p_S$ selon Oz , où p_S est la composante selon cet axe de la quantité de mouvement du photon émis spontanément. Toutes ces amplitudes de transition sont ajoutées de façon incohérente (addition des modules au carré), par somme sur q_S et sur l'impulsion p_S , et compte tenu du diagramme d'émission spontanée $\mathcal{N}_{qs}(p_S)$; cette addition incohérente n'est pas surprenante puisque les différents états finals du champ quantique sont orthogonaux. L'expression (IV3c - 20b) coïncide donc avec celle que l'on pourrait écrire

intuitivement. L'avantage de notre démarche sur l'approche intuitive est simplement d'indiquer précisément à quelle condition on peut se ramener à des équations seulement de taux. Notons, par ailleurs, que $\gamma_{n,q,r}$ donné par (IV3c - 20a) coïncide avec le taux total de départ de l'état $|n, q, r\rangle$ au sens de (IV3c - 17b). On peut le vérifier directement par sommation de (IV3c - 20b), en faisant apparaître une relation de fermeture dans la base $|n', q', r'\rangle$. C'était de toute façon prévisible, puisque les termes de relaxation de la matrice densité conservent la population totale de σ .

Pour terminer cette discussion générale sur les taux de transition entre états propres de \mathcal{H} , signalons l'existence d'une règle de sélection sur l'impulsion selon Oz du photon émis spontanément pour qu'il y ait couplage par cycle de fluorescence entre $|n, q, r\rangle$ et $|n', q', r'\rangle$:

$$q \pm k = \frac{p_S}{\hbar} + q'[2k] \quad (\text{IV3c - 21})$$

En effet, l'indice de Bloch q de l'état initial $|n, q, r\rangle$ est modifié de $\pm k$ par absorption d'un photon laser, et de $-\frac{p_S}{\hbar}$ par émission d'un photon de fluorescence d'impulsion p_S selon Oz , toutes ces modifications étant comprises à $2k$ près, bien entendu. Cette propriété de l'indice de Bloch, qualifiée de conservation de la quasi-quantité de mouvement en physique de l'état solide [75], conduit à la contrainte (IV3c - 21) annoncée.

d) Analyse des différents taux de transition pour $j_g = 1/2$

Nous présentons ici, pour $j_g = 1/2$, quelques approximations permettant d'évaluer analytiquement les taux de transition d'un niveau quantique $|n, q, r\rangle$ à un autre $|n', q', r'\rangle$. Ceci a d'abord l'avantage d'établir un lien entre notre traitement quantique du refroidissement et les images semi-classiques qui en sont données habituellement. En particulier, on confirme ainsi l'influence des différentes transitions sur le mouvement des atomes : celles qui se font avec changement de sous-niveau interne ($r' = -r$) sont à l'origine de l'effet Sisyphe, les autres ($r' = r$) n'introduisent que du chauffage. Cette connaissance, même approchée, des taux de transition nous permettra ensuite, au §e suivant, d'obtenir simplement une loi de variation des populations stationnaires des bandes "liées" les plus profondes.

(i) Expression explicite des taux

Nous avons donné jusqu'à présent seulement l'expression formelle des taux de transition d'un état propre du hamiltonien \mathcal{H} à l'autre. Passons à une écriture explicite dans le

cas de la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, à l'aide des expressions de la partie dissipative des équations de Bloch entièrement quantiques figurant dans l'appendice D_{IV}. Pour arriver à une forme la plus simple possible des éléments de matrice intervenant dans la définition des taux de transition, on peut utiliser l'invariance du problème sous l'action simultanée du changement de $m = \pm 1/2$ en $-m$ et de la translation spatiale $T_{\frac{\lambda}{4}}$ de $\frac{\lambda}{4}$. Cette action simultanée est représentée par l'opérateur T , qui vaut pour $j_g = 1/2$:

$$T = [|g - 1/2\rangle\langle g 1/2| + |g 1/2\rangle\langle g - 1/2|] \otimes T_{\frac{\lambda}{4}} \quad (\text{IV3d - 1})$$

et dont nous avons montré qu'il est bien une opération de symétrie dans l'appendice B_{IV}. Cette opération de symétrie a déjà été utilisée pour exprimer $|n, q, +\rangle$ en fonction de $|n, q, -\rangle$; elle nous permet de n'avoir à diagonaliser que le hamiltonien décrivant le mouvement d'une particule dans le potentiel $U_{-1/2}(z)$, ce qui constitue le problème aux valeurs propres (IV3b - 10) :

$$|n, q, -\rangle = |g - 1/2\rangle \otimes |n, q\rangle \quad (\text{IV3d - 2a})$$

$$|n, q, +\rangle = T|n, q, -\rangle \quad (\text{IV3d - 2b})$$

L'invariance par T impose également les relations suivantes entre les taux de transition d'un niveau d'énergie à l'autre :

$$\gamma_{n,q,+ \rightarrow n',q',+} = \gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',-} \quad (\text{IV3d - 3a})$$

$$\gamma_{n,q,+ \rightarrow n',q',-} = \gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',+} \quad (\text{IV3d - 3b})$$

ce qui conduit à la propriété pour les populations stationnaires :

$$\Pi_{n,q,+} = \Pi_{n,q,-} \quad (\text{IV3d - 4})$$

et autorise à ne calculer que les taux de départ d'un niveau d'énergie d'état interne $|g - 1/2\rangle_z$. A l'aide des résultats de l'appendice D_{IV}, on est conduit après des calculs sans difficulté aux valeurs suivantes pour ces taux :

$$\gamma_{n,q,-\rightarrow n',q',+} = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_0(p_S) |\langle n, q | \sin(kZ) e^{ipsZ/\hbar} T_{\frac{\lambda}{4}} |n', q' \rangle|^2 \quad (\text{IV3d - 5a})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{n,q,-\rightarrow n',q',-} = & \Gamma s_0 \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \left[\frac{1}{9} \mathcal{N}_+(p_S) |\langle n, q | \sin(kZ) e^{ipsZ/\hbar} |n', q' \rangle|^2 \right. \\ & \left. + \mathcal{N}_-(p_S) |\langle n, q | \cos(kZ) e^{ipsZ/\hbar} |n', q' \rangle|^2 \right] \quad (\text{IV3d - 5b}) \end{aligned}$$

Ces taux sont associés aux deux types de cycles de fluorescence : ceux à l'issue desquels l'état atomique interne n'a pas changé (cas de (IV3d - 5b)), et ceux à l'issue desquels l'atome a changé de sous-niveau interne (cas de (IV3d - 5a)). Nous allons étudier successivement les propriétés de ces deux catégories de taux.

(ii) Les transitions d'un sous-niveau interne fondamental à l'autre

Les taux de transition associés à un changement d'état interne $m \rightarrow -m$ sont à l'origine du refroidissement par effet Sisyphe, selon l'image semi-classique du I§1c. Ils correspondent à des cycles de fluorescence tels que la désexcitation spontanée se fasse sans changement du moment cinétique atomique interne ; on vérifie en effet que seule la distribution d'émission spontanée $\mathcal{N}_0(p_S)$, à l'exclusion de $\mathcal{N}_+(p_S)$ et $\mathcal{N}_-(p_S)$, intervient dans (IV3d - 5a).

Pour accéder d'abord à une vision globale des propriétés de ces taux γ_{--+} , il est utile de calculer le taux total de départ d'un niveau $|n, q, -\rangle$ donné vers tous les sous-niveaux $|n', q', +\rangle$. La sommation des taux $\gamma_{n,q,-\rightarrow n',q',+}$ sur les indices n' et q' peut être effectuée à l'aide de la relation de fermeture :

$$\sum_{n'} \int_{-k}^k dq' |n', q'\rangle \langle n', q'| = I_{\text{ext}} \quad (\text{IV3d - 6})$$

où I_{ext} représente l'identité sur les variables atomiques externes. On arrive ainsi à :

$$\sum_{n'} \int_{-k}^k dq' \gamma_{n,q,-\rightarrow n',q',+} = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \langle n, q | \sin^2(kZ) |n, q \rangle \quad (\text{IV3d - 7})$$

ce qui est particulièrement suggestif puisque ce n'est autre que le taux de pompage semi-classique $\gamma_{-1/2 \rightarrow +1/2}(z)$ moyenné selon la densité spatiale déduite de la fonction d'onde $\langle z | n, q \rangle$.

Il est possible, en fait, de caractériser plus précisément les taux $\gamma_{- \rightarrow +}$, en utilisant une expression approchée pour les états propres $|n, q\rangle$, à l'aide de la méthode WKB [80,81]. Nous renvoyons à l'appendice E_{IV} pour le détail de calculs par ailleurs assez classiques, et nous donnons simplement les résultats. On obtient d'abord une expression suggestive pour le taux de départ de $|n, q, -\rangle$ vers l'ensemble des $|n', q', +\rangle$, en calculant l'élément de matrice de $\sin^2(kZ)$ dans l'état $|n, q, -\rangle$:

$$\sum_{n'} \int_{-k}^k dq' \gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',+} \simeq \frac{1}{T(E_{n,q})} \oint \frac{dz}{v_-(z)} \frac{2}{9} \Gamma s_0 \sin^2(kz) \quad (\text{IV3d - 8a})$$

$$T(E_{n,q}) = \oint \frac{dz}{v_-(z)} \quad (\text{IV3d - 8b})$$

Nous avons introduit la période temporelle $T(E_{n,q})$ et la vitesse $v_-(z)$ au point z pour le mouvement classique d'énergie $E_{n,q}$ dans le potentiel $U_{-1/2}(z)$. On retrouve ainsi exactement, dans (IV3d - 8a), la moyenne du taux de pompage du sous-niveau $|g - 1/2\rangle$ vers le sous-niveau $|g 1/2\rangle$ sur une période d'oscillation, moyenne qui était intervenue dans la forme limite (i.e. pour $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$) du traitement semi-classique (voir le §2b). L'approche WKB permet également d'accéder au taux de transition vers un niveau $|n', q', +\rangle$ donné :

$$\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',+} \sim \hbar \mathcal{N}_0(p_S) \cdot \frac{\frac{2}{9} \Gamma s_0 \sin^2(kz_0)}{v(z_0) T(E_{n,q})} \cdot \left| \frac{\partial z_0}{\partial n'} \right| \cdot 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (\text{IV3d - 9})$$

où la valeur de l'angle ϕ figure dans l'appendice E_{IV}. Intervient d'abord, dans cette expression, la distribution \mathcal{N}_0 de l'impulsion selon Oz des photons émis par désexcitation spontanée avec $\Delta m = 0$. Cette expression est prise en p_S , valeur de l'impulsion permettant la transition par un cycle de fluorescence de $|n, q, -\rangle$ vers $|n', q', +\rangle$, compte tenu de la règle de sélection (IV3c - 21). Les autres termes de (IV3d - 9) dépendent du point z_0 en lequel s'effectue le cycle de fluorescence couplant $|n, q, -\rangle$ à $|n', q', +\rangle$. A des termes de recul près, négligés dans le calcul de l'appendice E_{IV}, ce point est tel que la vitesse $v(z_0)$ de l'atome en z_0 soit la même sur la trajectoire classique d'énergie $E_{n,q}$ dans $U_{-1/2}(z)$ et sur la trajectoire d'énergie $E_{n',q'}$ dans $U_{1/2}(z)$, ce qui conduit à la relation déjà rencontrée dans le §2b :

$$\frac{1}{2} M v(z_0)^2 = E_{n,q} - U_{-1/2}(z_0) = E_{n',q'} - U_{1/2}(z_0) \quad (\text{IV3d - 10})$$

Nous reconnaissons dans (IV3d - 9) le taux de pompage optique semi-classique évalué en z_0 , soit $\gamma_{-1/2 \rightarrow 1/2}(z_0) = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \sin^2(kz_0)$. Le troisième facteur de (IV3d - 9) n'est autre que l'inverse de la densité de modes d'indice n' en fonction du point de transition z_0 . Sa présence assure qu'après sommation de $\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',+}$ sur q' (ce qui revient à sommer sur p_S dans $[-\hbar k, \hbar k]$) et sur l'indice n' , on retrouve le taux total de départ de $|n, q, -\rangle$ vers les niveaux d'état interne $|g 1/2\rangle$, tel qu'il figure dans (IV3d - 8a). La dépendance en l'angle ϕ du dernier facteur de (IV3d - 9) provient de l'interférence entre deux chemins permettant la transition de $|n, q, -\rangle$ vers $|n', q', +\rangle$. Ce dernier point est discuté plus en détail dans l'appendice E_{IV}. On constate également, dans cet appendice, que l'expression (IV3d - 9) constitue en fait une approximation très grossière du véritable taux de transition $\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',+}$.

(iii) Les transitions sans changement de sous-niveau interne fondamental

Passons maintenant à l'étude des taux décrivant les cycles de fluorescence à l'issue desquels l'état atomique interne n'est pas changé. Comme le champ électrique laser n'a pas de composante de polarisation selon l'axe Oz , ces cycles font intervenir seulement les processus d'émission spontanée changeant le moment cinétique atomique interne de $\pm \hbar$; voilà pourquoi seules les distributions $\mathcal{N}_{\pm}(p_S)$, à l'exclusion de $\mathcal{N}_0(p_S)$, interviennent dans l'expression (IV3d - 5b) de ces taux de transition. Nous voulons confirmer ici la discussion semi-classique qualitative du I§1c, en montrant que l'effet de ces cycles de fluorescence est simplement un chauffage des atomes, d'ordre de grandeur de l'énergie de recul $\frac{(\hbar k)^2}{2M}$ par temps de pompage τ_p . Nous considérons pour cela l'évolution des populations des niveaux quantiques $|n, q, -\rangle$ obtenue en ne prenant en compte que les transitions vers les $|n', q', -\rangle$. Dans ce modèle simple, la forme non stationnaire de l'équation pilote (IV3c - 17a) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \Pi_{n,q,-} = \sum_{n'} \int_{-k}^k dq' [\gamma_{n',q',- \rightarrow n,q,-} \Pi_{n',q',-} - \gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',-} \Pi_{n,q,-}] \quad (\text{IV3d - 11})$$

Il est possible de prévoir l'évolution correspondante des populations si l'on réalise que les taux de transition γ_{--} mis en jeu sont invariants par échange de l'état initial et de l'état final^(*):

^(*) Cette propriété n'est bien entendu pas vérifiée pour les taux de transition avec changement de sous-niveau interne : on a en général $\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',+} \neq \gamma_{n',q',+ \rightarrow n,q,-}$.

$$\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',-} = \gamma_{n',q',- \rightarrow n,q,-} \quad (\text{IV3d - 12})$$

ce qui est une conséquence, dans (IV3d - 5b), de l'invariance des distributions $\mathcal{N}_{\pm}(ps)$ par le changement de ps en $-ps$. L'équation d'évolution (IV3d - 11) peut alors être réécrite ainsi :

$$\frac{d}{dt} \Pi_{n,q,-} = \sum_{n'} \int_{-k}^k dq' \gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',-} [\Pi_{n',q',-} - \Pi_{n,q,-}] \quad (\text{IV3d - 13})$$

Ceci met en évidence clairement l'effet des transitions à $m = \pm 1/2$ fixé, qui est de tendre à l'égalisation des populations des différents niveaux quantiques.

Il est possible de caractériser plus finement l'effet des transitions $m \rightarrow m$ sur le mouvement des atomes en déterminant, à partir de (IV3d - 11), l'évolution de l'énergie moyenne (cinétique et potentielle) des atomes :

$$\langle E_{-} \rangle(t) = \sum_n \int_{-k}^k dq E_{n,q} \Pi_{n,q,-}(t) \quad (\text{IV3d - 14})$$

La méthode de calcul de la vitesse de variation de $\langle E_{-} \rangle(t)$ est la même que celle déjà utilisée dans le cadre du refroidissement des ions piégés [8]. Rappelons que l'idée est simplement de faire apparaître des relations de fermeture associées à la base des états externes $|n, q\rangle$, en se livrant à des transformations du type :

$$E_{n,q} |\langle n', q' | O | n, q \rangle|^2 = \langle n', q' | OH | n, q \rangle \langle n, q | O^\dagger | n', q' \rangle \quad (\text{IV3d - 15})$$

où O est l'un des opérateurs, fonction de Z , intervenant dans l'expression (IV3d - 5b) du taux $\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',-}$. On obtient, après le calcul de quelques commutateurs et la prise de moyenne sur l'impulsion du photon de fluorescence, l'évolution suivante en l'absence de toute transition $m \rightarrow -m$:

$$\frac{d}{dt} \langle E_{-} \rangle(t) = \sum_n \int_{-k}^k dq \langle n, q | \frac{D_{-}(Z)}{M} | n, q \rangle \Pi_{n,q,-} \quad (\text{IV3d - 16a})$$

$$D_{-}(z) = (\hbar k)^2 \Gamma s_0 \frac{1}{18} \left[7 - \frac{12}{5} \cos(2kz) \right] \quad (\text{IV3d - 16b})$$

Nous avons fait intervenir $D_-(z)$, de même dimension qu'un coefficient de diffusion en impulsion. Comme $D_-(z)$ est positif pour toute position z , on déduit de (IV3d - 16a) que les transitions de $|n, q, -\rangle$ vers les $|n', q', -\rangle$ font toujours augmenter l'énergie moyenne, et ceci pour des populations $\Pi_{n,q,-}$ arbitraires.

Il est, par ailleurs, utile de comparer la valeur de $D_-(z)$ à celle du coefficient de diffusion en impulsion $D_{-1/2 \rightarrow -1/2}(z)$ interne au sous-niveau $|g - 1/2\rangle$ qui apparaît dans les équations d'évolution semi-classiques sur $\Pi_{-1/2}(z, p, t)$ du I§1e. On constate, à l'aide de (I1e - 6a), que ces deux expressions sont très proches et qu'elles diffèrent d'une quantité proportionnelle à $\cos(2kz)$ donc de moyenne spatiale nulle. On peut montrer que cette différence est compensée exactement par la contribution à la diffusion des termes décrivant le passage par pompage optique du sous-niveau $|g - 1/2\rangle$ vers le sous-niveau $|g 1/2\rangle$. Cette contribution est nécessairement absente de (IV3d - 16b), puisque les équations d'évolution (IV3d - 11) ne prennent en compte que les transitions $m \rightarrow m$.

(iv) Les taux de transition dans la limite de Lamb-Dicke

Nous allons pour terminer donner des expressions approchées pour les taux de transition entre les états de bandes "liées" pour des trous assez profonds. Ces expressions seront utiles, au §e suivant, pour évaluer les populations des premières bandes. Le fait de se restreindre à ces bandes fondamentales permet d'effectuer d'utiles simplifications dans le calcul des éléments de matrice définissant les taux. Nous avons ainsi utilisé le fait, au §3b(iv), que les fonctions de Wannier $\Phi_n(z)$ associées aux états de Bloch de faible indice n avaient une extension spatiale Δz beaucoup plus faible que la longueur d'onde optique λ . Dans ce régime, qui est celui introduit par Dicke [77], la fonction de Wannier $\Phi_n(z)$ ressemble, pour $|kz| \ll 1$, à la fonction d'onde propre de l'oscillateur harmonique $\langle z | n \rangle_{OH}$, et son recouvrement avec les $\Phi_n(z - l\frac{\lambda}{2})$, $l \neq 0$, peut être négligé. Nous retenons donc l'expression approchée pour les états $|n, q\rangle$ d'une bande "liée" assez profonde :

$$|n, q\rangle \simeq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{l=-N}^N e^{iql\frac{\lambda}{2}} \left(T_{\frac{\lambda}{2}}\right)^l |n\rangle_{OH} \quad (\text{IV3d - 17})$$

où $T_{\frac{\lambda}{2}}$ représente la translation spatiale de $\frac{\lambda}{2}$ et où l'on a introduit un facteur de normalisation $1/\sqrt{2N+1}$.

La connaissance des taux de transition d'un niveau $|n, q, -\rangle$ à un autre $|n', q', -\rangle$ nécessite seulement celle d'éléments de matrice de la forme $\langle n, q | e^{ik'Z} | n', q' \rangle$, avec $\hbar k' =$

$p_S \pm \hbar k$, comme en témoigne l'expression (IV3d - 5b). Nous effectuons d'abord le calcul de cet élément de matrice à N fixé dans (IV3d - 17), puis nous faisons tendre N vers l'infini. L'approximation de non-recouvrement évoquée précédemment entre les fonctions de Wannier conduit alors à :

$$\langle n, q | e^{ik'Z} | n', q' \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N \left[(k' + q' - q) \frac{\lambda}{2} \right] \langle O_H | n | e^{ik'Z} | n' \rangle \langle n' | O_H \rangle \quad (\text{IV3d - 18a})$$

$$F_N(\theta) = \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N e^{i\theta l} \quad (\text{IV3d - 18b})$$

A θ fixé, on constate facilement que $F_N(\theta)$ tend vers 0 pour N arbitrairement grand, sauf lorsque θ est un multiple entier de 2π , ce qui rend $F_N(\theta)$ égal à l'unité. Nous aboutissons ainsi au résultat :

$$\langle n, q | e^{ik'Z} | n', q' \rangle = \begin{cases} \langle O_H | n | e^{ik'Z} | n' \rangle \langle n' | O_H \rangle & \text{si } q' = q - k'[2k] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV3d - 19})$$

On retrouve ainsi la règle de sélection (IV3c - 21). Puisque nous sommes à q et q' fixés, appelons p_S la valeur de l'impulsion du photon de fluorescence pour laquelle l'élément de matrice (IV3d - 18a) n'est pas nul. L'intégration sur l'impulsion du photon de fluorescence dans l'expression (IV3d - 5b) des taux sélectionne (*) cette valeur de p_S , ce qui donne :

$$\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',-} \simeq \Gamma s_0 \hbar \mathcal{N}_{\pm}(p_S) \left[\frac{1}{9} \left| \langle O_H | n | \sin(kZ) e^{ip_S Z/\hbar} | n' \rangle \langle n' | O_H \rangle \right|^2 + \left| \langle O_H | n | \cos(kZ) e^{ip_S Z/\hbar} | n' \rangle \langle n' | O_H \rangle \right|^2 \right] \quad (\text{IV3d - 20})$$

La seule dépendance en q et q' de cette expression étant contenue dans p_S . Puisque nous sommes dans la limite de Lamb-Dicke, développons, sur le support des fonctions de Wannier ($k|z| \ll 1$), les différentes fonctions de la position au second ordre inclus en kz , et

(*) Une procédure de calcul convaincante est donnée dans l'appendice F_{IV}. Elle consiste à quantifier dans une boîte avec des conditions aux limites périodiques, ce qui a pour effet de discréteriser q et p_S .

utilisons les éléments de matrice de Z et Z^2 dans la base des états propres de l'oscillateur harmonique. A l'issue de calculs sans difficulté de principe, on trouve l'expression des taux au premier ordre inclus en $(k\Delta z)^2 \sim \sqrt{\frac{E_R}{U_0}}$; à cet ordre du calcul, la bande d'indice n est couplée seulement à ses proches voisines :

$$\gamma_{n,q,-\rightarrow n,q',-} \simeq \Gamma s_0 \hbar \mathcal{N}_{\pm}(ps) \left[1 - \left(1 + \left(\frac{p_S}{\hbar k} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{E_R}{U_0}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{IV3d - 21a})$$

$$\gamma_{n,q,-\rightarrow n+1,q',-} \simeq \frac{1}{2} \Gamma s_0 \hbar \mathcal{N}_{\pm}(ps) \left[\frac{1}{9} + \left(\frac{p_S}{\hbar k} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{E_R}{U_0}} (n+1) \quad (\text{IV3d - 21b})$$

$$\gamma_{n,q,-\rightarrow n-1,q',-} \simeq \frac{1}{2} \Gamma s_0 \hbar \mathcal{N}_{\pm}(ps) \left[\frac{1}{9} + \left(\frac{p_S}{\hbar k} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{E_R}{U_0}} n \quad (\text{IV3d - 21c})$$

On constate, sur ces expressions, que les transitions d'une bande à elle-même se font avec un taux de l'ordre de l'inverse du temps de pompage τ_p , alors les taux de transition vers les bandes voisines sont beaucoup plus faibles pour les puits profonds, d'un facteur $\sqrt{\frac{E_R}{U_0}}$. Le temps effectif d'évolution des populations des bandes sous l'influence des transitions $m \rightarrow m$ peut donc être nettement plus long que τ_p , lorsqu'on considère les états propres de \mathcal{H} de plus basse énergie. Nous allons voir que cette conclusion est maintenue pour les transitions $m \rightarrow -m$.

Passons maintenant à l'expression des taux associés aux transitions internes $+ \longleftrightarrow -$. Pour caractériser la diminution de la population de la bande $(n, -)$ sous l'effet des transitions $- \longleftrightarrow +$, il suffit d'évaluer le taux total de départ (IV3d - 7) d'un quelconque des niveaux $|n, q, -\rangle$ vers les états de $m = 1/2$:

$$\Gamma_{n,q,-\rightarrow+} = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \langle n, q | \sin^2(kZ) | n, q \rangle \quad (\text{IV3d - 22})$$

ce que l'on peut faire à l'aide des approximations précédentes :

$$\Gamma_{n,-\rightarrow+} \simeq \frac{2}{9} \Gamma s_0 \langle n | (kZ)^2 | n \rangle_{OH} \quad (\text{IV3d - 23a})$$

$$\Gamma_{n,-\rightarrow+} \simeq \frac{2}{9} \Gamma s_0 \sqrt{\frac{E_R}{U_0}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{IV3d - 23b})$$

On trouve ainsi, comme annoncé, que le dépeuplement de la bande $(n, -)$ se fait sensiblement avec la même rapidité par transition $- \rightarrow +$ que par couplage avec les bandes

$(n', -)$ voisines. Le fait que cette rapidité soit plus faible que $\frac{1}{\tau_p}$ était cependant ici plus facilement prévisible, puisque le taux de pompage semi-classique $\gamma_{-1/2 \rightarrow 1/2}(z)$ s'annule en $z = 0$. Pour être complet, il resterait à évaluer les taux décrivant l'alimentation des populations des premières bandes liées $\Pi_{n,q,-}$ sous l'effet des transitions $+ \longrightarrow -$. Cependant, nous savons, grâce à la condition (IV3d - 10), que les états profonds du potentiel $U_{-1/2}(z)$ sont alimentés essentiellement par les $|n', q', +\rangle$ d'énergie proche du maximum du potentiel $U_{1/2}(z)$, états qui ne sont pas du tout dans le régime de Lamb-Dicke et qui échappent donc aux approximations effectuées ici. Nous verrons néanmoins que des hypothèses raisonnables sur les populations de ces $|n', q', +\rangle$ permettent de contourner cette difficulté.

e) Loi de variation des populations des premières bandes “liées”

Il est particulièrement intéressant d'étudier la variation avec l'indice n des populations des bandes d'énergie les plus profondes. D'une part, c'est dans la partie correspondante du spectre que la quantification du mouvement apporte des renseignements nouveaux, que ne fournit pas directement l'approche semi-classique de l'effet Sisyphe. D'autre part, on s'attend (et ceci sera confirmé par le calcul numérique au §f suivant) à ce que les bandes “liées” contiennent la majorité des atomes, lorsqu'on est assez au-dessus du seuil du refroidissement ; la connaissance des populations de ces bandes caractérise alors assez bien l'état stationnaire σ^{st} du système. Nous considérons ici le cas de puits assez profonds ($\sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \gg 1$), ce qui permet d'utiliser les expressions approchées des taux de transition du §d précédent.

(i) Une hypothèse raisonnable sur les termes d'alimentation

Nous avons vu au §d que les résultats obtenus dans le régime de Lamb-Dicke ne permettent pas a priori d'estimer le terme d'alimentation d'un niveau $|n, q, -\rangle$ des bandes “liées” profondes par les niveaux d'état interne $|g 1/2\rangle$:

$$\left(\frac{d}{dt} \Pi_{n,q,-} \right)_{\text{alim}} = \sum_{n'} \int_{-k}^k dq' \gamma_{n',q',+ \rightarrow n,q,-} \Pi_{n',q',+} \quad (\text{IV3e - 1})$$

En effet, lorsque l'indice de bande n est assez faible, les indices n' ayant une contribution non négligeable dans (IV3e - 1) sont proches de l'indice de la bande “liée” d'énergie maximale, indice noté ici N . Les états $|n', q', +\rangle$ correspondants sont donc hors du régime de

Lamb-Dicke. Nous allons en fait contourner la difficulté à l'aide d'une hypothèse raisonnable, qui considère que les populations $\Pi_{n',q',+}$ dépendent peu de n' et q' lorsque n' est proche de N ; ceci permet de les relier à la population totale $\Pi_{N,+}$ de la bande $(N,+)$:

$$\Pi_{n',q',+} \simeq \frac{1}{2k} \Pi_{N,+} \quad \text{si } n' \simeq N \quad (\text{IV3e - 2})$$

et de sortir ces populations de la double somme dans (IV3e - 1) :

$$\left(\frac{d}{dt} \Pi_{n,q,-} \right)_{\text{alim}} \simeq \frac{1}{2k} \Pi_{N,+} \sum_{n'} \int_{-k}^k dq' \gamma_{n',q',+ \rightarrow n,q,-} \quad (\text{IV3e - 3})$$

On peut ainsi faire apparaître, à l'aide des expressions (IV3d - 5a) des taux, une relation de fermeture associée à la base externe $|n, q\rangle$. On obtient :

$$\sum_{n'} \int_{-k}^k dq' \gamma_{n',q',+ \rightarrow n,q,-} = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \langle n, q | \cos^2 kZ | n, q \rangle \quad (\text{IV3e - 4})$$

L'élément de matrice dans (IV3e - 4) est alors facile à estimer dans le régime de Lamb-Dicke. Nous retenons pour la suite la valeur approchée du terme d'alimentation par transition $+ \rightarrow -$:

$$\left(\frac{d}{dt} \Pi_{n,q,-} \right)_{\text{alim}} \simeq \frac{2}{9} \Gamma s_0 \cdot \frac{1}{2k} \Pi_{N,+} \quad (\text{IV3e - 5})$$

(ii) Variation avec n des populations des bandes profondes

Nous supposons connue la population $\Pi_{N,+}$ de la bande $(N,+)$ et nous déterminons la dépendance en l'indice n des $\Pi_{n,q,-}$ à partir des expressions (IV3d - 21) et (IV3d - 23) des divers taux. Dans l'état stationnaire et sous l'approximation (IV3e - 2), les valeurs des populations $\Pi_{n,q,-}$ sont toutes proportionnelles à $\Pi_{N,+}$, et indépendantes de l'indice de Bloch q , puisque ni le taux de départ de $|n, q, -\rangle$ par pompage optique vers $|g 1/2\rangle$ (cf. (IV3d - 23b)) ni le terme d'alimentation (IV3e - 5) par $|g 1/2\rangle$ n'en dépendent. Il suffit donc de caractériser ces populations stationnaires par celles des bandes $(n, -)$:

$$\Pi_{n,q,-}^{\text{st}} = \frac{1}{2k} \Pi_{n,-}^{\text{st}} \quad (\text{IV3e - 6})$$

Le système linéaire sur ces populations de bandes ne fait intervenir que les sommes sur q des différents taux $\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',-}$. Ces sommes sont aisées à calculer, si l'on sait que l'impulsion p_S est de variance $\frac{2}{5}(\hbar k)^2$ selon la distribution $\mathcal{N}_{\pm}(p_S)$. On obtient ainsi les taux de transition entre bandes voisines :

$$\Gamma_{n,- \rightarrow n',-} = \int_{-k}^k dq' \gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',-} \quad (\text{IV3e - 7a})$$

$$\Gamma_{n,- \rightarrow n+1,-} = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \cdot \frac{23}{20} \sqrt{\frac{E_R}{U_0}} (n+1) \quad (\text{IV3e - 7b})$$

$$\Gamma_{n,- \rightarrow n-1,-} = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \cdot \frac{23}{20} \sqrt{\frac{E_R}{U_0}} n \quad (\text{IV3e - 7c})$$

L'équation d'évolution des populations des bandes profondes dans notre modèle prend finalement la forme :

$$\frac{d}{dt} \Pi_{n,-} = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \left[-\sqrt{\frac{E_R}{U_0}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \Pi_{n,-} + \Pi_{N,+} \right] \quad (\text{IV3e - 8})$$

$$+ \Gamma_{n+1,- \rightarrow n,-} (\Pi_{n+1,-} - \Pi_{n,-}) + \Gamma_{n-1,- \rightarrow n,-} (\Pi_{n-1,-} - \Pi_{n,-})$$

Si l'on ne retient que la première ligne de (IV3e - 8), ce qui revient à négliger toute transition $- \rightarrow -$, les populations stationnaires des bandes profondes sont faciles à déterminer :

$$\Pi_{n,-}^{\text{st}} = \sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \Pi_{N,+} = \frac{2U_0}{E_n + \frac{3}{2}U_0} \Pi_{N,+} \quad (\text{IV3e - 9a})$$

ce qui conduit aux rapports de populations indépendants de $\Pi_{N,+}$:

$$\frac{\Pi_{n,-}^{\text{st}}}{\Pi_{n-1,-}^{\text{st}}} = \frac{2n-1}{2n+1} \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (\text{IV3e - 9b})$$

La dernière égalité dans (IV3e - 9a), déduite de l'expression (IV3b - 18a) de l'énergie E_n de la bande d'indice n , permet de montrer l'analogie de ce résultat avec celui (IV2b - 6)

de l'approche semi-classique du §2b. Cependant, les nombres d'atomes dans les bandes d'indice $n = 0$ et $n = 1$ prédicts par (IV3e - 9) sont très différents ($\Pi_{0,-}^{\text{st}} = 3\Pi_{1,-}^{\text{st}}$), et l'on s'attend à un effet notable sur ces populations des transitions $- \rightarrow -$, dans le sens bien entendu d'une égalisation. Il est donc nécessaire de résoudre exactement la forme stationnaire de (IV3e - 8), ce que l'on peut faire de façon plus élégante que par le calcul numérique, en introduisant la série génératrice des populations :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Pi_{n,-}^{\text{st}} \quad (\text{IV3e - 10})$$

En multipliant la forme stationnaire de (IV3e - 8) par x^n et en sommant sur $n \geq 0$, on obtient en effet, à l'aide de relations de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \Pi_{n,-}^{\text{st}} = x \frac{dg}{dx} \quad (\text{IV3e - 11a})$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (\text{IV3e - 11b})$$

une équation différentielle du premier ordre sur $g(x)$:

$$\left(x^2 - \frac{66}{23}x + 1 \right) \frac{dg}{dx} + \left(x - \frac{33}{23} \right) g + \frac{S}{1-x} = 0 \quad (\text{IV3e - 12a})$$

$$S = \frac{20}{23} \sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \Pi_{N,+}^{\text{st}} \quad (\text{IV3e - 12b})$$

La solution générale de (IV3e - 12a) se déduit par variation de la constante d'une solution $g_0(x)$ de l'équation homogène associée :

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - \frac{66}{23}x + 1}} \quad (\text{IV3e - 13a})$$

$$g(x) = \left[g(0) - \int_0^x dx' g_0(x') \frac{S}{1-x'} \right] g_0(x) \quad (\text{IV3e - 13b})$$

La valeur de $g(0)$ est telle que $g(x)$ soit régulière sur $] -1, 1[$, donc telle que l'expression entre crochets s'annule en $x = x_0$, où x_0 est le pôle de $g_0(x)$ dans $]0, 1[$. Tout ceci donne accès à :

$$\Pi_{0,-}^{\text{st}} = g(0) = \sqrt{\frac{20}{23}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{23}{5}} \right) \sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \Pi_{N,+}^{\text{st}} \quad (\text{IV3e - 14a})$$

$$\Pi_{0,-}^{\text{st}} \simeq \sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \Pi_{N,+}^{\text{st}} \quad (\text{IV3e - 14b})$$

On calcule ensuite par récurrence, selon la forme stationnaire de (IV3e - 8), les différentes populations $\Pi_{n,-}^{\text{st}}$ en fonction de $\Pi_{N,+}^{\text{st}}$ donc de $\Pi_{0,-}^{\text{st}}$. On obtient par exemple :

$$\frac{\Pi_{1,-}^{\text{st}}}{\Pi_{0,-}^{\text{st}}} = \frac{33}{23} - \frac{\sqrt{\frac{20}{23}}}{\operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{23}{5}}} \simeq 0.61 \quad (\text{IV3e - 15})$$

Comme notre modèle simple ne permet pas d'obtenir $\Pi_{N,+}^{\text{st}}$, nous retenons comme information utile simplement le rapport des populations des bandes profondes successives. Nous résumons ces résultats sur la fig. IV-8, en comparant les prédictions de (IV3e - 9) et de l'équation (IV3e - 8) à celles obtenues par résolution numérique des équations de taux complètes (IV3c - 17a) exposée au §f suivant.

