

Chapitre 3

Dynamique hors-équilibre et hydrodynamique généralisée

Sommaire

3.1	Manipulation de l'opération d'<i>habillage</i>	42
3.1.1	Dérivation intuitive de la vitesse effective	42
3.1.2	Diagonalisation et invariants de Riemann dans la GHD spatiale étendue	43
3.2	Formulation hamiltonienne de la GHD	45
3.2.1	Crochet de Poisson fonctionnel	45
3.2.2	Crochet avec l'Hamiltonien	46
3.2.3	Modèle de Lieb–Liniger	46
3.2.4	Cas “no dressing”	47
3.3	Régime de quasi-condensation et limite Gross–Pitaevskii	48
3.3.1	Évolution temporelle selon l'équation de Gross–Pitaevskii	48
3.3.2	Description par les équations Hydrodynamiques Généralisées	49
3.3.3	Connexion hydrodynamique : de la GHD à l'équation de Gross–Pitaevskii	49

Introduction

De l'état stationnaire à la dynamique Après avoir étudié les propriétés stationnaires du gaz de bosons unidimensionnel, nous abordons maintenant sa dynamique hors équilibre. Un outil théorique qui permet de décrire cette évolution macroscopique à grande échelle est l'**Hydrodynamique Généralisée**, en anglais **Generalized Hydrodynamics (GHD)**. Cette approche, développée au cours des dernières années (voir par exemple [Doy20a; BD22; Ess23; KK23]), fournit un cadre uniifié pour la dynamique des systèmes intégrables.

Principe général de l'approche hydrodynamique Si on considère des systèmes homogènes en équilibre ou relaxés vers un état stationnaire, et nous avons étudié la thermodynamique du Bethe Ansatz (**TBA**), qui permet de caractériser ces états par une distribution de rapidité homogène $\rho(\theta)$.

Pour passer à l'hydrodynamique, nous nous intéressons désormais à des systèmes *inhomogènes* et *hors équilibre*. Nous supposons que le système est suffisamment grand pour que des variations spatiales et temporelles apparaissent, mais suffisamment lent pour qu'il puisse se relaxer *localement* vers des états quasi-stationnaires.

Le système est donc pris dans la limite thermodynamique ($L \rightarrow \infty$), de sorte que l'on puisse le découper en cellules fluides locales de taille mésoscopique notée ℓ . Ces cellules sont suffisamment grandes pour contenir un grand nombre de particules, mais suffisamment petites pour que les variations spatiales soient

négligeables à l'intérieur de chacune d'elles. Cet effort de séparation d'échelles¹, définie par

$$\ell_c \ll \ell \ll L,$$

où ℓ_c est une longueur microscopique caractéristique (distance inter-particules, longueur de corrélation, etc.), permet de définir, pour chaque cellule centrée en x au temps t , des opérateurs densités d'observables locaux $\hat{q}_i(x, t)$.

Ces opérateurs locaux $\hat{q}_i(x, t)$ sont entièrement caractérisés par un opérateur densité locale de rapidités $\hat{\rho}(x, \theta; t)$, correspondant à la distribution de rapidité dans la cellule fluide localisée en (x, t) .

On introduit ainsi la description dans l'*espace des phases* (x, θ) : la variable de rapidité θ caractérise l'état asymptotique des quasi-particules (leur quantité de mouvement effective), tandis que la variable x encode l'inhomogénéité spatiale.

L'objectif de l'hydrodynamique est de décrire la dynamique macroscopique du système, après un lissage sur des échelles intermédiaires de temps et d'espace. Le système est alors découpé en cellules spatio-temporelles de taille $\ell \times \tau$.

Nous faisons l'hypothèse que, dans chaque cellule, le système atteint localement un état quasi-stationnaire. Cette hypothèse constitue l'**Approximation de Densité Locale** (en anglais **Local Density Approximation (LDA)**).

Nous allons maintenant réintroduire les charges conservées définies dans le chapitre précédent, mais cette fois de manière locale, en fonction de l'opérateur densité de rapidités localement résolue $\hat{\rho}(x, \theta; t)$.

