

Annexe C

Dérivation alternative des fluctuations de ρ

Dans cette annexe, nous proposons une seconde dérivation des fluctuations de la densité de rapidités ρ , différente de celle présentée au chapitre 4. Cette approche m'a été suggérée par Jérôme Dubail ([Centre européen de sciences quantiques \(CESQ\)](#)). Elle présente l'intérêt de passer directement par les fluctuations du facteur d'occupation ν , et constitue également une bonne occasion de manipuler les dérivées de l'opérateur *d'habillage*.

C.1 Réécriture de l'entropie de Yang–Yang

L'entropie de Yang–Yang s'écrit

$$S_{YY} = \int d\theta \left(\rho_s \ln \rho_s - \rho \ln \rho - (\rho_s - \rho) \ln(\rho_s - \rho) \right)(\theta). \quad (\text{C.1})$$

En introduisant le facteur d'occupation

$$\nu = \frac{\rho}{\rho_s}, \quad (\text{C.2})$$

l'intégrande peut se réécrire sous la forme

$$S_{YY} = \int d\theta s(\nu(\theta)) \rho_s(\theta), \quad (\text{C.3})$$

où la fonction d'entropie locale est donnée par

$$s(\nu) = -\nu \ln \nu - (1 - \nu) \ln(1 - \nu). \quad (\text{C.4})$$

C.2 Différentielle de l'action effective

On définit l'action effective comme

$$S_{YY} - \mathcal{W}, \quad (\text{C.5})$$

où \mathcal{W} est l'énergie généralisée,

$$\mathcal{W} = \int d\theta w(\theta) \rho(\theta). \quad (\text{C.6})$$

Sa différentielle est donnée par

$$\delta(S_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left(\delta\nu s'(\nu) \rho_s + s(\nu) \delta\rho_s - w \delta\rho \right)(\theta). \quad (\text{C.7})$$

En remarquant que

$$\delta\nu\rho_s = \delta\rho - \nu\delta\rho_s, \quad (\text{C.8})$$

on réécrit (C.7) sous la forme

$$\delta(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left(\{s'(\nu) - w\}\delta\rho + \{s(\nu) - \nu s'(\nu)\}\delta\rho_s \right)(\theta). \quad (\text{C.9})$$

On obtient alors la différentielle seconde :

$$\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta \left(\delta\nu s''(\nu) \delta\rho - \nu \delta\nu s''(\nu) \delta\rho_s \right)(\theta). \quad (\text{C.10})$$

En utilisant (C.8), on simplifie pour obtenir

$$\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W}) = \int d\theta ((\delta\nu)^2 s''(\nu) \rho_s)(\theta), \quad (\text{C.11})$$

avec

$$s''(\nu) = -\frac{1}{\nu(1-\nu)}. \quad (\text{C.12})$$

C.3 Fluctuations

C.3.1 Fluctuations des facteurs d'occupation

Les fluctuations du facteur d'occupation s'écrivent

$$\langle \delta\nu(\theta') \delta\nu(\theta) \rangle_w = - \left[L \frac{\delta^2(\mathcal{S}_{YY} - \mathcal{W})}{\delta\nu \delta\nu} \right]^{-1}(\theta, \theta'). \quad (\text{C.13})$$

En injectant (C.11), il vient

$$\langle \delta\nu(\theta') \delta\nu(\theta) \rangle_w = -s''(\nu(\theta)) \rho_s(\theta) \delta(\theta - \theta'), \quad (\text{C.14})$$

qui est purement diagonale.

C.3.2 Opérateur d'habillage

On rappelle la définition de l'opérateur d'habillage :

$$f_{[\nu]}^{\text{dr}} = f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu f_{[\nu]}^{\text{dr}}). \quad (\text{C.15})$$

En remarquant que

$$C(\theta, \lambda) = \left[\frac{\Delta(\lambda - \cdot)}{2\pi} \right]_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta), \quad (\text{C.16})$$

qui est symétrique, on peut réécrire [DS17]

$$f_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta) = \int d\lambda f(\lambda) \left(\delta(\theta - \lambda) + \nu(\lambda) C(\theta, \lambda) \right). \quad (\text{C.17})$$

C.3.3 Fluctuations des distributions de rapidité

On a vu que

$$2\pi \rho_s(\theta) = 1_{[\nu]}^{\text{dr}}(\theta) = \int d\lambda \left(\delta(\theta - \lambda) + \nu(\theta) C(\theta, \lambda) \right), \quad (\text{C.18})$$

d'où

$$2\pi \delta\rho_s(\theta) = \int d\lambda C(\theta, \lambda) \rho_s(\lambda) \delta\nu(\lambda). \quad (\text{C.19})$$

Ainsi,

$$\delta\rho(\theta) = \rho_s(\theta)\delta\nu(\theta) + \nu(\theta)\delta\rho_s(\theta) \quad (\text{C.20})$$

$$= \int d\lambda \delta(\theta - \lambda) \rho_s(\lambda) \delta\nu(\lambda) + \int d\lambda \nu(\theta) C(\theta, \lambda) \rho_s(\lambda) \delta\nu(\lambda), \quad (\text{C.21})$$

$$= \int d\lambda \left(\delta(\theta - \lambda) + \nu(\theta) C(\theta, \lambda) \right) \rho_s(\lambda) \delta\nu(\lambda). \quad (\text{C.22})$$

En réinjectant (C.11) et (C.22) dans la définition

$$\langle \delta\rho(\theta') \delta\rho(\theta) \rangle_w = - \left[L \frac{\delta^2(S_{YY} - \mathcal{W})}{\delta\rho \delta\rho} \right]^{-1}(\theta, \theta'), \quad (\text{C.23})$$

on obtient finalement

$$\langle \delta\rho(\theta') \delta\rho(\theta) \rangle_w = - \frac{1}{L} \int d\lambda \frac{\left(\delta(\theta - \lambda) + \nu(\theta) C(\theta, \lambda) \right) \left(\delta(\theta' - \lambda) + \nu(\theta') C(\theta', \lambda) \right)}{s''(\nu(\lambda))} \rho_s(\lambda) \quad (\text{C.24})$$

$$= \frac{1}{L} \mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta') + \frac{1}{L} \mathcal{B}(\theta, \theta'), \quad (\text{C.25})$$

où

$$\mathcal{D}^{-1}(\theta, \theta') = (\rho_s(\theta) \nu(\theta) (1 - \nu(\theta))) \delta(\theta - \theta'), \quad (\text{C.26})$$

$$\mathcal{B}(\theta, \theta') = \left[\nu(\theta') \rho_s(\theta) \nu(\theta) (1 - \nu(\theta)) + \nu(\theta) \rho_s(\theta') \nu(\theta') (1 - \nu(\theta')) \right] C(\theta, \theta') \quad (\text{C.27})$$

$$+ \nu(\theta) \nu(\theta') \int d\lambda \rho_s(\lambda) \nu(\lambda) (1 - \nu(\lambda)) C(\theta, \lambda) C(\theta', \lambda). \quad (\text{C.28})$$

Cette expression coïncide numériquement avec le résultat obtenu en (4.59).

Bibliographie de l'annexe

- [DS17] Benjamin DOYON et Herbert SPOHN. “Drude Weight for the Lieb-Liniger Bose Gas”. In : *SciPost Physics* 3.6 (déc. 2017). ISSN : 2542-4653. DOI : [10.21468/scipostphys.3.6.039](https://doi.org/10.21468/scipostphys.3.6.039). URL : <http://dx.doi.org/10.21468/SciPostPhys.3.6.039>.