On constate que les prédictions du modèle simple sont d'une précision tout à fait satisfaisante. Quant à l'influence des transitions $|n, q, -\rangle \rightarrow |n', q', -\rangle$ sur les rapports des populations des bandes stationnaires $\Pi_{n,-}^{\text{st}}$, elle n'est sensible que pour la bande fondamentale (d'indice $n = 0$). Si l'on voulait caractériser la portée en énergie de cette influence des taux $\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',-}$, on serait donc amené à choisir la différence d'énergie entre la bande fondamentale et la première bande excitée, soit $\hbar\Omega_{\text{osc}} = 2\sqrt{U_0 E_R}$ d'après (IV3b - 18b) ; on retrouve alors l'échelle d'énergie (IV2b - 12) de la diffusion en impulsion au fond des trous de potentiel, mise en évidence par l'approche semi-classique dans le régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$.

f) Etude numérique des propriétés de l'état stationnaire pour $j_g = 1/2$

L'approche quantique, telle que nous l'avons réduite dans la limite séculaire, décrit la matrice densité atomique stationnaire par ses populations dans la base propre $|n, q, r\rangle$. L'objet de cette partie est la détermination numérique de ces populations. Par ailleurs,

n	$\frac{2n-1}{2n+1}$	$\left(\frac{\Pi_n^{\text{st}}}{\Pi_{n-1}^{\text{st}}} \right)_{\text{ap}}$	$\left(\frac{\Pi_n^{\text{st}}}{\Pi_{n-1}^{\text{st}}} \right)_{\text{ex}}$
1	0.33	0.61	0.63
2	0.60	0.66	0.69
3	0.71	0.72	0.74
4	0.78	0.77	0.77

Fig. IV-8 : Rapport des populations stationnaires des bandes d'indice $0 \leq n \leq 4$, pour des puits profonds ($\sqrt{U_0/E_R} \gg 1$). Les résultats de la première colonne sont ceux de (IV3e - 9), obtenus en négligeant les transitions $|n, q, -\rangle \rightarrow |n', q', -\rangle$. La seconde colonne correspond aux prédictions du modèle simple (IV3e - 8) obtenu en effectuant l'approximation (IV3e - 2). Les valeurs figurant en troisième colonne proviennent de la résolution numérique des équations de taux complètes (IV3c - 17), pour une profondeur de puits $U_0 = 250E_R$.

nous nous intéressons également aux distributions en impulsion $\Pi^{\text{st}}(p)$ et en position $\rho^{\text{st}}(z)$ des atomes, qui sont des quantités qui apparaissent plus naturellement dans les mesures expérimentales faites sur les mélasses optiques. La connaissance de $\Pi^{\text{st}}(p)$ permet en effet de déterminer l'optimum du refroidissement. Celle de $\rho^{\text{st}}(z)$ prouve que le refroidissement par effet Sisyphe entraîne une modulation de la distribution spatiale des atomes à l'échelle de la longueur d'onde optique λ , ce qui semble avoir été mis en évidence expérimentalement [18].

(i) Le principe du calcul numérique

Le calcul de $\Pi^{\text{st}}(p)$ et $\rho^{\text{st}}(z)$ nécessite bien entendu la détermination des états propres $|n, q\rangle$ de (IV3b - 10) et des populations de σ^{st} , selon :

$$\Pi^{\text{st}}(p) = \sum_n \sum_{r=\pm} \int_{-k}^k dq \Pi_{n,q,r} |\langle p|n, q\rangle|^2 \quad (\text{IV3f - 1a})$$

$$\rho^{\text{st}}(z) = \rho_-^{\text{st}}(z) + \rho_+^{\text{st}}(z) \quad (\text{IV3f - 1b})$$

$$\rho_-^{\text{st}}(z) = \sum_n \int_{-k}^k dq \Pi_{n,q,-} |\langle z|n, q\rangle|^2 \quad (\text{IV3f - 1c})$$

$$\rho_+^{\text{st}}(z) = \sum_n \int_{-k}^k dq \Pi_{n,q,+} \left| \langle z - \frac{\lambda}{4}|n, q\rangle \right|^2 \quad (\text{IV3f - 1d})$$

On notera que nous avons décomposé $\rho^{\text{st}}(z)$ en somme des densités spatiales pour les atomes de sous-niveau interne $|g - 1/2\rangle$ et $|g 1/2\rangle$ respectivement. La détermination des $|n, q\rangle$ et des $\Pi_{n,q,r}$ a été effectuée numériquement de la façon suivante. En utilisant le théorème de Bloch, on se ramène à la recherche, selon (IV3b - 5), de fonctions d'onde périodiques que l'on développe en série de Fourier :

$$\langle z|\varphi\rangle_q = \sum_l a_{l,q} e^{2ikz} \quad (\text{IV3f - 2})$$

Les relations de récurrence sur les coefficients de Fourier ($a_{l,q}$) déduites du problème aux valeurs propres (IV3b - 6) sont données dans l'appendice F_{IV}. En tronquant le développement (IV3f - 2) aux indices $-N \leq l \leq N$, on se ramène à la diagonalisation d'une matrice réelle symétrique tridiagonale, dont les $2N + 1$ vecteurs propres correspondent à autant de bandes d'énergie. La seconde étape est le calcul des éléments de matrice définissant les taux de transition. On y est confronté au même problème que pour les états stationnaires quantiques d'une particule libre : les états de Bloch $|n, q\rangle$, délocalisés spatialement, ne sont pas normalisables. Ce problème est résolu de la façon habituelle, qui consiste à quantifier dans une boîte de dimension finie, dont on augmente ensuite indéfiniment la taille. Nous choisissons ici des longueurs de boîte L compatibles avec la périodicité spatiale des potentiels ; l'indice de Bloch q et l'impulsion des photons de fluorescence selon Oz prennent alors seulement des valeurs discrètes :

$$L = M\lambda \quad M \text{ entier} \quad (\text{IV3f - 3a})$$

$$q = \frac{l}{M}k \quad -M < l \leq M \quad (\text{IV3f - 3b})$$

$$p_s = \frac{l}{M}\hbar k \quad -M \leq l \leq M \quad (\text{IV3f - 3c})$$

En pratique, les choix $M = 2$ (4 états par bande) et $M = 3$ (6 états par bande) conduisent à des distributions en impulsion presque identiques. Nous renvoyons le lecteur à l'appendice F_{IV} pour plus de détails sur la discrétisation et la vitesse de convergence en fonction de M . Les taux de transition étant connus, il reste à résoudre numériquement les équations de taux (IV3c - 17), en se limitant au nombre fini de bandes $2N + 1$ précédemment mentionné. Le choix de N est dicté par celui de l'impulsion maximale p_{\max} à prendre en compte dans $\Pi^{\text{st}}(p)$ pour obtenir l'énergie cinétique moyenne avec une bonne précision.

En effet, l'onde de plus grande quantité de mouvement retenue dans la forme tronquée du développement (IV3f - 2) est d'impulsion :

$$p_{\max} = 2N\hbar k \quad (\text{IV3f - 4})$$

Nous sommes allés jusqu'à $N = 80$, ce qui permet d'étudier les situations à puits très profonds, comme $U_0 = 1000E_R$; la plupart des bandes considérées sont alors "quasi-libres", et la dépendance approchée (IV3b - 24) de leur énergie en l'indice n permet de retrouver (IV3f - 4).

(ii) Les populations stationnaires : dépendance en q et en n

Donnons d'abord les résultats du calcul numérique dans la base $|n, q, r\rangle$. Nous testons la dépendance en l'indice de Bloch q des populations $\Pi_{n,q} = \Pi_{n,q,+} + \Pi_{n,q,-}$ sur la fig. IV-9, pour une profondeur de puits $U_0 = 100E_R$. Le spectre présente alors 6 bandes "liées", d'indice n compris entre 0 et 5. On constate que, pour les plus profondes de ces bandes, $\Pi_{n,q}$ ne dépend pratiquement pas de q . Cette remarque permet de récrire la contribution $\sigma_{n,-}$ de ces bandes à la matrice densité σ^{st} restreinte au sous-niveau interne $|g = 1/2\rangle$. La faible dépendance en q de $\Pi_{n,q}$ donne d'abord à un facteur près :

$$\sigma_{n,-} \sim \frac{1}{2k} \int_{-k}^k dq |n, q\rangle \langle n, q| \quad (\text{IV3f - 5})$$

Utilisons ensuite la décomposition (IV3b - 11) des états propres $|n, q\rangle$ sur les fonctions de Wannier, ce qui fait apparaître une double somme dans $\sigma_{n,-}$:

$$\sigma_{n,-} \sim \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l,l'=-N}^N \int_{-k}^k \frac{dq}{2k} e^{iq(l-l')\frac{\lambda}{2}} T_{\frac{\lambda}{2}}^l |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n| T_{\frac{\lambda}{2}}^{\dagger l'} \quad (\text{IV3f - 6})$$

où $T_{\frac{\lambda}{2}}$ représente la translation spatiale de $\frac{\lambda}{2}$ et où l'on a fait intervenir le facteur de normalisation $1/(2N+1)$. La sommation sur l'indice de Bloch q :

$$\frac{1}{2k} \int_{-k}^k dq e^{iq(l-l')\frac{\lambda}{2}} = \delta_{l,l'} \quad (\text{IV3f - 7})$$

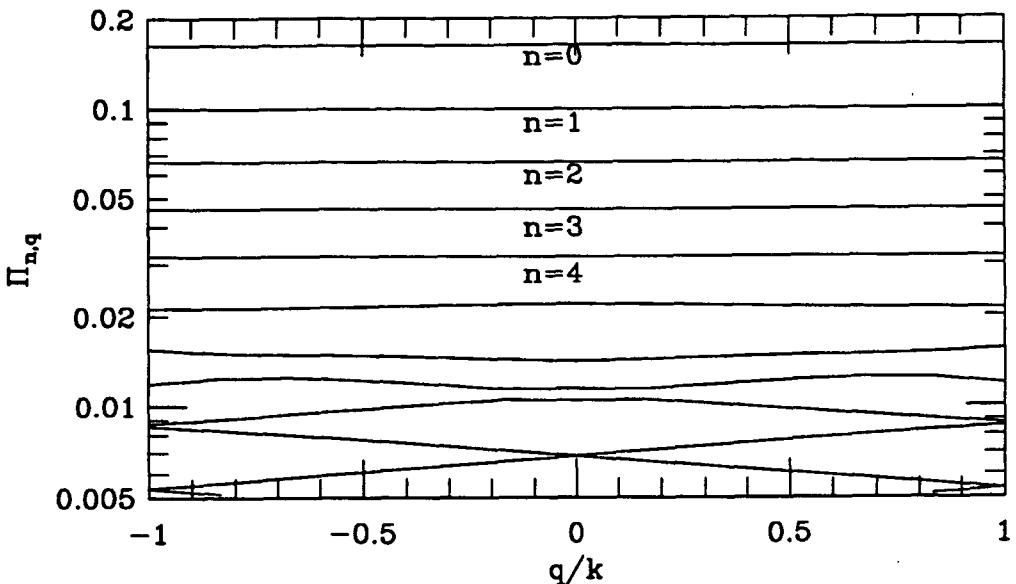


Fig. IV-9 : Pour une profondeur de puits $U_0 = 100E_R$, dépendance en l'indice de Bloch q des populations des bandes "liées" ($0 \leq n \leq 5$) et des premières bandes "quasi-libres", pour l'ensemble des deux sous-niveaux internes $m = \pm 1/2$. Le calcul numérique est effectué avec prise en compte des bandes d'énergie d'indice au plus 39, avec 12 valeurs différentes de l'indice de Bloch q . Les courbes continues représentées sont le résultat d'une interpolation.

montre que $\sigma_{n,-}$ n'est autre qu'un mélange statistique des translatés d'un même état localisé $|\Phi_n\rangle$ sur tous les sites $l\frac{\lambda}{2}$:

$$\sigma_{n,-} \sim \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N T_{\frac{\lambda}{2}}^l |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n| T_{\frac{\lambda}{2}}^{tl} \quad (\text{IV3f - 8})$$

La contribution de $\sigma_{n,+}$ s'en déduit bien entendu par translation de $\frac{\lambda}{4}$.

Pour terminer cette discussion dans la base propre $|n, q, r\rangle$, nous représentons, sur la fig. IV-10a, la dépendance en la profondeur de puits U_0 des populations totales Π_n des premières bandes ($0 \leq n \leq 4$) :

$$\Pi_n = \sum_{r=\pm} \int_{-k}^k dq \Pi_{n,q,r} \quad (\text{IV3f - 9})$$

On constate ainsi que les atomes se trouvent majoritairement dans les états correspondant à ces premières bandes, à condition bien sûr que les puits de potentiel $U_{\pm 1/2}(z)$ soient assez profonds (dans le cas limite $U_0 = 0$, toutes les populations Π_n sont égales) mais pas trop profonds (lorsque U_0 augmente, les atomes se répartissent parmi un nombre croissant de bandes "liées"). Les populations des bandes Π_n admettent ainsi toutes un maximum en U_0 . Celui de Π_0 , assez marqué en $U_0 \simeq 60E_R$, est de l'ordre de 0.34. Celui de $n = 4$ se situe au voisinage de $U_0 = 200E_R$. On vérifie de plus, à l'aide de la fig. IV-10b, que la proportion d'atomes se trouvant dans des bandes "quasi-libres" (i.e. celles dont toutes les énergies $E_{n,q}$ sont supérieures ou égales à $-\frac{1}{2}U_0$) devient plus faible lorsque la profondeur des puits augmente.

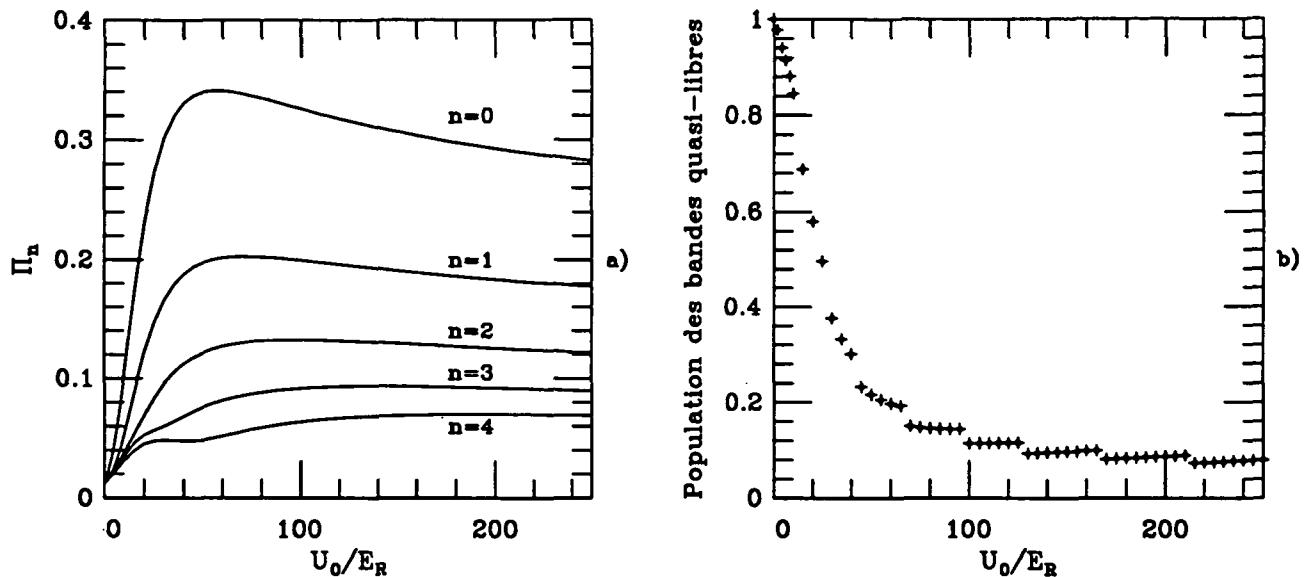


Fig. IV-10 : Evolution, en fonction de la profondeur de puits U_0 exprimée en unité d'énergie de recul, des populations (IV3f - 9) des différentes bandes d'énergie. Sur la fig. a sont représentées les populations des premières bandes ($0 \leq n \leq 4$). La fig. b donne la population cumulée des bandes "quasi-libres" ($E_{n,q} \geq -\frac{1}{2}U_0$). Dans les deux cas, le calcul numérique est effectué avec 6 états par bandes et 80 bandes d'énergie.

(iii) La distribution en impulsion

Passons maintenant à l'étude de la distribution en impulsion stationnaire, déduite de σ^{st} selon (IV3f - 1a). Comme cette distribution $\Pi^{\text{st}}(p)$ n'a pas de raison d'être thermique, il est impossible de la caractériser entièrement par la donnée d'un seul paramètre qui serait une température. Nous arrivons en pratique à une description satisfaisante de $\Pi^{\text{st}}(p)$ en

introduisant deux grandeurs bien choisies. La première est simplement l'impulsion quadratique moyenne Δp . La seconde, notée p_e , est la mi-largeur à la hauteur relative $e^{-1/2}$ de $\Pi^{\text{st}}(p)$. L'introduction de p_e permet d'estimer l'écart de $\Pi^{\text{st}}(p)$ à la forme gaussienne, puisque p_e et Δp coïncident exactement pour une gaussienne. De plus, p_e nous semble correspondre assez bien à ce qui est mesuré expérimentalement (largeur d'un temps de vol) alors que Δp est plus difficilement accessible. Nous représentons, sur la fig. IV-11, la dépendance en U_0 des carrés des grandeurs Δp et p_e , plutôt que ces grandeurs elles-mêmes, dans l'espoir de mettre en évidence un comportement simple (linéaire) aux puits profonds.

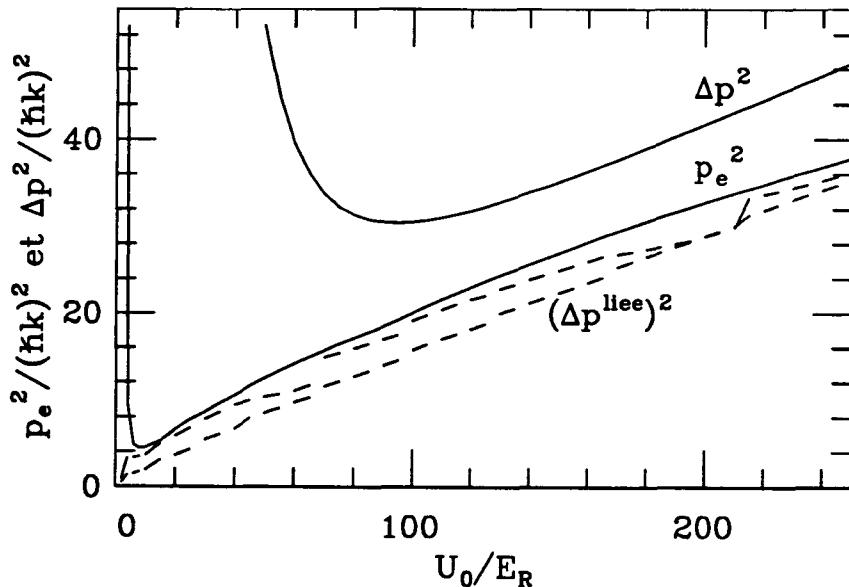


Fig. IV-11 : Valeurs de l'impulsion quadratique moyenne au carré, Δp^2 , et de la mi-largeur au carré, p_e^2 , en unité de $(\hbar k)^2$, en fonction de la profondeur de puits U_0 en unité d'énergie de recul. Les valeurs des paramètres du calcul numérique sont celles de la fig. IV-10. Les tirets désignent, de bas en haut, Δp^2 et p_e^2 pour la distribution en p correspondant aux seules bandes "liées".

La dépendance de Δp^2 en U_0 est somme toute assez naturelle. L'existence d'un seuil du refroidissement est manifeste aux faibles U_0 , et Δp^2 tend à présenter un comportement linéaire avec U_0 aux grandes profondeurs de puits. L'optimum du refroidissement est caractérisé par :

$$\Delta p \simeq 5.5\hbar k \quad (\text{IV3f - 10a})$$

$$U_0 \simeq 95E_R \quad (\text{IV3f - 10b})$$

On remarquera que la valeur (IV3f - 10a) est inférieure d'environ $\hbar k$ à la plus faible impulsion quadratique moyenne obtenue dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ (cf. fig. III-24b), ce qui affirme la supériorité du mécanisme de refroidissement par effet Sisyphe.

Le comportement de p_e^2 avec U_0 présente plusieurs caractéristiques intéressantes. On remarque d'abord que p_e^2 reste notablement plus faible que Δp^2 : la distribution $\Pi^{st}(p)$ présente des ailes plus longues que la gaussienne d'écart-type p_e . C'est ce que nous avons cherché à montrer sur la fig. IV-12, en représentant, pour $U_0 = 100E_R$ et $U_0 = 1000E_R$, $\Pi^{st}(p)$ et la distribution gaussienne de même mi-largeur que Π^{st} . Notons que p_e continue à décroître lorsque U_0 passe sous le seuil, jusqu'à un minimum de $2\hbar k$; nous avions déjà ce même comportement dans la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$. Le point nouveau, ici, est en fait essentiellement que p_e présente un comportement non linéaire en U_0 , même pour U_0 assez grand. Voilà qui nous rappelle, de façon probante, que nous ne sommes pas dans le régime de l'approximation semi-classique traditionnelle, régime tel que $\Delta p^2 \simeq p_e^2 \sim U_0$.

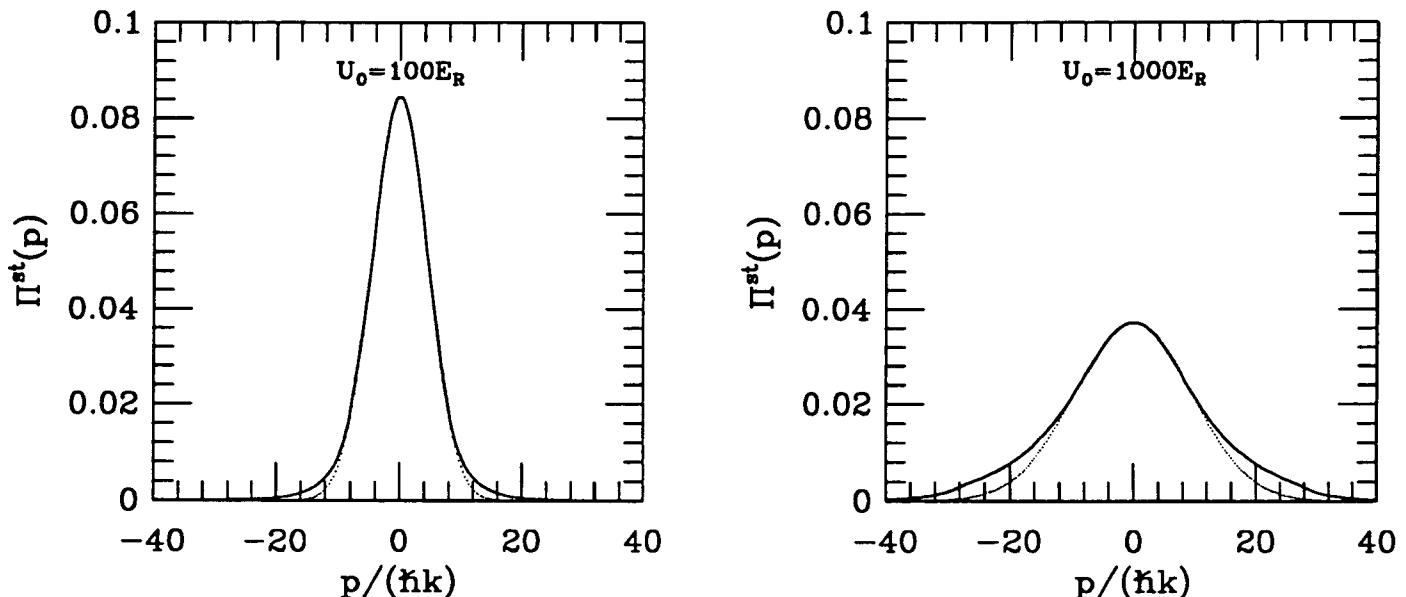


Fig. IV-12 : Distribution en impulsion dans l'état stationnaire $\Pi^{st}(p)$, pour une profondeur de puits $U_0 = 100E_R$ et $U_0 = 1000E_R$, sur l'intervalle en impulsion $[-40\hbar k, 40\hbar k]$. La courbe en pointillés est la gaussienne de même mi-largeur à $e^{-1/2}$ que $\Pi^{st}(p)$. Le calcul numérique est effectué sur 120 bandes, avec 6 états par bandes.

Pour comprendre ces divers comportements, et en particulier la variation non linéaire de p_e^2 avec U_0 , nous allons maintenant chercher à tirer parti du modèle simple du §e précédent, qui fournit une loi de variation approchée pour les populations des bandes dans le régime de Lamb-Dicke.

Supposons d'abord que la distribution en impulsion p soit déterminée, au moins sur un intervalle contenant $[-p_e, p_e]$, seulement par la contribution des états des bandes "liées". Ceci paraît raisonnable, d'une part parce que la proportion d'atomes dans les bandes "quasi-libres" devient vite faible lorsque U_0 augmente (comme en témoigne la fig. IV-10b), d'autre part parce que ces bandes contiennent des états d'impulsion élevée. Une telle hypothèse ne serait pas admissible pour une estimation de Δp , car cette grandeur est très sensible au comportement asymptotique de $\Pi^{\text{st}}(p)$, qui est le fait des états d'indice n élevé. Pour confirmer ces différentes affirmations, nous avons porté en pointillés, sur la fig. IV-11, les grandeurs $(\Delta p_e^{\text{liée}})^2$ et $(p_e^{\text{liée}})^2$ des distributions $\Pi_{\text{liée}}^{\text{st}}(p)$ calculées en ne retenant dans (IV3f - 1a) que les états des bandes "liées" (i.e. dont l'une des énergies $E_{n,q}$ est inférieure à $-\frac{1}{2}U_0$) et en normalisant par la somme des populations de ces bandes "liées" :

$$\Pi_{\text{liée}}^{\text{st}}(p) = \frac{\sum_{n=0}^N \int_{-k}^k dq \sum_{r=\pm} \Pi_{n,q,r} |\langle p|n, q \rangle|^2}{\sum_{n=0}^N \int_{-k}^k dq \sum_{r=\pm} \Pi_{n,q,r}} \quad (\text{IV3f - 11})$$

L'entier N est l'indice maximal des bandes "liées". On constate que la mi-largeur $p_e^{\text{liée}}$ de $\Pi_{\text{liée}}^{\text{st}}$ constitue une bonne approximation de la mi-largeur p_e de la distribution complète $\Pi^{\text{st}}(p)$, dès que U_0 est assez grand :

$$p_e^{\text{liée}} = p_e \quad \text{à} \quad 5 \% \text{ près} \quad \text{pour } U_0 \geq 100E_R \quad (\text{IV3f - 12})$$

Il n'en va pas de même pour l'impulsion quadratique moyenne Δp .

Il est difficile d'évaluer la mi-largeur de $\Pi_{\text{liée}}^{\text{st}}(p)$ par des arguments simples. Heureusement, nous remarquons que cette mi-largeur est assez proche de $\Delta p_e^{\text{liée}}$ pour les puits assez profonds de la fig. IV-11. Nous allons donc chercher à déterminer plutôt $\Delta p_e^{\text{liée}}$. Ceci est sans difficulté lorsqu'on se limite aux bandes dont les éléments sont bien décrits par les états propres de l'oscillation harmonique, au sens de (IV3d - 17). D'après les résultats du §e précédent que nous simplifions légèrement, les populations de ces bandes vérifient :

$$\Pi_n \simeq \frac{2\Pi_0}{2n+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq n \leq n_{\text{harm}} \quad (\text{IV3f - 13})$$

où n_{harm} correspond à la limite d'harmonicité des bandes. Pour $n \leq n_{\text{harm}}$, l'énergie cinétique moyenne dans l'état $|n, q\rangle$ est moitié de l'énergie propre, lorsque l'origine des énergies potentielles est prise au fond des puits :

$$\langle n, q | \frac{P^2}{2M} | n, q \rangle \simeq \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \Omega_{\text{osc}} \quad \text{si} \quad 0 \leq n \leq n_{\text{harm}} \quad (\text{IV3f - 14})$$

Il est certes bien entendu que toutes les bandes "liées" ne sont pas dans le régime de Lamb-Dicke. Nous allons cependant, de façon heuristique, nous comporter comme si toutes les bandes "liées" vérifiaient les relations (IV3f - 13) et (IV3f - 14). L'indice maximal des bandes "liées" est estimé dans cette optique par :

$$\left(N + \frac{1}{2} \right) \hbar \Omega_{\text{osc}} = U_0 \quad (\text{IV3f - 15})$$

et l'énergie cinétique moyenne dans les bandes "liées" est donnée, dans cette limite harmonique, par :

$$\frac{(\Delta p_{\text{harm}}^{\text{liée}})^2}{2M} \simeq \frac{\sum_{n=0}^N \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \Omega_{\text{osc}} \Pi_n}{\sum_{n=0}^N \Pi_n} \quad (\text{IV3f - 16a})$$

$$\simeq \frac{\frac{1}{2} \hbar \Omega_{\text{osc}} \left(\frac{1}{2} + N \right)}{1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n + \frac{1}{2}}} \quad (\text{IV3f - 16b})$$

Le numérateur de (IV3f - 16b) est exactement $\frac{1}{2} U_0$ d'après (IV3f - 15). Quant à la somme apparaissant au dénominateur de (IV3f - 16b), il est possible de bien l'approximer par une intégrale :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \simeq \int_1^{N+1} \frac{dt}{t} = \ln(N+1) \quad (\text{IV3f - 17})$$

Tout ceci conduit à la prédiction suivante :

$$(\Delta p_{\text{harm}}^{\text{liée}})^2 \simeq (\hbar k)^2 \frac{\frac{1}{2} \frac{U_0}{E_R}}{1 + \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \right) \right]} \quad (\text{IV3f - 18})$$

si l'on fait usage de (IV3f - 16a) et de l'expression $\hbar \Omega_{\text{osc}} = 2\sqrt{U_0 E_R}$.

La fig. IV-13 récapitule l'ensemble de ces résultats et permet de constater que l'approximation harmonique, bien qu'apparemment très discutable, permet en fait de rendre

compte de manière très satisfaisante de la variation de la mi-largeur p_e de la vraie distribution en impulsion, sauf pour des valeurs trop élevées de U_0 ! Cet échec aux puits profonds provient du fait que $\Delta p_e^{\text{liée}}$, toujours assez bien estimé par $\Delta p_{\text{harm}}^{\text{liée}}$ (à 0.5 $\hbar k$ près par excès), s'écarte significativement de $p_e^{\text{liée}}$ lorsque U_0 augmente.

$\frac{U_0}{E_R}$	$\frac{p_e}{\hbar k}$	$\frac{p_e^{\text{liée}}}{\hbar k}$	$\frac{\Delta p_e^{\text{liée}}}{\hbar k}$	$\frac{\Delta p_{\text{harm}}^{\text{liée}}}{\hbar k}$
100	4.48	4.38	3.97	4.30
150	5.19	5.00	4.73	5.09
200	5.72	5.37	5.37	5.75
250	6.15	6.01	5.94	6.32
1000	9.42	9.22	11.0	11.5

Fig. IV-13 : Pour différentes profondeurs de puits en unité d'énergie de recul, on donne dans les colonnes successives la mi-largeur p_e de la distribution $\Pi^{\text{st}}(p)$ calculée numériquement, la mi-largeur $p_e^{\text{liée}}$ et l'impulsion quadratique moyenne $\Delta p_e^{\text{liée}}$ pour $\Pi^{\text{st}}_{\text{liée}}(p)$ définie par (IV3f - 11), ainsi que l'approximation grossière harmonique (IV3f - 18) pour $\Delta p_e^{\text{liée}}$. Les conditions du calcul numérique sont celles de la fig. IV-10.

(iv) La distribution en position

Pourachever cette étude, considérons les propriétés de σ^{st} en représentation position. Examinons d'abord qualitativement le comportement des éléments non diagonaux $\langle z | \sigma^{\text{st}} | z' \rangle$. Rappelons que ces éléments tendent vers 0 lorsque $|z - z'|$ excède $\Delta\xi$, où $\Delta\xi$ est la longueur de cohérence spatiale de σ^{st} . Nous voulons estimer ici l'ordre de grandeur de $\Delta\xi$. Il est commode d'utiliser pour cela l'écriture approchée (IV3f - 8) ; on constate en effet immédiatement sur cette expression que la cohérence spatiale de la contribution σ_n des états de la bande d'indice n à σ^{st} n'est autre que l'extension spatiale des fonctions de Wannier $|\Phi_n\rangle$, dont on a vu qu'elle est inférieure à $\frac{\lambda}{2\pi}$ (cf. (IV3b - 20)) pour les premières bandes des puits assez profonds. On en déduit ainsi que $\Delta\xi$ reste petite devant la longueur d'onde optique λ . Ceci est en conformité avec l'argument très général, que nous avons rappelé au II§1b (cf. (II1b - 34)) : des atomes qui ne cessent pas de décrire des cycles de fluorescence, comme c'est le cas dans le refroidissement par effet Sisyphe, ne peuvent pas acquérir une cohérence spatiale plus grande que λ , à cause du caractère aléatoire de l'impulsion des photons d'émission spontanée. On notera donc que la propriété qu'a σ^{st}

d'être diagonale dans une base d'états $|n, q, r\rangle$ entièrement délocalisés n'entraîne pas nécessairement que la cohérence spatiale de σ^{st} soit infinie. Il est d'ailleurs un autre exemple que l'on peut donner de mélange statistique d'états entièrement délocalisés et qui soit à cohérence spatiale finie : c'est celui d'une distribution thermique de particules libres ; il est connu que sa longueur de cohérence est la longueur d'onde thermique de de Broglie.

Passons maintenant à l'examen des éléments de σ^{st} diagonaux en z . Nous avons introduit en (IV3f - 1c) et (IV3f - 1d) les densités spatiales des atomes dans le sous-niveau interne $|g - 1/2\rangle$ pour $\rho_-(z)$, et dans $|g 1/2\rangle$ pour $\rho_+(z)$. Ces deux distributions, de période spatiale $\frac{\lambda}{2}$, se déduisent l'une de l'autre par translation spatiale de $\frac{\lambda}{4}$, à cause de l'invariance de σ^{st} par l'opérateur T de (IV3d - 1). On a vu, pour des puits assez profonds, que la plupart des atomes se trouvent dans les bandes fondamentales (cf. fig. IV-10). Or la contribution de ces bandes fondamentales à σ^{st} prend la forme d'un mélange statistique (IV3f - 8) d'états $|\Phi_n\rangle$ d'extension spatiale petite devant λ . On s'attend donc à une forte modulation spatiale sur $\rho_-(z)$ et $\rho_+(z)$, $\rho_-(z)$ devant présenter des pics de densité sur les sites $l\frac{\lambda}{2}$, emplacement des fonds des puits de $U_{-1/2}(z)$, et $\rho_+(z)$ présentant ces pics en $\left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$. Il est possible d'estimer la mi-largeur z_e de ces pics à la hauteur relative $e^{-1/2}$ en assimilant les $|\Phi_n\rangle$ à des états propres de l'oscillateur harmonique ; comme les énergies cinétique et potentielle moyennes sont identiques dans le cas harmonique, on déduit directement z_e de l'approximation (IV3f - 18) :

$$k^2 U_0 z_e^2 \simeq \frac{(\Delta p_{\text{harm}}^{\text{liée}})^2}{2M} \quad (\text{IV3f - 19a})$$

$$k z_e \simeq \left\{ 2 + 2 \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{U_0}{E_R}} \right) \right] \right\}^{-1/2} \quad (\text{IV3f - 19b})$$

Cette expression dépend assez peu de $\frac{U_0}{E_R}$ et conduit à des valeurs de z_e proches de $0.4\frac{\lambda}{2\pi}$, pour U_0 de l'ordre de 100 ou $200 E_R$, ce qui est en bon accord avec le calcul numérique. Nous avons étudié également la modulation spatiale sur la densité totale des atomes $\rho(z) = \rho_+(z) + \rho_-(z)$, de période $\frac{\lambda}{4}$; nous caractérisons cette modulation par le rapport des valeurs extrêmales de $\rho(z)$, dont nous avons trouvé, à partir des calculs numériques, qu'il vérifie assez bien la loi :

$$\frac{\sup \rho(z)}{\inf \rho(z)} \simeq \left(\frac{U_0}{10E_R} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{IV3f - 20})$$

dès que les puits sont assez profonds ($U_0 \geq 20E_R$). Signalons sans donner la démonstration, que la forme de cette loi peut être déduite, dans la limite $\frac{U_0}{E_R} \rightarrow +\infty$, de l'approche semi-classique du §2b adaptée au régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$. Afin d'illustrer la présente discussion sur la distribution spatiale des atomes, nous représentons, sur la fig. IV-14, les densités $\rho_+(z)$, $\rho_-(z)$ et $\rho(z)$ pour une profondeur de puits $U_0 = 100E_R$ proche de l'optimum sur Δp (IV3f - 10). On constate que la dépendance en position de $\rho(z)$ est significative, mais qu'elle reste nettement plus faible que celle de $\rho_+(z)$ ou $\rho_-(z)$.

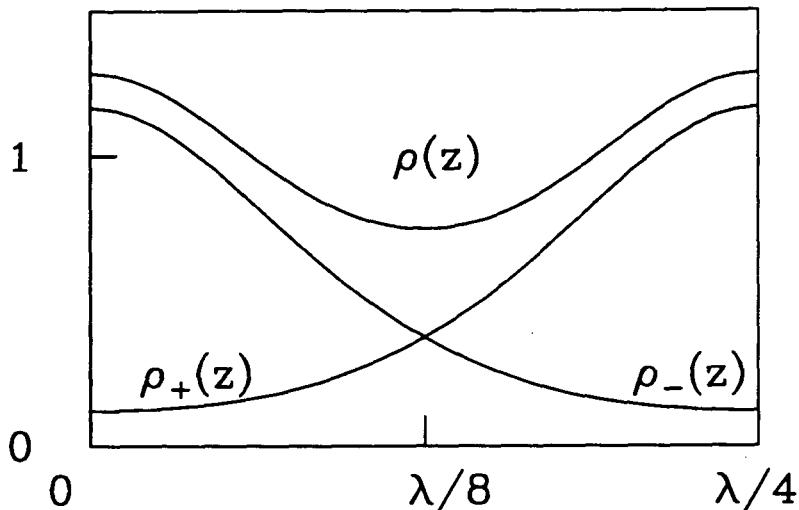


Fig. IV-14 : Pour $U_0 = 100E_R$, valeurs des densités spatiales d'atomes par sous-niveau interne, $\rho_+(z)$ et $\rho_-(z)$, ainsi que de la densité globale $\rho(z) = \rho_+(z) + \rho_-(z)$, normalisée sur $[0, \lambda]$. Les conditions du calcul numérique sont celles de la fig. IV-10.

g) Approximation séculaire sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$

Nous avons réduit, dans les paragraphes précédents, les équations quantiques sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ à des équations de taux entre populations, dans la limite séculaire $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$. Cependant, il a été fait usage, pour cette réduction, des propriétés particulières de la partie réactive des équations quantiques sur $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, qui permettent de se ramener à la recherche des états stationnaires d'une particule sans structure interne dans le potentiel $U_0 \sin^2(kz)$. Afin de prouver qu'une procédure de réduction des équations quantiques peut être appliquée à des transitions de moment cinétique

plus élevé, donc plus proches des conditions expérimentales, nous traitons ici le cas de $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

L'étude réalisée dans ce §g est cependant plus sommaire que pour $j_g = 1/2$. Nous nous contentons en particulier d'appliquer l'approximation séculaire à un modèle simplifié, dans lequel les photons de fluorescence ont une impulsion soit nulle, soit $\pm \hbar k$ le long de l'axe Oz , selon qu'ils sont polarisés linéairement ou circulairement par rapport à cet axe. Ceci a l'avantage de permettre une comparaison directe avec la résolution numérique des équations quantiques complètes, effectuée au §1 par évolution temporelle pour le même diagramme simplifié d'émission spontanée. L'inconvénient en est une surestimation probable de l'optimum du refroidissement.