Opérateurs charges globales Les charges locales conservées ont été définies dans les équations (2.21). Dans le même formalisme, on définit les *charges globales* comme des fonctionnelles linéaires agissant sur une fonction réelle et régulière $f(x, \theta)$ définie sur \mathbb{R}^2 , selon

$$\hat{Q}[f] = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f(x, \theta) \hat{\rho}(x, \theta; t). \quad (3.1)$$

Cette quantité correspond à la charge totale associée à une observable prenant la valeur $f(x, \theta)$ pour chaque quasi-particule.

Remarque : pour que $\hat{Q}[f]$ soit strictement conservée dans le temps, la fonction f doit être indépendante de x , c'est-à-dire $f(x, \theta) = f(\theta)$. Si f dépend de x , $\hat{Q}[f]$ n'est pas nécessairement conservée au cours de l'évolution du système. En revanche, si f dépend uniquement de θ , alors $\hat{Q}[f]$ correspond à une véritable charge conservée. Dans le cadre de ce chapitre, la dépendance en x est introduite pour faciliter certaines dérivations et l'étude des profils locaux, mais la conservation stricte n'est garantie que pour les fonctions $f(\theta)$ indépendantes de x .

La valeur moyenne $\langle \hat{Q}[f] \rangle_{\hat{\rho}[w]}$ a été définie en (2.4). La matrice densité locale $\hat{\rho}^{(S)}[w]$ a été introduite en (2.27). De manière analogue, la *matrice densité globale* $\hat{\rho}[w]$ s'écrit

$$\hat{\rho}[w] = \frac{1}{Z[w]} e^{-\hat{Q}[w]}, \quad Z[w] = \text{Tr} \left[e^{-\hat{Q}[w]} \right], \quad (3.2)$$

où la charge globale $\hat{Q}[w]$ est définie par (3.1), et w désigne le poids spectral.

Nous allons maintenant considérer la limite thermodynamique, où les moyennes des opérateurs sont notées sans chapeau.

Limite thermodynamique. Dans notre étude de la dynamique, nous n'avons pas besoin de l'information détaillée sur le poids spectral w . Nous noterons donc, dans ce chapitre, et dans la limite thermodynamique, les moyennes des opérateurs en supprimant leur chapeau, *i.e.*

$$\lim_{\text{therm}} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}[w]} \equiv O, \quad (3.3)$$

1. (*i.e.* la définition de l'échelle mésoscopique de taille ℓ être l'échelle microscopique de taille ℓ_c et l'échelle macroscopique de taille L)

de sorte que, dans cette limite, la moyenne de la charge globale s'écrit

$$Q[f] = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f(x, \theta) \rho(x, \theta; t), \quad (3.4)$$

où f est une fonction régulière sur \mathbb{R}^2 .

Avec ce formalisme, en appliquant $(x, \theta) \mapsto \delta(\cdot - x) f_i(\theta)$ dans (3.4), nous pouvons définir la moyenne des densités locales $q_i(x, t)$ comme

$$q_{[f_i]}(x, t) = Q[(x, \theta) \mapsto \delta(\cdot - x) f_i(\theta)] = \int d\theta f_i(\theta) \rho(x, \theta; t). \quad (3.5)$$

Équations de type Euler. Maintenant on veut décrire les échanges des densités locales $q_i(x, t)$ entre les cellules fluides.

À l'**échelle d'Euler**, on suppose $\ell_c \ll \ell \ll L$ et une relaxation locale rapide : chaque cellule méso-scopique atteint un état quasi-stationnaire entièrement caractérisé par les densités conservées $q_i(x, t)$. Le courant qui traverse la cellule est alors fixé par cet état local, d'où la relation constitutive locale

$$j_i(x, t) \simeq j_i^{(0)}(\{q_1(x, t), q_2(x, t), \dots\}). \quad (3.6)$$

Les dépendances en gradients $\partial_x q_i$ sont de rang supérieur dans l'expansion en petit paramètre de séparation d'échelles (**Knudsen number**) ; elles apparaissent comme corrections dissipatives (p. ex. termes de diffusion ou de viscosité) :

$$j_i = j_i^{(0)}(\{q_a\}) - \sum_j D_{ij}(\{q_a\}) \partial_x q_j + \dots, \quad (3.7)$$

avec D_{ij} coefficients de diffusion (ou viscosité) et $\{q_a\} \equiv \{q_1, q_2, \dots\}$. C'est ce qui conduit aux lois de Fick/Fourier/viscose au rang suivant.