(i) Expression du hamiltonien \mathcal{H}

L'expression générale de la partie hamiltonienne des équations de Bloch entièrement quantiques ramenées dans l'état fondamental a été obtenue au II§1c. Elle fait intervenir le hamiltonien \mathcal{H} , somme de l'énergie cinétique de l'atome et du potentiel $U(Z)$ qui décrit la partie réactive du couplage atome-rayonnement (cf. (II1c - 22)). L'action de $U(z)$ sur l'état atomique interne est déduite des parties ascendante $\mathcal{V}^{(+)}(z)$ et descendante $\mathcal{V}^{(-)}(z)$ du potentiel de couplage atome-laser convenablement réduit, dont on peut trouver les expressions pour la configuration laser $Ox - Oy$ dans l'appendice B_{IV}. Il est seulement important de savoir ici que l'amplitude du champ électrique laser est proportionnelle à $\sin(kz)$ pour la composante polarisée σ_+ selon Oz , et à $\cos(kz)$ pour la composante polarisée σ_- . Les transitions permises par l'action du laser seul sont représentées sur la fig. IV-15 pour la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, avec les coefficients de Clebsch-Gordan associés. L'absence de composante de polarisation selon Oz fait apparaître deux sous-espaces atomiques internes stables par $U(Z)$ et donc par \mathcal{H} , ce qui correspond graphiquement à la structure en V et en W visible sur la fig. IV-15.

Comme l'état $|g\ 0\rangle$ est le seul sous-niveau fondamental de la structure stable en V , il est nécessairement vecteur propre de $U(z)$, donc de déplacement lumineux bien défini. Il est facile de confirmer ceci par le calcul ; chaque sous-niveau du V dans l'état excité étant relié à un seul sous-niveau fondamental par le laser, il suffit d'additionner indépendamment les déplacements lumineux associés aux composantes de polarisation σ_+ et σ_- , comme nous l'avions fait sur $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$:

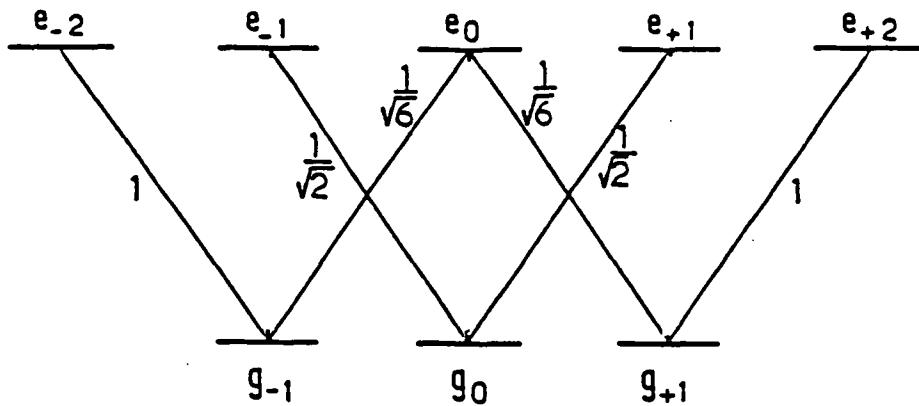


Fig. IV-15 : Transitions induites par le laser et coefficients de Clebsch-Gordan associés, pour la configuration $Ox - Oy$ sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

$$U(z)|g\ 0\rangle = \hbar\delta s_0 \left[\frac{1}{2} \cdot \sin^2(kz) + \frac{1}{2} \cdot \cos^2(kz) \right] |g\ 0\rangle \quad (\text{IV3g - 1})$$

On constate de plus, sur (IV3g - 1), que l'égalité des coefficients de Clebsch-Gordan pour le départ de $|g\ 0\rangle$ par transition σ_+ et σ_- rend le déplacement lumineux de ce sous-niveau proportionnel à l'intensité lumineuse totale au point z , intensité indépendante de la position dans la configuration $Ox - Oy$. La restriction \mathcal{H}_V du hamiltonien \mathcal{H} aux vecteurs d'état interne $|g\ 0\rangle$ présente donc un terme d'énergie potentielle constant :

$$\mathcal{H}_V = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}\hbar\delta s_0 \quad (\text{IV3g - 2})$$

Les états propres sont simplement ceux d'une particule libre, ce qui constitue une propriété particulière à la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

La diagonalisation de \mathcal{H} restreint au système en W est, elle, bien plus difficile. En effet, les contributions aux déplacements lumineux des composantes σ_+ et σ_- ne sont plus indépendantes, le sous-niveau excité $|e\ 0\rangle$ servant de relais pour le couplage entre $|g\ 1\rangle$ et $|g\ -1\rangle$ par absorption d'un photon laser σ_- et émission stimulée d'un photon laser σ_+ . On obtient ainsi, à partir du sous-niveau $|g\ 1\rangle$:

$$\begin{aligned} U(z)|g\ 1\rangle &= \hbar\delta s_0 \left[1 \cdot \sin^2(kz)|g\ 1\rangle + \frac{1}{6} \cdot \cos^2(kz)|g\ 1\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \cdot \cos(kz) \cdot (-i \sin(kz))|g\ -1\rangle \right] \quad (\text{IV3g - 3}) \end{aligned}$$

La restriction \mathcal{H}_W du hamiltonien \mathcal{H} aux vecteurs d'état interne $|g \pm 1\rangle$ peut être mise sous la forme :

$$\mathcal{H}_W = \frac{P^2}{2M} - \frac{6}{5}U_1 + U_1 [\cos^2(kZ)|+\rangle\langle+| + \sin^2(kZ)|-\rangle\langle-| + \frac{i}{10}\sin(2kZ)(|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|)] \quad (\text{IV3g - 4a})$$

$$U_1 = -\frac{5}{6}\hbar\delta s_0 \quad (\text{IV3g - 4b})$$

où la notation $|m\rangle$ tient lieu par commodité de $|g m\rangle$. Les éléments diagonaux de \mathcal{H}_W dans la base $|\pm\rangle$ sont certes similaires à ceux de \mathcal{H} sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, ce qui nous a permis d'introduire selon (IV3g - 4b) une "profondeur de puits" U_1 . Cependant, l'existence d'éléments non diagonaux pour \mathcal{H}_W (seconde ligne de (IV3g - 4a)), nous interdit de considérer comme indépendantes les composantes des états propres de \mathcal{H}_W selon $|+\rangle$ et $|-\rangle$, et nous constraint à chercher ces états propres sous la forme la plus générale, spinorielle :

$$\langle z|\psi\rangle = \psi_+(z)|g 1\rangle + \psi_-(z)|g -1\rangle \quad (\text{IV3g - 5})$$

(ii) Etude simple de \mathcal{H}_W

Nous envisageons maintenant deux approximations différentes, très simples, permettant de se faire une première idée du spectre de \mathcal{H}_W . Ces approximations peuvent être le départ de traitements perturbatifs, mais nous ne les poussons pas ici plus avant, car nous exposerons, au (iii), une procédure beaucoup plus efficace d'un point de vue calculatoire.

La première approximation consiste à traiter perturbativement le couplage dans \mathcal{H}_W entre $|g 1\rangle$ et $|g -1\rangle$. A l'ordre 0, ce terme non diagonal est simplement négligé. On se retrouve alors précisément dans la situation de la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, avec des états propres d'état interne $|g 1\rangle$ ou $|g -1\rangle$ bien défini, associés à un potentiel en $U_1 \sin^2(kz)$ ou en $U_1 \cos^2(kz)$, de période $\frac{\lambda}{2}$. Ces états propres peuvent donc être numérotés comme au §b, sous la forme $|n, q, \pm\rangle$, où l'entier n est l'indice de bande et $q \in]-k, k]$ est l'indice de Bloch. A cet ordre du calcul, les états $|n, q, +\rangle$ et $|n, q, -\rangle$ ont la même énergie $E_{n,q}$; les bandes d'énergie sont très étroites lorsque $E_{n,q} < -\frac{1}{5}U_1$, et sont pratiquement jointives pour des énergies supérieures. Cette situation est résumée sur la fig. IV-16a et b.

Achevons la discussion de la première approximation par un examen qualitatif du spectre à l'ordre suivant en la perturbation. On sait qu'à l'ordre 1, il convient de diagonaliser cette perturbation à l'intérieur de chaque sous-espace dégénéré $\{|n, q, +\}, |n, q, -\}\}$, l'effet attendu étant une levée de dégénérescence. On constate facilement que cette levée de dégénérescence ne se produit pas pour la valeur particulière $q = 0$ de l'indice de Bloch ; c'est que les fonctions d'onde $\langle z|n, 0, +\rangle$ et $\langle z|n, 0, -\rangle$ sont de même parité, alors que la perturbation en $\sin(2kz)$ est impaire. Par contre, on peut montrer que cette levée de dégénérescence a bien lieu pour $q \neq 0$, et qu'elle est maximale en bord de zone de Brillouin ($q = k$), où les états $\langle z|n, k, +\rangle$ et $\langle z|n, k, -\rangle$ sont de parités opposées. Il se produit donc, comme sur la fig. IV-17, un dédoublement des bandes en deux branches, ce qui s'accompagne d'un élargissement. Il reste à examiner l'importance de la levée de dégénérescence en fonction de l'indice de bande n . Il suffit pour cela d'estimer le recouvrement spatial entre les fonctions d'onde $\langle z|n, q, +\rangle$ et $\langle z|n, q, -\rangle$. L'approximation WKB nous apprend que ces fonctions d'onde sont non négligeables essentiellement en les régions permises pour le mouvement classique d'énergie $E_{n,q}$ dans les potentiels $U_1 \cos^2(kz) - \frac{6}{5}U_1$ et $U_1 \sin^2(kz) - \frac{6}{5}U_1$ respectivement. On peut vérifier que ces régions sont disjointes lorsque $E_{n,q} < \frac{1}{2}U_1 - \frac{6}{5}U_1 = -\frac{7}{10}U_1$, alors qu'elles s'intersectent pour des énergies supérieures. On s'attend donc à ce que le couplage par processus stimulés entre les sous-niveaux $|g \pm 1\rangle$ provoque un élargissement notable des bandes seulement pour des énergies au-dessus de la mi-profondeur des puits de la fig. IV-16a.

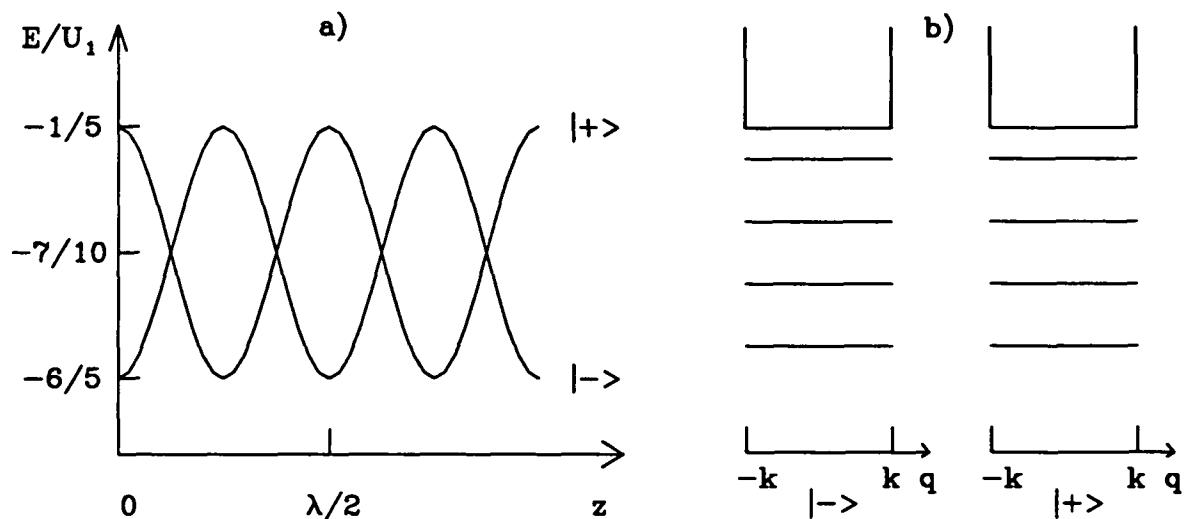


Fig. IV-16 : Lorsque le couplage par processus stimulés entre $|g 1\rangle$ et $|g -1\rangle$ est négligé, potentiels intervenant dans \mathcal{H}_W (a) et structure de bande du spectre correspondant (b).

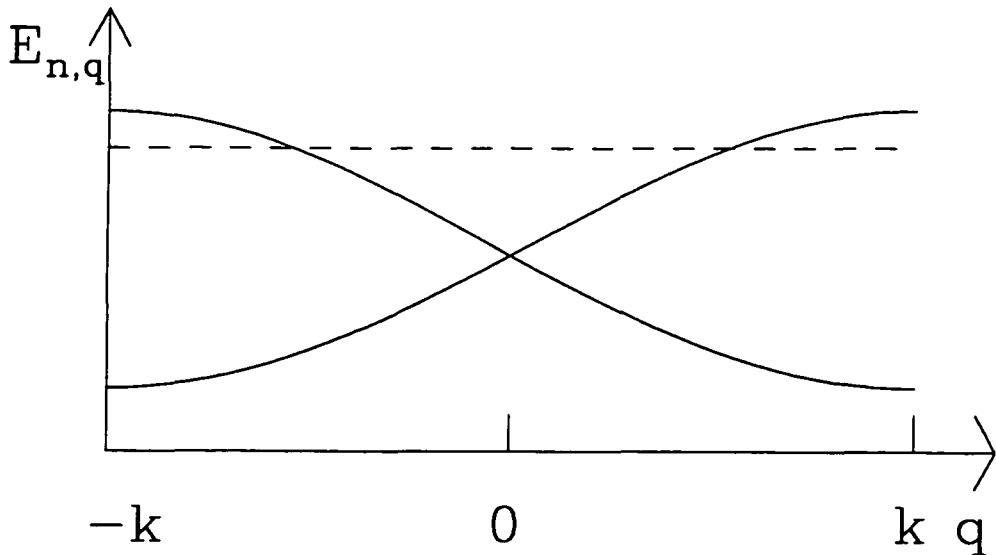


Fig. IV-17 : Sous l'influence du couplage entre $|g\ 1\rangle$ et $|g\ -1\rangle$, levée de dégénérescence dans la structure de bande. Les deux bandes dégénérées non perturbées, représentées en tirets, sont choisies dans la partie "liée" du spectre de la fig. IV-16b. Le calcul des bandes perturbées est effectué à tous les ordres, selon les résultats du (iii).

La seconde approche que nous présentons maintenant est d'un esprit différent ; elle consiste à ramener la diagonalisation de \mathcal{H}_W à un problème aux valeurs propres avec des termes d'énergie potentielle diagonaux, et à faire l'hypothèse de suivi adiabatique des états propres du potentiel $U(z)$ par la fonction d'onde. On introduit donc pour cela la base propre de $U(z)$ en chaque point z :

$$U(z) = E_1(z)|1\rangle\langle 1| + E_2(z)|2\rangle\langle 2| \quad (\text{IV3g - 6a})$$

$$|1\rangle = \cos \theta(z)|g\ 1\rangle + i \sin \theta(z)|g\ -1\rangle \quad (\text{IV3g - 6b})$$

$$|2\rangle = -\sin \theta(z)|g\ 1\rangle + i \cos \theta(z)|g\ -1\rangle \quad (\text{IV3g - 6c})$$

Les potentiels $E_1(z)$ et $E_2(z)$ sont représentés sur la fig. IV-18a. Ils sont proches des éléments diagonaux de $U(z)$ dans la base $|g\ \pm 1\rangle$, en pointillés sur la fig. IV-18a, sauf au voisinage des points de dégénérescence $z = \frac{\lambda}{8} \left[\frac{\lambda}{4} \right]$, en lesquels les termes non diagonaux en $\frac{i}{10} \sin(2kz)$ sont responsables d'un anticroisement. Par rapport aux potentiels non perturbés de la fig. IV-16a, la période spatiale est abaissée à $\frac{\lambda}{4}$ et la profondeur de puits n'est que de $\frac{2}{5} U_1$. L'introduction de cette base conduit donc à chercher les états propres de \mathcal{H}_W sous la forme :

$$\langle z|\psi\rangle = \psi_1(z)|1\rangle + \psi_2(z)|2\rangle \quad (\text{IV3g - 7})$$

L'action de $U(Z)$ sur $|\psi\rangle$ est alors diagonale. Cependant, comme la nouvelle base dépend du point z considéré, l'expression de l'énergie cinétique $\frac{P^2}{2M}$ est en contrepartie beaucoup plus complexe, puisqu'elle introduit un couplage "inertiel" entre les deux composantes ψ_1 et ψ_2 du spinor. On aboutit finalement au système suivant :

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\psi_1'' + E_1(z)\psi_1 + \frac{\hbar^2}{2M}[2\psi_2'\theta' + \psi_2\theta'' + \theta'^2\psi_1] = E\psi_1 \quad (\text{IV3g - 8a})$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\psi_2'' + E_2(z)\psi_2 - \frac{\hbar^2}{2M}[2\psi_1'\theta' + \psi_1\theta'' - \theta'^2\psi_2] = E\psi_2 \quad (\text{IV3g - 8b})$$

L'approximation naturellement issue de (IV3g - 8a) consiste à traiter perturbativement les termes en θ' , θ'' et θ'^2 , donc à exploiter une éventuelle lente variation de l'angle θ avec la position, ce qui, d'après l'expression :

$$\theta'(z) = \frac{5k}{1 + 24\cos^2(2kz)} \quad (\text{IV3g - 9})$$

est bien le cas au voisinage de $z = 0 \left[\frac{\lambda}{4} \right]$. A l'ordre 0, on ne retient que les deux premiers termes dans le membre de gauche de (IV3g - 8a) et (IV3g - 8b) ; les deux composantes sont découplées et l'on peut chercher les vecteurs propres avec $\psi_2 = 0$ ou $\psi_1 = 0$. On suppose donc, à cet ordre du calcul, que les atomes sont en chaque point z dans un état interne $|1\rangle$ ou $|2\rangle$ bien déterminé, ce qui constitue finalement une hypothèse de "suivi adiabatique". La forme correspondante du spectre de \mathcal{H}_W est représentée sur la fig. IV-18b. On obtient deux structures en bandes $E_{n,q,1}$ et $E_{n,q,2}$ associées aux potentiels $E_1(z)$ et $E_2(z)$. Comme ces potentiels sont de période $\frac{\lambda}{4}$, l'indice de Bloch q est compris entre $-2k$ et $2k$; si l'on souhaite se ramener à la zone de Brillouin pour les potentiels de la fig. IV-16a, il est nécessaire de replier les bandes $E_{n,q,1}$ et $E_{n,q,2}$ dans l'intervalle $[-k, k]$ pour q , ce qui leur donne une structure en double branche, comme sur la fig. IV-17. De plus, on peut estimer que les états "liés" du potentiel $E_1(z)$ représentent une bonne approximation du véritable spectre de \mathcal{H}_W , car ces états sont bien séparés en énergie de ceux du potentiel $E_2(z)$. On s'attend donc à ce que les bandes d'énergie de \mathcal{H}_W soient étroites tant que leur énergie reste inférieure à $-\frac{4}{5}U_1$. La situation est moins claire pour les états "liés" du

potentiel $E_2(z)$, qui sont dégénérés avec les états “quasi-libres” du potentiel $E_1(z)$; on peut admettre raisonnablement que tous ces états donnent naissance, aux ordres suivants du calcul perturbatif, à une structure en bandes élargies d’énergie comprises entre $-\frac{3}{5}U_1$ et $-\frac{1}{5}U_1$. Ce calcul est cependant plus difficile à conduire que dans le cadre de la première approximation du présent (ii), les potentiels $E_1(z)$ et $E_2(z)$ ayant une dépendance en position assez complexe.

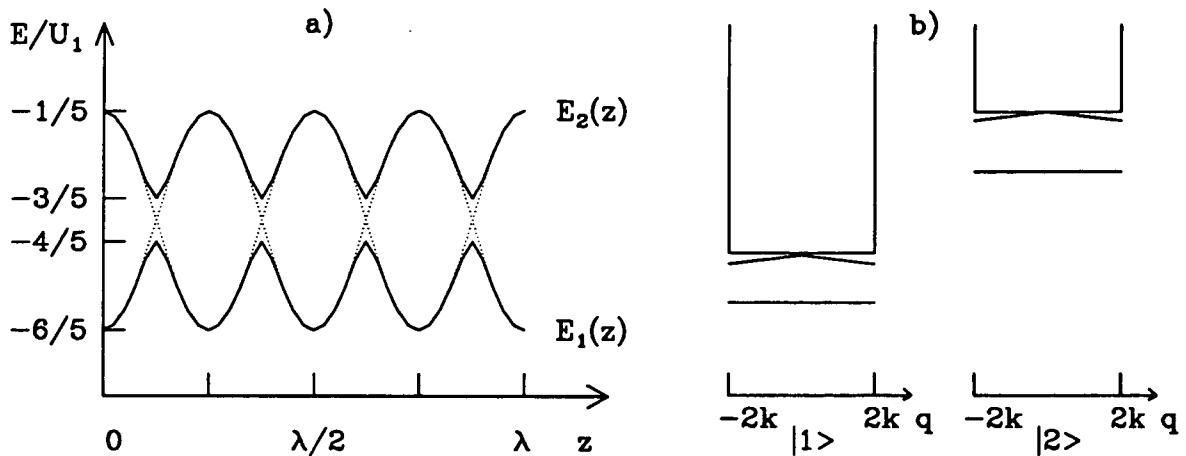


Fig. IV-18 : Dans l’hypothèse de “suivi adiabatique” ($\theta' \simeq 0$ et $\theta'' \simeq 0$ dans (IV3g - 8)), dépendance en z des potentiels $E_1(z)$ et $E_2(z)$ (a), et forme schématique des deux structures en bandes d’énergie pour chacun des potentiels (b).

(iii) Calcul du spectre de \mathcal{H}_W

Abordons maintenant le calcul exact du spectre de \mathcal{H}_W . En utilisant les propriétés de symétrie du hamiltonien \mathcal{H} , nous allons ramener la diagonalisation de \mathcal{H}_W à un problème aussi simple que dans le cas de la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, problème qu’il est ensuite facile de résoudre numériquement.

L’étude des symétries de la configuration laser $Ox - Oy$ fait l’objet de l’appendice B_{IV} ; on y met en évidence, pour une transition à moment cinétique j_g arbitraire, un groupe de symétries engendré par deux éléments, T (comme “translation”) et \mathcal{I} (comme “inversion”). La diagonalisation simultanée de \mathcal{H}_W et T fait apparaître une indexation du spectre par deux nombres quantiques : l’indice de Bloch q , avec $-k < q \leq k$, et le signe $\varepsilon_T = \pm$. De plus, elle établit un lien entre les deux composantes (IV3g - 5) du spinor :

$$\psi_+(z) = \varepsilon_T e^{iq\frac{\lambda}{4}} \psi_-(z - \frac{\lambda}{4}) \quad (\text{IV3g - 10})$$

ce qui permet de réduire la diagonalisation de \mathcal{H}_W à un problème aux valeurs propres sur une seule composante du spinor, que nous choisissons être $\psi_-(z)$. On arrive ainsi à :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \partial_z^2 - \frac{6}{5} U_1 + U_1 \sin^2(kz) - E_{q,\varepsilon_T} \right] \psi_-(z) - \frac{i}{10} \varepsilon_T e^{iq\frac{\lambda}{4}} U_1 \sin(2kz) \psi_-(z - \frac{\lambda}{4}) = 0 \quad (\text{IV3g - 11a})$$

$$\psi_-(z - \frac{\lambda}{2}) = e^{-iq\frac{\lambda}{2}} \psi_-(z) \quad (\text{IV3g - 11b})$$

Ce problème est certes non local en position, mais nous verrons que ceci ne rend pas sa résolution numérique plus difficile que sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$. A cause de la condition (IV3g - 11b), les énergies propres E_{q,ε_T} forment, à q et ε_T fixés, un ensemble discret. Nous sommes ainsi parvenu à indexer le spectre de \mathcal{H}_W par (n, q, ε_T) , où n est entier :

$$\mathcal{H}_W |n, q, \varepsilon_T\rangle = E_{n,q,\varepsilon_T} |n, q, \varepsilon_T\rangle \quad (\text{IV3g - 12})$$

Il reste à utiliser l'invariance de \mathcal{H}_W par \mathcal{I} . Celle-ci est cependant de porté plus limitée ; il est en effet impossible de diagonaliser simultanément \mathcal{H}_W , T et \mathcal{I} car les opérateurs T et \mathcal{I} ne commutent pas. Elle fournit néanmoins le renseignement suivant sur le spectre (voir l'appendice B_{IV}) :

$$E_{n,q,\varepsilon_T} = E_{n,-q,-\varepsilon_T} \quad (\text{IV3g - 13})$$

ce qui permet de se restreindre au calcul des bandes d'indice $\varepsilon_T = +$.

Passons à la résolution numérique du problème aux valeurs propres (IV3g - 11). Il est commode, pour prendre en compte la condition aux limites (IV3g - 11b) et pour gérer la non-localité en z du potentiel effectif de (IV3g - 11a), de décomposer $\psi_-(z)$ en série de Fourier de la façon suivante :

$$\psi_-(z) = e^{iqz} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{2il kz} \quad (\text{IV3g - 14})$$

Le système aux valeurs propres correspondant pour les coefficients de Fourier est très simple :

$$\left[\frac{\hbar^2(q+2lk)^2}{2M} - \frac{6}{5}U_1 + \frac{1}{2}U_1 - E_{q,\epsilon_T} \right] a_l - \frac{1}{4}U_1(a_{l+1} + a_{l-1}) - \frac{(-1)^l}{20}\epsilon_T U_1(a_{l+1} - a_{l-1}) = 0 \quad (\text{IV3g} - 15)$$

Il diffère du système équivalent pour $j_g = 1/2$ (cf. appendice F_{IV}) essentiellement par le terme proportionnel à ϵ_T , qui provient du couplage entre $|g 1\rangle$ et $|g -1\rangle$ par les processus stimulés.

La dépendance en fonction de l'indice de Bloch q des énergies $E_{n,q,\pm}$ à paramètre U_1 fixé fait l'objet de la fig. IV-19a. On y retrouve une structure en bandes d'énergie continues alternativement permises et interdites, comme pour la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, avec la différence que les bandes permises présentent une double branche correspondant aux deux signes \pm du nombre quantique ϵ_T . L'évolution du spectre de \mathcal{H}_W en fonction du paramètre U_1 est représentée sur la fig. IV-19b, les bandes d'énergie permises étant repérées par les zones grisées. On remarque alors, à la différence de la fig. IV-6b, l'existence d'un domaine intermédiaire entre le régime des bandes "quasi-libres" (qui semble bien commencer à $E > -\frac{1}{5}U_1$) et des bandes très étroites donc vraiment "liées" ; dans ce domaine intermédiaire, les bandes d'énergie sont à la fois larges et bien séparées.

Toutes ces caractéristiques du spectre de \mathcal{H}_W ont déjà été discutées qualitativement au paragraphe (ii) précédent.

(iv) Le modèle à émission spontanée simplifiée

Désormais, nous limitons notre étude de la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ au cas particulier d'un diagramme simplifié d'émission spontanée. Ce diagramme a déjà été évoqué au §1 ; il attribue aux photons de fluorescence une impulsions de $\pm \hbar k$ selon Oz lorsqu'ils sont polarisés circulairement par rapport à cet axe, et une impulsions nulle selon Oz lorsqu'ils sont polarisés linéairement le long de cet axe. Son intérêt est d'être compatible avec une discrétisation très grossière de l'impulsion atomique selon Oz . En nous laissant guider par les considérations de symétrie de l'appendice B_{IV}(iii), nous choisissons pour des atomes d'état interne $|g 0\rangle$ une impulsions multiple pair de $\hbar k$.

Voyons quels sont les vecteurs propres du hamiltonien \mathcal{H} sélectionnés par ce modèle. En ce qui concerne le système en W , la discrétisation choisie permet d'obtenir n'importe quel état propre de \mathcal{H}_W , pourvu qu'il soit d'indice de Bloch $q = k$. Nous utilisons pour ces états la notation suivante :

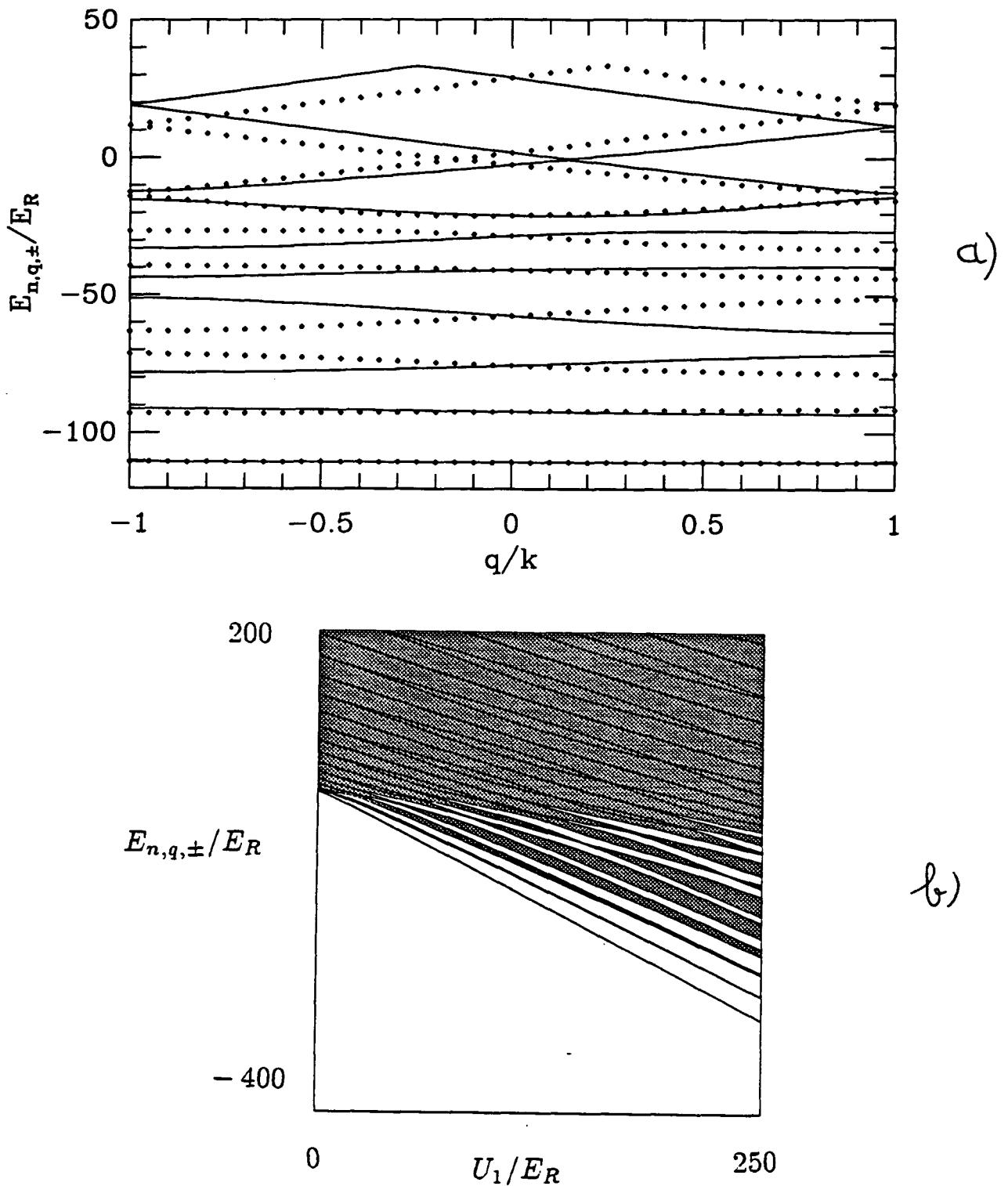


Fig. IV-19 : Spectre d'énergie de \mathcal{H} restreint aux sous-niveaux $|g \pm 1\rangle$ sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$. Sur la fig. a est représentée la dépendance en l'indice de Bloch q de $E_{n,q,+}$ (en trait plein) et de $E_{n,q,-}$ (en pointillés) pour les premières bandes ($0 \leq n \leq 9$), lorsque $U_1 = 100E_R$. Sur la fig. b, les zones grisées correspondent aux énergies permises, pour U_1 variant de 0 à $250E_R$. Les lignes en pointillés représentent la variation avec U_1 , des fonds des puits et des sommets des collines pour les potentiels $E_1(z)$ et $E_2(z)$, dont la dépendance en position est donnée sur la fig. IV-18a. Toutes les énergies sont en unité d'énergie de recul E_R .

$$\|n, \varepsilon_T\rangle_W = |n, q = k, \varepsilon_T\rangle \quad (\text{IV3g - 16a})$$

et nous remarquons (cf. appendice B_{IV}) qu'ils sont de symétrie bien définie sous l'action de l'opérateur \mathcal{I} , ce qui permet de leur attribuer un nombre quantique $\varepsilon_{\mathcal{I}}$ défini comme suit :

$$\mathcal{I} \|n, \varepsilon_T\rangle_W = i\varepsilon_{\mathcal{I}} \|n, \varepsilon_T\rangle_W \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{\mathcal{I}} = (-1)^n \quad (\text{IV3g - 16b})$$

Quant aux ondes planes états propres de \mathcal{H}_V , il est commode d'en effectuer des combinaisons linéaires de parité bien définie, la restriction de \mathcal{I} au sous-niveau $|g 0\rangle$ étant simplement l'inversion spatiale :

$$\|n, \varepsilon_{\mathcal{I}}\rangle_V = \frac{1}{\sqrt{2}} |g 0\rangle \otimes [|p = 2n\hbar k\rangle + \varepsilon_{\mathcal{I}} |p = -2n\hbar k\rangle] \quad \text{si } n \neq 0 \quad (\text{IV3g - 17a})$$

$$|0, +\rangle_V = |g 0\rangle \otimes |p = 0\rangle \quad (\text{IV3g - 17b})$$

Ces combinaisons ont aussi l'avantage d'être vecteurs propres de T :

$$T \|n, \varepsilon_{\mathcal{I}}\rangle_V = \varepsilon_{\mathcal{I}} \|n, \varepsilon_{\mathcal{I}}\rangle_V \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{\mathcal{I}} = (-1)^n \quad (\text{IV3g - 18})$$

(v) Le régime de l'approximation séculaire

Nous reprenons la démarche de réduction des équations quantiques dans l'approximation séculaire, telle qu'elle a été présentée au §3c, en la transposant au modèle à émission spontanée simplifiée sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$.

La première étape consiste en la détermination de la condition d'approximation séculaire, qui rend légitime le traitement perturbatif de la partie dissipative du couplage atome-rayonnement. Comme il n'existe aucune cohérence entre les systèmes en W et en V dans l'état stationnaire, il suffit d'examiner successivement les écarts d'énergie minimaux ΔE_{inf} pour le spectre de \mathcal{H}_V et le spectre de \mathcal{H}_W , et d'imposer finalement $\Delta E_{\text{inf}} \gg \frac{1}{2}\hbar\Gamma s_0$.

Les premiers niveaux d'énergie de \mathcal{H}_W intervenant dans le modèle à émission spontanée simplifiée sont représentés sur la fig. IV-20, d'une part sans distinction des propriétés de symétrie, d'autre part avec classification selon les deux nombres quantiques $(\varepsilon_T, \varepsilon_{\mathcal{I}})$. Nous savons que, dans l'état stationnaire, la matrice densité atomique ne présente aucune

cohérence entre des états de symétries différentes pour T ou I . On constate ainsi que des quasi-dégénérences dans le spectre de \mathcal{H}_W , qui semblent à première vue remettre en question la possibilité de toute approximation séculaire, ne jouent en fait aucun rôle, lorsque l'écart d'énergie minimal pertinent, c'est-à-dire entre états de mêmes ϵ_T et ϵ_I , est considéré :

$$\Delta E_{\text{inf}}^W = \inf_{\epsilon_T=\pm} \inf_{n-n' \text{ pair} \neq 0} |E_{n,\epsilon_T}^W - E_{n',\epsilon_T}^W| \quad (\text{IV3g - 19})$$

La discussion du paragraphe (iii) a montré que le spectre de \mathcal{H}_W possède une structure plus complexe que celui de \mathcal{H} sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$. Il est possible cependant de chercher à estimer (IV3g - 19), en supposant que l'écart minimal en énergie est atteint dans la partie quasi-harmonique du spectre associée au potentiel $U_1 \sin^2 kz - \frac{6}{5} U_1$, ce qui conduit à :

$$\Delta E_{\text{inf}}^W \simeq 4\sqrt{U_1 E_R} \quad (\text{IV3g - 20})$$

hypothèse raisonnablement bien vérifiée, même pour d'assez faibles valeurs de U_1 , comme le montre la fig. IV-21.