Ainsi, l'approximation $j_i = j_i(\{q_a\})$ est valable à l'ordre **Euler**, tandis que $j_i(q, \partial_x q, \dots)$ correspond au traitement hydrodynamique au-delà de l'ordre Euler (**Navier–Stokes** / corrections diffusives).

À l'**échelle d'Euler**, l'évolution des densités est alors donnée par les équations de conservation locales : dites **équations d'Euler** :

$$\partial_t q_i + \partial_x j_i = F_i, \quad (3.8)$$

où F_i des termes de force provenant d'éventuels champs externes. Ces équations d'Euler apparaissent dans de nombreux contextes physiques : fluides galiléens, hydrodynamique relativiste, etc.

Cas intégrable et hydrodynamique généralisée Dans un système intégrable en dimension un, il existe une infinité de quantités conservées, et donc une infinité d'équations de type (3.8). **GHD** fournit une reformulation de cet ensemble d'équations sous une forme compacte et universelle. Elle s'applique aussi bien aux systèmes quantiques (modèle de **Lieb–Liniger**, chaînes de spins) qu'aux systèmes classiques (bâtons durs, gaz de solitons).

Paramétrisation spectrale. Dans le modèle de **Lieb–Liniger**, nous avons vu que localement un système relaxé est décrit par une distribution de rapidité homogène $\rho(\theta)$ (voir chapitres précédents).

Avec l'**LDA**, on considère désormais des situations où le système présente des variations sur des longueurs d'espace beaucoup plus grandes que les échelles microscopiques ℓ_c . Dans ce cadre hydrodynamique, la distribution de rapidité dépend donc explicitement de la position et du temps :

$$\rho(x, \theta, t) = Q[(x, \theta) \mapsto \delta(\cdot - x) \delta(\cdot - \theta)].$$

La fonction $\rho(x, \theta, t)$ représente alors la densité locale de rapidité dans cet espace étendu.

Équation de GHD avec force externe En présence d'un champ de force, l'équation GHD prend la forme [DY17]

$$\partial_t \rho + \partial_x \left(v^{\text{eff}} \rho \right) + \partial_\theta \left(a^{\text{eff}} \rho \right) = 0, \quad (3.9)$$

où v^{eff} et a^{eff} sont des fonctionnelles déterminées par la structure intégrable du modèle. Le terme en ∂_θ traduit la déviation des quasi-particules sous l'effet des forces externes appliquées.

Dans la suite, nous détaillons la construction de ces équations pour le modèle de LL, ainsi que leurs principales conséquences physiques.

3.1 Manipulation de l'opération d'*habillage*

Un point technique central de la GHD est la dérivation de la vitesse effective et de l'accélération effective qui apparaissent dans l'équation (3.9). Ces quantités ont été calculées pour la première fois par Bertini *et al.* (2016) [Ber+16] et Castro-Alvaredo *et al.* (2016) [CDY16]. Cette observation clé a déclenché l'ensemble des développements ultérieurs de la dynamique hydrodynamique généralisée dans les systèmes quantiques intégrables. Les travaux de Bertini *et al.* s'appuient en partie sur ceux de Bonnes *et al.* (2014) [BEL14], où la formule de la vitesse effective (voir Eq. (3.11)) était apparue pour la première fois dans le contexte d'un système intégrable quantique.

On note $h(x, \theta)$ la densité de l'hamiltonien nu telle que

$$H = Q[h]. \quad (3.10)$$

La fonction d'occupation ν , la vitesse effective v^{eff} et l'accélération effective a^{eff} sont définies par

$$2\pi\rho = 1_{[\nu]}^{\text{dr}} \nu, \quad 2\pi v^{\text{eff}} \rho = (\partial_\theta h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \nu, \quad 2\pi a^{\text{eff}} \rho = -(\partial_x h)_{[\nu]}^{\text{dr}} \nu, \quad (3.11)$$

toutes trois étant des fonctions de $\rho(\cdot, \cdot, t)$ et l'opération d'*habillage* (notée $(\bullet)_{[\nu]}^{\text{dr}}$) a été définie au chapitre 1, Eq. (1.91).