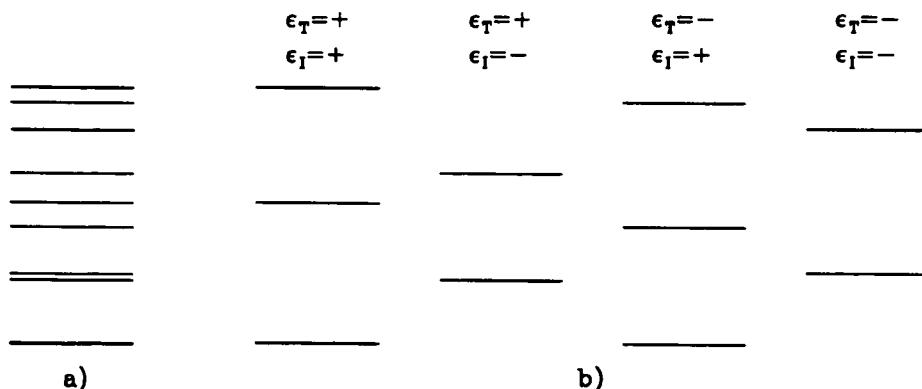


Fig. IV-20 : Les dix premiers niveaux ($0 \leq n \leq 4$) du hamiltonien \mathcal{H}_W restreint aux états (IV3g - 16) du modèle à émission spontanée simplifiée, pour $U_1 = 100 E_R$. Sur la fig. a, ces niveaux sont présentés sans considérations de symétrie. Sur la fig. b, ils sont partagés en quatre piles, selon les valeurs (\pm, \pm) des deux nombres quantiques ϵ_T et ϵ_I .

U_1/E_R	$4\sqrt{U_1/E_R}$	$\Delta E_{\text{inf}}^W/E_R$
0	0	8.00
25	20	15.59
100	40	32.30
225	60	53.46

Fig. IV-21 : Pour diverses valeurs de U_1 , comparaison de la valeur exacte de ΔE_{inf}^W (cf. (IV3g - 19)) obtenue numériquement et de son estimation harmonique (IV3g - 20).

Dans le cas du système en V , le calcul analytique du spectre est sans difficulté. On définit, à partir des états (IV3g - 17) et en directe analogie avec (IV3g - 19), l'écart minimal d'énergie pertinent pour effectuer l'approximation séculaire :

$$\Delta E_{\text{inf}}^V = \inf_{\varepsilon_T = \pm} \inf_{n-n' \text{ pair } \neq 0} |E_{n,\varepsilon_T}^V - E_{n',\varepsilon_T}^V| \quad (\text{IV3g - 21})$$

La valeur précise de cet écart, bien entendu indépendante du paramètre U_1 , est donnée par:

$$\Delta E_{\text{inf}}^V = 16E_R \quad (\text{IV3g - 22})$$

Cette valeur est plus faible que ΔE_{inf}^W dès que U_1 dépasse $25E_R$; c'est alors elle qui détermine la condition globale d'approximation séculaire :

$$16E_R \gg \frac{1}{2}\hbar\Gamma s_0 \quad (\text{IV3g - 23})$$

ce qui équivaut à, compte tenu de (IV3g - 4b) :

$$\frac{|\delta|}{\Gamma} \gg \frac{3}{80} \frac{U_1}{E_R} \quad (\text{IV3g - 24})$$

La deuxième étape dans la mise en œuvre de l'approximation séculaire consiste en le calcul des taux de transition entre les différents niveaux d'énergies $\|n, \varepsilon_T\rangle_W$ et $\|n, \varepsilon_T\rangle_V$. L'expression générale de ces taux a été obtenue, pour une transition arbitraire, au §3c (voir plus particulièrement (IV3c - 20)). Il reste à la transcrire de façon plus explicite pour la

transition particulière $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$, compte tenu de la simplification apportée au diagramme d'émission spontanée. Les formules correspondantes que nous avons obtenues sont regroupées en fin d'appendice F_{IV}, et nous nous contenterons ici d'une brève interprétation physique.

On peut exprimer les taux de transition entre états propres $|\psi\rangle$ et $|\psi'\rangle$ du hamiltonien \mathcal{H}_W , de façon à ne faire intervenir que des éléments de matrice d'opérateurs atomiques externes entre les différentes composantes $|\psi_{\pm}\rangle$ et $|\psi'_{\pm}\rangle$ des spineurs. Ces opérateurs atomiques externes réalisent essentiellement des translations en p , puisqu'ils décrivent les changements d'impulsion de l'atome à l'issue d'un cycle absorption d'un photon laser-émission d'un photon de fluorescence. On voit ainsi apparaître deux types d'amplitudes. Celles du premier type sont des éléments de matrice entre les composantes des deux spineurs $|\psi\rangle$ et $|\psi'\rangle$ associées au même état interne $|g \pm 1\rangle$. Celles du second type comportent des éléments de matrice entre $|\psi'_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$, ou $|\psi'_-\rangle$ et $|\psi_+\rangle$, donc sont "croisées" en ce qui concerne l'état atomique interne. Bien que ces deux sortes d'amplitudes soient ajoutées de façon cohérente dans l'expression des taux, leurs contributions au refroidissement sont très différentes. On peut montrer, par exemple, que la prise en compte des seules amplitudes du premier type conduit à des taux de transition invariants sous l'échange de l'état initial $|\psi\rangle$ et de l'état final $|\psi'\rangle$; on a vu au §3d(iii) qu'une telle propriété entraîne, sous évolution temporelle, une égalisation des populations des différents niveaux. Cette symétrie des taux est rompue par la contribution des amplitudes du second type, amplitudes qui sont donc à l'origine du refroidissement. Notons qu'il est possible de comprendre grossièrement cette différence des rôles des deux types d'amplitudes, si l'on admet, en suivant la première approximation du paragraphe (ii), que les composantes $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$ du spinor $|\psi\rangle$ sont assez proches des états propres des potentiels $U_1 \cos^2(kz) - \frac{6}{5}U_1$ et $U_1 \sin^2(kz) - \frac{6}{5}U_1$. Les amplitudes du premier type sont alors l'équivalent des transitions à état interne donné γ_{--} et γ_{+-} sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$, qui entraînaient seulement du chauffage; quant aux amplitudes du second type, elles jouent le rôle des transitions γ_{-+} et γ_{+-} , à l'origine de l'effet Sisyphe.

La dynamique du refroidissement sur $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$ fait encore intervenir d'autres catégories de transitions. Celles entre états propres de \mathcal{H}_V correspondent purement à de la diffusion en impulsion; l'état $\|n, \epsilon_I\rangle_V$ est couplé à ses proches voisins $\|n', \epsilon'_I\rangle_V$ (au sens où $|n - n'| = 1$), avec un taux de $\frac{1}{32}\Gamma s_0$ si n et n' sont non nuls, et un taux de $\frac{1}{16}\Gamma s_0$ si $n = 0$ ou $n' = 0$. Quant aux taux de transition entre états propres de \mathcal{H}_V et états propres de \mathcal{H}_W , ils sont simplement proportionnels au produit scalaire carré entre la partie externe

de $\|n, \varepsilon_T\rangle_V$ et la partie périodique, visible sur (IV3g - 14), de l'une des composantes du spinor $\|n', \varepsilon'_T\rangle_W$.

(vi) Les propriétés de l'état stationnaire

Pour terminer, après le calcul des divers taux de transition, il reste à déterminer, dans l'état stationnaire, les populations des niveaux d'énergie. Cette détermination, effectuée numériquement avec 80 bandes ($0 \leq n \leq 79$), nous donne accès en particulier à la distribution en impulsion, que l'on compare au calcul quantique par évolution temporelle du §1.

Caractérisons d'abord la matrice densité atomique stationnaire σ dans la base propre de \mathcal{H} . Il est agréable d'introduire, à cet effet, les populations des bandes d'énergie pour le système en W et en V respectivement. Dans notre modèle à émission spontanée simplifiée, nous ne prenons en compte qu'un seul indice de Bloch q par bande. Les populations des bandes sont alors définies par :

$$\Pi_n^W = \sum_{\varepsilon_T=\pm} w \langle n, \varepsilon_T \| \sigma \| n, \varepsilon_T \rangle_W \quad (\text{IV3g - 25a})$$

$$\Pi_n^V = \sum_{\varepsilon_I=\pm} v \langle n, \varepsilon_I \| \sigma \| n, \varepsilon_I \rangle_V \quad (\text{IV3g - 25b})$$

La dépendance des Π_n^W en fonction du paramètre de déplacement lumineux U_1 est représentée sur la fig. IV-22a. Comme pour la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, on constate que les populations des bandes admettent un maximum en fonction de U_1 . D'autre part, les valeurs obtenues pour les Π_n^V sont nettement plus faibles ; aussi se contente-t-on de montrer, sur la fig. IV-22b, la proportion d'atomes dont l'état interne se trouve dans le système en V .

Examinons ensuite la distribution en impulsion p . Comme pour la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, nous la caractérisons par l'impulsion quadratique moyenne Δp et par p_e , mi-largeur à la hauteur relative $e^{-1/2}$. On vérifie, sur la fig. IV-23, que Δp^2 varie pratiquement linéairement en U_1 lorsque ce paramètre est assez grand, et que Δp^2 décroît brutalement aux plus faibles valeurs de U_1 , cette variation brutale correspondant bien entendu à l'existence d'un seuil pour le refroidissement. Quant à p_e^2 , il reste inférieur à Δp^2 , ce qui est le signe de distributions en p non gaussiennes, et peut atteindre des valeurs beaucoup plus faibles que Δp^2 aux faibles valeurs de U_1 .

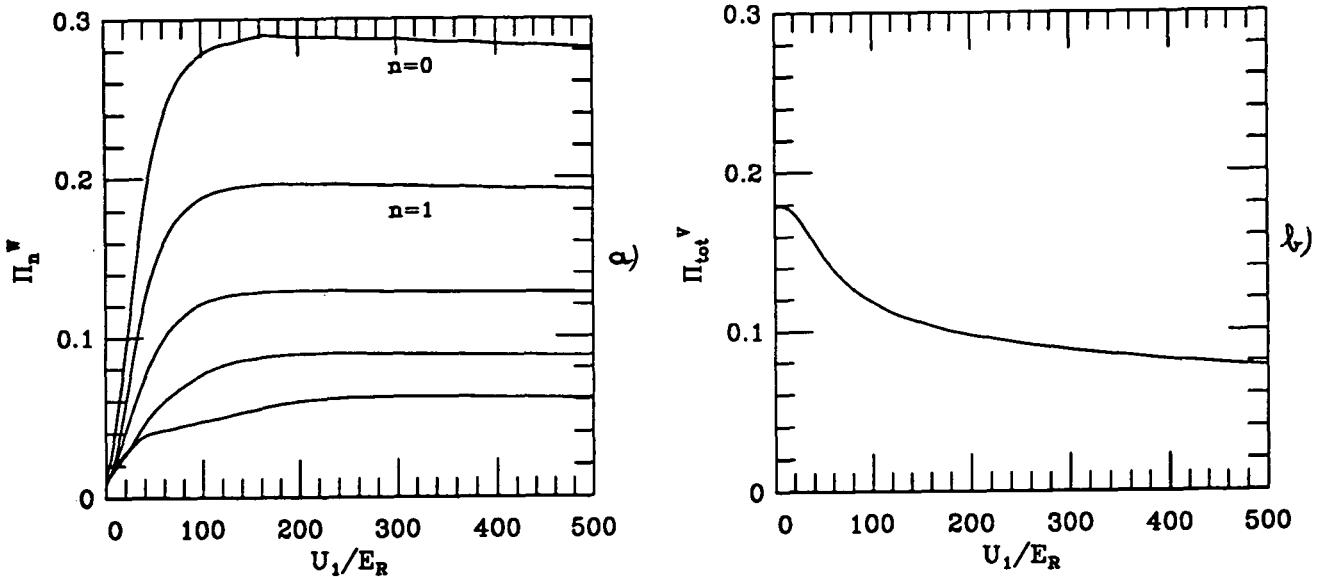


Fig. IV-22 : Dans l'état stationnaire, sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$, populations des premières bandes d'énergie pour le système en W (fig. a) et population totale des bandes pour le système en V (fig. b), en fonction du paramètre $U_1 = -\frac{5}{6}\hbar\delta s_0$ en unité d'énergie de recul. Le modèle utilisé est à émission spontanée simplifiée, avec $0 \leq n \leq 79$.

Pour terminer, nous effectuons, sur la fig. IV-24, une comparaison entre les prédictions du calcul quantique complet réalisé par évolution temporelle au §1 et celles de l'approche quantique dans le régime de l'approximation séculaire. Nous représentons à cet effet les distributions en impulsion obtenues par les deux méthodes pour $U_1 = 153.8E_R$. Dans le cas de l'évolution temporelle, il convient de préciser non seulement la valeur du désaccord ($\delta = -10\Gamma$, compatible avec (IV3g - 24)), mais aussi la masse de l'atome ($M\Gamma = 1285\hbar k^2$), puisque le refroidissement Doppler est pris en compte. On peut ainsi vérifier que l'accord est satisfaisant entre les deux approches.

En conclusion, nous avons donc déterminé les limites du refroidissement Sisyphe pour la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$, dans le cas particulier de l'émission spontanée simplifiée. On pourrait bien entendu, au prix de calculs plus compliqués, traiter le cas d'une émission spontanée plus réaliste. Sans faire ces calculs, indiquons-en les tendances probables, par comparaison avec ce que nous avons obtenu pour $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$. Notons pour

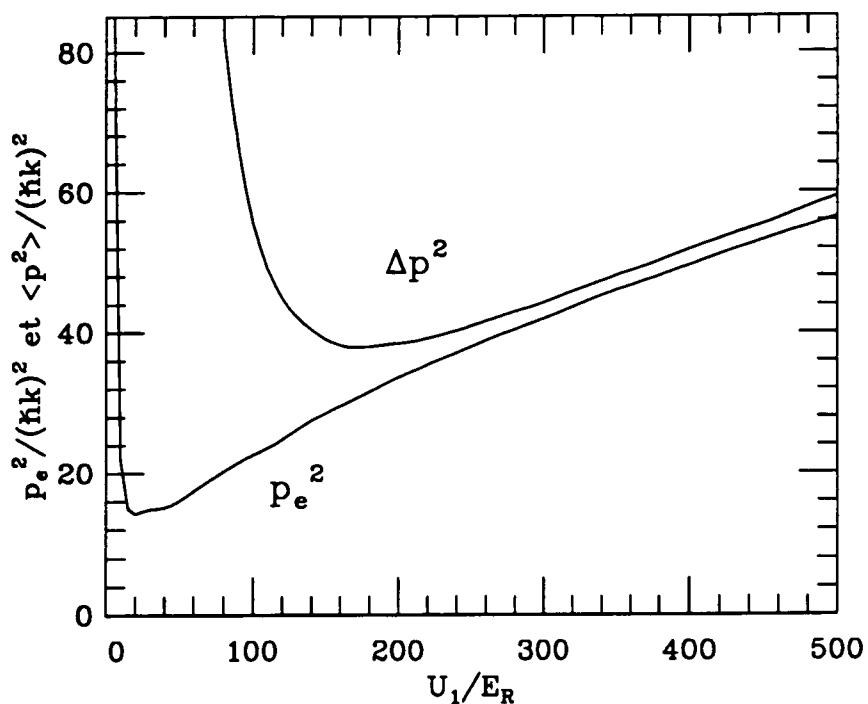


Fig. IV-23 : Valeurs de l'impulsion quadratique moyenne au carré, Δp^2 , et de la mi-largeur au carré, p_e^2 , en unité de $(\hbar k)^2$, en fonction de U_1 en unité d'énergie de recul. Le modèle est à émission spontanée simplifiée, avec $0 \leq n \leq 79$.

cela que l'optimum prédit par le présent modèle, $\Delta p \simeq 6.2\hbar k$, est comparable à celui ($\Delta p \simeq 6.6\hbar k$) calculé sur $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$ avec prise en compte du diagramme simplifié d'émission spontanée. Or, on peut raisonnablement espérer que le passage du diagramme simplifié au vrai diagramme fasse gagner environ $\hbar k$ sur la valeur minimale de Δp ; un tel abaissement de $\hbar k$ se produit en effet sur $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$ (comparer les résultats de (IV3f - 10) à $\Delta p = 6.6\hbar k$). Nous comptons vérifier ceci dans un avenir proche.

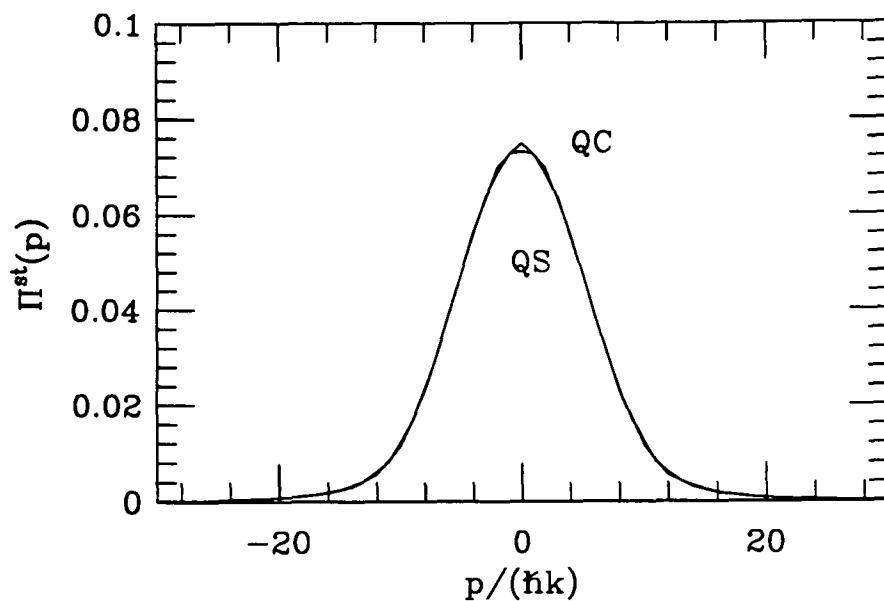


Fig. IV-24 : La distribution en impulsion notée QS est déduite de l'approximation séculaire, pour $U_1 = 153.8 E_R$. Celle notée QC est obtenue par évolution temporelle pendant $t = 20\ 000\Gamma^{-1}$ d'une distribution initiale gaussienne de $\Delta p = 6.5\hbar k$, et ceci pour les équations quantiques complètes au sens du §1, avec $\delta = -10\Gamma$, $\Omega = 1.2\Gamma$ et la masse de l'atome de césum ($M\Gamma = 1285\hbar k^2$). Dans les deux cas, le diagramme d'émission spontanée est simplifié.

THE LIMITS OF SISYPHUS COOLING

Y. Castin, J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de L'Ecole Normale Supérieure (*)
and Collège de France
24, Rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France

Appendice A_{IV}

Abstract: We present a theoretical analysis of the Sisyphus cooling occurring in a 1-D polarization gradient molasses. Starting from the full quantum equations of motion, we show that, in the limit of large detunings, the steady state atomic density matrix depends only on a single parameter U_0/E_R , where U_0 is the depth of the optical potential wells and E_R the recoil energy. The minimal kinetic energy is found to be on the order of $40 E_R$ and is obtained for $U_0 \simeq 100 E_R$. We derive also simple analytical equations of motion which confirm the physical picture of Sisyphus cooling. Steady state solutions of these equations are obtained in the two limiting cases of jumping particles (optical pumping time τ_P shorter than the oscillation period $2\pi/\Omega_{osc}$ in an optical potential well) and oscillating particles ($\Omega_{osc}\tau_P \gg 1$).

1. INTRODUCTION

Laser cooling is known to have led to extremely low atomic kinetic temperatures in the recent years [1]. Initially it was thought that Doppler cooling [2, 3] was sufficient to explain these temperatures. This type of laser cooling is based on the radiation pressure forces, exerted by identical counterpropagating laser waves on a moving atom, which become unbalanced because of opposite Doppler shifts. The temperatures achievable by Doppler cooling can be shown to be limited by the lower bound T_D :

$$k_B T_D = \hbar \Gamma / 2 . \quad (1.1)$$

However, the discovery in 1988 [4] of temperatures well below this theoretical Doppler limit T_D initiated a search for new cooling mechanisms, more effective than Doppler cooling.

First qualitative explanations were given soon after this experimental discovery [5, 6] and were followed by more quantitative treatments [7, 8]. They are based on the internal atomic ground state dynamics induced by the atomic motion in the polarization gradients of the molasses laser fields. These dynamics arise from the fact that the ground state of the atoms experimentally studied (Na, Cs) is degenerate. This had been left out of the previous theoretical models, which were dealing only with two level atoms. The internal atomic dynamics lead, for very low laser intensities, to long internal atomic pumping times which, when associated to differential light shifts of the various ground state sublevels, may be at the origin of a strong cooling and of sub-Doppler temperatures.

In this paper, we restrict ourselves to 1D molasses. In such a case, two distinct cooling mechanisms in a laser polarization gradient can be identified [7]. The first one, on which we will focus

(*) Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique et à l'Université Pierre et Marie Curie.

will focus in the following, occurs in the lin \perp lin configuration, formed by two orthogonally linearly polarized, counterpropagating plane waves. It arises from a "Sisyphus" effect: due to the spatial modulation of light shifts and optical pumping rates, the atom "ascends" more than it "descends" in its energy diagram. The second 1-D mechanism occurs in a superposition of two counterpropagating waves with σ_+ and σ_- polarizations. For a $J_g = 1 \longleftrightarrow J_e = 2$ atomic transition for instance, a strong cooling occurs, due to a differential scattering force induced by a very sensitive velocity-selective population difference appearing between the two ground state sublevels $|J_g, m_g = 1\rangle$ and $|J_g, m_g = -1\rangle$.

When the detuning $\delta = \omega_L - \omega_A$ between the laser and atomic frequencies is large compared to the natural width Γ , the Sisyphus mechanism leads, for very low velocities, to a cooling force and to a momentum diffusion coefficient stronger by a factor δ^2/Γ^2 than the ones for the second mechanism. We will therefore focus in the following on the Sisyphus cooling.

We will first (§ 2) give a qualitative description of Sisyphus cooling, restricting ourselves to a $J_g = 1/2 \longleftrightarrow J_e = 3/2$ transition. We will then present (§ 3) numerical results concerning the temperature achievable by this cooling. These results have been derived from a full quantum treatment of both internal and external degrees of freedom of the atom. Finally, we present in § 4 some elements for a semi-classical treatment of this process, in which the external motion can be analyzed in classical terms. We show that this approach allows some simple physical pictures, while giving results in good agreement with the exact quantum treatment.

2. QUALITATIVE DESCRIPTION OF SISYPHUS COOLING

2.1 The Laser Field

In this section, we outline the physical mechanism which leads to Sisyphus cooling for a $J_g = 1/2 \longleftrightarrow J_e = 3/2$ atomic transition (Fig. 1a). The laser electric field resulting from the superposition of two counterpropagating waves with respective polarizations ϵ_x and ϵ_y , respective phases at $z = 0$ equal to 0 and $-\pi/2$, and with the same amplitude \mathcal{E}_0 can be written:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathcal{E}^+(z)e^{-i\omega_L t} + c.c. \quad (2.1)$$

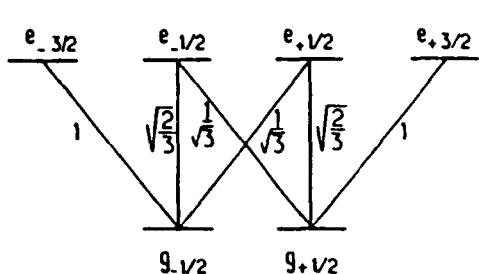
with :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+(z) &= \mathcal{E}_0 (\epsilon_x e^{ikz} - i\epsilon_y e^{-ikz}) \\ &= \sqrt{2}\mathcal{E}_0 \left(\cos kz \frac{\epsilon_x - i\epsilon_y}{\sqrt{2}} + i \sin kz \frac{\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

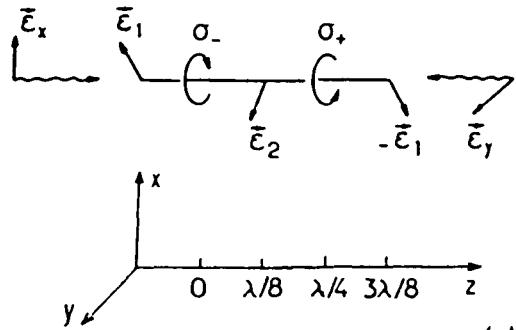
The total electric field is the superposition of two fields respectively σ_- and σ_+ polarized and with amplitudes $\mathcal{E}_0\sqrt{2}\cos kz$ and $\mathcal{E}_0\sqrt{2}\sin kz$. Therefore the resulting ellipticity depends on z . Light is circular (σ_-) at $z = 0$, linear along $(\epsilon_x - \epsilon_y)/\sqrt{2}$ at $z = \lambda/8$... (Fig. 1b).

2.2 The Atomic Internal Dynamics

We now determine the positions of the light shifted energy levels, assuming here that the laser intensity is low, so that we can restrict our analysis to the ground state density matrix. Furthermore, since the laser polarization is a superposition of σ_+ and σ_- , and since $J_g < 1$, the optical excitation cannot create Zeeman coherences with $\Delta m = \pm 2$ in the ground state so that we can restrict our discussion to populations.



(a)



(b)

Fig. 1a: Atomic level scheme and Clebsch-Gordan coefficients for a $J_g = 1/2 \longleftrightarrow J_e = 3/2$ transition.

Fig. 1b: The resulting polarization in a lin \perp lin configuration.

Suppose, for example, that $z = 0$ so that the polarization is σ_- (Fig. 1b). The atom is optically pumped into $g_{-1/2}$ so that the steady-state populations of $g_{-1/2}$ and $g_{1/2}$ are equal to 1 and 0, respectively. We must also note that, since the σ_- transition starting from $g_{-1/2}$ is three times as intense as the σ_+ transition starting from $g_{1/2}$, the light shift Δ'_- of $g_{-1/2}$ is three times larger (in modulus) than the light shift Δ'_+ of $g_{1/2}$. We assume here that, as usual in Doppler-cooling experiments, the detuning :

$$\delta = \omega_L - \omega_A \quad (2.3)$$

between the laser frequency ω_L and the atomic frequency ω_A is negative so that both light shifts are negative.

If the atom is at $z = \lambda/4$, where the polarization is σ_+ (Fig. 1b), the previous conclusions are reversed. The populations of $g_{-1/2}$ and $g_{1/2}$ are equal to 0 and 1, respectively, because the atom is now optically pumped into $g_{1/2}$. Both light shifts are still negative, but we now have $\Delta'_+ = 3\Delta'_-$.

Finally, if the atom is in a place where the polarization is linear, for example, if $z = \lambda/8, 3\lambda/8, \dots$, symmetry considerations show that both sublevels are equally populated and undergo the same (negative) light shift equal to $2/3$ times the maximum light shift occurring for a σ_+ or σ_- polarization.

All these results are summarized in Fig. 2a which shows as a function of z the light shifted energies of the two ground-state sublevels. The analytic expression for these light shifted energies $\hbar\Delta_{\pm}(z)$ can be derived simply from the expression for the laser field (2.2) and from the intensity factors of the various σ_+ and σ_- transitions given in Fig. 1a. One can indeed add independently the two light shifts created by the two σ_+ and σ_- standing waves appearing in (2.2), since $g_{1/2}$ and $g_{-1/2}$ are not connected to the same excited level :

$$\hbar\Delta_+(z) = \hbar\delta s_0 \sin^2 kz + \frac{1}{3}\hbar\delta s_0 \cos^2 kz = -U_0 + \frac{U_0}{2} \cos 2kz = -\frac{3U_0}{2} + U_+(z) \quad (2.4a)$$

$$\hbar\Delta_-(z) = \hbar\delta s_0 \cos^2 kz + \frac{1}{3}\hbar\delta s_0 \sin^2 kz = -U_0 - \frac{U_0}{2} \cos 2kz = -\frac{3U_0}{2} + U_-(z). \quad (2.4b)$$

with:

$$U_+(z) = U_0 \cos^2 kz \quad (2.4c)$$

$$U_-(z) = U_0 \sin^2 kz . \quad (2.4d)$$

The saturation parameter s_0 is defined as :

$$s_0 = \frac{\Omega^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4}, \quad (2.5)$$

where Ω is the Rabi frequency for each of the two running waves, calculated for a Clebsch-Gordan coefficient equal to 1 and for a reduced dipole moment for the transition equal to d :

$$\Omega = -2dE_0/\hbar. \quad (2.6)$$

The energy U_0 introduced in (2.4) :

$$U_0 = \frac{2}{3}\hbar(-\delta)s_0 > 0 \quad (2.7)$$

represents the modulation depth of the oscillating light shifted ground state sublevels. In the same way, one can derive the expression of the rate γ_+ at which the atom jumps from $g_{1/2}$ to $g_{-1/2}$:

$$\gamma_+ = \left(\frac{1}{3}\Gamma s_0 \cos^2 kz \right) \frac{2}{3} = \frac{2}{9}\Gamma s_0 \cos^2 kz . \quad (2.8)$$

This is the probability per unit time of absorbing a σ_- photon from $g_{1/2}$, and then decaying from $g_{-1/2}$ to $g_{-1/2}$ by emitting a π photon. In the same way, one gets :

$$\gamma_- = \frac{2}{9}\Gamma s_0 \sin^2 kz . \quad (2.9)$$

The characteristic internal relaxation time τ_p (i.e. optical pumping time) is then given by:

$$\frac{1}{\tau_p} = \gamma_+ + \gamma_- = \frac{2\gamma s_0}{9} . \quad (2.11)$$

2.3 Sisyphus Effect for a Moving Atom

We now consider an atom moving along Oz in the bi-potential $U_{\pm}(z)$. We suppose for instance that the atom is initially in the state $g_{1/2}$ with a kinetic energy much larger than the modulation depth U_0 (Fig. 2b). As the atom moves in $U_+(z)$, it may undergo a transition to $g_{-1/2}$. The rate γ_+ at which such a transition occurs is maximal around the tops of $U_+(z)$, the atom being then put in a valley for $U_-(z)$. This transition decreases the potential energy of the atom, while leaving its kinetic energy unchanged, if one neglects the momentum of the fluorescence photon involved in the process. From $g_{-1/2}$ the same sequence can be repeated so that the atom on the average climbs more than it goes down in its energy diagram. An

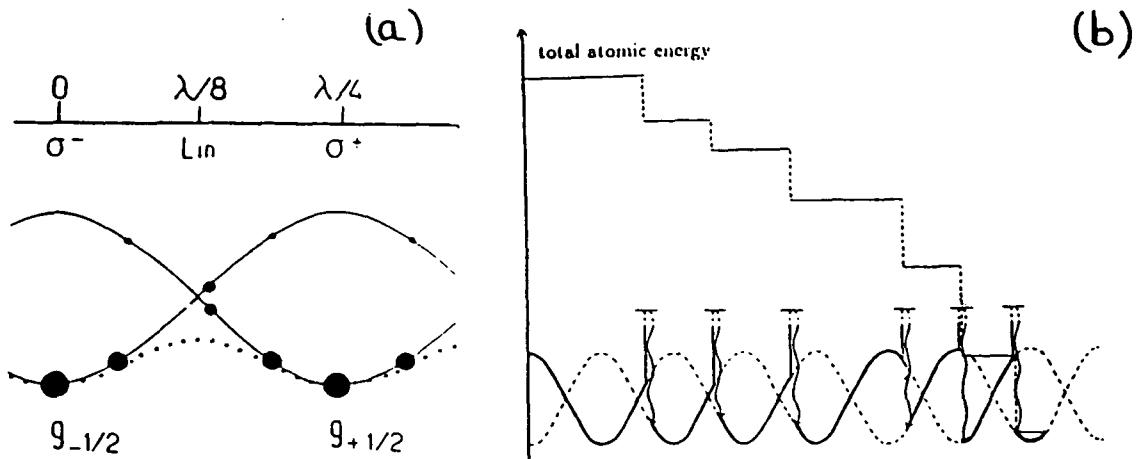


Fig. 2a: Light shifted energies and steady-state populations for a $J_g = 1/2$ ground state and for a negative detuning. The lowest sublevel, having the largest light shift, is also the most populated one. We have plotted in broken lines the average potential $\bar{U}(z)$ seen by the atom in the jumping case (§ 4.3).

Fig. 2b: Atomic Sisyphus effect. Because of the spatial modulation of the transition rates γ_{\pm} , a moving atom sees on the average more uphill parts than downhill ones and its velocity is damped. The random path sketched here has been obtained for $\delta = -5 \Gamma$ and $\Omega = 2.3 \Gamma$, and for the Cesium recoil shift $\hbar k^2/m\Gamma = 7.8 \cdot 10^{-4}$.

example of a sequence of successive discontinuous changes of the total atomic kinetic energy is represented in Fig. 2b. This constitutes an atomic realisation of the Sisyphus myth.

The intuitive limit of this type of cooling is the modulation depth U_0 of the potential: cooling is efficient until the average kinetic energy is so low that the atom cannot reach the top of the hills. (see for example the last jump represented in Fig. 2b). We will see in the following using a more rigorous treatment that the kinetic energies achievable by Sisyphus cooling are indeed on the order of a fraction of U_0 .

3. QUANTUM TREATMENT OF SISYPHUS COOLING

3.1 Principle of the Quantum Treatment

In order to make a quantitative treatment of Sisyphus cooling, we have made a numerical integration of the equation of motion of the atomic density matrix σ , involving both internal and external degrees of freedom. From the steady state value of σ , we can then derive several features of the atomic stationary distribution. For instance, the quantity:

$$\pi(p) = \sum_{int} \langle int, p | \sigma | int, p \rangle, \quad (3.1)$$

where the sum bears on all internal atomic states, gives the stationary momentum distribution. Similarly,

$$P(z) = \sum_{int} \langle int, z | \sigma | int, z \rangle \quad (3.2)$$

gives the spatial repartition of the atoms, etc...

The equation of evolution of σ is [9]:

$$\dot{\sigma} = \frac{i}{\hbar} [\sigma, H] + (\dot{\sigma})_{SE} \quad (3.3)$$

where the total hamiltonian H involves the center of mass kinetic energy term $P^2/2m$, the atomic internal Hamiltonian H_{int} and the atom laser coupling V_{AL} :

$$H_{int} = \sum_{m_e=-3/2}^{3/2} \hbar\omega_A |J_e, m_e\rangle \langle J_e, m_e| \quad (3.4a)$$

$$V_{AL} = \frac{\hbar\Omega}{i\sqrt{2}} \sin kZ \left(|e_{3/2}\rangle \langle g_{1/2}| + \frac{1}{\sqrt{3}} |e_{1/2}\rangle \langle g_{-1/2}| \right) e^{-i\omega_L t} + h.c. \\ + \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}} \cos kZ \left(|e_{-3/2}\rangle \langle g_{-1/2}| + \frac{1}{\sqrt{3}} |e_{-1/2}\rangle \langle g_{1/2}| \right) e^{-i\omega_L t} + h.c. \quad (3.4b)$$

where Z represents the atomic center of mass position operator. The term $(\dot{\sigma})_{SE}$ describes the relaxation of σ due to spontaneous emission processes.

To solve the equation of evolution (3.3), we expand σ in the momentum basis and we look for the evolution of matrix elements of the type $\langle i, p | \sigma | i', p' \rangle$, where i and i' stand for two internal states of the atom, and p and p' for two momenta. We get for instance :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(g_{1/2}, p; e_{3/2}, p') = & - \left(i \left(\delta + \frac{p^2 - p'^2}{2m\hbar} \right) + \frac{\Gamma}{2} \right) \sigma(g_{1/2}, p; e_{3/2}, p') \\ & + \frac{i\Omega}{2\sqrt{2}} (\langle g_{1/2}, p | \sigma | g_{1/2}, p' + \hbar k \rangle - \langle g_{1/2}, p | \sigma | g_{1/2}, p' - \hbar k \rangle) \\ & + \frac{i\Omega}{2\sqrt{2}} (\langle e_{3/2}, p + \hbar k | \sigma | e_{3/2}, p' \rangle - \langle e_{3/2}, p - \hbar k | \sigma | e_{3/2}, p' \rangle) \\ & - \frac{i\Omega}{2\sqrt{6}} (\langle e_{-1/2}, p + \hbar k | \sigma | e_{3/2}, p' \rangle + \langle e_{-1/2}, p - \hbar k | \sigma | e_{3/2}, p' \rangle), \end{aligned} \quad (3.5)$$

where we have put :

$$\sigma(g_{1/2}, p; e_{3/2}, p') = \langle g_{1/2}, p | \sigma | e_{3/2}, p' \rangle \exp(-i\omega_L t) \quad (3.6)$$

and where we have used :

$$e^{\pm ikZ} |p\rangle = |p \pm \hbar k\rangle. \quad (3.7)$$

In order to minimize the number of matrix elements involved in the calculation, we have chosen to discretize the momenta on a grid with the largest step compatible with equations such as (3.5). Thus we have chosen

$$\begin{aligned} \text{for } g_{1/2}, e_{1/2}, e_{-3/2}, \quad p = & -\frac{\hbar k}{2} + 2n\hbar k \\ \text{for } g_{-1/2}, e_{3/2}, e_{-1/2}, \quad p = & \frac{\hbar k}{2} + 2n'\hbar k \end{aligned} \quad (3.8)$$

where n and n' are positive or negative integers, and where the terms $\pm \hbar k/2$ have been put to keep the symmetry between $g_{+1/2}$ and $g_{-1/2}$. One can easily check that this momentum discretisation allows the integration of the evolution equation of optical "coherences" (matrix

elements involving one g and one e) such as (3.5) or of ee matrix elements (terms involving two excited states). On the other hand the evolution of ground state matrix elements (terms with two g) is more complicated because of the feeding of these terms by spontaneous emission. For instance, one gets [9]:

$$\begin{aligned} \langle\langle g_{1/2}, p | \dot{\sigma} | g_{1/2}, p' \rangle\rangle_{S.E.} &= \Gamma \int dp'' \mathcal{N}_{\sigma_+}(p'') \langle e_{3/2}, p + p'' | \sigma | e_{3/2}, p' + p'' \rangle \\ &+ \frac{2\Gamma}{3} \int dp'' \mathcal{N}_{\pi}(p'') \langle e_{1/2}, p + p'' | \sigma | e_{1/2}, p' + p'' \rangle \\ &+ \frac{\Gamma}{3} \int dp'' \mathcal{N}_{\sigma_-}(p'') \langle e_{-1/2}, p + p'' | \sigma | e_{-1/2}, p' + p'' \rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

where $\mathcal{N}_\epsilon(p'')dp''$ is the probability that, when a fluorescence photon with ϵ polarization is emitted, it will have a momentum along z between p'' and $p'' + dp''$ (dipole radiation pattern). Since p'' varies between $-\hbar k$ and $+\hbar k$, the only way to make (3.9) consistent with the momentum discretization is to take :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\sigma_+}(p'') &= \mathcal{N}_{\sigma_-}(p'') = \frac{1}{2}(\delta(p'' - \hbar k) + \delta(p'' + \hbar k)) \\ \mathcal{N}_{\pi}(p'') &= \delta(p''). \end{aligned} \quad (3.10)$$

This means that we will consider in the following that σ_\pm fluorescence photons are emitted along the Oz axis, while π polarized fluorescence photons are emitted orthogonally to the z axis. This constitutes a simplification of the real atomic dipole radiation pattern, but the modifications induced on the final calculated atomic distribution are small.

Once this approximation is made, we are left with a set of coupled differential equations that we truncate at a large value p_{max} of p and p' (p_{max} ranges between $40 \hbar k$ and $100 \hbar k$). We can numerically integrate these equations until the density matrix elements reach their steady state values, which are checked to be independent of the truncation p_{max} . Three independent parameters are necessary to specify the steady state : the reduced Rabi frequency Ω/Γ , the reduced detuning δ/Γ and the reduced recoil shift $\hbar k^2/m\Gamma$. Before giving the results of this integration, we now indicate how these equations can be simplified in the low intensity limit which is of interest here.

3.2 The Low Intensity Approximation

The previous equations such as (3.5) contain all the physics of the motion of a $J_g = 1/2 \longleftrightarrow J_e = 3/2$ atom in a lin \perp lin configuration. They are valid for any laser intensity and detuning, provided that the error introduced by the truncation on p is small. In particular they can describe saturation effects, if s_0 becomes of the order or larger than 1, and also Doppler cooling when the momenta p are such that $k p/m$ is not negligible compared to Γ .

Since we are dealing here mainly with low intensity situations, we can simplify these equations of motion which makes the numerical resolution much faster. The approximation consists in neglecting excited state matrix elements in comparison with ground state matrix elements. This allows a direct calculation of optical coherences and excited state coherences and populations only in terms of ground state matrix elements. Eq. 3.5 gives for instance in steady state:

$$\begin{aligned} \sigma(g_{1/2}, p; e_{3/2}, p') &= \frac{i\Omega/2\sqrt{2}}{i(\delta + (p^2 - p'^2)/2m\hbar) + \Gamma/2} (\langle g_{1/2}, p | \sigma | g_{1/2}, p' + \hbar k \rangle \\ &\quad - \langle g_{1/2}, p | \sigma | g_{1/2}, p' - \hbar k \rangle). \end{aligned} \quad (3.11)$$

We then replace these expressions for eg , ge and ee matrix elements in the equation of evolution of the ground state matrix elements so that we are left with equations involving only terms such as $\langle g_{\pm 1/2}, p | \sigma | g_{\pm 1/2}, p' \rangle$. This constitutes a considerable simplification of the initial numerical problem.

A second simplifying approximation consists in neglecting the kinetic energy term $(p^2 - p'^2)/2m\hbar$ appearing in the denominator of (3.11). Indeed this term can be written $[(p + p')/m][(p - p')/\hbar]$ where $(p + p')/m$ is a typical atomic velocity \bar{v} , while $(p - p')/\hbar$ is the inverse of the characteristic length of the spatial distribution, i.e. k (this will be made more clear in the Wigner representation in § 4). This approximation therefore amounts to neglecting the Doppler shift $k\bar{v}$ in comparison with Γ .

Note that on the contrary we do not neglect the term $(p^2 - p'^2)/2m$ in the evolution of $\langle g_{1/2}, p | \sigma | g_{1/2}, p' \rangle$, because this term has then to be compared with the feeding terms appearing in (3.9) such as $\Gamma \langle e_{3/2}, p | \sigma | e_{3/2}, p' \rangle \sim \Gamma s_0$, and we do not make any assumption on the respective sizes of $k\bar{v}$ and Γs_0 .

Once these two approximations are made, the quantum problem becomes very close to the simple model presented in § 2: all the dynamics is restricted to the ground state, and the residual Doppler cooling has been neglected so that one is left only with Sisyphus cooling.

3.3 Results of the quantum treatment

Since we have developed the two versions of the program solving the set of differential equations, either keeping all terms (§ 3.1) or restricting the set of equations with the low intensity assumption (§ 3.2), we can check whether the approximations presented above are justified. We have found that for $|\delta| \geq 3\Gamma$, and $s_0 \leq 0.1$, the results obtained by the two methods are close. For instance, for $\hbar k^2/m\Gamma = 7.8 \cdot 10^{-4}$ (corresponding to the Cesium atom recoil shift), and for $\Omega = \Gamma$, $\delta = -3\Gamma$, we get a steady state momentum distribution with $p_{r.m.s.} \approx 7.4 \hbar k$ using the complete set of equations, and with $p_{r.m.s.} \approx 7.7 \hbar k$ neglecting Doppler cooling and saturation effects. Consequently, we will only present in the following results obtained in the low power approach, which is much less computer-time consuming, keeping in mind that the addition of Doppler cooling could slightly reduce the width of the momentum distributions.

We have given in Fig. 3a a set of results for the momentum distribution obtained for the cesium recoil shift and for a detuning $\delta = -5\Gamma$. The Rabi frequency Ω varies between 0.1Γ and 2.0Γ . All distributions are equally normalized on the interval $[-40 \hbar k, 40 \hbar k]$. It clearly appears that there exists an optimal Rabi frequency around 0.5Γ for getting a high and narrow distribution.

To get more quantitative results, we have plotted in Fig. 3b the average kinetic energy $\bar{E}_K = (p_{r.m.s.})^2/2m$ in units of the recoil energy $E_R = \hbar^2 k^2/2m$. \bar{E}_K is calculated on a range $[-100 \hbar k, 100 \hbar k]$ for various sets of parameters δ , Ω and $\hbar k^2/2m$. For a given recoil shift and a given detuning, \bar{E}_K is remarkably linear with the laser intensity Ω^2 , provided Ω^2 is sufficiently large. When Ω^2 is decreased, \bar{E}_K reaches a minimum value and then increases again as Ω^2 tends to zero.

Data of Fig. 3b also clearly show that, for large δ , \bar{E}_K/E_R is actually a function of a single parameter, $m\Omega^2/|\delta|\hbar k^2$, which is proportionnal to U_0/E_R . The minimal value of \bar{E}_K is obtained for:

$$U_0 \approx 105 E_R \quad (3.12)$$

366

and is found to be:

$$(E_K)_{\min} \simeq 40 E_R \rightarrow (p_{r.m.s.})_{\min} \simeq 6.3 \hbar k. \quad (3.13)$$

One can see from Fig. 3b that $U_0 \simeq 100 E_R$ appears as a threshold potential for having good Sisyphus cooling: below this value, the steady-state kinetic energy increases very rapidly as U_0 decreases.

Now, one might ask whether these momentum distributions are Gaussian and can be assigned a temperature. In Fig. 4, we have plotted, for $\delta = -15\Gamma$, both $p_{r.m.s.}$ and $\delta p_{1/\sqrt{e}}$ (half width of the distribution at $1/\sqrt{e}$ of full height) vs Ω/Γ . For a Gaussian distribution, these two quantities are equal. Here, one clearly sees that a discrepancy appears either for very low or high Rabi frequencies. In both cases, $p_{r.m.s.}$ is larger than $\delta p_{1/\sqrt{e}}$, indicating the presence of large wings in the momentum distributions. The minimal value reached by $\delta p_{1/\sqrt{e}}$ is only:

$$(\delta p_{1/\sqrt{e}})_{\min} \simeq 3 \hbar k \quad (3.14)$$

and is obtained for:

$$U_0 \simeq 25 E_R. \quad (3.15)$$

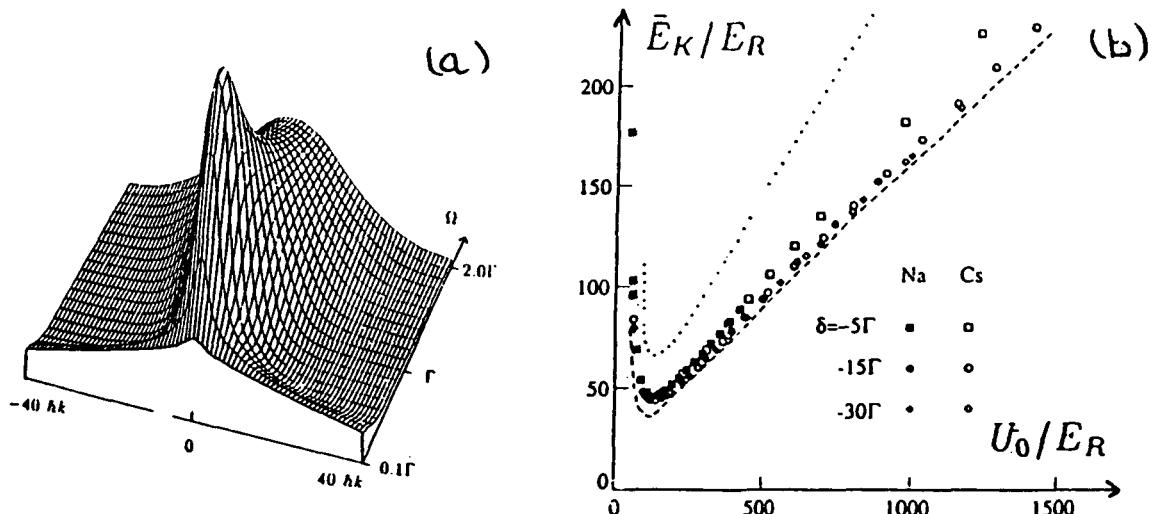


Fig. 3a: Steady-state momentum distributions obtained for a detuning $\delta = -5\Gamma$ for various Rabi frequencies Ω .

Fig. 3b: Average kinetic energy \bar{E}_K in units of the recoil energy E_R versus U_0 / E_R . The results of the semi-classical treatment (§ 4) are indicated in dotted lines (spatial modulation neglected) and in broken lines (spatial modulation included for the case of "oscillating particles").

Finally, we have looked for the spatial atomic distribution $P(z)$. This distribution is modulated in z with a period $\lambda/4$. The distribution is found to be nearly uniform for small U_0 ($U_0 \leq 100 E_R$); the atoms are on the contrary localized around the points $z = n\lambda/4$ for large U_0 .

To summarize the results of this quantum treatment, we have shown that, for large detunings, the steady state momentum distributions obtained by Sisyphus cooling depend only on a single parameter U_0 / E_R when $\hbar k$ is chosen as the momentum unit. This has to be compared

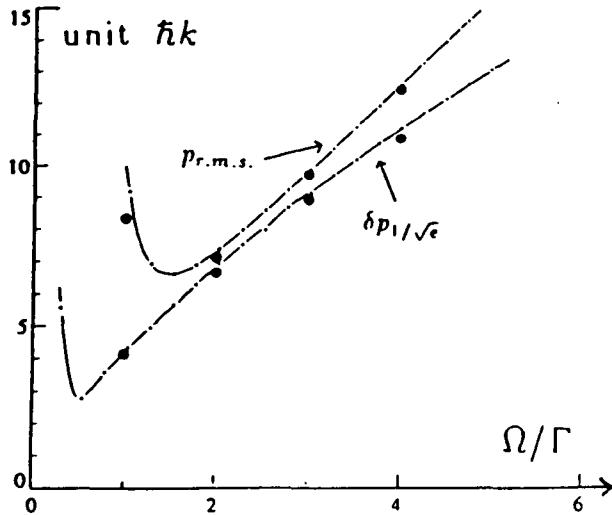


Fig. 4: Comparison between the r.m.s. momentum $p_{r.m.s.}$ and the width at $1/\sqrt{e}$ of the steady-state momentum distribution, for the cesium recoil shift and for a detuning of -15Γ . These two quantities would be equal in the case of a Gaussian momentum distribution. The dots indicate the results of a Monte-Carlo treatment (see § 4).

with the result for Doppler cooling where the momentum distributions are Gaussian with a temperature (in units of $\hbar\Gamma/k_B$) depending only on δ/Γ . Here the situation is more complex since the momentum distributions are not always Gaussian. Therefore they cannot be characterized by a single number such as a temperature. Depending whether one looks for a “compact” momentum distribution (small $p_{r.m.s.}$) or a very narrow central peak (small $\delta p_1/\sqrt{e}$), the optimal value for the “universal parameter” U_0/E_R changes by a numerical factor of the order of 4.

3.4 Physical discussion

We now compare the results of this quantum approach with the ones obtained from a simple analytical treatment [7]. That treatment was limited to a situation where the cooling could be described, after a spatial averaging, by a force linear with the atomic momentum p and a diffusion coefficient independent of p . It led to Gaussian momentum distributions with an average kinetic energy given by $\bar{E}_K = 3U_0/16$.

Here we recover this linear dependence of \bar{E}_K vs U_0 over a wide range of parameters. The slope $(\partial\bar{E}_K/\partial U_0)$ is 0.14 instead of $3/16 \approx 0.19$, which is in remarkable agreement if one takes into account all the approximations introduced in the analytical treatment of [7].

There is however a discrepancy between the results obtained here and the predictions of [7]. It indeed appears from the results of this full quantum treatment that Sisyphus cooling works better than what was expected! In [7], Sisyphus cooling was expected to be efficient as long as the cooling force was linear with p over all the steady-state momentum distribution which has a typical width $p_{rms.}$ This requirement led to a minimum kinetic energy given by:

$$\bar{E}_K \gg E_R \frac{\delta^2}{\Gamma^2}. \quad (3.16)$$

On the contrary, the minimal kinetic energy found here is independent of the detuning δ even for very large detunings. This will be explained further as due to the fact that Sisyphus cooling

works even if the r.m.s. momentum is outside the range of linearity of the force. For such large momenta, indeed, the diffusion coefficient, and therefore the heating, decrease when p increases so that Sisyphus cooling may remain efficient.

Another unexpected feature of the results of this quantum approach concerns the deviation from a Gaussian of the steady-state momentum distribution obtained for large modulation depths U_0 (Fig. 4). This deviation has to be connected to the apparition of an important modulation of the spatial atomic distribution $\mathcal{P}(z)$ in steady-state. Such a localization of the atoms had not been taken into account in [7] because of the spatial averaging of the force and of the momentum diffusion coefficient.

We now present an analytical treatment which gives a good account for these two features, minimum of \bar{E}_K vs U_0 at low U_0 , and localization of atoms for large U_0 .

4. SEMI-CLASSICAL TREATMENT OF SISYPHUS COOLING

In order to get some physical insights in the results given by the quantum treatment presented in the previous section, we now turn to an approach in which the external motion can be analyzed in classical terms. The corresponding equations of motion can be derived from an expansion in $\hbar k/\bar{p} \ll 1$ of the quantum equations of evolution. We will see that this expansion validates the physical pictures given in § 2, and that it gives an interpretation for most of the results given by the quantum treatment.

4.1 Expansion of the Equations of Motion

The principle of the calculation is very similar to the one developed for a 2-level atom by various authors [10]. We start from the Wigner representation of the atomic density operator:

$$W(z, p, t) = \frac{1}{\hbar} \int dv \langle p + \frac{v}{2} | \sigma | p - \frac{v}{2} \rangle \exp(\frac{izv}{\hbar}). \quad (4.1)$$

Note that $W(z, p, t)$ is still an operator with respect to the internal degrees of freedom. For instance, (3.5) can be written:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-i\omega_L t} \langle g_{1/2} | W(z, p, t) | e_{3/2} \rangle) &= - (i\delta + \frac{\Gamma}{2} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial z}) \langle g_{1/2} | W(z, p, t) | e_{3/2} \rangle e^{-i\omega_L t} \\ &\quad + \frac{i\Omega}{2\sqrt{2}} e^{ikz} \langle g_{1/2} | W(z, p + \frac{\hbar k}{2}, t) | g_{1/2} \rangle \\ &\quad - \frac{i\Omega}{2\sqrt{2}} e^{-ikz} \langle g_{1/2} | W(z, p - \frac{\hbar k}{2}, t) | g_{1/2} \rangle, \end{aligned} \quad (4.2)$$

where we have neglected, in the low intensity limit, the two last lines of (3.5) since they involve only matrix elements of W between excited states.

Now, since we have seen in § 3 that the momentum extension $p_{r.m.s.}$ of the steady state remains larger than $\hbar k$, we can expand W in the following way :

$$W(z, p + \hbar k) \simeq W(z, p) + \hbar k \frac{\partial W}{\partial p}(z, p) + \dots$$

We note that the atomic kinetic energy contribution, leading to the free flight term $p/m \cdot \partial W/\partial z$, is easy to evaluate in the Wigner representation since $\partial W/\partial z$ is of the order of kW . In expressions such as (4.2), this contribution is therefore negligible if $kp/m \ll \Gamma$.

We now proceed in the same way as in § 3.3. We eliminate optical coherences and excited state populations and coherences to get two equations dealing only with:

$$w_{\pm}(z, p, t) = \langle g_{\pm 1/2} | W(z, p, t) | g_{\pm 1/2} \rangle . \quad (4.3)$$

After some algebra we obtain:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{dU_{\pm}}{dz} \frac{\partial}{\partial p} \right) w_{\pm} &= \mp (\gamma_+(z) w_+ - \gamma_-(z) w_-) \\ &+ \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma s_0}{18} \frac{\partial^2}{\partial p^2} ((10 - \cos 2kz) w_{\pm} + w_{\mp}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

This equation is a straightforward validation of the physical picture given in § 2. It describes the motion of a particle with mass m , moving on the bi-potential $U_{\pm}(z)$ given in (2.4), with random jumps between the levels $g_{\pm 1/2}$ with rates $\gamma_{\pm}(z)$ (Eqs. 2.8,9). The second line in (4.4) corresponds to the atomic momentum diffusion in absorption and emission processes due to the discreteness of the photon momentum. For instance the atom on level $g_{1/2}$ can jump to $e_{3/2}$ or $e_{-1/2}$ by absorbing a laser photon, and come back to $g_{1/2}$ by emitting a fluorescence photon. The ground state sublevel is not changed in such a process but there is a momentum diffusion due to the randomness of the momentum ($\pm \hbar k$) of both the absorbed laser photon and the emitted fluorescence one. We note that the momentum diffusion coefficient appearing in (4.4) has the same order of magnitude ($\hbar^2 k^2 \Gamma s_0$) as the one found for a two level atom in a weak standing wave.

The last term of the second line of (4.4) describes a diffusive coupling between w_+ and w_- . It does not vanish for the values of z for which $\gamma_+(z)$ and $\gamma_-(z)$ vanish, and where one would expect that no transfer is possible between $g_{-1/2}$ and $g_{1/2}$. The existence of such a term is actually due to the fact that the atomic wave packet has a finite extension $\Delta x \simeq \hbar/\Delta p$, which gives rise to correction terms for the transfer rates of the order of $(\Delta x/\lambda)^2 \simeq \hbar^2 k^2 / \Delta p^2$.

4.2 The Steady-State Distribution in the Limit of Negligible Spatial Modulation

We now turn to the research of an analytical solution to the semi-classical equations of motion (4.4). We begin in this section by introducing a rather crude approximation which however gives results in good agreement with the ones obtained from the quantum approach. We look for the evolution of the atomic distribution function given by:

$$\psi(z, p, t) = w_+(z, p, t) + w_-(z, p, t) \quad (4.5)$$

and we make the very simple assumption that ψ is actually independent of z , i.e. the total atomic distribution function has a negligible spatial modulation in steady state. We will come back to this hypothesis at the end of the calculation.

Summing the two equations (4.4) for w_+ and w_- , we get in steady state:

$$\frac{p}{m} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -F(z) \frac{\partial \varphi}{\partial p} + D_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \quad (4.6a)$$

with:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \simeq 0 \quad (4.6b)$$

$$F(z) = -\frac{dU_+}{dz} = \frac{dU_-}{dz} = kU_0 \sin 2kz \quad (4.6c)$$

$$\varphi(z, p, t) = w_+(z, p, t) - w_-(z, p, t) \quad (4.6d)$$

$$D_0 = 11\hbar^2 k^2 \Gamma s_0 / 18 . \quad (4.6e)$$

Note that we have neglected the modulation in $\cos 2kz$ of the momentum diffusion coefficient appearing in (4.4).

Now the evolution of the difference φ between w_+ and w_- is obtained also from (4.4):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = -F \frac{\partial \psi}{\partial p} + (\gamma_- - \gamma_+) \psi - (\gamma_+ + \gamma_-) \varphi + \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}. \quad (4.7)$$

The last term of (4.7) is small compared to $(\gamma_+ + \gamma_-)\varphi = (2\Gamma s_0/9)\varphi$ since $\bar{p} \gg \hbar k$ and will be neglected in the following. In steady state, (4.7) can then be integrated to give for $p > 0$:

$$\varphi(z, p) = \frac{m}{p} \int_{-\infty}^z dz' e^{-2kp_c(z-z')/p} \left((\gamma_- - \gamma_+) (z') \psi - F(z') \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \quad (4.8a)$$

with:

$$\frac{kp_c}{m} = \frac{\Gamma s_0}{9}. \quad (4.8b)$$

Replacing γ_\pm and F by their expression (2.8-9 and 4.6c) and with the assumption that ψ is independent of z , we get :

$$\varphi(z, p) = \frac{-p/p_c}{1 + (p/p_c)^2} \left[\left(\sin 2kz + \frac{p_c}{p} \cos 2kz \right) \psi - \frac{mU_0}{2p_c} \left(\cos 2kz - \frac{p_c}{p} \sin 2kz \right) \frac{\partial \psi}{\partial p} \right]. \quad (4.9)$$

We now put this expression for φ in (4.6a) and we average the result over a wavelength, in order to be consistent with the assumption that ψ is not modulated in steady state. This gives:

$$0 = \frac{\partial}{\partial p} \left(\left(\frac{\alpha p/m}{1 + (p/p_c)^2} \right) \psi + \left(\frac{D_1}{1 + (p/p_c)^2} + D_0 \right) \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \quad (4.10)$$

with:

$$\alpha = \frac{kU_0}{2p_c} = -3\hbar k^2 \frac{\delta}{\Gamma} \quad (4.11a)$$

$$D_1 = \frac{kmU_0^2}{4p_c} = \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \frac{\delta^2}{\Gamma^2} \quad (4.11b)$$

Expression (4.10) has a straightforward interpretation: in steady state, the momentum distribution results from an equilibrium between a cooling force due to the Sisyphus effect:

$$f(p) = -\frac{\alpha p/m}{1 + (p/p_c)^2} \quad (4.12)$$

and heating due to momentum diffusion described by the diffusion coefficient:

$$D(p) = \frac{D_1}{1 + (p/p_c)^2} + D_0. \quad (4.13)$$

The expression (4.12) for the cooling force has already been derived elsewhere [7]. It is equal to the average of the two state dependent forces $-(dU_\pm/dz)$, weighted by the steady state populations of these states for an atom moving with velocity $v = p/m$.

The momentum diffusion (4.13) has two contributions. The term D_0 has been discussed above; it corresponds to the fluctuations of the momentum carried away by the fluorescence photons and to the fluctuations in the difference between the number of photons absorbed in

each of the two laser waves. The term proportional to D_1 corresponds to the fluctuations of the instantaneous gradient force $F_g(t)$ oscillating back and forth between $-dU_+/dz$ and $-dU_-/dz$ at a rate $1/\tau_P$. It is approximatively equal to the time integral of the correlation function of $F_g(t)$:

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_0^\infty \langle F_g(t-\tau) F_g(t) \rangle_{\text{position}} d\tau \\ &= \frac{D_1}{1 + (p/p_c)^2} \left(1 - \frac{5/4}{1 + (p/p_c)^2} + \frac{1}{(1 + (p/p_c)^2)^2} \right) \end{aligned}$$

which gives a good understanding of the variation with p of this diffusion term: if the atom moves slowly ($p \ll p_c$) it travels over a small fraction of a wavelength during the correlation time τ_P . Then there is a strong correlation between $F_g(t-\tau)$ and $F_g(t)$ and I is large. On the other hand, if $p \gg p_c$, the atom travels over many wavelengths before changing level and the value of I is decreased since the correlation between $F_g(t-\tau)$ and $F_g(t)$ becomes small.

Remark: many terms have been left out in the procedure which led to (4.10) and it is possible to get a more accurate (but more complicated) equation for ψ if one keeps some of these terms. For instance, for $p = 0$, there is a discrepancy by a factor 4/3 between the momentum diffusion coefficient $D(p)$ found here and the value of $I(p)$. This discrepancy can be lifted if one takes into account more spatial harmonics in the derivation of the Fokker-Planck equation (4.10).

We now look for the solution of (4.10). This solution can be written:

$$\psi(p) = \psi(0) \exp \left(\int_0^p \frac{f(p')}{D(p')} dp' \right) \quad (4.14)$$

We first note that, if D_0 is neglected, this momentum distribution is Gaussian with $k_B T = D_1/\alpha = U_0/2$, since f/D is linear in p . Therefore we see that Sisyphus cooling may lead to narrow momentum distributions even if the cooling force is not linear in p over the steady-state momentum distribution. This is due to the fact that the momentum diffusion associated with the Sisyphus mechanism actually decreases faster (in $1/p^2$) than the cooling force (in $1/p$). We therefore understand in this way why the real lower bound on \bar{E}_K is actually smaller than the one given in (3.16).

We now take into account D_0 : We then get :

$$\psi(p) = \frac{\psi(0)}{(1 + p^2/\bar{p}_c^2)^A} \quad (4.15)$$

with :

$$\bar{p}_c = p_c \sqrt{1 + D_1/D_0} \Rightarrow \frac{\bar{p}_c}{\hbar k} \approx \frac{1}{\sqrt{88}} \frac{U_0}{E_R} \quad \text{for } |\delta| \gg \Gamma \quad (4.16a)$$

$$A = \frac{\alpha p_c^2}{2m D_0} = \frac{U_0}{44 E_R}. \quad (4.16b)$$

Expression (4.15) exhibits several features similar to the ones derived from the quantum treatment. First we see from (4.16a,b) that, if we express p in units of $\hbar k$, the steady-state distribution depends only on U_0/E_R . One finds for the r.m.s. momentum after some algebra:

$$\bar{E}_K = \frac{1}{4} \frac{U_0^2}{U_0 - 66E_R} \quad \text{for } U_0 > 66 E_R, \quad (4.17)$$

the integral giving $\langle p^2 \rangle$ diverging for $U_0 \leq 66 E_R$. The variations of \bar{E}_K as a function of U_0 have been plotted in dotted lines in Fig. 3b. They are in good qualitative agreement with the quantum results for small values (< 100) of U_0/E_R . As U_0/E_R increases, a discrepancy between the two results appears. This is due to the fact, for large U_0 , the particles become localized in the potential valleys (Fig. 4b), and the hypothesis that ψ is not spatially modulated becomes very unrealistic.

We also note that for $U_0 \leq 22 E_R$, Eq. 4.15 leads to a non normalisable distribution ($A \leq 0.5$), which means that the Sisyphus cooling is then too weak to maintain the particles around $p = 0$ in steady state.

To summarize, one should consider this analytical approach as a good qualitative treatment, valid mainly around and below the minima of the average kinetic energy plotted in Fig. 3b. On the other hand, much above these minima, *i.e.* for large U_0/E_R , this treatment predicts that \bar{E}_K becomes on the order of $U_0/4$. With such a kinetic energy, much smaller than the potential depth U_0 , the hypothesis of non localised particles which is at the basis of this treatment is very unrealistic. We therefore present now some elements concerning this regime where the particles get localized.

4.3 Taking into Account the Localization

An important parameter for characterizing the motion of trapped particles is the ratio between the harmonic oscillation frequency of the particles in the wells:

$$\Omega_{\text{osc}} = \sqrt{\frac{4\hbar|\delta|s_0k^2}{3m}} \quad (4.18)$$

and the rate $1/\tau_P$ at which the particles jump from one level (g_{\pm}) to the other one (g_{\mp}). This ratio is:

$$\Omega_{\text{osc}}\tau_P = \sqrt{27 \frac{\hbar k^2 |\delta|}{ms_0 \Gamma^2}} = \sqrt{36 \frac{E_R}{U_0} \frac{\delta^2}{\Gamma^2}} \quad (4.19a)$$

$$= \sqrt{\frac{U_0}{2p_c^2/m}}. \quad (4.19b)$$

If $\Omega_{\text{osc}}\tau_P \gg 1$, we are in a situation where the particles make several oscillations before changing level. On the other hand, if $\Omega_{\text{osc}}\tau_P \ll 1$, the particles can make several transitions between $g_{1/2}$ and $g_{-1/2}$ in a single oscillation period. These two regimes have been represented in Fig. 5 as a function of $|\delta|/\Gamma$ and Ω/Γ , for the cesium recoil shift.

In order to show more clearly the relevance of this parameter $\Omega_{\text{osc}}\tau_P$, it is worthwhile to rewrite (4.4) in terms of a reduced set of parameters:

$$x = kz \quad (4.20a)$$

$$u = p/\sqrt{2mU_0} \quad (4.20b)$$

In steady state this leads to:

$$u \frac{\partial w_{\pm}}{\partial x} \pm \frac{1}{2} \sin 2x \frac{\partial w_{\pm}}{\partial u} = \frac{1}{\Omega_{\text{osc}}\tau_P} \left(\mp (w_+ \cos^2 x - w_- \sin^2 x) + \frac{E_R}{4U_0} \frac{\partial^2}{\partial u^2} ((10 - \cos 2x)w_{\pm} + w_{\mp}) \right) \quad (4.21)$$

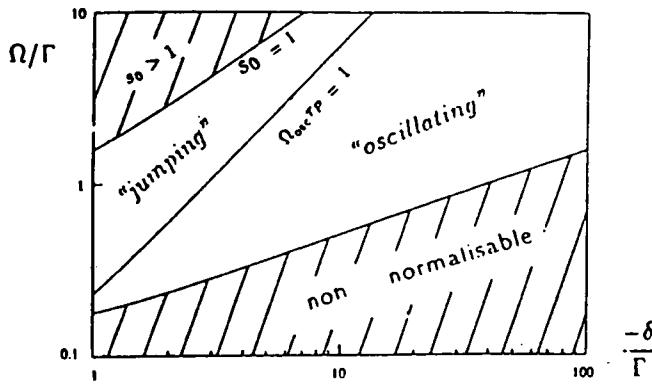


Fig. 5: Various regimes for the motion of an atom (with the cesium recoil shift) in the lin \perp lin configuration. Depending on the value of the detuning and the Rabi frequency, the atom is either in the “oscillating” case or in the “jumping” one.

We now present for each of these regimes an analytical approach based on an expansion of this equation in powers of the small parameter $\Omega_{\text{osc}}\tau_P$ (jumping situation) or $(\Omega_{\text{osc}}\tau_P)^{-1}$ (oscillating situation). Here, emphasis is put mainly on the derivation of equations of motion. A detailed analysis of the solution of these equations and of the corresponding results for the position, momentum, energy... distributions will be presented in a subsequent paper.

4.3.a The case of jumping particles: $\Omega_{\text{osc}}\tau_P \ll 1$

We first note from (4.19a) that, in this domain, the potential U_0 is much larger than $36 E_R$ (for $|\delta| \geq \Gamma$) so that we are in the linear domain of variation of \bar{E}_K with U_0 (Fig. 3b). On the other hand, (4.19b) implies that U_0 is much smaller than $p_c^2/2m$, so that $\hbar k \ll p_{\text{rms}} \ll p_c$. We are therefore in the domain where the cooling force is linear with p , and where the diffusion coefficient is independant of p . We now show that it is possible in this case to derive a Fokker-Planck equation for $\psi(z, p, t)$. Note that the condition $\Omega_{\text{osc}}\tau_P \ll 1$ can also be written as $T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}}$, since the optical pumping time τ_P can be considered as a characteristic internal time T_{int} , whereas the oscillation period $2\pi/\Omega_{\text{osc}}$ in a potential well is a typical external time T_{ext} . It is then well known that such a separation of time scales allows one to eliminate adiabatically the fast variables and to derive a Fokker-Planck equation for the slow variable $\psi(z, p, t)$.

Starting from (4.8), in which we keep the spatial modulation of ψ , we get at the lowest order in $\hbar k/p$:

$$\varphi(z, p) = -\cos 2kz \psi(z, p) \quad (4.22)$$

Indeed the kernel $\exp(-2kp_c(z - z')/p)$ is nearly equal to $\delta(z - z')p/2kp_c$, since $|p| \ll p_c$. Note that (4.22) can be rewritten as $w_+(z, p) = \sin^2 kz \psi(z, p)$ and $w_-(z, p) = \cos^2 kz \psi(z, p)$, which corresponds to the internal stationary state of an atom at rest in z and which gives the solution of (4.21) at order 0 in $\Omega_{\text{osc}}\tau_P$ and for $U_0 \gg E_R$. We now insert (4.22) in the equation of evolution of ψ (4.6a) which gives still at lowest order:

$$\frac{p}{m} \frac{\partial \psi}{\partial z} = F(z) \cos 2kz \frac{\partial \psi}{\partial p}. \quad (4.23)$$

At this order, the particles move in an average potential $\bar{U}(z)$, plotted in dotted lines in Fig.2a, and given by [7]:

$$\bar{U}(z) = \frac{U_0}{4} \sin^2(2kz). \quad (4.24)$$

At the next order we get after some calculation and using (4.23):

$$\begin{aligned}\varphi(z, p) &= - \left(\cos 2kz + \frac{p}{p_c} \sin 2kz \right) \psi(z, p) + \frac{p}{2kp_c} \cos 2kz \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{m}{2kpc} F(z) \frac{\partial \psi}{\partial p} \\ &\simeq - \left(\cos 2kz + \frac{p}{p_c} \sin 2kz \right) \psi(z, p) - \frac{m}{2kp_c} F(z)(1 - \cos^2 2kz) \frac{\partial \psi}{\partial p}\end{aligned}\quad (4.25)$$

which gives when inserted in (4.6a):

$$\frac{p}{m} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\left(\frac{d\bar{U}}{dz} + \frac{\bar{\alpha}(z)p}{m} \right) \psi \right) + (\bar{D}_1(z) + D_0) \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \quad (4.26)$$

with :

$$\bar{\alpha}(z) = 6\hbar k^2 \left(\frac{-\delta}{\Gamma} \right) \sin^2 2kz \quad (4.27a)$$

$$\bar{D}_1(z) = 2\hbar^2 k^2 \frac{\delta^2}{\Gamma} s_0 \sin^4 2kz \quad (4.27b)$$

This equation describes the Brownian motion of a particle in a potential $\bar{U}(z)$, with a linear friction force $-\bar{\alpha}(z)p/m$, and with a spatially varying diffusion coefficient $\bar{D}_1(z) + D_0$. We recover here the results already obtained in [7] from the usual theory of radiative forces in the limit of well separated time scales ($T_{int} \ll T_{ext}$). We can note that the oscillation frequency $\bar{\Omega}_{osc}$ in $\bar{U}(z)$:

$$\bar{\Omega}_{osc} = \sqrt{\frac{2k^2 U_0}{m}} \quad (4.28)$$

is always larger than $\bar{\alpha}(z)/m$:

$$\frac{\bar{\alpha}(z)}{m\bar{\Omega}_{osc}} = \sqrt{36 \frac{E_R}{U_0} \frac{\delta^2}{\Gamma^2} \sin^2 2kz} \leq \Omega_{osc} \tau_P \ll 1 \text{ (for jumping particles).} \quad (4.29)$$

This means that the motion in the average potential $\bar{U}(z)$ is underdamped so that Eq. 4.26 could now be solved by successive approximations if one parametrizes the motion with z and $\bar{E} = \bar{U}(z) + p^2/2m$, instead of z and p [11].

4.3.b The case of oscillating particles: $\Omega_{osc} \tau_P \gg 1$

We suppose now that the particles make several oscillations in a potential well before being optically pumped into another sublevel. The characteristic time for z and p , Ω_{osc}^{-1} , is then shorter than $T_{int} = \tau_P$. There is however another external variable which varies slowly, the total energy $E = U_{\pm} + p^2/2m$. We therefore parametrize the motion with the new variables z and E instead of z, p . Using:

$$\frac{p}{m} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p + F(z) \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)_z = v \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_E$$

where v stands for $\sqrt{2(E - U_+(z)/m)}$, we get at order zero in $(\Omega_{osc} \tau_P)^{-1}$:

$$\left(\frac{\partial w_+^{(0)}}{\partial z} \right)_E = 0 \quad (4.30)$$

which gives:

$$w_+^{(0)}(z, p) = \Phi(E) . \quad (4.31a)$$

In the same way, we obtain by symmetry:

$$w_-^{(0)}(z, p) = \Phi(E - U_+(z) + U_-(z)) . \quad (4.31b)$$

We now write (4.4) or (4.21) at order one in $(\Omega_{\text{osc}}\tau_P)^{-1}$:

$$\begin{aligned} v \left(\frac{\partial w_+^{(1)}}{\partial z} \right)_E &= -\gamma_+(z)w_+^{(0)} + \gamma_-(z)w_-^{(0)} \\ &+ \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma s_0}{18} v \frac{\partial}{\partial E} \left(v \frac{\partial}{\partial E} ((10 - \cos 2kz)w_+^{(0)} + w_-^{(0)}) \right) , \end{aligned} \quad (4.32)$$

We now divide this equation by v and integrate over an oscillation period for $E < U_0$:

$$\begin{aligned} 0 &= - \oint \frac{dz}{v} \gamma_+(z)\Phi(E) + \oint \frac{dz}{v} \gamma_-(z)\Phi(E - U_+(z) + U_-(z)) \\ &+ \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma s_0}{18} \frac{\partial}{\partial E} \left(\oint dz v ((10 - \cos 2kz)\Phi'(E) + \Phi'(E - U_+(z) + U_-(z))) \right) . \end{aligned} \quad (4.33)$$

For $E > U_0$, a similar equation holds, where the integral is now taken over a spatial period. Eq. 4.33 has a clear physical meaning: The first line just expresses that the rate at which particles with energy E leave level $g_{1/2}$ to $g_{-1/2}$ is equal to the rate at which particles arrive from $g_{-1/2}$ to $g_{1/2}$ with the same energy E . The second line of (4.33) corresponds to the correction to this balance due to the heating leaving the particles on the same level. For $U_0 \gg E_R$, this heating is for most energies E negligible. However it should be kept to prevent particles to accumulate in the bottom of the well U_+ (resp. U_-), where the departure rate γ_+ (resp. γ_-) vanishes. It is indeed easy to show that without this term the solution of (4.33) would diverge as $1/E$ around $E = 0$, and would therefore not be normalisable.