Les équations (3.8) et (3.9) (ainsi que plus loin (3.26) et (3.35)) décrivent la dynamique dans le régime d'Euler. En dehors de cette approximation, il est nécessaire de prendre en compte des contributions supplémentaires associées aux effets diffusifs [DBD18; NBD19; Hüb+24].

3.1.1 Dérivation intuitive de la vitesse effective

En partant de la définition de la vitesse effective en (3.11) et en utilisant la définition de l'opération d'*habillage* (1.91), il vient que

$$2\pi v^{\text{eff}} \rho = \nu \partial_\theta h + \nu \left(\Delta \star (\rho v^{\text{eff}}) \right), \quad (3.12)$$

où Δ désigne le *déplacement collisionnel* défini dans le modèle Lieb–Liniger dans équation(1.63) et en soustrayant $v^{\text{eff}}(\theta)\nu(\theta)(\Delta \star \rho)(\theta)$ des deux cotés et on obtient

$$v^{\text{eff}}(\theta) (2\pi \rho(\theta) - \nu(\theta) (\Delta \star \rho)(\theta)) = \nu(\theta) \left(\partial_\theta h(\theta) + \int d\theta' \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') (v^{\text{eff}}(\theta') - v^{\text{eff}}(\theta)) \right), \quad (3.13)$$

En partant de l'écriture de la fonction d'occupation en (3.11) et en utilisant la définition de l'opération d'*habillage* (1.91), il vient que

$$2\pi\rho - \nu \Delta \star \rho = \nu, \quad (3.14)$$

On obtient

$$v^{\text{eff}}(\theta) = \partial_\theta h(\theta) + \int d\theta' \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') (v^{\text{eff}}(\theta') - v^{\text{eff}}(\theta)). \quad (3.15)$$

Dans le cadre général du GHD, l'équation (3.15) s'interprète comme une extension naturelle du résultat classique obtenu pour le gaz de bares dures. La distinction essentielle réside dans le fait que le décalage de diffusion $\Delta(\theta - \theta_0)$ dépend désormais explicitement de la rapidité relative entre les quasi-particules, alors que, dans le cas du gaz de tiges dures, Δ est une constante égale à l'opposé du diamètre des particules.

Sur le plan cinématique, on peut décrire la situation de la manière suivante : une quasi-particule *traceur* de rapidité θ — c'est-à-dire de moment asymptotique θ en l'absence d'interactions — se déplacerait, dans le vide, à vitesse constante θ (Figs 1.1 et 3.1). En présence d'une densité finie $\rho(\theta_0)$ de quasi-particules de rapidité θ_0 , cette vitesse est modifiée par les processus de diffusion à deux corps.

Pendant un intervalle de temps infinitésimal $[t, t + \delta t]$, le traceur subit en moyenne

$$\delta t \times |v^{\text{eff}}(\theta) - v^{\text{eff}}(\theta_0)| \rho(\theta_0)$$

collisions avec des quasi-particules de rapidité θ_0 . Chaque interaction provoque un décalage spatial $\Delta(\theta - \theta_0)$ vers l'arrière (Figs 1.1 et 3.1). L'équation (3.15) formalise précisément cet effet cumulatif, résultant de l'intégration des contributions de toutes les collisions binaires sur l'espace des rapidités. La Fig. 3.1 illustre les trajectoires d'un gaz de bares dures en 1D [Per76; BDS83], avec diamètre $-\Delta$. Les trajectoires effectives sont calculées via la vitesse GHD, et le graphique a été généré en Python.

Cette analyse microscopique s'étend naturellement aux modèles à N corps, où les processus de diffusion se combinent et interagissent de manière non triviale, la fonction $\Delta(\theta - \theta_0)$ encapsulant alors l'intégralité de la structure intégrable du système.