We have performed a numerical integration of this equation whose result is plotted in broken lines in Fig. 3b. One immediately sees that it reproduces in a very satisfactory way the results of the quantum approach in the limit of large detunings and for a given U_0 , i.e. in the limit $\Omega_{\text{osc}}\tau_P \gg 1$.

To summarize, we have been able in both situations (jumping or oscillating) to obtain a single equation for $\psi(z, p)$ or $\Phi(E)$. The regime of jumping particles can be treated with concepts usual in laser cooling theory: a force deriving from a potential plus a cooling force linear with the atomic momentum, and a momentum diffusion coefficient independent of p . It should be emphasized however that the range of parameters (detuning, Rabi frequency) leading to this regime is rather small (see Fig. 5). In particular, the perturbative treatment used here is valid only if $s_0 \ll 1$ and this condition, for large detunings, immediately leads to the oscillating situation rather than to the jumping one.

The theoretical study of the oscillating regime is very different from the jumping one. The equation (4.33) for $\Phi(E)$, probability for finding an atom with energy E on level $g_{1/2}$ is not a differential equation, contrarily to what is usually found in laser cooling. This is due to the non-locality of the atom dynamics: as the atom jumps from level $g_{1/2}$ to level $g_{-1/2}$, its energy changes suddenly from $U_+(z) + p^2/2m$ to $U_-(z) + p^2/2m$. Since $p^2/2m$ is of the order of U_0 , this

change cannot be treated as a small variation, which prevents deriving a Fokker-Planck type equation for $\Phi(E)$.

4.4 Monte-Carlo Approach

Finally, an alternative approach consists in performing a Monte-Carlo simulation of this problem. Such a simulation is made possible because no coherence appears between levels $g_{\pm 1/2}$, contrarily to what would occur for a more complex atomic transition. Furthermore, in order to be able to associate to (4.4) a classical stochastic process describable by a Monte-Carlo simulation, we have chosen to slightly simplify the second line of (4.4) by taking as a diffusion term $D_0 \partial^2 w_{\pm} / \partial p^2$.

This approach is then directly connected with the physical picture presented in § 2. It consists in a numerical integration of the equation of motion of the particles on the bi-potential $U_{\pm}(z)$, with random jumps from one potential to the other one, and also a random heating corresponding to the simplified diffusion term described just above. We record for given interaction times the position and the momentum of the particle. The steady state distributions are found to be in very good agreement with the results of the quantum treatment (see Fig. 4).

A first advantage of this Monte-Carlo method lies in the fact that it can be run on a small computer. Also it can be generalized, for the $J_g = 1/2 \longleftrightarrow J_e = 3/2$ transition, to the case of 2 or 3 dimensional Sisyphus cooling, provided that the laser configuration is such that the light polarization is always a linear combination of σ_+ and σ_- polarizations with no π component. In these conditions indeed, no coherence is built between $g_{1/2}$ and $g_{-1/2}$ and the simple picture of a particle moving on a bi-potential can be applied.

CONCLUSION

To summarize, we have presented here both a full quantum and a semi-classical treatment for the 1-D cooling of a $J_g = 1/2 \longleftrightarrow J_e = 3/2$ atomic transition in a lin \perp lin laser configuration. The mechanism at the basis of the cooling is a Sisyphus effect in which a given atom climbs more than it goes down in its potential energy diagram. These two treatments are in good agreement concerning the minimal "temperature" achievable by this cooling mechanism (Eqs. 3.12-15).

We have also shown that, for light shifted energies much larger than the ones minimizing the atomic kinetic energy, the atoms get localized around the minima of the potential associated with the light shifts and we have indicated the two possible approaches to this situation depending on the nature of the atomic motion around the position of these minima (see Fig. 5).

We should emphasize that there are many other schemes leading to a Sisyphus type cooling, not necessarily requiring a gradient of ellipticity of the polarization of the laser light. For instance a combination of a σ_+ standing wave and of a magnetic field can lead in 1-D to a cooling of the same type [8, 12].

In a similar way, in 2-D or 3-D, the superposition of 2 or 3 standing waves having the same phase leads to a situation where the light is linearly polarized in any point, with a rotating polarization and with a spatially varying intensity, with nodes and antinodes. As the atoms move in this configuration, a Sisyphus effect may occur for $J_g \geq 1$: it would involve a randomization of the population of the various ground-state sublevels around the nodes due to Landau-Zener type transitions, and optical pumping back into the most light shifted energy levels around the anti-nodes.

Consequently the model studied here should be considered as a particularly simple prototype of this type of cooling, but, on the other hand, the detailed algebra has probably to be readjusted for the study of any other Sisyphus type cooling mechanism.

We thank W.D. Phillips and C. Salomon for many stimulating discussions.

REFERENCES

- [1] See for example the special issue of J.O.S.A. **B6**, November 1989.
- [2] T.W. Hänisch and A. Schawlow, Opt. Commun. **13**, 68 (1975).
- [3] D. Wineland and W. Itano, Phys.Rev. **A20**, 1521 (1979).
- [4] P. Lett, R. Watts, C. Westbrook, W.D. Phillips, P. Gould and H. Metcalf, Phys.Rev.Lett. **61**, 169 (1988).
- [5] J. Dalibard, C. Salomon, A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste and C. Cohen-Tannoudji, in *Proceedings of the 11th Conference on Atomic Physics*, S. Haroche, J.C. Gay and G. Grynberg, eds (World Scientific, Singapore, 1989).
- [6] S. Chu, D.S. Weiss, Y. Shevy and P.J. Ungar, in *Proceedings of the 11th Conference on Atomic Physics*, S. Haroche, J.C. Gay and G. Grynberg, eds (World Scientific, Singapore, 1989).
- [7] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. **B6**, 2023 (1989).
- [8] D. Weiss, P.J. Ungar and S. Chu, J.O.S.A. **B6**, 2072 (1989).
- [9] see e.g. Y. Castin, H. Wallis and J. Dalibard, J.O.S.A. **6**, 2046 (1989) and ref. in.
- [10] see e.g. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J.Phys.B18, 1661 (1985).
- [11] N.G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, 1981.
- [12] B. Sheehy, S.Q. Shang, P. van der Straten, S. Hatamian and H. Metcalf, Phys.Rev.Lett. **64**, 858 (1990).

Appendice B_{IV}

Groupe de symétrie pour la configuration Ox – Oy et applications

Considérons les équations de Bloch optiques généralisées réduites dans l'état fondamental et à une dimension d'espace. Elles peuvent être notées symboliquement :

$$\frac{d}{dt}\sigma = \text{Bloch}[\sigma] \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 1)$$

L'opérateur de Bloch associé, indépendant du temps, est écrit à l'aide de (II1c - 22) et (II1c - 32). Nous sommes ici dans la configuration laser $Ox - Oy$, pour une transition atomique $j_g \rightarrow j_e$ quelconque, et l'opérateur réduit $\mathcal{V}^{(+)}$ décrivant la partie ascendante du couplage atome-laser vaut, selon les choix de phase de l'appendice A_{IV} :

$$\mathcal{V}^{(+)} = -i\sqrt{2} \sin(kZ) \Delta_+^{(+)} + \sqrt{2} \cos(kZ) \Delta_-^{(+)} \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 2)$$

(i) Le groupe de symétrie

Pour ce choix de $\mathcal{V}^{(+)}$, nous cherchons les symétries des équations d'évolution (B_{IV} - 1). Ces symétries sont représentées par des transformations unitaires S , agissant sur les degrés de liberté atomiques internes et sur le mouvement du centre de masse selon Oz , et vérifiant la propriété :

$$S \text{Bloch}[\sigma] S^\dagger = \text{Bloch}[S\sigma S^\dagger] \quad \forall \sigma \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 3)$$

Le groupe de symétrie le plus gros que nous ayons mis en évidence est celui engendré par deux éléments \mathcal{I} et T , dont l'action est définie comme suit :

$$T|z\rangle \otimes |m\rangle_z = |z + \frac{1}{4}\lambda\rangle \otimes |-m\rangle_z \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 4a)$$

$$\mathcal{I}|z\rangle \otimes |m\rangle_z = |-z\rangle \otimes e^{-im\frac{\pi}{2}} |m\rangle_z \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 4b)$$

T translate le centre de masse spatialement de $\frac{\lambda}{4}$, et change le moment cinétique interne selon Oz en son opposé. \mathcal{I} réalise une inversion spatiale et une rotation interne d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On notera que \mathcal{I} et T ne commutent pas en général. Pour vérifier que T et \mathcal{I} constituent bien des opérations de symétrie au sens de (B_{IV} – 3), il suffit de disposer des résultats intermédiaires :

$$TW_q(p_S)T^\dagger = ie^{i\frac{\pi}{2}ps/(\hbar k)}W_{-q}(p_S) \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 5\text{a})$$

$$\mathcal{IW}_q(p_S)\mathcal{I}^+ = ie^{iq\frac{\pi}{2}}W_q(-p_S) \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 5\text{b})$$

L'opérateur $W_q(p_S)$ intervient dans le terme d'alimentation par émission spontanée :

$$W_q(p_S) = \left(\Delta_q^{(+)} \right)^\dagger \mathcal{V}^{(+)} e^{-ip_S Z/\hbar} \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 6)$$

et son comportement sous une transformation unitaire S permet de prouver l'invariance de $\mathcal{V}^{(-)}\mathcal{V}^{(+)}$ donc de la partie hamiltonienne et des termes de départ par pompage optique, puisque :

$$\mathcal{V}^{(-)}\mathcal{V}^{(+)} = \sum_{q=0,\pm 1} (W_q(p_S))^\dagger W_q(p_S) \quad \forall p_S \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 7)$$

Les éléments T^2 et \mathcal{I}^2 donnent naissance, remarquons-le, aux symétries que l'on prévoit pour une configuration laser générale de refroidissement à une dimension. T^2 représente l'invariance par translation spatiale de $\lambda/2$ attendue pour les équations quantiques dans l'état fondamental, et l'invariance sous \mathcal{I}^2 correspond à l'existence des deux sous-familles internes, les sous-niveaux fondamentaux de chaque famille étant associés à une même valeur propre de \mathcal{I}^2 (± 1 lorsque j_g est entier, $\pm i$ lorsque j_g est demi-entier). Les symétries par T et \mathcal{I} , par contre, sont spécifiques de la configuration $Ox - Oy$.

(ii) Application à l'état stationnaire en point de vue de Wigner
 $(j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2)$

La connaissance du groupe de symétrie est utile à la détermination de l'état stationnaire σ^{st} des équations quantiques. L'unicité de σ^{st} (à un choix de normalisation près) assure qu'il commute avec toutes les opérations de symétrie :

$$S\sigma^{\text{st}}S^\dagger = \sigma^{\text{st}} \quad \forall S \text{ symétrie} \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 8)$$

Nous allons utiliser cette propriété pour simplifier le calcul numérique de σ^{st} sur la transition $j_g = 1/2 \longrightarrow j_e = 3/2$.

Il est particulièrement commode de se placer en point de vue de Wigner. La structure en deux familles internes autorise à décrire la matrice de Wigner stationnaire par les populations des deux sous-niveaux $|g \pm 1/2\rangle_z$, soit $\Pi_{\pm 1/2}^{\text{st}}(z, p)$. Comme ces populations sont de période spatiale $\frac{\lambda}{2}$, nous les développons en série de Fourier :

$$\Pi_{\pm 1/2}^{\text{st}}(z, p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_n^{(\pm)}(p) e^{2inkz} \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 9)$$

Exploitons maintenant les symétries spécifiques de la configuration $Ox - Oy$, représentées par T et \mathcal{I} . L'invariance par T permet d'éliminer la population du sous-niveau $|g - 1/2\rangle_z$ au profit de celle de l'autre sous-niveau :

$$\Pi_{-1/2}^{\text{st}}(z, p) = \Pi_{1/2}^{\text{st}}(z - \frac{1}{4}\lambda, p) \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 10)$$

relation qui devient bien entendu locale après transformée de Fourier :

$$\Pi_n^{(-)}(p) = (-1)^n \Pi_n^{(+)}(p) \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 11)$$

L'invariance sous l'action de \mathcal{I} précise le comportement des populations sous la parité :

$$\Pi_{\pm 1/2}^{\text{st}}(z, p) = \Pi_{\pm 1/2}^{\text{st}}(-z, -p) \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 12)$$

ce qui permet d'éliminer les coefficients du développement (B_{IV} - 9) de $\Pi_{+1/2}$ pour des valeurs négatives de p :

$$\Pi_n^{(+)}(-p) = \Pi_{-n}^{(+)}(p) \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 13)$$

Comme les populations $\Pi_{\pm 1/2}(z, p)$ sont de plus réelles, les coefficients de Fourier ne sont pas indépendants :

$$\Pi_{-n}^{(\pm)}(p) = [\Pi_n^{(\pm)}(p)]^* \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 14)$$

Il suffit donc de représenter la matrice densité stationnaire par les nombres complexes $\Pi_n^{(+)}(p)$ où p et n sont choisis ≥ 0 , ce qui constitue une réduction notable du problème. En pratique, l'impulsion p va de 0 à $100\hbar k$, avec un pas $\hbar k$, et le nombre d'harmoniques spatiales n prises en compte est choisi entre 2 et 20, suivant que la profondeur du puits U_0 entraîne une faible ($U_0 \leq 100E_R$) ou une forte localisation spatiale des atomes dans l'état stationnaire (nous sommes allés jusqu'à $U_0 = 10^3E_R$).

Pour terminer ce paragraphe, donnons la forme explicite des équations quantiques en point de vue de Wigner, ramenées dans l'état fondamental sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$. Pour alléger l'écriture, les quasi-distributions en position-impulsion $\Pi_{\pm 1/2}(z, p, t)$ sont notées $\Pi_{\pm}(z, p, t)$. On obtient, à l'aide des résultats du II§1c et de la définition (IIe - 3) de la transformation de Wigner :

$$(\partial_t + v\partial_z) \Pi_+ = \frac{1}{4} \Gamma s_0 \left\{ -\frac{8}{3} \Pi_+ + \frac{2}{3} \cos(2kz) (\Pi_+^+ + \Pi_+^-) + \frac{4}{3} \frac{\delta}{\Gamma} \sin(2kz) (\Pi_+^+ - \Pi_+^-) \right. \\ \left. + \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_+(p_S) [\Pi_+^+ + \Pi_+^- - 2 \cos(2kz) \Pi_+] (z, p + p_S, t) \right. \\ \left. + \frac{2}{9} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_0(p_S) [\Pi_-^+ + \Pi_-^- - 2 \cos(2kz) \Pi_-] (z, p + p_S, t) \right. \\ \left. + \frac{1}{9} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp_S \mathcal{N}_-(p_S) [\Pi_+^+ + \Pi_+^- + 2 \cos(2kz) \Pi_+] (z, p + p_S, t) \right\} \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 15a)$$

où s_0 désigne le paramètre de saturation par onde progressive, et où l'on a introduit les notations :

$$\Pi_{\pm}(z, p, t) = \langle g \pm 1/2 | W(z, p, t) | g \pm 1/2 \rangle \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 15b)$$

$$\Pi_m^{\pm}(z, p, t) = \Pi_m(z, p \pm \hbar k, t) \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 15c)$$

L'équation sur Π_- se déduit de (B_{IV} - 15a) en remplaçant Π_m par Π_{-m} , $\cos(2kz)$ par $-\cos(2kz)$ et $\sin(2kz)$ par $-\sin(2kz)$.

Les distributions d'émission spontanée $\mathcal{N}_q(p_S)$ sont données en (II1c - 30).

(iii) Application à l'étude de la partie hamiltonienne des équations quantiques
 $(j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2)$

Nous allons établir quelques propriétés des opérateurs T et \mathcal{I} , qui seront utiles pour l'étude du refroidissement sur la transition $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$ dans la limite séculaire, au IV§3g. Cette étude nécessite en effet de diagonaliser le hamiltonien $\mathcal{H} = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}\hbar\delta s_0\mathcal{V}^{(-)}(Z)\mathcal{V}^{(+)}(Z)$, qui commute, avec T et \mathcal{I} .

Cherchons d'abord les valeurs propres r et les vecteurs propres associés $|\psi\rangle_r$, de l'opérateur T :

$$T|\psi\rangle_r = r|\psi\rangle_r \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 16)$$

Nous avons déjà remarqué que T^2 n'est autre que la translation spatiale de $\frac{\lambda}{2}$; on en déduit :

$$T_{\frac{\lambda}{2}}|\psi\rangle_r = r^2|\psi\rangle_r \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 17)$$

Les états propres $|\psi\rangle_r$ sont donc nécessairement de la forme de Bloch :

$$|\psi\rangle_r = e^{iqZ}|\varphi\rangle_r \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 18a)$$

$$T_{\frac{\lambda}{2}}|\psi\rangle_r = e^{-iq\frac{\lambda}{2}}|\psi\rangle_r \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 18b)$$

où le spinor $\langle z|\varphi\rangle_r$ a toutes ses composantes selon les sous-niveaux fondamentaux de période spatiale $\frac{\lambda}{2}$. Des égalités (B_{IV} - 18b) et (B_{IV} - 17), on déduit :

$$r = \varepsilon_T e^{-iq\frac{\lambda}{4}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_T = \pm \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 19)$$

Les fonctions propres de T sont ainsi repérées par l'indice de Bloch q , choisi dans la première zone de Brillouin $] - k, k]$, et par le signe ε_T .

Cherchons à exploiter maintenant l'invariance du problème par l'opérateur \mathcal{I} dans le cas de transitions à moment cinétique j_g entier. Il est d'abord manifeste que \mathcal{I}^2 et T

commutent alors, ce qui permet leur diagonalisation simultanée et conduit à l'introduction d'un nombre quantique η déjà mentionné au paragraphe (i) :

$$\mathcal{I}^2 |\psi\rangle_r = \eta |\psi\rangle_r \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 20)$$

Par contre, les opérateurs T et \mathcal{I} ne commutent pas en général, comme en témoigne l'identité opérationnelle :

$$\mathcal{I}^\dagger T \mathcal{I} = T^\dagger \mathcal{I}^2 \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 21)$$

On en déduit cependant, à nombre η fixé, que \mathcal{I} a l'action suivante sur les nombres quantiques ε_T et q :

$$T(\mathcal{I}|\psi\rangle_r) = \eta \varepsilon_T e^{iq\frac{\lambda}{4}} (\mathcal{I}|\psi\rangle_r) \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 22)$$

Dans le cas de la famille $\{|g\ 1\rangle, |g\ -1\rangle\}$ sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$, η vaut (-1) et ε_T, q sont simplement changés en leurs opposés par \mathcal{I} . La relation (B_{IV} - 22) montre également que $|\psi\rangle_r$ et $\mathcal{I}|\psi\rangle_r$ correspondent à des valeurs propres différentes de T , sauf pour des valeurs particulières de l'indice de Bloch :

$$q = k \quad \text{pour} \quad \eta = -1 \quad (\text{B}_{\text{IV}} - 23)$$

$$q = 0 \quad \text{pour} \quad \eta = 1$$

Pour ces choix particuliers de q , il est possible de diagonaliser simultanément les opérateurs T , \mathcal{I} et le hamiltonien \mathcal{H} . Cette constatation est à la base d'un modèle à émission spontanée simplifiée (cf. le IV§1), qui est celui choisi pour l'étude, dans le régime séculaire, du refroidissement sur la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ au IV§3g.

Appendice C_{IV}

Quelques propriétés de S(ε)

L'analyse des équations semi-classiques sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, dans la limite $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$, fait intervenir au §2b l'équation différentielle suivante :

$$0 = -\frac{1}{2}\varepsilon S(\varepsilon) + \frac{d}{d\varepsilon}[\varepsilon S'(\varepsilon)] + A \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 1)$$

où A désigne une constante arbitraire. Nous sommes intéressé ici par la solution de cette équation qui reste bornée lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

(i) Résolution par transformée de Fourier

En introduisant la transformée de Fourier $\tilde{S}(\tau)$ de $S(\varepsilon)$, on ramène (C_{IV} - 1) à une équation différentielle du premier ordre en τ , l'abaissement d'une unité de l'ordre de l'équation traduisant l'élimination des solutions de (C_{IV} - 1) divergentes pour $\varepsilon \rightarrow +\infty$. Si l'on définit la transformée de Fourier par :

$$\tilde{S}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon S(\varepsilon) e^{-i\varepsilon\tau} \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 2)$$

la fonction $\tilde{S}(\tau)$ est solution de l'équation :

$$0 = -\frac{1}{2}i\tilde{S}'(\tau) - i\tau \frac{d}{d\tau}(\tau \tilde{S}(\tau)) + 2\pi A\delta(\tau) \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 3)$$

où $\delta(\tau)$ est la fonction delta de Dirac. La résolution de l'équation homogène associée à (C_{IV} - 3), puis la méthode de la variation de la constante donnent accès à la solution générale de (C_{IV} - 3), dépendant d'un seul paramètre arbitraire λ :

$$\tilde{S}(\tau) = \frac{\pi}{\sqrt{\tau^2 + \frac{1}{2}}} \left[\lambda - i\sqrt{2}(Y(\tau) - Y(-\tau)) \right] \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 4)$$

où $Y(\tau)$ est la fonction crêteau d'Heavyside. Par transformation de Fourier inverse, on en déduit des solutions de (C_{IV} - 1) décroissantes à l'infini :

$$S(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\lambda \cos(\varepsilon\tau) + \sqrt{2}A \sin(\varepsilon\tau)}{\sqrt{\tau^2 + \frac{1}{2}}} \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 5)$$

Nous nous limitons dans la suite à ε positif ; le changement de variable $u = \varepsilon\tau$ met alors (C_{IV} – 5) sous la forme :

$$S(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} du \frac{\lambda \cos u + \sqrt{2}A \sin u}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2}} \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 6)$$

(ii) Etude au voisinage de 0

On constate facilement, sur (C_{IV} – 6), que la contribution à $S(\varepsilon)$ proportionnelle au paramètre λ est divergente lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$\int_0^{+\infty} du \frac{\cos u}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \int_0^1 du \frac{1}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\sim} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 7)$$

Comme nous cherchons bien entendu une solution régulière en $\varepsilon = 0^+$, nous retenons finalement pour $S(\varepsilon)$ l'expression déduite de (C_{IV} – 6) en posant $\lambda = 0$, expression qui admet une limite finie :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S(\varepsilon) = \sqrt{2}A \int_0^{+\infty} du \frac{\sin u}{u} \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 8a)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}A \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 8b)$$

(ii) Comportement asymptotique pour ε grand

Ce comportement se déduit d'une intégration par parties de (C_{IV} – 5), la fonction $\sin(\varepsilon\tau)$ étant intégrée et $(\tau^2 + \frac{1}{2})^{-1/2}$ étant dérivée :

$$S(\varepsilon) = \frac{2A}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau}{(\tau^2 + \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}} \cos(\varepsilon\tau) \right] \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 9)$$

Comme l'intégrale dans (C_{IV} – 9) tend vers 0 aux grands ε , ce qu'on peut vérifier au prix d'une seconde intégration par parties, on obtient la décroissance de $S(\varepsilon)$ à l'infini :

$$S(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2A}{\varepsilon} \quad (\text{C}_{\text{IV}} - 10)$$

Appendice D_{IV}**Quantization of Atomic Motion in Optical Molasses.**

Y. CASTIN and J. DALIBARD

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'E.N.S. ()
24, rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France*

(received 3 December 1990; accepted in final form 4 February 1991)

PACS. 32.80P - Optical cooling of atoms; trapping.

PACS. 42.50 - Quantum optics.

PACS. 42.60 - Laser systems and laser beam applications.

Abstract. - We present a quantum treatment of laser cooling of neutral atoms. The cooling mechanism studied is the «Sisyphus» process for 1-dimensional optical molasses. We first derive the energy eigenstates for the atom moving in the potential associated with the light-shifts due to the laser. Then, taking into account optical pumping, we calculate the steady-state populations of these quantum levels in the secular approximation. This approach allows us to determine the atomic eigenfrequencies in the optical wells, as well as momentum and position distributions. In particular, the minimum r.m.s. atomic momentum is = 6 single-photon momenta; this result was not accessible to previous semi-classical treatments.

Laser cooling of free atoms in «optical molasses» has led in the recent years to extremely low atomic kinetic temperatures, in the micro-Kelvin range [1-3]. We present here a theoretical approach to this cooling; it is based on a quantum treatment of the external atomic motion for the case of 1-dimensional optical molasses, formed by the superposition of two opposing travelling waves. Our approach is in some ways similar to the one developed for trapped ions [4], although in our case the trapping potential is created by the laser light itself. Therefore this potential depends on the atomic internal state and is periodic, so that the energy spectrum consists of bands. From the steady-state populations of these energy levels, we then obtain the position and momentum distributions of the atoms inside the molasses. We also discuss various ways for measuring this energy spectrum.

We study here the simple case of «Sisyphus» cooling for an atom with a transition between a $J_g = 1/2$ ground state and a $J_e = 3/2$ excited state (fig. 1a)) [5]. The laser field is formed by the superposition of two plane waves, with a wavelength $\lambda = 2\pi/k$, travelling along the $+z$ and $-z$ directions, and respectively polarized along Ox and Oy . The resulting polarization of the light presents a spatially periodic gradient of ellipticity: for a convenient choice of phases, it is σ_- at $z = 0$, linear at $z = \lambda/8$, σ_+ at $z = \lambda/4$,

(*) Laboratoire associé au CNRS et à l'Université Pierre et Marie Curie.

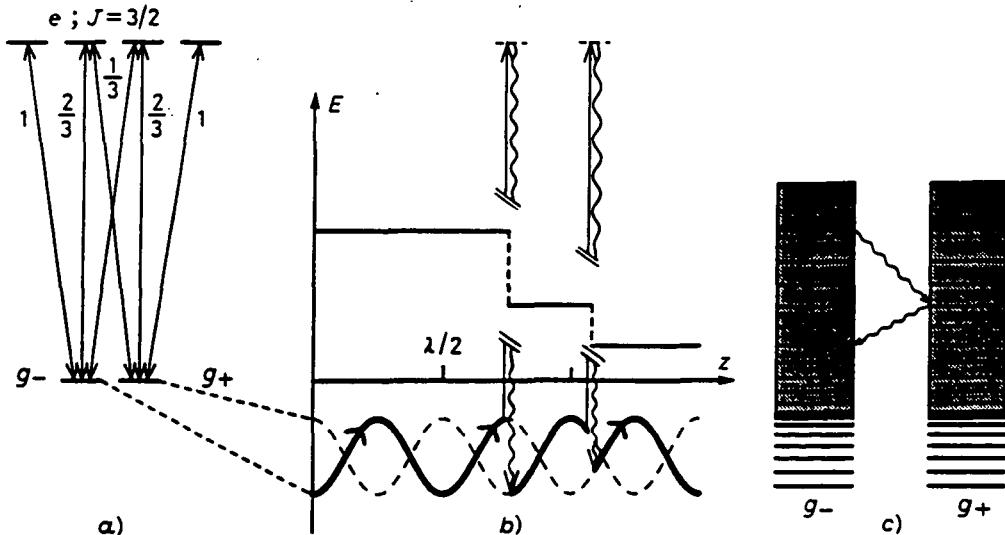


Fig. 1. – a) Atomic-level scheme and intensity factors (square of the Clebsch-Gordan coefficients) for a $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$ transition. b) Semi-classical description of Sisyphus cooling, with a «typical» random path showing a decrease of the total atomic energy (kinetic + potential) as the atom moves in the optical bipotential $U_\pm(z)$. c) Quantum description of Sisyphus cooling, showing the energy jumps sketched in b) as transition between eigenstates of the total atom-laser Hamiltonian. The energy spectrum corresponds to $U_0 = 100E_R$. In the steady state, atoms are mostly localized in the wells, i.e. more than half of the population is on the two lowest bands.

We restrict ourselves to the low saturation domain:

$$\cancel{s_0 = \frac{\Omega^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \gg 1}, \quad s_0 = \frac{\Omega^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \ll 1 \quad (1)$$

which is known experimentally to lead to the lowest temperatures. When (1) is fulfilled, the atoms remain mainly in their internal ground-state sublevels. In (1), $\Omega = -2dE_0/\hbar$ is the Rabi frequency characterizing the coupling between the atomic dipole d and the field amplitude E_0 in each travelling wave, Γ is the natural width of the atomic excited state, and $\delta = \omega_L - \omega_A$ is the detuning between the laser (ω_L) and the atomic (ω_A) frequencies.

We also limit our treatment to situations where the average Doppler shifts can be neglected compared to Γ . This means that we do not take into account here «Doppler cooling» [4], and that we are left only with «polarization gradient cooling» [5, 6]. The effect of the atom-field coupling on the atomic dynamics can then be split into two parts [7].

First, the reactive part of this coupling (light-shift) consists in a periodic potential $U_\pm(z)$, depending on the atomic ground-state sublevel g_\pm :

$$U_\pm(z) = \frac{U_0}{2} (-2 \pm \cos(2kz)) \quad \text{with } U_0 = -\frac{2}{3}\hbar\delta s_0. \quad (2)$$

For instance, at $z = 0$ where the light is σ_- , the sublevel g_- is three times more light-shifted ($-3U_0/2$) than the level g_+ ($-U_0/2$) because of the intensity factors sketched in fig. 1a); this is reversed at $z = \lambda/4$ where the light is σ_+ .

Second, the atom-field coupling also has a dissipative part because of processes involving the absorption of a laser photon and the emission of a spontaneous photon. This dissipative coupling causes in particular real transitions to occur, via optical pumping, between g_+ and g_- and thus gives the states finite lifetimes.

If one treats classically the motion of the atom in the bi-potential $U_\pm(z)$, the analysis of Sisyphus cooling is then straightforward [5]. Take a negative detuning δ so that $U_0 > 0$, and suppose that the atom starts on level g_- (see fig. 1b)). As the atom moves in $U_-(z)$, it may

undergo a transition to g_+ . This transition occurs preferentially where the laser light is mostly σ_+ polarized, which corresponds to the tops of $U_-(z)$. The atom is then put in a valley for $U_+(z)$. This transition decreases the potential energy of the atom, while leaving its kinetic energy unchanged, if one neglects the momentum of the fluorescence photon involved in the process. From g_+ , the same sequence can be repeated so that, on the average, the atom ascends more hills than it descends, which damps its velocity.

We now turn to the quantum treatment of Sisyphus cooling. We start with the master equation describing the time evolution of the atomic density matrix, including both internal and external degrees of freedom [8]. If (1) is fulfilled, we can adiabatically eliminate optical coherences as well as the excited-state part of the density matrix. We then get an equation of motion involving only the ground-state part σ of the density matrix and acting in the space generated by the vectors $|g_{\pm}, p\rangle$ (atom in internal state g_{\pm} and with momentum p) [9]:

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{1}{i\hbar} [H_0, \sigma(t)] + (\dot{\sigma}(t))_{\text{relax}} \quad (3)$$

with

$$H_0 = \frac{P^2}{2M} + U_+(Z)|g_+\rangle\langle g_+| + U_-(Z)|g_-\rangle\langle g_-| \quad (4)$$

and

$$(\dot{\sigma}(t))_{\text{relax}} = -\frac{\gamma_0}{2}(A\sigma(t) + \sigma(t)A) + \gamma_0 \int_{-hk}^{hk} dp' \sum_m N_m(p') B_m^\dagger \exp[-ip'Z/\hbar] \sigma(t) \exp[ip'Z/\hbar] B_m. \quad (5)$$

M is the atomic mass, P and Z are the momentum and position operators of the atomic centre of mass and $\gamma_0 = 2\Gamma s_0/9$. The Hamiltonian H_0 contains the atomic kinetic energy and the potential energy corresponding to the reactive part of the atom-field coupling. The relaxation term (5), corresponding to the dissipative part of this coupling, has two contributions: the first one describes the departure from a given level, for instance from $|g_+, p_1\rangle$ to other levels, either $|g_+, p_2\rangle$ or $|g_-, p_2\rangle$, via an absorption-spontaneous emission cycle. The second term in (5) describes the reverse process, *e.g.*, the feeding of $|g_+, p_1\rangle$ from either $|g_+, p_2\rangle$ or $|g_-, p_2\rangle$. The integral is taken over the momentum p' of the spontaneous photon along Oz ; the index m represents the projection of the photon angular momentum also along Oz and the functions $N_m(p')$ stand for the normalized distribution pattern for the spontaneous photon [8]. The operators A and B_m can be written as

$$A = \frac{3}{2}((2 - \cos 2kZ)|g_+\rangle\langle g_+| + (2 + \cos 2kZ)|g_-\rangle\langle g_-|), \quad (6a)$$

$$B_0 = \cos(kZ)|g_+\rangle\langle g_-| + \sin(kZ)|g_-\rangle\langle g_+|, \quad (6b)$$

$$B_1 = \frac{\sin(kZ)}{\sqrt{2}}(3|g_+\rangle\langle g_+| + |g_-\rangle\langle g_-|); \quad B_{-1} = \frac{\cos(kZ)}{\sqrt{2}}(|g_+\rangle\langle g_+| + 3|g_-\rangle\langle g_-|). \quad (6c)$$

We now look for the steady-state solution of (3). Here, we will restrict our analysis to the situation where the Hamiltonian part of (3) is predominant over the relaxation part. This requires that a typical Bohr frequency of the Hamiltonian H_0 , *i.e.* the oscillation angular frequency ω_{osc} of the atom in the bottom of the wells of $U_{\pm}(z)$, be much larger than the typical damping rate γ_0 :

$$\frac{\omega_{\text{osc}}}{\gamma_0} = \sqrt{\frac{27\hbar k^2 |\delta|}{Ms_0 \Gamma^2}} = 6 \frac{|\delta|}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_R}{U_0}} \gg 1, \quad (7)$$

where $E_R = \hbar^2 k^2 / 2M$ is the recoil energy. We see from (7) that our treatment is valid, for a given potential depth U_0 , in the limit of large detunings. This is known experimentally to lead to the lowest temperatures [3]. Classically, this situation corresponds to the case of particles performing a large number of oscillations on a given potential $U_+(z)$ or $U_-(z)$ before jumping to the other one.

When (7) is satisfied, the procedure is straightforward. We first look for the eigenstates and the energy spectrum of H_0 . We find, as usual for periodic potentials, alternating bands of allowed and forbidden energies (fig. 1c)). The eigenstates can be labelled as $|n, q, \varepsilon\rangle$, where n is an integer ≥ 0 labelling the band, and where $\varepsilon = \pm 1$ stands for the internal state g_{\pm} . q is the Bloch index, chosen in the first Brillouin zone ($-k < q \leq k$), and which takes discrete values since we use here standard periodic boundary conditions in a box with a size large compared to the spatial period $\lambda/2$. We note that the two states $|n, q, \pm\rangle$ have the same energy $E_{n,q}$ due to the symmetry between U_{\pm} . This eigenvalue problem can be cast into a universal one (Mathieu equation) if one expresses both U_0 and $E_{n,q}$ in terms of the recoil energy E_R (fig. 2a))⁽¹⁾. For a «typical» laser cooling situation, $U_0 = 100E_R$, obtained with cesium atoms for instance with $\delta = -20\Gamma$ and $\Omega = 1.5\Gamma$, one finds $\omega_{\text{osc}}/2\pi = 40$ kHz, with 6 bands corresponding to bound states ($E_{n,q} < -U_0/2$); the width of the lowest band, $n = 0$, is extremely small ($< 10^{-6}E_R$). The number of such «bound bands» increases as $\sqrt{U_0/E_R}$, as does the splitting $\hbar\omega_{\text{osc}}$ between two adjacent bands.

Now we take into account the relaxation part of (3), which causes transitions between the various $|n, q, \varepsilon\rangle$ (fig. 1c)). Since γ_0 is very small compared to ω_{osc} , we can use a secular approximation and assume that σ is diagonal in the basis $|n, q, \varepsilon\rangle$ in steady state⁽²⁾. Averaging (5) in a given $|n, q, \varepsilon\rangle$, we find the following relation between the steady-state

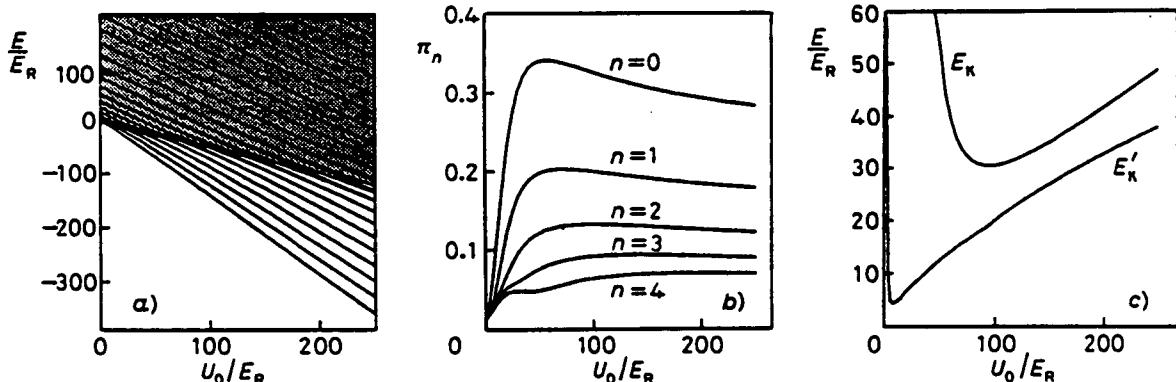


Fig. 2. – a) Band structure of the energy spectrum of H_0 , plotted as a function of the potential depth U_0 . The shaded areas correspond to allowed energies. For a given U_0 , the energies above $-U_0/2$ corresponding to an above-barrier motion (see eq. (2)) are mostly allowed (quasi-free motion). On the opposite, energy bands corresponding to a bound classical motion ($-3U_0/2 < E < -U_0/2$) are very narrow except in the immediate vicinity of $-U_0/2$. b) Steady-state population of the various energy bands, as a function of U_0 . c) Steady-state kinetic energies $E_K = p_{\text{r.m.s.}}^2 / 2M$ and $E'_K = \delta p_e^2 / 2M$ (where δp_e is the halfwidth at $1/\sqrt{e}$ of the momentum distribution) as a function of U_0 . These two quantities would be equal for Gaussian momentum distributions.

⁽¹⁾ A similar treatment has been applied to the case of a 2-level atom moving in a standing wave, in the absence of spontaneous emission [10].

⁽²⁾ If σ is a solution of (3) in steady state, then $T\sigma T^\dagger$, where T is the $\lambda/2$ spatial translation operator, is also a solution. The uniqueness of steady state therefore implies $\sigma = T\sigma T^\dagger$, so that any nondiagonal matrix element inside a band $\langle n, q_1, \varepsilon | \sigma | n, q_2, \varepsilon \rangle$ is zero, although the secular approximation argument cannot be applied to it. On the other hand, one can show that the spatial coherence of σ in steady state is restricted to a fraction of wavelength because of spontaneous emission processes.

population $\Pi_{n,q,\epsilon}$:

$$0 = \dot{\Pi}_{n,q,\epsilon} = -\gamma_{n,q,\epsilon}\Pi_{n,q,\epsilon} + \sum_{n',q',\epsilon'} \gamma(n', q', \epsilon' \rightarrow n, q, \epsilon) \Pi_{n',q',\epsilon'}, \quad (8a)$$

$$\gamma_{n,q,\epsilon} = \gamma_0 \langle n, q, \epsilon | A | n, q, \epsilon \rangle, \quad (8b)$$

$$\gamma(n', q', \epsilon' \rightarrow n, q, \epsilon) = \gamma_0 \int_{-\hbar k}^{\hbar k} dp' \sum_m N_m(p') |\langle n', q', \epsilon' | B_m \exp[i p' Z/\hbar] | n, q, \epsilon \rangle|^2. \quad (8c)$$

This expresses an equilibrium between the population leaving $|n, q, \epsilon\rangle$ (first term of (8a)) and the population arriving in $|n, q, \epsilon\rangle$ (second term of (8a)). By introducing a closure relation into (8c), we can show that $\gamma_{n,q,\epsilon}$ calculated from (8b) is equal to the sum over the primed variables of the $\gamma(n, q, \epsilon \rightarrow n', q', \epsilon')$. Equation (8a) associated with the normalization condition allows one to completely determine the various populations $\Pi_{n,q,\epsilon}$ in equilibrium, and therefore to characterize the steady state completely. This steady state usually depends on two parameters, Rabi frequency Ω and detuning δ , or equivalently U_0 and γ_0 . We have already noticed that the energy spectrum of H_0 depends only on U_0 . Now, we see that γ_0 can be factorized in eq. (8a), which means that the steady-state populations $\Pi_{n,q,\epsilon}$ do not depend on γ_0 in the limit (7). In this limit, U_0 is therefore the only important parameter to characterize the steady state.

On the other hand, the rates (8b) and (8c) are proportional to γ_0 , which indicates that the «cooling time» varies as γ_0^{-1} . Two types of transitions are involved in the relaxation process. Consider first a transition where there is a change of internal state: $g_+ \rightarrow g_-$. These are, as we have seen in the semi-classical approach, at the origin of the Sisyphus cooling (fig. 1b, c)). The corresponding departure rate $\bar{\gamma}_{n,q,\epsilon}$ from a given level $|n, q, \epsilon\rangle$ to all $|n', q', -\epsilon\rangle$ is found to be equal to the average in the state $|n, q, \epsilon\rangle$ of the semi-classical rates of transfer $\gamma_0 \cos^2 kz (\gamma_0 \sin^2 kz)$ from g_+ to g_- (g_- to g_+). If these transitions $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ were the only ones, one would find a strong accumulation of the atoms in the lowest band $n = 0$, where $\bar{\gamma}_{n,q,\epsilon}$ is very small. Actually, this strong accumulation in the lowest level is partially counterbalanced by transitions $\epsilon \rightarrow \epsilon$ with different values of q and n . These transitions correspond to a heating, due for instance to the randomness of the momenta of the emitted fluorescence photons.

In order to calculate numerically the steady-state populations, we have taken into account the first 80 bands, with 6 values for q in each band corresponding to the discrete values of q for our chosen boundary conditions. We have checked that a larger quantization volume makes no noticeable difference. On the other hand, 80 bands, among which less than 10 are bound, are required to get accurate values for steady-state r.m.s. momenta. The variations of the total populations π_n of the first five bands vs. U_0 are shown in fig. 2b): for instance, π_0 is maximal around $U_0 = 60E_R$, and reaches 0.34; in this case, the total population of unbound bands ($E_{n,q} \geq -U_0/2$) is 0.2, which suggests a spatial localization of the atoms. This is confirmed by the calculation of the spatial distribution $\rho(z)$ using the z representation of the $|n, q, \epsilon\rangle$. The modulation $\eta = \max(\rho)/\min(\rho)$ of these distributions follows the empirical law $\eta = (U_0/10E_R)^{1/4}$, from $U_0 = 20E_R$ up to the largest U_0 that we have considered, i.e. $1000E_R$. Such a localization of atoms in 3D Na molasses has recently been observed [11]. The set of $\Pi_{n,q,\epsilon}$ also gives the momentum distribution in steady state. We have plotted in fig. 2c) the average kinetic energy, $E_K = p_{r.m.s.}^2/2M$, as a function of U_0 . It is minimal for $U_0 = 95E_R$, $p_{r.m.s.}$ being then of the order of $5.5\hbar k$. We recall that one finds experimentally for 3D Na or Cs molasses a minimum $p_{r.m.s.}$ of 3 or $4\hbar k$ [3, 12] (8).

(8) Experimental measurements are usually done by a determination of the width of momentum distributions, which is more in the spirit of the curve E'_K of fig. 2c).

These results can be compared with the ones given by usual semi-classical approaches [5, 6]. We note that the validity condition (7) is the reverse of the one required for these approaches, where one assumes that the atoms move sufficiently slowly so that their internal state can follow nearly adiabatically their external motion; when (7) holds, it is not possible to describe the atomic motion in terms of a friction force linear in velocity and a constant momentum diffusion coefficient. Actually, in spite of these opposite conditions on $\omega_{\text{osc}}/\gamma_0$, both approaches predict a similar linear dependence of E_K with U_0 , for large U_0 ; the slopes are comparable, 0.14 here (fig. 2c)) instead of 0.19 semi-classically [5]. On the other hand, even when (7) holds, a semi-classical treatment is possible. It uses as a slow variable the total atomic energy instead of the atomic velocity and gives results close to the ones obtained here [9].

In addition to momentum or position distributions, this approach gives other observable quantities of laser-cooled atomic samples, more deeply connected to the quantization of atomic motion. The fluorescence spectrum of the atoms inside the molasses [11] can give a way for observing this discrete structure of the energy spectrum. It requires that the induced radiative width $= \gamma_0$ of the ground-state sublevels should be smaller than the splitting between the bands, $= \omega_{\text{osc}}$, which just corresponds to the condition of validity of our treatment (7). One could also measure, inside the molasses, the absorption or the amplification of a weak probe laser with a frequency shift from ω_L of the order of $\pm \omega_{\text{osc}}$.

Finally, we note that our treatment can be generalized to more complicated physical situations. We have recently extended it to the case of a $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ transition in the same laser configuration. The generalization of this treatment to 2 and 3 dimensions is also under way. The diagonalization of H_0 is then much more complicated because the eigenvalue problem is not factorizable into 2 or 3 1D problems.

* * *

The authors are indebted to C. COHEN-TANNOUDJI for many helpful discussions. They also thank all their colleagues of the ENS laser cooling group for their comments. This work is partially supported by Collège de France and DRET.

REFERENCES

- [1] See for example the special issues of *J. Opt. Soc. Am. B*, 6, November 1989.
- [2] SHEEHY B. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 64 (1990) 858.
- [3] SALOMON C. et al., *Europhys. Lett.*, 12 (1990) 683.
- [4] WINELAND D. and ITANO W., *Phys. Rev. A*, 20 (1979) 1521.
- [5] DALIBARD J. and COHEN-TANNOUDJI C., *J. Opt. Soc. Am. B*, 6 (1989) 2023.
- [6] WEISS D., UNGAR P. J. and CHU S., *J. Opt. Soc. Am. B*, 6 (1989) 2072.
- [7] BARRAT J. P. and COHEN-TANNOUDJI C., *J. Phys. (Paris)*, 22 (1961) 329, 443.
- [8] JAVANAINEN J. and STENHOLM S., *Appl. Phys.*, 21 (1980) 35.
- [9] CASTIN Y., DALIBARD J. and COHEN-TANNOUDJI C., *Proceedings of the LIKE workshop, Elbe, May 1990*, to be published.
- [10] LETOKHOV V. S. and MINOGIN V. G., *Phys. Rep.*, 73 (1981) 1.
- [11] WESTBROOK C. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 65 (1990) 33.
- [12] LETT P. D. et al., *J. Opt. Soc. Am. B*, 6 (1989) 2084.

Appendice E_{IV}

Estimation des taux γ_{--+} par WKB

Nous sommes dans le cadre de l'approche quantique séculaire sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ (régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$). Il s'agit ici de déterminer une expression approchée des taux de transition entre les états propres du hamiltonien \mathcal{H} associés à des sous-niveaux fondamentaux différents, soit $|n, q, -\rangle$ et $|n', q', +\rangle$. On utilise pour cela l'approximation WKB [80,81]. La discussion est menée pour des états des bandes "liées", mais elle est généralisable aux bandes "quasi-libres".

(i) Introduction des fonctions de Wannier

Comme on peut le constater sur (IV3d - 5a), la connaissance du taux de transition de $|n, q, -\rangle$ vers $|n', q', +\rangle$ découle de celle d'éléments de matrice de la forme :

$$A = \langle n, q | O(Z) T_{\frac{\lambda}{4}} | n', q' \rangle \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 1)$$

où $T_{\frac{\lambda}{4}}$ est la translation spatiale de $\frac{\lambda}{4}$ et où l'opérateur $O(Z)$ vaut :

$$O(Z) = \sin(kZ) e^{ip_s Z/\hbar} \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 2)$$

L'objectif de ce paragraphe (i) est d'éliminer de l'expression (E_{IV} - 1) les états de Bloch complètement délocalisés $|n, q\rangle$ et $|n', q'\rangle$, à l'aide des fonctions de Wannier $|\Phi\rangle$ et $|\Phi'\rangle$, déjà introduites au §3b, et qui ont l'avantage d'être localisées au voisinage de $z = 0$. On dispose ainsi de la relation :

$$|n, q\rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{l=-N}^N e^{iql\frac{\lambda}{2}} |\Phi\rangle_l \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 3a)$$

$$|\Phi\rangle_l = T_{\frac{\lambda}{2}}^l |\Phi\rangle \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 3b)$$

Par substitution directe de (E_{IV} - 3a) et de l'expression équivalente pour $|n', q'\rangle$ dans (E_{IV} - 1), on aboutit à :

$$A = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l, l'=-N}^N e^{i(q'l' - ql)\lambda/2} {}_l\langle \Phi | O(Z) T_{\frac{\lambda}{4}} | \Phi' \rangle_{l'} \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 4)$$

Nous considérons dans la suite seulement les transitions entre états assez profonds des bandes "liées". Comme on l'a vu au §3b, on peut alors, avec une bonne approximation, négliger le recouvrement entre des fonctions de Wannier associées à des sites séparés de $\frac{\lambda}{2}$ ou plus. Ceci permet d'effectuer une importante simplification dans la somme (E_{IV} - 4) : compte tenu de la translation spatiale de $\frac{\lambda}{4}$, on ne retient que les termes tels que $l' = l$ et $l' = l - 1$.

Il reste ensuite à exploiter le comportement de l'opérateur $O(Z)$ sous la translation spatiale de $l\frac{\lambda}{2}$, pour obtenir une expression de l'amplitude A en termes de $|\Phi\rangle$ et $|\Phi'\rangle$ plutôt que $|\Phi\rangle_l$ et $|\Phi'\rangle_{l'}$. Cette dernière étape est menée en détail au §3d(iv) ; on trouve que A s'annule à la limite $N \rightarrow +\infty$ si la règle de sélection (IV3c - 21) exprimant la conservation de la quasi-impulsion ($\hbar q' + p_S = \hbar q + \hbar k[2\hbar k]$) n'est pas observée. Pour des indices de Bloch q et q' fixés, on constate qu'une seule valeur de l'impulsion p_S du photon de fluorescence convient en général ($q \neq q'$). Pour cette valeur de p_S , sélectionnée par l'intégrale dans (IV3d - 5a), l'amplitude A vaut :

$$A = \langle \Phi | O(Z) T_{\frac{\lambda}{4}} | \Phi' \rangle + \langle \Phi | O(Z) T_{\frac{\lambda}{4}}^\dagger | \Phi' \rangle e^{-iq'\lambda/2} \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 5a)$$

Il est dès à présent manifeste, sur (E_{IV} - 5a), que le taux de transition $\gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',+}$ va présenter une dépendance en q' traduisant le phénomène d'interférence entre les deux chemins, visibles sur la fig. E_{IV} - 1, permettant le passage de l'atome de $|n, q, -\rangle$ vers $|n', q', +\rangle$.

Avant de passer à l'évaluation des deux éléments de matrice de (E_{IV} - 5a) grâce à l'approche WKB, il est commode de se ramener à des éléments de même forme en faisant usage du comportement (IV3b - 14) des fonctions de Wannier sous la parité :

$$A = \langle \Phi | O(Z) T_{\frac{\lambda}{4}} | \Phi' \rangle + (-1)^{n+n'} e^{-iq'\lambda/2} \langle \Phi | O(-Z) T_{\frac{\lambda}{4}} | \Phi' \rangle \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 5b)$$

(ii) Forme WKB des fonctions de Wannier

L'approche WKB donne accès à une approximation des fonctions d'onde propres $|n, q\rangle$ du hamiltonien H . Elle est menée en détail dans [76], avec prise en compte du caractère périodique du potentiel $U_{-1/2}(z)$. Nous mettons en œuvre ici un traitement plus simple. Assimilons d'abord les fonctions de Wannier des bandes profondes aux états propres du potentiel associé à un puits unique (celui contenant l'origine) de $U_{-1/2}(z)$; ceci semble légitime au moins dans la région permise classiquement :

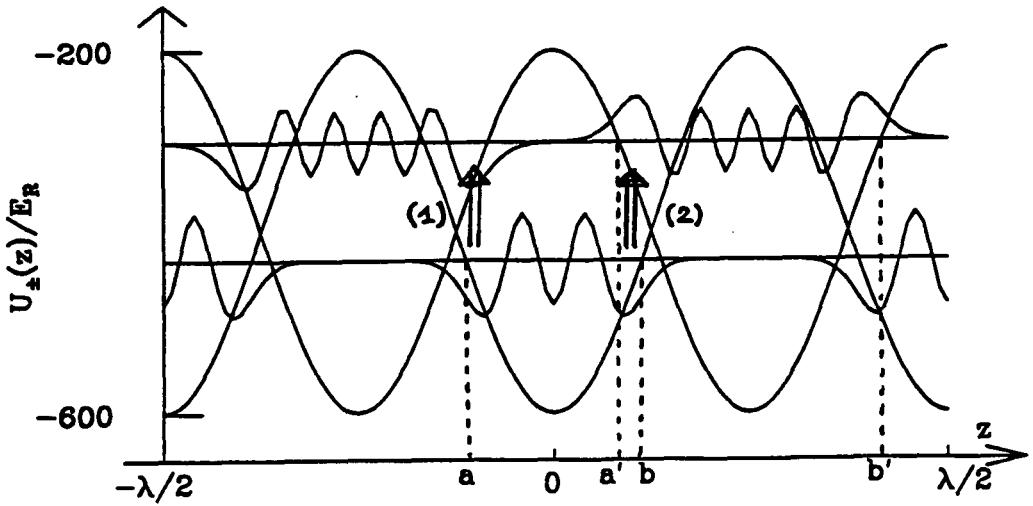


Fig. EIV - 1 : La transition entre les états délocalisés $|n, q, -\rangle$ et $|n', q', +\rangle$ se fait par deux chemins (passage d'un puits de $U_{-1/2}$ à l'un ou l'autre des puits voisins de $U_{1/2}$) , dont les amplitudes interfèrent. Les fonctions d'onde représentées sont réelles ; elles correspondent à ($n = 4, q = 0$) et ($n' = 8, q = k$) pour une profondeur de puits $U_0 = 400E_R$. On notera le changement de signe de $\langle z|n', q' = k, +\rangle$ par passage d'un puits de $U_{1/2}(z)$ à l'autre.

$$\langle z|\Phi\rangle \simeq \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{p_-(z)}} \cos\left(\frac{S_-(z)}{\hbar}\right) \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 6a)$$

$$E_{n,q} = \frac{p_-(z)^2}{2M} + U_{-1/2}(z) \quad \text{et} \quad p_-(z) \geq 0 \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 6b)$$

$$S_-(z) = \int_a^z dz' p_-(z') - \frac{\pi}{4}\hbar \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 6c)$$

L'impulsion $p_-(z)$ est celle de la particule classique au point z de la trajectoire d'énergie $E_{n,q}$ dans le potentiel $U_{-1/2}(z)$. a désigne le point de rebroussement classique d'abscisse négative (voir fig. EIV - 1), et la phase $(-\frac{\pi}{4})$ provient de la procédure de raccordement habituelle avec la forme WKB dans la région interdite [80,81]. Nous aurons besoin dans la suite de la fonction de Wannier associée à l'état propre $|n', q', +\rangle$ pour le mouvement dans le potentiel $U_{1/2}(z)$; elle se déduit de (E_{IV} - 6) par translation de $\frac{\lambda}{4}$ (ce qui revient à substituer à $p_-(z)$ l'impulsion $p_+(z)$ dans $U_{1/2}$) , et par changement de $E_{n,q}$ en $E_{n',q'} :$

$$\langle z | T_{\frac{\lambda}{4}} | \Phi' \rangle \simeq \frac{\mathcal{N}'}{\sqrt{p_+(z)}} \cos \left(\frac{S_+(z)}{\hbar} \right) \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 7\text{a})$$

$$E_{n',q'} = \frac{p_+(z)^2}{2M} + U_{1/2}(z) \quad \text{et} \quad p_+(z) \geq 0 \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 7\text{b})$$

$$S_+(z) = \int_{a'}^z dz' p_+(z') - \frac{\pi}{4} \hbar \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 7\text{c})$$

Le point de rebroussement a' du mouvement classique d'énergie $E_{n',q'}$ dans le potentiel $U_{1/2}(z)$ est représenté sur la fig. E_{IV} - 1.

Les calculs qui suivent reposent sur le fait que les phases $S_{\pm}(z)/\hbar$ varient beaucoup plus rapidement spatialement que $p_{\pm}(z)$, hypothèse bien entendu tout à fait habituelle et à la base du traitement WKB. On en déduit ainsi facilement, par exemple, l'expression des facteurs de normalisation \mathcal{N} et \mathcal{N}' . Lorsqu'on intègre en position $|\langle z | \Phi' \rangle|^2$ sur toute la région permise classiquement, cette propriété de $S_{-}(z)/\hbar$ autorise en effet à remplacer dans l'intégrale $\cos^2(S_{-}(z)/\hbar)$ par sa valeur moyenne, soit $\frac{1}{2}$. Si l'on exige que cette intégrale vaille l'unité, on aboutit à :

$$|\mathcal{N}|^2 = \frac{2M}{T(E_{n,q})} \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 8)$$

où $T(E)$ désigne la période temporelle du mouvement classique d'énergie E dans le potentiel $U_{-1/2}(z)$.

Nous allons aussi, de façon plus spécifique à notre problème, utiliser la faible variation, à l'échelle de $\hbar/p_{\pm}(z)$, des fonctions de période λ (comme $\sin(kz)$) intervenant dans les éléments de matrice (IV3d - 5) définissant les taux. On obtient ainsi le taux de départ de $|n, q, -\rangle$ vers tous les états $|n', q', +\rangle$ en remplaçant, dans l'intégrale définissant l'élément de matrice (IV3d - 7), $\cos^2(S_{-}(z)/\hbar)$ par $\frac{1}{2}$, sans affecter le facteur $\sin^2(kz)$:

$$\sum_{n'} \int_{-k}^k dq' \gamma_{n,q,- \rightarrow n',q',+} \simeq \frac{1}{T(E_{n,q})} \oint \frac{dz}{v_{-}(z)} \frac{2}{9} \Gamma s_0 \sin^2(kz) \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 9)$$

expression déjà apparue dans la forme limite (i.e. pour $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$) du traitement semi-classique (voir le §2b).

(iii) Principe du calcul des éléments de matrice

Nous ne considérons pas le cas où les régions permises classiquement pour le mouvement dans $U_{-1/2}(z)$ à l'énergie $E_{n,q}$ et le mouvement dans $U_{1/2}(z)$ à l'énergie $E_{n',q'}$ sont disjointes. Appelons donc $[a', b]$ l'intervalle de recouvrement des régions permises (voir fig. E_{IV} – 1). Les produits scalaires intervenant dans (E_{IV} – 5), après usage des expressions WKB (E_{IV} – 6) et (E_{IV} – 7), se mettent sous la forme :

$$\int_{a'}^b dz A(z) e^{iS(z)/\hbar} \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 10)$$

où l'amplitude $A(z)$ varie lentement à l'échelle de $\hbar/p_{\pm}(z)$, et où $S(z) = S_+(z) \pm S_-(z)$. La méthode adaptée au calcul d'intégrales comme (E_{IV} – 10) est celle de la phase stationnaire, dont nous rappelons les grandes lignes.

On peut montrer que la contribution majeure à (E_{IV} – 10) provient du voisinage des points z_0 en lesquels la dérivée de $S(z)$ s'annule. Un tel point n'existe pas lorsque $S(z) = S_+(z) + S_-(z)$ puisque $S'(z)$ est alors la somme de deux grandeurs positives $p_+(z)$ et $p_-(z)$; l'intégrale (E_{IV} – 10) peut être considérée dans ce cas comme petite. Dans l'autre situation $S(z) = S_+(z) - S_-(z)$, la transition de $|\Phi\rangle$ vers $T_{\frac{1}{4}}|\Phi'\rangle$ s'effectue avec un taux significatif à condition que $S'(z)$ puisse s'annuler, ce qui impose :

$$\exists z_0 \quad \text{tel que} \quad S'(z_0) = p_+(z_0) - p_-(z_0) = 0 \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 11)$$

Cette contrainte a d'ailleurs une signification claire : elle affirme simplement que les transitions les plus probables d'un niveau de $m = -1/2$ à un niveau de $m = 1/2$ s'effectuent près de z_0 , sans changement de position ni de vitesse pour l'atome^(*). Elle permet d'obtenir l'énergie $E_{n',q'}$ des niveaux alimentés de façon significative par des transitions depuis $|n, q, -\rangle$:

$$E_{n',q'} = E_{n,q} + U_{1/2}(z_0) - U_{-1/2}(z_0) \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 12)$$

(*) Si l'on ne suppose plus que $\sin(kz)$ varie peu à l'échelle de $\hbar/p(z)$, on est conduit à rajouter des termes de l'ordre de $\hbar k$ dans (E_{IV} – 11), qui décrivent le changement d'impulsion de l'atome à l'issue du cycle de fluorescence responsable de la transition et sont à l'origine d'un chauffage.

Cette relation entre énergies est déjà intervenue dans l'équation intégro-différentielle du §2b consacré à l'étude semi-classique du régime $\Omega_{\text{osc}} \tau_p \gg 1$.

L'étape suivante dans la méthode de la phase stationnaire consiste à remplacer $S(z)$ par son développement au second ordre au voisinage de z_0 :

$$S(z) \simeq S(z_0) + \frac{1}{2} (z - z_0)^2 S''(z_0) \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 13)$$

et à remplacer l'amplitude lentement variable $A(z)$ par sa valeur $A(z_0)$ en z_0 . On étend ensuite l'intervalle d'intégration sur z à $]-\infty, +\infty[$, ce qui conduit à l'expression approchée suivante :

$$\int_{a'}^b dz A(z) e^{iS(z)/\hbar} \simeq A(z_0) \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{|S''(z_0)|}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} e^{iS(z_0)/\hbar} \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 14)$$

où le signe \pm est celui de $S''(z_0)$.

(iv) Taux de transition de $|n, q, -\rangle$ vers $|n', q', +\rangle$

Appliquons la méthode de la phase stationnaire au calcul du premier élément de matrice $\langle \Phi | O(Z) T_{\frac{\lambda}{4}} | \Phi' \rangle$ dans (E_{IV} - 5) ; le point de phase stationnaire z_0 associé se trouve par hypothèse dans l'intervalle $[a', b]$ (voir fig. E_{IV} - 1). Le calcul de $S'' = S''_+ - S''_-$ conduit en z_0 à l'expression suivante, visiblement positive :

$$S''(z_0) = -\frac{2}{v(z_0)} \frac{dU_{1/2}}{dz}(z_0) \geq 0 \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 15)$$

où $v(z_0)$ désigne la vitesse commune en z_0 aux trajectoires dans $U_{1/2}$ et $U_{-1/2}$. On en déduit l'approximation :

$$\langle \Phi | O(Z) T_{\frac{\lambda}{4}} | \Phi' \rangle \simeq \frac{\sin(kz_0) e^{ip_S z_0 / \hbar}}{\sqrt{v(z_0) T(E_{n,q}) T(E_{n',q'})}} \frac{\sqrt{\pi\hbar}}{\left| \frac{d}{dz} U_{1/2}(z_0) \right|^{\frac{1}{2}}} \cos \left[\frac{S(z_0)}{\hbar} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 16a)$$

La valeur du second élément de matrice dans (E_{IV} - 5b) s'en déduit directement, seule l'amplitude lentement variable $A(z)$ étant différente :

$$\langle \Phi | O(-Z) T_{\frac{\lambda}{4}} | \Phi' \rangle \simeq -e^{-2ip_S z_0 / \hbar} \langle \Phi | O(Z) T_{\frac{\lambda}{4}} | \Phi' \rangle \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 16b)$$

L'évaluation du taux de transition $\gamma_{n,q,-\rightarrow n',q',+}$ à partir de (E_{IV} – 16) fait intervenir un facteur $\cos^2(S(z_0)/\hbar + \pi/4)$, que nous remplaçons, dans l'esprit de la méthode de la phase stationnaire, par sa valeur moyenne 1/2. Nous parvenons ainsi à l'expression suivante :

$$\gamma_{n,q,-\rightarrow n',q',+} \simeq \frac{2}{9} \Gamma s_0 \hbar \mathcal{N}_0(p_S) \frac{\sin^2(kz_0)}{T(E_{n,q}) v(z_0)} \cdot \frac{2\pi\hbar \sin^2(\phi/2)}{T(E_{n',q'}) \left| \frac{d}{dz} U_{1/2}(z_0) \right|} \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 17\text{a})$$

où l'angle ϕ est donné par :

$$\phi = (n - n')\pi - 2\frac{p_S z_0}{\hbar} - q' \frac{\lambda}{2} \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 17\text{b})$$

La première partie de l'expression (E_{IV} – 17a) est satisfaisante physiquement. On y reconnaît le taux de pompage semi-classique $\gamma_{-1/2 \rightarrow 1/2}(z_0) = \frac{2}{9} \Gamma s_0 \sin^2(kz_0)$, et la dépendance en les indices de Bloch q et q' intervient essentiellement par le choix de p_S qu'ils imposent. Pour accéder à la signification de la seconde partie, il est utile d'établir la correspondance entre la variation de z_0 et celle de l'indice de la bande d'arrivée n' . D'une part, l'accroissement de l'énergie $E_{n',q'}$ en fonction de n' peut être déduit de la condition de quantification WKB par différentiation [80] :

$$\frac{\partial E_{n',q'}}{\partial n'} = \frac{2\pi\hbar}{T(E_{n',q'})} \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 18)$$

D'autre part, l'évolution de z_0 avec l'énergie $E_{n',q'}$ est donnée par (E_{IV} – 12) :

$$\frac{\partial E_{n',q'}}{\partial z_0} = 2 \frac{dU_{1/2}}{dz}(z_0) \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 19)$$

Le dernier facteur dans (E_{IV} – 17a) est donc inversement proportionnel à la densité de modes d'indice n' par rapport à la variable z_0 , puisque cette densité vaut :

$$\left| \frac{\partial n'}{\partial z_0} \right| = \left| \frac{\partial n'}{\partial E_{n',q'}} \right| \cdot \left| \frac{\partial E_{n',q'}}{\partial z_0} \right| \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 20\text{a})$$

$$= \frac{T(E_{n',q'})}{2\pi\hbar} \cdot 2 \left| \frac{dU_{1/2}}{dz}(z_0) \right| \quad (\text{E}_{\text{IV}} - 20\text{b})$$

Le dernier facteur dépend également d'un angle ϕ mesurant l'interférence entre les deux chemins menant de $|n, q, -\rangle$ à $|n', q', +\rangle$ que l'on a représentés sur la fig. E_{IV} – 1. La présence de cet angle ϕ assure en particulier que $\gamma_{n,0,-\rightarrow n',k,+}$ s'annule lorsque $n' - n$ est impair, ce qui était prévisible puisque les états initial $|n, 0, -\rangle$ et final $|n', k, +\rangle$ sont de même parité dans ce cas (cf. (IV3b - 14b) et (IV3b - 9b)).

Notons pour terminer que l'expression approchée (E_{IV} – 17a), déduite des approximations WKB et de la phase stationnaire effectuées en cascade, donne seulement très approximativement l'ordre de grandeur du taux de transition. La comparaison avec les valeurs exactes obtenues numériquement selon la procédure de l'appendice F_{IV} met en évidence, pour $U_0 = 400E_R$, une erreur d'un facteur 2 pour ($n = 4, n' = 6$) et une erreur d'un facteur presque 10 pour ($n = 4, n' = 8$), la dépendance en q' étant cependant reproduite de façon satisfaisante par (E_{IV} – 17a), grâce en particulier au terme en $\sin^2(\phi/2)$.

Appendice F_{IV}

Discrétisation et résolution numérique des équations quantiques séculaires

La diagonalisation de la partie hamiltonienne des équations de Bloch optiques fait apparaître une base d'états délocalisés $|n, q, r\rangle$. Il est pertinent d'utiliser une décomposition en série de Fourier pour le calcul de ces états ; c'est ce que nous exposons ici pour $j_g = 1/2$, le cas $j_g = 1$ faisant l'objet du §3g. Par ailleurs, le caractère non normalisable de ces états rend problématique la définition des éléments de matrice qui interviennent dans l'expression des taux de transition. Nous montrons donc comment discrétiser le problème dans une boîte, avec les habituelles conditions aux limites périodiques, et nous examinons numériquement, pour $j_g = 1/2$, la dépendance de la matrice densité stationnaire avec la taille de la boîte. Pour terminer, on donne l'expression des taux de transition sur $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ dans le cas du diagramme simplifié d'émission spontanée.

(i) Le calcul des états propres pour $j_g = 1/2$

Nous avons fait apparaître, au §3b, un hamiltonien purement externe $H = \frac{P^2}{2M} + U_{-1/2}(Z)$, dont nous cherchons les états propres $|\psi\rangle$ sous la forme de Bloch :

$$|\psi\rangle = e^{iqZ} |\varphi\rangle \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 1)$$

où l'indice q est dans $] - k, k]$. On se ramène ainsi au calcul des états propres de période spatiale $\frac{\lambda}{2}$ du hamiltonien :

$$e^{-iqZ} H e^{iqZ} = \frac{(P + \hbar q)^2}{2M} + U_0 \sin^2(kZ) - \frac{3}{2} U_0 \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 2)$$

Toute la simplification repose sur la périodicité imposée à $\langle z|\varphi\rangle$, qui rend le spectre (à q fixé) discret et nous permet d'effectuer une décomposition en série de Fourier :

$$\langle z|\varphi\rangle = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{2iklz} \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 3)$$

Les coefficients (a_l) vérifient la condition de récurrence suivante, déduite de (F_{IV} - 2) :

$$\left[\frac{\hbar^2}{2M} (2lk + q)^2 - U_0 - E \right] a_l - \frac{1}{4} U_0 (a_{l+1} + a_{l-1}) = 0 \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 4)$$

Ils sont de carré sommable lorsque l'énergie E est dans le spectre.

On procède ensuite par troncature du système (F_{IV} – 4), en se limitant aux indices l tels que $-N \leq l \leq N$ dans (F_{IV} – 4), et en posant $a_{N+1} = a_{-(N+1)} = 0$. On se ramène ainsi à la diagonalisation d'une matrice réelle symétrique tridiagonale, ce qui est un problème bien connu [68] et ce qui permet de choisir les coefficients a_l tous réels. On obtient numériquement, à N fixé, des valeurs propres $E_n^{(N)}$, $0 \leq n \leq 2N$, et les vecteurs propres associés $|\psi_n^{(N)}\rangle$. Lorsque les énergies $E_n^{(N)}$ sont rangées par ordre croissant, n n'est autre que l'indice de bande et :

$$E_n^{(N)} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} E_{n,q} \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 5\text{a})$$

$$|\psi_n^{(N)}\rangle \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} |n, q\rangle \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 5\text{b})$$

Les états stationnaires $|n, q\rangle$ pour le mouvement dans le potentiel $U_{-1/2}(z)$ étant connus, ceux associés au potentiel $U_{1/2}(z)$ s'en déduisent par translation spatiale de $\frac{\lambda}{4}$; l'effet de cette translation sur la partie périodique $|\varphi\rangle$ est simplement de changer le signe des coefficients de Fourier d'indice l impair, a_l étant transformé en $(-1)^l a_l$ dans (F_{IV} – 3).

(ii) Discrétisation par quantification dans une boîte

Afin de n'avoir à manipuler que des fonctions d'onde normalisables, nous appliquons la prescription habituelle, qui consiste à quantifier dans une boîte de taille finie et à faire tendre, tous calculs faits, le volume de la boîte vers l'infini. La longueur L de notre boîte doit être compatible avec la périodicité des ondes laser, d'où le choix :

$$L = M\lambda \quad \text{avec} \quad M \text{ entier} \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 6)$$

Nous imposons des conditions aux limites périodiques. La discrétisation correspondante pour p_S , l'impulsion selon Oz des photons de fluorescence, est :

$$p_S = \hbar k \frac{m_S}{M} \quad \text{avec} \quad -M \leq m_S \leq M \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 7)$$

Toutes les fonctions d'onde atomiques considérées doivent être invariantes par translation de L , ce qui revient à sélectionner les $2M$ valeurs discrètes suivantes de l'indice de Bloch q :

$$q = k \frac{m}{M} \quad \text{avec} \quad -M < m \leq M \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 8)$$

Nous choisissons de plus, à taille L fixée, la définition suivante pour le produit scalaire entre deux fonctions d'onde $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$ dans la boîte :

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dz \psi_1^*(z) \psi_2(z) \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 9)$$

Ceci donne comme condition de normalisation des états propres de H :

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |a_l|^2 = 1 \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 10)$$

où les coefficients a_l sont ceux de (F_{IV} - 3).

Nous avons besoin de la forme séculaire des équations quantiques dans une boîte de taille finie. Nous partons pour cela d'une forme discrète des équations de Bloch, qui prend en compte (F_{IV} - 7) :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = & \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \sigma] - \frac{1}{4} \Gamma s_0 \left\{ \mathcal{V}^{(-)}(Z) \mathcal{V}^{(+)}(Z), \sigma \right\} \\ & + \frac{1}{2} \Gamma s_0 \sum_{q_S=0,\pm 1} \sum_{m_S=-M}^M \hbar k \mathcal{N}_{q_S}(p_S) \Pi(m_S; M) W_{q_S}(p_S) \sigma W_{q_S}^\dagger(p_S) \end{aligned} \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 11)$$

avec les notations du II§1c. Les poids d'intégration $\Pi(m_S; M)$ sont normalisés ainsi :

$$\sum_{m_S=-M}^M \Pi(m_S; M) = 2 \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 12)$$

et sont tels que les équations d'évolution (F_{IV} - 11) conservent la trace de σ , ce qui impose :

$$\sum_{m_S=-M}^M \hbar k \Pi(m_S; M) \mathcal{N}_{q_S}(p_S) = 1 \quad \text{pour} \quad q_S = 0, \pm 1 \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 13)$$

Comme les distributions $\mathcal{N}_{qs}(p_S)$ sont des polynômes de degré 2 en p_S , les poids de Simpson vérifient exactement (F_{IV} – 13), puisqu'ils sont déduits d'une interpolation par des morceaux de parabole :

$$\Pi(m_S; M) = \frac{1}{3}(1, 4, 1) \quad \text{si } M = 1 \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 14\text{a})$$

$$= \frac{1}{3M}(1, 4, 2, \dots, 4, 1) \quad \text{si } M > 1 \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 14\text{b})$$

En effectuant la démarche de réduction des équations (F_{IV} – 11) dans la limite séculaire, telle qu'elle a été exposée dans le §3c, on aboutit à l'expression suivante pour les taux de transition dans le modèle discret :

$$\gamma_{n,q,r \rightarrow n',q',r'} = \frac{1}{2} \Gamma_{s_0} \sum_{qs=0,\pm 1} \sum_{m_S=-M}^M \hbar k \mathcal{N}_{qs}(p_S) \Pi(m_S; M) |\langle n', q', r' | W_{qs}(p_S) | n, q, r \rangle|^2 \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 15)$$

Simplifions la somme sur l'impulsion p_S dans (F_{IV} – 15) à l'aide de la règle de sélection (IV3c - 21), qui exprime la conservation de la quasi-impulsion. Dans notre modèle discret, cette règle impose, pour une transition de $|n, q, r\rangle$ vers $|n', q', r'\rangle$:

$$m_S = m - m' \pm M[2M] \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 16)$$

La résolution de cette équation, compte tenu de l'encadrement $-M \leq m_S \leq M$, conduit à une valeur unique pour m_S , sauf dans le cas particulier $q = q'$:

$$\text{si } m = m' : m_S = \pm M \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 17\text{a})$$

$$\text{si } m > m' : m_S = m - m' - M \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 17\text{b})$$

$$\text{si } m < m' : m_S = m - m' + M \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 17\text{c})$$

La somme sur m_S dans (F_{IV} – 15) comporte donc en général un seul terme non nul.