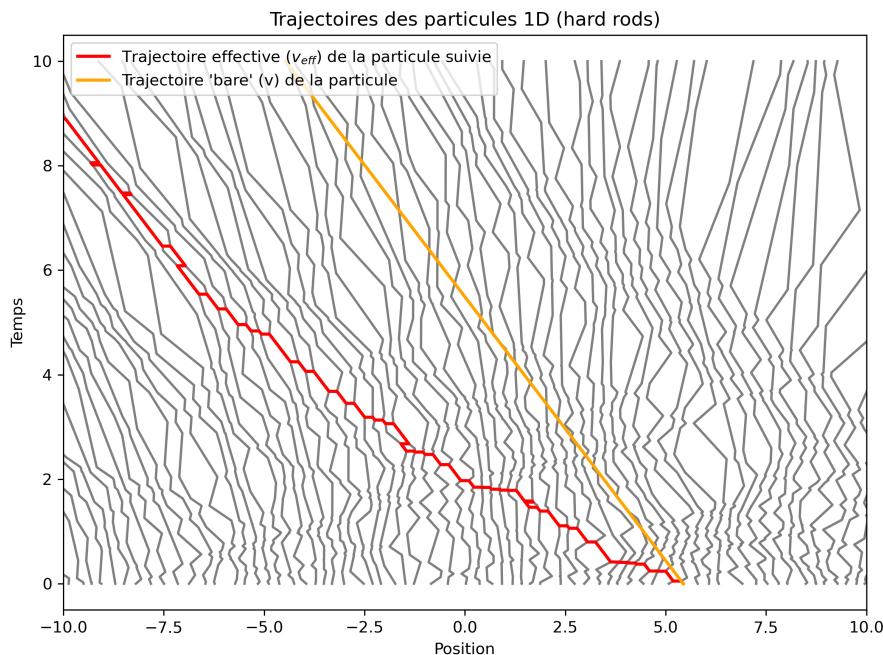


FIGURE 3.1 – Trajectoires des particules d'un gaz de bares dures en 1D. Les lignes noires représentent les particules individuelles, la ligne rouge la trajectoire effective (vitesse GHD) de la particule suivie, et la ligne orange la trajectoire si la particule conservait sa vitesse initiale (bare velocity). Le graphique a été généré en Python.

3.1.2 Diagonalisation et invariants de Riemann dans la GHD spatiale étendue

En dérivant la définition de l'opération d'*habillage* (1.91), on obtient la relation suivante :

$$\partial_X(f_{[\nu]}^{\text{dr}}) = \partial_X f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (\nu \partial_X f_{[\nu]}^{\text{dr}}) + \frac{\Delta}{2\pi} \star (f_{[\nu]}^{\text{dr}} \partial_X \nu), \quad (3.16)$$

où les variables $X = t, x, \theta$. Soit

$$\left(1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star v \cdot\right) \partial_X(f_{[v]}^{\text{dr}}) = \partial_X f + \frac{\Delta}{2\pi} \star (f_{[v]}^{\text{dr}} \partial_X v), \quad (3.17)$$

En utilisant la définition (1.91), on obtient également que

$$(\partial_X f)_{[v]}^{\text{dr}} = \left(1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star v \cdot\right)^{-1} \partial_X f, \quad (3.18)$$

donc en injectant dans (3.17) il vient que

$$\partial_X(f_{[v]}^{\text{dr}}) = (\partial_X f)_{[v]}^{\text{dr}} + \Theta(f_{[v]}^{\text{dr}} \partial_X v), \quad (3.19)$$

où $X \in \{t, x, \theta\}$ et où nous avons introduit l'opérateur Θ linéaire construit à partir de $(1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star v \cdot)^{-1}$ et de convolutions par $\frac{\Delta}{2\pi}$ i.e.

$$\Theta \equiv \left(1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star v \cdot\right)^{-1} \frac{\Delta}{2\pi} \star \quad (3.20)$$

Les dérivation définitions (3.11) donnent :

$$2\pi \partial_t \rho = 1_{[v]}^{\text{dr}} \partial_t v + v \left((\partial_t 1)_{[v]}^{\text{dr}} + \Theta(1_{[v]}^{\text{dr}} \partial_t v) \right) \quad (3.21)$$

$$2\pi \partial_x(v^{\text{eff}} \rho) = (\partial_\theta h)_{[v]}^{\text{dr}} \partial_x v + v \left((\partial_x \partial_\theta h)_{[v]}^{\text{dr}} + \Theta((\partial_\theta h)_{[v]}^{\text{dr}} \partial_x v) \right) \quad (3.22)$$

$$2\pi \partial_\theta(a^{\text{eff}} \rho) = -(\partial_x h)_{[v]}^{\text{dr}} \partial_\theta v - v \left((\partial_\theta \partial_x h)_{[v]}^{\text{dr}} + \Theta((\partial_x h)_{[v]}^{\text{dr}} \partial_\theta v) \right) \quad (3.23)$$