(iii) Expression explicite des taux pour $j_g = 1/2$

Nous supposons connues les parties externes $|\psi\rangle$ et $|\psi'\rangle$ des états propres $|n, q, r\rangle$ et $|n', q', r'\rangle$, sous la forme des coefficients de Fourier (a_l) et (a'_l) de leurs parties périodiques $|\varphi\rangle$ et $|\varphi'\rangle$. Nous indiquons comment en déduire le taux de transition $\gamma_{n,q,r \rightarrow n',q',r'}$.

On remarque d'abord, sur (IV3d - 5), que la connaissance du taux de transition nécessite seulement le calcul des amplitudes :

$$A_{\pm} = \langle \psi' | e^{\pm ikZ} e^{-ipsZ/\hbar} | \psi \rangle \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 18)$$

Il suffit en effet, pour cela, de décomposer les opérateurs $\sin(kZ)$ et $\cos(kZ)$, qui correspondent aux composantes du champ électrique laser selon σ_+ et σ_- , en somme d'exponentielles.

Evaluons ensuite ces amplitudes en introduisant selon (F_{IV} - 1) les parties périodiques $|\varphi\rangle$ et $|\varphi'\rangle$:

$$A_{\pm} = \langle \varphi' | e^{i[q-q'-ps/\hbar]Z} e^{\pm ikZ} | \varphi \rangle \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 19)$$

Or, la valeur (ou les valeurs, si $q = q'$) de p_s apportant une contribution non nulle à A_{\pm} peut être déduite de (F_{IV} - 17). Pour cette valeur de p_s , A_{\pm} vaut l'un des trois éléments de matrice $\langle \varphi' | \exp(2iukZ) | \varphi \rangle$, où $u = 0, \pm$, éléments de matrice dont l'expression est simple en point de vue de Fourier :

$$\langle \varphi' | e^{2iukZ} | \varphi \rangle = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a'_l a_{l-u} \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 20)$$

(iv) Résolution numérique des équations discrètes

Afin de déterminer numériquement les populations stationnaires $\Pi_{n,q,r}$, nous effectuons, en sus de la discréttisation déjà mentionnée, une troncature dans le développement en série de Fourier des parties périodiques $|\varphi\rangle$. On se limite dans (F_{IV} - 3) aux indices l tels que :

$$-N \leq l \leq N \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 21)$$

les coefficients d'indice hors de ce domaine étant pris nuls, comme on l'a fait au paragraphe (i).

Cette approximation par troncature oblige à prendre une précaution dans la formation de la matrice des équations de taux (IV3c - 17a). En effet, le taux total de départ du niveau $|n, q, r\rangle$ doit être défini par :

$$\gamma_{n,q,r} = \sum_{n'=0}^{2N} \sum_{m'=-M+1}^M \sum_{r'=\pm} \gamma_{n,q,r \rightarrow n',q',r'} \quad (\text{F}_{\text{IV}} - 22)$$

ce qui ne coïncide avec (IV3c - 20a) qu'à la limite $N \rightarrow +\infty$. La définition (F_{IV} - 22) nous assure de la non-inversibilité de la matrice des taux, donc de l'existence d'un état stationnaire. On notera cependant que des différences notables entre les valeurs de $\gamma_{n,q,r}$ définies par (F_{IV} - 22) et (IV3c - 20a) apparaissent surtout pour un indice de bande n proche de l'indice de bande maximal $2N$.

Les grandeurs sensibles au choix de N sont celles qui dépendent essentiellement du comportement asymptotique (c'est-à-dire pour n élevé) des populations des bandes. C'est le cas par exemple de l'impulsion quadratique moyenne des atomes, mais ce n'est pas le cas de la mi-largeur en impulsion p_e , de la modulation spatiale (définie par (IV3f - 20)) ni des populations des premières bandes. La fig. F_{IV} - 1 permet d'apprécier, pour une profondeur de puits $U_0 = 100E_R$, les variations de ces grandeurs avec le paramètre N . Elle montre que la prise en compte d'une vingtaine de bandes d'énergie conduit, pour cette valeur de U_0 , à une approximation satisfaisante de toutes les grandeurs considérées, sauf de Δp qui nécessite environ 80 bandes.

Etudions pour terminer la vitesse de convergence des diverses grandeurs de la fig. F_{IV} - 1 avec la taille de la boîte de quantification. On choisit pour cela un paramètre de troncature N conduisant à une bonne estimation de Δp (soit $N = 40$, avec $U_0 = 100E_R$). Les résultats obtenus pour diverses valeurs de M sont présentés sur la fig. F_{IV} - 2 ; on constate qu'ils varient très peu avec la longueur de la boîte lorsque celle-ci excède 2λ .

	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 60$
$\Delta p/(\hbar k)$	4.414	5.290	5.612	5.681	5.689
$p_e/(\hbar k)$	4.648	4.641	4.641	4.641	4.641
$\text{supp}/\inf \rho$	1.655	1.653	1.649	1.649	1.649
Π_0	0.330	0.314	0.312	0.312	0.312
$10\Pi_8$	0.213	0.208	0.207	0.207	0.207

Fig. F_{IV} – 1 : Pour une profondeur de puits $U_0 = 100E_R$ sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, et pour divers paramètres de troncature N , valeurs dans la limite séculaire de l'impulsion quadratique moyenne Δp , de la mi-largeur en impulsions p_e à la hauteur relative $e^{-1/2}$, de la modulation spatiale et des populations des bandes d'indice $n = 0$ et $n = 8$. Dans tous les cas, la boîte de quantification est de longueur λ ($M = 1$) et la mi-largeur p_e est calculée par interpolation linéaire de la distribution en impulsions.

	$M = 1$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$
$\Delta p/(\hbar k)$	5.681	5.534	5.525	5.523
$p_e/(\hbar k)$	4.641	4.487	4.478	4.470
$\text{supp}/\inf \rho$	1.649	1.717	1.724	1.726
Π_0	0.312	0.325	0.326	0.326
$10\Pi_8$	0.207	0.194	0.194	0.194

Fig. F_{IV} – 2 : Pour une profondeur de puits $U_0 = 100E_R$ sur la transition $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$, et pour diverses longueurs de quantification $M\lambda$, valeurs des paramètres déjà cités en fig. F_{IV} – 1. Dans tous les cas, le paramètre de troncature est $N = 40$.

(v) Les taux de transition du modèle à émission spontanée simplifiée pour $j_g = 1$

Les caractéristiques du modèle à diagramme d'émission spontanée simplifié, ainsi que les conditions d'approximation séculaire qu'il impose, sont analysées au §3g. Nous donnons ici simplement les taux de transition correspondants entre les divers niveaux $\|n, \varepsilon_T\rangle_W$ et $\|n', \varepsilon'_T\rangle_V$. Le calcul est effectué à l'aide des expressions générales (IV3c - 20b), avec une définition du taux total de départ d'un niveau dans l'esprit de (F_{IV} – 22). Dans le cas d'une transition entre états propres de \mathcal{H}_W , il suffit d'effectuer ce calcul pour ($q_S = 1, p_S = \hbar k$) et d'en déduire le résultat pour $q_S = -1$ ou $p_S = -\hbar k$ à l'aide de (B_{IV} – 5).

Décrivons les notations utilisées. On envisage la transition d'un état initial, de nombres quantiques n, ε_T et ε_I , vers un état final de nombres quantiques n', ε'_T et ε'_I . Lorsque le niveau considéré est un état propre de \mathcal{H}_W , on appelle $|\varphi_-\rangle$ ou $|\varphi'_-\rangle$ la partie périodique, de période $\frac{\lambda}{2}$ (voir la décomposition de Bloch ($F_{IV} - 1$)), de la composante du spinor selon le sous-niveau interne $|g - 1\rangle$. Lorsque le niveau considéré diagonalise \mathcal{H}_V , $|\psi_0\rangle$ ou $|\psi'_0\rangle$ désigne sa partie externe. Les taux ont alors l'expression suivante :

$$\gamma_{W \rightarrow W} = \frac{1}{2} \Gamma s_0 \left| \frac{1}{6} \langle \varphi_- | e^{2ikZ} - 1 | \varphi'_- \rangle - \varepsilon_T \varepsilon'_T \langle \varphi_- | e^{2ikZ} + 1 | \varphi'_- \rangle \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \varepsilon_T \langle \varphi_- | T_{\frac{\lambda}{4}}^\dagger (e^{2ikZ} + 1) | \varphi'_- \rangle \right|^2 \quad (F_{IV} - 23a)$$

$$\gamma_{V \rightarrow W} = \frac{1}{4} \Gamma s_0 |1 - \varepsilon_T \varepsilon'_T|^2 |\langle \psi_0 | \varphi'_- \rangle|^2 \quad \text{si } \varepsilon_I = \varepsilon'_I \\ = 0 \quad \text{si } \varepsilon_I \neq \varepsilon'_I \quad (F_{IV} - 23b)$$

$$\gamma_{W \rightarrow V} = 0 \quad \text{si } \varepsilon_I = \varepsilon'_I \\ (F_{IV} - 23c)$$

$$= \frac{1}{9} \Gamma s_0 |1 + \varepsilon'_T \varepsilon_T|^2 |\langle \varphi_+ | \psi'_0 \rangle|^2 \quad \text{si } \varepsilon_I \neq \varepsilon'_I$$

$$\gamma_{V \rightarrow V} = \frac{1}{16} \Gamma s_0 \delta_{n',1} \quad \text{si } n = 0 \\ = \frac{1}{16} \Gamma s_0 \delta_{n,1} \quad \text{si } n' = 0 \quad (F_{IV} - 23d) \\ = \frac{1}{32} \Gamma s_0 \delta_{|n-n'|,1} \quad \text{si } n \neq 0 \text{ et } n' \neq 0$$

L'opérateur de translation spatiale de $\frac{\lambda}{4}$ qui intervient dans ($F_{IV} - 23a$) provient de l'élimination de la composante du spinor selon $|g 1\rangle$ au profit de celle selon $|g - 1\rangle$, à l'aide de (IV3g - 10). On rappelle que ε_I vaut $(-1)^n$ pour l'état $\|n, \varepsilon_T\rangle_W$, et que ε_T vaut $(-1)^n$ pour l'état $\|n, \varepsilon_I\rangle_V$. On notera que $\gamma_{V \rightarrow V}$ n'est autre que $\frac{1}{8} \Gamma s_0 |\langle \psi_0 | e^{2ikZ} | \psi'_0 \rangle|^2$, et que ($F_{IV} - 23d$) est obtenu après usage de l'expression explicite (IV3g - 17) des états $\|n, \varepsilon_I\rangle_V$ et $\|n', \varepsilon'_I\rangle_V$.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE

Comme l'expose le présent mémoire, nous sommes parvenu à déterminer les limites du refroidissement d'atomes par laser pour les deux configurations modèles de mélasses à une dimension, les configurations $\sigma_+ - \sigma_-$ et $Ox - Oy$. Dans les deux cas, l'optimum sur l'impulsion atomique quadratique moyenne Δp est atteint à grand désaccord en fréquence entre laser et atome ($|\delta| \gg \Gamma$), et pour un déplacement lumineux $\frac{1}{2}\hbar\delta s_0$ dépendant seulement, lorsqu'il est mesuré en unité d'énergie de recul E_R , de la transition atomique $j_g \rightarrow j_e = j_g + 1$ considérée. Les valeurs de Δp correspondantes sont de l'ordre de 5 à 6 $\hbar k$, si l'on excepte la transition $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2$ dans $\sigma_+ - \sigma_-$, qui conduit à des distributions plus chaudes.

Nous avons montré qu'à l'optimum du refroidissement, la description du mouvement d'un atome dans une mélasse optique en termes simplement d'une force de friction visqueuse et d'une diffusion en impulsions n'est plus correcte. Ceci interdit l'usage de l'approche semi-classique traditionnelle, fondée sur ces deux notions de force et de diffusion, pour la détermination des "températures" les plus basses. Nous avons donc été amené à développer des approches semi-classiques plus performantes, ainsi que de nouveaux traitements s'appuyant sur une description quantique du mouvement atomique dans les mélasses optiques. Nous avons pu également associer à ces approches des images physiques nouvelles pour les deux configurations modèles envisagées.

Dans l'étude de la configuration laser $\sigma_+ - \sigma_-$, le principal phénomène physique nouveau que nous avons rencontré est l'existence de corrélations entre les pas successifs de la marche au hasard des atomes dans l'espace des impulsions. Ces corrélations sont induites par le pompage optique et par la grande sensibilité des probabilités d'absorption de photons σ_+ ou σ_- à l'état atomique interne. Sur la transition $j_g = 4 \rightarrow j_e = 5$, dans les situations les plus froides, le pas effectif de la marche au hasard en impulsions n'est plus négligeable devant la largeur de la distribution, ce qui interdit l'écriture d'une équation de Fokker-Planck. Nous avons alors mis en œuvre un nouveau moyen d'étude, qui consiste en une réduction des équations entièrement quantiques à des équations de taux, dans la limite "séculaire" où les écarts entre les déplacements lumineux des divers sous-niveaux sont beaucoup plus grands que leur largeur due au pompage optique.

Dans la configuration laser $Ox - Oy$, les déplacements lumineux des sous-niveaux fondamentaux sont fortement modulés spatialement, avec une période $\frac{\lambda}{2}$. Cette propriété, absente de la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, introduit un nouveau temps externe $T_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{osc}}}$, période du mouvement d'oscillation des atomes dans les puits de potentiel lumineux. Nous avons montré que l'optimum du refroidissement par effet Sisyphe auquel donne naissance cette configuration, se situe dans le régime $\Omega_{\text{osc}}\tau_p \gg 1$, où τ_p est un temps typique de pompage optique. Ce régime est à l'extrême opposé de celui étudié habituellement dans le refroidissement d'atomes neutres, puisque la vitesse atomique y évolue plus rapidement que l'état atomique interne ($T_{\text{int}} \gg T_{\text{ext}}$). Cette propriété, jointe à l'apparition d'une localisation spatiale des atomes à l'échelle de λ , interdit d'écrire une équation de Fokker-Planck sur la distribution atomique $\Pi(z, p)$. Nous avons été conduit alors à faire appel d'une part à un traitement semi-classique plus sophistiqué, d'autre part à une nouvelle approche quantique. Cette dernière approche s'est avérée la plus fructueuse. Elle conduit à une description du refroidissement proche de celle utilisée pour les ions piégés. On introduit d'abord les états propres du mouvement des atomes en présence du potentiel, agissant sur la position z du centre de masse et sur l'état atomique interne, qui constitue la partie réactive du couplage atome-rayonnement. Comme ce potentiel est périodique (de période $\frac{\lambda}{2}$), le spectre obtenu est constitué d'une succession de bandes d'énergie permises. L'écart entre les bandes les plus profondes est de l'ordre de $\hbar\Omega_{\text{osc}}$. On prend ensuite en compte perturbativement l'effet des cycles de fluorescence pour déterminer les populations stationnaires des différentes bandes permises. Nous avons pu montrer qu'à l'optimum du refroidissement, plus de la moitié des atomes se situent dans les deux premières bandes.

L'observation de cette structure en bandes des énergies atomiques serait une mise en évidence de la quantification du mouvement atomique par la lumière. Un premier pas dans cette voie a été fait récemment grâce à la mesure de spectre de résonance Raman d'une assemblée d'atomes de césum froids placés dans la configuration laser unidimensionnelle $Ox - Oy$. Des structures très étroites ont été observées, dont la position semble correspondre aux principales transitions interbandes attendues (voir fig. 1). Le formalisme mis en œuvre dans notre travail devrait fournir un cadre théorique adéquat pour l'étude détaillée de ce type de signaux [36,86]. Ces mesures expérimentales, ainsi que d'autres [18], prouvent toute l'importance de la localisation spatiale des atomes à l'échelle de λ , phénomène souvent ignoré dans les études passées des mélasses optiques.

Un prolongement direct du travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude de con-

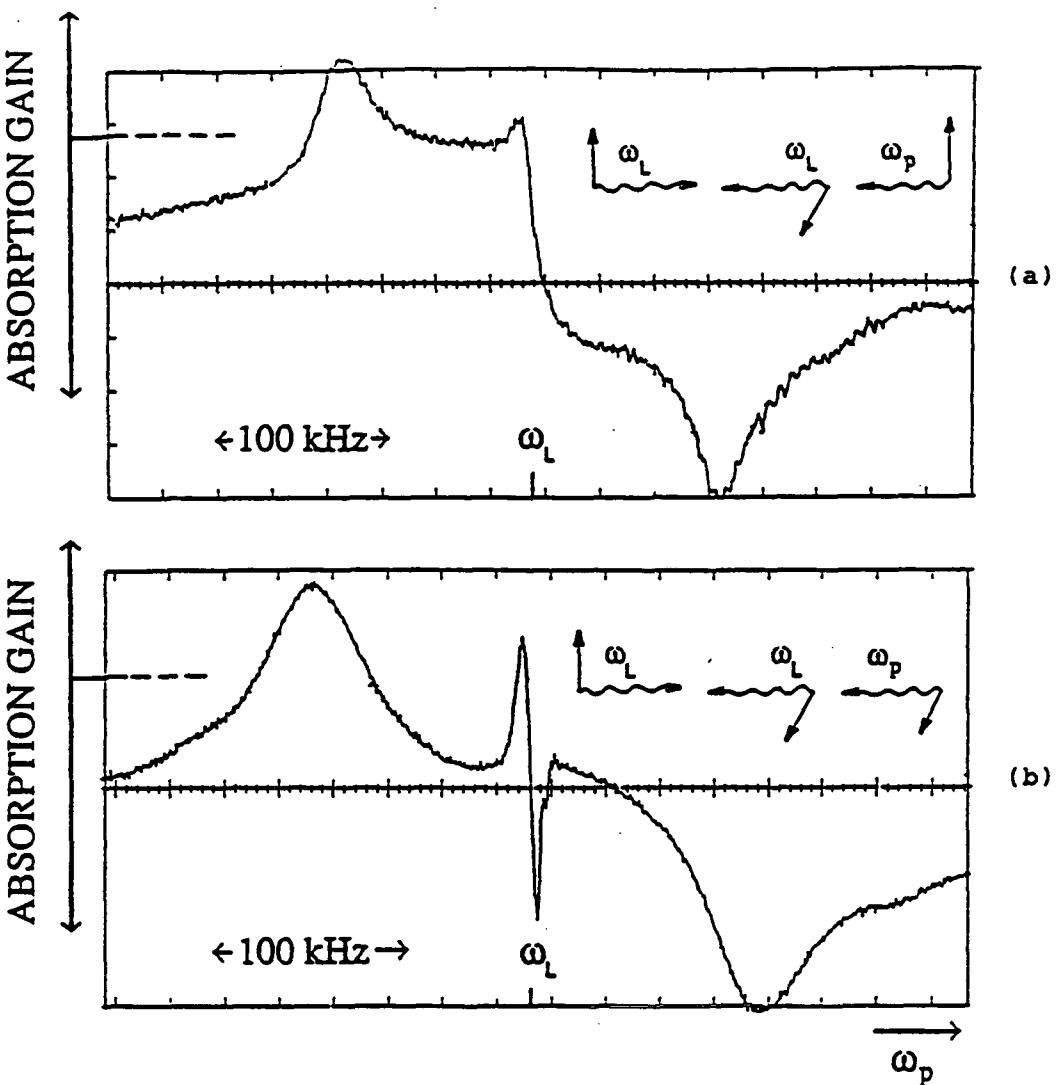


Fig. 1 : Transmission d'un faisceau sonde (de pulsation ω_p) à la traversée d'une mélasse optique à une dimension sur le césium, dans la configuration $Ox - Oy$ (ondes laser de pulsation ω_L). Sur la fig. a, la sonde est polarisée orthogonalement à l'onde de mélasse de même vecteur d'onde ; sur la fig. b, la polarisation de la sonde est parallèle à celle de l'onde de mélasse de même vecteur d'onde. On remarque la présence de deux bandes latérales étroites (35 kHz sur a et 50 kHz sur b pour la largeur à mi-hauteur), symétriques par rapport à ω_L , et dont l'écart à ω_L correspond à Ω_{osc} , pulsation d'oscillation des atomes au fond des puits de potentiel. De si faibles largeurs peuvent être interprétées en terme d'effet Dicke pour les atomes localisés au fond des puits. Les résonances centrales encore plus étroites sont dues à des effets plus subtils (cf. [86], dont cette figure est tirée).

figurations de refroidissement plus proches de la plupart des réalisations expérimentales, c'est-à-dire à trois dimensions. Cette étude devra en particulier déterminer la sensibilité du refroidissement aux phases relatives des ondes composant la mélasse. Il a ainsi été montré récemment, dans le cadre de l'approche semi-classique traditionnelle, que ces phases pouvaient avoir un effet important sur les valeurs des forces et des coefficients de diffusion agissant sur les atomes [87]. Il serait intéressant de voir si une telle sensibilité se manifeste

dans les généralisations des approches développées ici (comme la méthode des bandes) ou pour d'autres approches quantiques (simulation Monte-Carlo d'évolution de fonctions d'onde [88]), et si l'on peut en espérer une mise en évidence expérimentale.

Enfin, à plus longue échéance, notre travail pourrait fournir une base adéquate pour aborder les problèmes fondamentaux que pose l'étude des assemblées d'atomes ultra-froids, qu'il s'agisse de collisions [89-93], de la possible mise en évidence de phénomènes quantiques collectifs, comme la condensation de Bose [94-102] ou encore des effets de dégénérescence dans une cavité à atomes [103,104].

Références bibliographiques

- [1] Lett P., Watts R., Westbrook C., Phillips W.D., Gould P. et Metcalf H., *Phys. Rev. Lett.* **61** 169 (1988)
- [2] Chu S., Weiss D.S., Shevy Y. et Ungar P.J., *Atomic Physics* **11**, éd. S. Haroche, J.-C. Gay et G. Grynberg (World Scientific, Singapour) p. 636 (1989)
- [3] Dalibard J., Salomon C., Aspect A., Arimondo E., Kaiser R., Vansteenkiste N. et Cohen-Tannoudji C., *Atomic Physics* **11**, éd. S. Haroche, J.-C. Gay et G. Grynberg (World Scientific, Singapour) p. 199 (1989)
- [4] Lett P., Phillips W.D., Rolston S., Tanner C., Watts R. et Westbrook C., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2084 (1989)
- [5] Shevy Y., Weiss D.S., Ungar P.J. et Chu S., *Phys. Rev. Lett.* **62** 1118 (1989)
- [6] Weiss D.S., Riis E., Shevy Y., Ungar P.J. et Chu S., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2072 (1989)
- [7] Hänsch T. et Schawlow A., *Opt. Commun.* **13** 68 (1975)
- [8] Wineland D. et Itano W., *Phys. Rev. A* **20** 1521 (1979)
- [9] Cook R.J., *Phys. Rev. A* **22** 1078 (1980)
- [10] Gordon J.P. et Ashkin A., *Phys. Rev. A* **21** 1606 (1980)
- [11] Javanainen J. et Stenholm S., *Appl. Phys.* **21** 35 (1980)
- [12] Stenholm S., *Rev. Mod. Phys.* **58**, 699 (1986)
- [13] Salomon C., Dalibard J., Phillips W.D., Clairon A. et Guellati S., *Europhys. Lett.* **12** 683 (1990)
- [14] Castin Y., Wallis H. et Dalibard J., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2046 (1988)
- [15] Ungar P.J., Weiss D.S., Riis E. et Chu S., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2058 (1989)
- [16] Dalibard J. et Cohen-Tannoudji C., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2023 (1989)
- [17] Dalibard J. et Cohen-Tannoudji C., *J. Phys. B* **18** 1661 (1985)

- [18] Westbrook C., Watts R., Tanner C., Rolston S., Phillips W.D., Lett P. et Gould P., *Phys. Rev. Lett.* **65** 33 (1990)
- [19] Castin Y. et Dalibard J., *Europhys. Lett.* **14** 761 (1991), reproduit dans l'appendice D_{IV}
- [20] Wineland D. et Dehmelt H., *Bull. Am. Phys. Soc.* **20**, 637 (1975)
- [21] Neuhauser W., Hohenstatt M., Toschek P. et Dehmelt H., *Phys. Rev. Lett.* **41** 233 (1978)
- [22] Javanainen J. et Stenholm S., *Appl. Phys.* **24** 71 et 151 (1981)
- [23] Javanainen J., *J. Phys. B* **18** 1549 (1984)
- [24] Lindberg M., *J. Phys. B* **17** 2129 (1984)
- [25] Cohen-Tannoudji C., in *Les Houches, Session LIII, 1990 - Fundamental Systems in Quantum Optics*, éd. J. Dalibard, J.-M. Raimond et J. Zinn-Justin (Elsevier Science Publishers B.V.) (1992)
- [26] Nienhuis G., *Proceedings of the LIKE workshop, Elbe, may 1990*, éd. L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo et F. Strumia (Ets Editrice, Pise) p. 139 (1991)
- [27] Nienhuis G. et van der Straten P., *Phys. Rev. A* **44** 462 (1991)
- [28] Cohen-Tannoudji Claude, Cours au Collège de France, chap. VI (1990)
- [29] van Kampen N.G., *Stochastic processes in physics and chemistry* (North-Holland, Amsterdam) (1981)
- [30] Kramers H.A., *Physica* **7** 284 (1940)
- [31] Kazantsev A.P., Ryabenko G.A., Surdutovich G.I. et Yakovlev V.P., *Scattering of Atoms by Light, Physics Reports (Review Section of Physics Letters)* **129** (North-Holland, Amsterdam) 75-144 (1985)
- [32] Joos E. et Zeh H.D., *Z. Phys. B* **59** 223 (1985)
- [33] Aspect A., Arimondo E., Kaiser R., Vansteenkiste N. et Cohen-Tannoudji C., *Phys. Rev. Lett.* **61** 826 (1988)
- [34] Aspect A., Arimondo E., Kaiser R., Vansteenkiste N. et Cohen-Tannoudji C., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2112 (1989)

- [35] Mauri F., Papoff F. et Arimondo E., *Proceedings of the LIKE workshop, Elbe, may 1990*, éd. L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo et F. Strumia (Ets Editrice, Pise) p. 89 (1991)
- [36] Grison D., Lounis B., Salomon C., Courtois J.-Y. et Grynberg G., *Europhys. Lett.* **15** 149 (1991)
- [37] Wigner E.P., *Phys. Rev.* **40** 749 (1932)
- [38] Dalibard J., Reynaud S. et Cohen-Tannoudji C., *J. Phys. B* **17** 4577 (1984)
- [39] Castin Y. et Mølmer K., *J. Phys. B* **23** 4101 (1990)
- [40] Mølmer K., Thèse de l'Université d'Aarhus (1990)
- [41] van Kampen, *Phys. Rep.* **124** 70 (1985)
- [42] Stenholm S., *Appl. Phys.* **15** 287 (1978)
- [43] Cohen-Tannoudji C., in *Les Houches, Session XXVII, 1975 - Frontiers in laser spectroscopy*, éd. R. Balian, S. Haroche et S. Liberman (North-Holland, Amsterdam) p. 28 (1977)
- [44] Mollow B.R., *Phys. Rev. A* **12** 1919 (1975)
- [45] Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J. et Grynberg G., *Introduction à l'Électro-dynamique quantique* (InterÉditions et Éditions du CNRS, Paris) (1987)
- [46] Loudon R., *The Quantum Theory of Light* (Clarendon Press, Oxford) (1973)
- [47] Condon E.U. et Shortley G.H., *The theory of atomic spectra* (Cambridge University Press) (1935)
- [48] Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J. et Grynberg G., *Processus d'interaction entre photons et atomes* (InterÉditions et Éditions du CNRS, Paris) p.571 (1988)
- [49] Power E.A., *Introductory Quantum Electrodynamics* (Longman, London) chap. VII et VIII (1964)
- [50] Cohen-Tannoudji C., Diu B. et Laloë F., *Mécanique quantique* (Hermann, Paris) tome I, p.174 (1977)
- [51] Heitler W., *The Quantum Theory of Radiation* (troisième édition, Clarendon Press, Oxford) (1954)
- [52] Tung W.-K., *Group Theory in Physics* (World Scientific, Singapour) (1985)

- [53] Wallis H. et Ertmer W., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2111 (1989)
- [54] Mølmer K., *Phys. Rev. Lett.* **66** 2301 (1991)
- [55] Barrat J.P. et Cohen-Tannoudji C., *J. Phys. (Paris)* **22** 329, 443 (1961)
- [56] Wallis H., thèse, Bonn (1990)
- [57] Mølmer K., Berg-Sørensen K. et Bonderup E., *J. Phys. B* **24** 2327 (1991)
- [58] Javanainen J., *Phys. Rev. A* **44** 5857 (1991) et *Opt. Comm.* **86** 475 (1991)
- [59] Berg-Sørensen K., Bonderup E., Mølmer K. et Castin Y., soumis à *J. Phys. B*
- [60] Tanguy C., thèse de troisième cycle de l'Université de Paris VI (1983)
- [61] Castin Y., Mølmer K., Dalibard J. et Cohen-Tannoudji C., in *Laser Spectroscopy IX*, éd. M. Feld, J. Thomas et A. Mooradian (Academic Press, San-Diego) p. 2 (1989)
- [62] Lax M., *Phys. Rev.* **172** 350 (1968)
- [63] Gardiner C.W., *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Springer) (1983)
- [64] Shevy J., *Phys. Rev. A* **41** 5229 (1990)
- [65] Grynberg G., Vallet M. et Pinard M., *Phys. Rev. Lett.* **65** 701 (1990)
- [66] Berman P.R., *Phys. Rev. A* **43** 1470 (1991)
- [67] Le programme de résolution des équations quantiques sur $j_g = 1 \longrightarrow j_e = 2$ dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ a été écrit par Klaus Mølmer de l'Université d'Aarhus (Danemark)
- [68] Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. et Vetterling W.T., *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press) (1986)
- [69] Minogin V.G., *Sov. Phys. JETP* **53** 1164 (1981)
- [70] Programme de calcul de $F(v)$ et $D(v)$ dans $\sigma_+ - \sigma_-$ écrit en collaboration avec Klaus Mølmer à Aarhus
- [71] Stenholm S., *J. Opt. Soc. Am. B* **1** 658 (1984)
- [72] Dalibard J. et Cohen-Tannoudji C., *J. Opt. Soc. Am. B* **2** 1707 (1985)

- [73] Kazantsev A.P., Surdutovich G.I., Chudesnekov D.O. et Yakovlev V.P., *J. Phys. B* **18** 2619 (1985)
- [74] Wineland D.J., Dalibard J. et Cohen-Tannoudj C., *J. Opt. Soc. Am. B* **9** 32 (1992)
- [75] Ashcroft N.W. et Mermin N.D., *Solid State Physics* (HRW International Editions) (1976)
- [76] Campbell R., *Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la Mécanique* (Masson) (1955)
- [77] Dicke R.H., *Phys. Rev.* **89** 472 (1953)
- [78] Letokhov V.S. et Minogin V.G., *Phys. Reports* **73** 1 (1981)
- [79] Schumacher E., Wilkens M., Meystre P. et Glasgow S., à paraître (1992)
- [80] Landau L. et Lifchitz E., *Cours de Physique Théorique - Mécanique quantique tome 3* (troisième édition, Éditions Mir, Moscou) chap. VII (1975)
- [81] Migdall A.B., *Qualitative Methods in Quantum Theory* (Benjamin) (1977)
- [82] Raab E.L., Prentiss M., Chu S. et Pritchard D.E., *Phys. Rev. Lett.* **59** 2631 (1987)
- [83] Sheehy B., Shang S.-Q., van der Straten P., Hatamian S. et Metcalf H., *Phys. Rev. Lett.* **64** 858 (1990)
- [84] Shang S.-Q., Sheehy B., Metcalf H., van der Straten P. et Nienhuis G., *Phys. Rev. Lett.* **67** 1094 (1990)
- [85] Steane A. et Foot C., *Europhys. Lett.* **14** 231 (1991) et à paraître dans *J. Opt. Soc. Am. B* (1992)
- [86] Verkerk P., Lounis B., Salomon C., Courtois J.-Y., Grynberg G. et Cohen-Tannoudji C., soumis à *Phys. Rev. Lett.* (1992)
- [87] Mølmer K., *Phys. Rev. A* **44** 5820 (1991)
- [88] Dalibard J., Castin Y. et Mølmer K., *Phys. Rev. Lett.* **68** 580 (1992)
- [89] Julienne P. et Mies F., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2257 (1989)
- [90] Weiner J., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2270 (1989)
- [91] Julienne P.S., Heather R. et Vigué J., *A.I.P. Conf. Proc. (USA)* **216** 191 (1990) (10th International Conference on Spectral Line Shapes, Austin)

- [92] Walker T., Sesko D. et Wieman C., *Phys. Rev. Lett.* **64** 408 (1990)
- [93] Julienne P.S. et Heather R., p.2135 ; Lett P.D., Jessen P.S., Phillips W.D., Rolston S.L., Westbrook C.I. et Gould P.L., p.2139 dans *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991)
- [94] Greytak T.J. et Kleppner D., in *Les Houches, Session XXXVIII, 1982 - New Trends in Atomic Physics*, éd. G. Grynberg et R. Stora (North-Holland, Amsterdam) p.1125 (1984)
- [95] Vigué J., *Phys. Rev. A* **34** 4476 (1986)
- [96] Silvera I.F. et Walraven J.T.M., in *Progress in Low Temperatures Physics*, éd. D. Brewer (North-Holland, Amsterdam) vol.10 chap. D (1986)
- [97] Hess H.F., *Phys. Rev. B* **34** 3476 (1986)
- [98] Masuhara N., Doyle J.M., Sandberg J.C., Kleppner D., Greytak G.J., Hess H.F. et Kochanski G.P., *Phys. Rev. Lett.* **61** 935 (1988)
- [99] Doyle J.M., Sandberg J.C., Masuhara N., Yu I.A., Kleppner D. et Greytak T.J., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2244 (1989)
- [100] Doyle J.M., Sandberg J.C., Yu I.A., Claudio L.C., Kleppner D. et Greytak T.J., *Phys. Rev. Lett.* **67** 603 (1991)
- [101] Bagnato V. et Kleppner D., *Physical Review A* **44** 7439 (1991)
- [102] Walraven J.T.M., in *Les Houches, Session LIII, 1990 - Fundamental Systems in Quantum Optics*, éd. J. Dalibard, J.-M. Raimond et J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam) (à paraître en 1992)
- [103] Balykin V.I. et Lethokov V.S., *Appl. Phys. B* **48** 517 (1989)
- [104] Wallis H., Dalibard J. et Cohen-Tannoudji C., à paraître dans *Appl. Phys.* (1992)
- [105] Kasevich M.A., Riis E., Chu S. et De Voe R., *Phys. Rev. Lett.* **63** 612 (1990)
- [106] Clairon A., Salomon C., Guellati S. et Phillips W.D., *Europhys. Lett.* **14** 761 (1991)
- [107] Valentin C., Gagné M.-C., Yu J. et Pillet P., *Europhys. Lett.* **17** 133 (1992)
- [108] Bonderup E. et Mølmer K., *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2125 (1989)
- [109] Cohen-Tannoudji C. et Phillips W.D., *Physics Today* **43** 33 (octobre 1990)

NOM : Yvan CASTIN

SUJET : Les limites du refroidissement laser dans les mélasses optiques à une dimension

RÉSUMÉ

Les techniques de refroidissement d'atomes par laser dans les mélasses optiques conduisent à des "températures" minimales de quelques microkelvins. Dans ce régime ultra-froid, le mouvement des atomes n'est plus describable en termes d'une force de friction visqueuse et d'une diffusion en impulsion. Pour obtenir les limites du refroidissement, nous avons donc développé de nouvelles approches, dont la plus fructueuse traite quantiquement le mouvement atomique dans le potentiel créé par la lumière. Les mélasses sont étudiées pour les deux configurations laser modèles à une dimension, $\sigma_+ - \sigma_-$ et $Ox - Oy$. Les atomes ont alors une impulsion quadratique moyenne minimale d'environ $6\hbar k$, où $\hbar k$ est la quantité de mouvement d'un photon laser.

ABSTRACT

Laser cooling can lead to extremely low kinetic "temperatures", in the microkelvin range. In this coldest regime, one can no longer describe the atomic motion in terms of a damping force linear with velocity and a momentum diffusion coefficient. New approaches are described in the present work. The most fruitful one is based on a quantum treatment of atomic motion in the optical wells created by the laser light. In the case of $1D$ molasses, the two laser configurations $\sigma_+ - \sigma_-$ and $Ox - Oy$ are investigated. The minimum r.m.s. atomic momenta are found to be of the order of 6 single-photon momenta.

MOTS CLEFS

Quantification du mouvement — Potentiels périodiques — Approximation séculaire — Pompage optique — Gradients de polarisation — Forces radiatives — Diffusion en impulsion — Equation de Fokker-Planck