En injectant dans l'équation GHD (3.9) on obtient après calculs (regroupement des termes et mise en facteur)

$$\left((\partial_t 1)^{\text{dr}} + (\partial_x \partial_\theta h)^{\text{dr}} - (\partial_\theta \partial_x h)^{\text{dr}} \right) v + (1 + \Theta) \left(1_{[v]}^{\text{dr}} \partial_t v + (\partial_\theta h)_{[v]}^{\text{dr}} \partial_x v - (\partial_x h)_{[v]}^{\text{dr}} \partial_\theta v \right) = 0. \quad (3.24)$$

Puisque $\partial_t 1 = 0$ et $\partial_x \partial_\theta h = \partial_\theta \partial_x h$, le premier crochet s'annule. Il reste donc

$$(1 + \Theta) \left(1_{[v]}^{\text{dr}} \partial_t v + (\partial_\theta h)_{[v]}^{\text{dr}} \partial_x v - (\partial_x h)_{[v]}^{\text{dr}} \partial_\theta v \right) = 0.$$

Sous l'hypothèse standard d'inversibilité des opérateurs de dressing (i.e. $\hat{O} = 1 - \frac{\Delta}{2\pi} \star v \cdot$ est inversible et Θ n'a pas de noyau pathologique), on en déduit l'annulation du membre intérieur. En divisant par $1_{[v]}^{\text{dr}}$ on obtient l'équation de transport locale

$$\partial_t v + v^{\text{eff}} \partial_x v + a^{\text{eff}} \partial_\theta v = 0, \quad (3.25)$$

(avec $v^{\text{eff}} = (\partial_\theta h)_{[v]}^{\text{dr}} / 1_{[v]}^{\text{dr}}$ et $a^{\text{eff}} = -(\partial_x h)_{[v]}^{\text{dr}} / 1_{[v]}^{\text{dr}}$).

Dans les systèmes hyperboliques, la *diagonalisation* d'une équation consiste à trouver une transformation des variables qui permet de décomposer le système couplé en un ensemble de modes indépendants, appelés *invariants de Riemann* ou *modes normaux*.

Dans le cadre de la **GHD** spatiale étendue, l'équation d'évolution de la densité $\rho(x, \theta, t)$ est couplée de manière non triviale en (x, θ) par la vitesse effective v^{eff} et l'accélération effective a^{eff} . La fonction d'occupation $v(x, \theta, t)$ est définie par une transformation non locale dite *dressing* qui incorpore les interactions du système.

Grâce à cela, on peut affirmer que la fonction $v(x, \theta)$ s'interprète comme un continuum d'**invariants de Riemann**, c'est-à-dire des variables normales qui restent constantes le long des caractéristiques du système.

Cette diagonalisation est essentielle pour comprendre la structure hamiltonienne du système et simplifier l'analyse de sa dynamique, notamment dans le cadre spatial étendu avec un dressing dépendant de la position.

3.2 Formulation hamiltonienne de la GHD

Dans [BCD22], il est montré que les équations **GHD** peuvent avoir une formulation Hamiltonienne dans le cadre d'une théorie de champ classique, moyennant une redéfinition du crochet de Poisson. J'ai trouvé cette approche intéressante et je présente ici ce résultat. En aucun cas les calculs ci-dessous ne sont une dérivation de **GHD**.

3.2.1 Crochet de Poisson fonctionnel

Interprétation et limite non-interactive À ce niveau de généralité, l'équation **GHD** (3.9) peut être interprétée comme la dynamique hydrodynamique d'un fluide bidimensionnel dont la densité est conservée dans l'espace des phases spectral. Les effets d'interaction se traduisent par un couplage non local dans la direction des rapidités θ , reflétant les processus d'interactions entre quasi-particules possédant des paramètres spectraux distincts.

Dans le cas limite d'un système *sans interactions*, l'espace spectral coïncide avec l'espace des phases classique, et l'équation de **GHD** se réduit alors à l'équation de Liouville (ou, de façon équivalente, à l'équation de Boltzmann sans terme de collisions) issue de la théorie cinétique élémentaire.

En l'absence de phénomènes dissipersives, la densité de distribution ρ est conservée le long du flot hamiltonien associé à l'énergie H , ce qui s'exprime par

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0, \quad (3.26)$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ désigne le crochet de Poisson canonique dans l'espace des phases. Dans cette perspective, **GHD** apparaît comme une extension naturelle de l'équation de Liouville aux systèmes intégrables, incorporant les effets collectifs induits par les interactions tout en préservant une description exacte à grande échelle.

Structure hamiltonienne et crochet de Poisson fonctionnel Bonnemain *et al.* [BCD22] introduisent un crochet de Poisson fonctionnel agissant sur des fonctionnelles F et G de la distribution de rapidité $\rho(x, \theta)$ en présence d'interactions. Celui-ci s'écrit

$$\{F, G\} = \iint dx d\theta \frac{\nu}{2\pi} \left[\partial_x \left(\frac{\delta F}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \left(\partial_\theta \left(\frac{\delta G}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \right)^{\text{dr}}_{[\nu]} - \partial_x \left(\frac{\delta G}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \left(\partial_\theta \left(\frac{\delta F}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \right)^{\text{dr}}_{[\nu]} \right], \quad (3.27)$$

où ν désigne la fonction d'occupation. Dans ce crochet l'application de l'opération d'*habillage* $(\cdot)^{\text{dr}}_{[\nu]}$ (1.91) traduit les interactions entre particules.

Le crochet de Poisson (défini en (3.27)) entre deux charges $Q[f]$ et $Q[g]$ prend la forme

$$\{Q[f], Q[g]\} = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta \frac{\nu}{2\pi} \left[\partial_x f (\partial_\theta g)^{\text{dr}}_{[\nu]} - \partial_x g (\partial_\theta f)^{\text{dr}}_{[\nu]} \right]. \quad (3.28)$$

Cette application de *dressing* satisfait la relation de symétrie [Doy20b] :

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta \nu f g^{\text{dr}}_{[\nu]} = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta \nu f^{\text{dr}}_{[\nu]} g. \quad (3.29)$$

Pour appliquer la relation de symétrie (3.29) au crochet (3.28), il suffit de considérer que les fonctions impliquées f et g sont des fonctions scalaires régulières sur (x, θ) . Dans ce cas, la relation de symétrie reste pleinement valide et l'intégrale est bien définie.

²

En utilisant cette symétrie ainsi qu'une intégration par parties, le crochet (3.28) se réécrit

$$\{Q[f], Q[g]\} = \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f \left[\partial_\theta \left(\frac{\nu}{2\pi} (\partial_x g)^{\text{dr}}_{[\nu]} \right) - \partial_x \left(\frac{\nu}{2\pi} (\partial_\theta g)^{\text{dr}}_{[\nu]} \right) \right]. \quad (3.30)$$

2. La relation de symétrie (3.29) est générale, et le formalisme des types tensoriels introduit dans [Doy20b] sert à traiter des objets plus complexes (tenseurs dépendant de x et θ). Pour des fonctions scalaires comme ici, aucune condition supplémentaire n'est nécessaire.

3.2.2 Crochet avec l'Hamiltonien

On reprend un Hamiltonien de la forme de (3.10), $H = Q[h]$.

Densité hamiltonienne et grandeurs effectives La vitesse effective et l'accélération effective données à l'équation (3.11) interviennent dans les équations de mouvement

$$\dot{x} = v^{\text{eff}}, \quad \dot{\theta} = a^{\text{eff}}, \quad (3.31)$$

montrant que les dérivées ∂_x et ∂_θ présentes dans le crochet de Poisson correspondent respectivement à l'action de l'accélération effective sur θ et de la vitesse effective sur x .

En utilisant la définition de v^{eff} et a^{eff} données à l'équation (3.11), on trouve que le crochet (3.30) appliqué à (f, h) devient

$$\{Q[f], Q[h]\} = - \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f [\partial_x (\rho v^{\text{eff}}) + \partial_\theta (\rho a^{\text{eff}})]. \quad (3.32)$$

Forme locale : densités conservées . En choisissant $(x, \theta) \mapsto \delta(\cdot - x)f(\theta)$ dans (3.4), on obtient la moyenne de la densité conservée *i.e.*

$$q_{[f]}(x, t) = Q[(x, \theta) \mapsto \delta(\cdot - x)f(\theta)] = \int d\theta f(\theta) \rho(x, \theta, t). \quad (3.33)$$

Appliqué à (3.32), on obtient

$$\{q_{[f]}(x), Q[h]\} = -\partial_x \left[\int_{\mathbb{R}} d\theta f \rho v^{\text{eff}} \right] + \int_{\mathbb{R}} d\theta f' \rho a^{\text{eff}}. \quad (3.34)$$

En appliquant l'équation de Liouville (3.26), on retrouve la forme de convection (3.8) :

$$\partial_t q_{[f]} + \partial_x j_{[f]} = F_{[f]}, \quad (3.35)$$

où le flux $j_{[f]}$ et le terme de force $F_{[f]}$ sont donnés par

$$j_{[f]} = \int_{\mathbb{R}} d\theta v^{\text{eff}} f \rho, \quad F_{[f]} = \int_{\mathbb{R}} d\theta a^{\text{eff}} f' \rho. \quad (3.36)$$

Forme locale : équation sur ρ De manière analogue, pour la distribution de rapidité à l'équilibre thermodynamique, on note

$$\rho(x, \theta) = Q[\delta(\cdot - x) \delta(\cdot - \theta)]. \quad (3.37)$$

Appliqué à (3.32), on obtient

$$\{\rho(x, \theta), Q[h]\} = -\partial_x (v^{\text{eff}} \rho) - \partial_\theta (a^{\text{eff}} \rho). \quad (3.38)$$

En appliquant l'équation de Liouville (3.26), on retrouve l'équation GHD (3.9) :

$$\partial_t \rho + \partial_x (v^{\text{eff}} \rho) + \partial_\theta (a^{\text{eff}} \rho) = 0.$$

3.2.3 Modèle de Lieb–Liniger

Dans le modèle de LL, l'Hamiltonien, $H = Q[h]$ (3.10) s'écrit ici avec :

$$h(x, \theta) = \varepsilon(\theta) + V(x), \quad (3.39)$$

où l'énergie cinétique est $\varepsilon(\theta) = \theta^2/2$ et $V(x)$ représente le potentiel extérieur.

Dans ce modèle, la vitesse effective et l'accélération effective de (3.11) se réécrivent :

$$v^{\text{eff}} = \frac{(\text{id})_{[\nu]}^{\text{dr}}}{1_{[\nu]}^{\text{dr}}}, \quad a^{\text{eff}} = -V'(x). \quad (3.40)$$

Avec l'équation (3.15) la vitesse effectif dans le modèle de LL s'écrit

$$v^{\text{eff}} = \theta + \int d\theta' \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') (v^{\text{eff}}(\theta') - v^{\text{eff}}(\theta)) \quad (3.41)$$

Ainsi, les termes de force dans (3.35) et (3.36) prennent la forme :

$$F_{[f]} = -V'(x) \int_{\mathbb{R}} d\theta f'(\theta) \rho(x, \theta). \quad (3.42)$$

L'équation GHD (3.9) devient alors :

$$\partial_t \rho + \partial_x (v^{\text{eff}} \rho) - V'(x) \partial_\theta \rho = 0, \quad (3.43)$$

et (3.25) devient :

$$\partial_t v + v^{\text{eff}} \partial_x v - V'(x) \partial_\theta \rho = 0, \quad (3.44)$$

3.2.4 Cas “no dressing”

Hypothèse “opérateur d’habillage identité” : $\text{dr} = \text{Id}$. Si l'opérateur d'habillage correspond à l'identité (*no dressing*), les crochets (3.27) et (3.32) se simplifient en :

$$\{F, G\} = \iint dx d\theta \rho \left[\partial_x \left(\frac{\delta F}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \partial_\theta \left(\frac{\delta G}{\delta \rho(x, \theta)} \right) - \partial_x \left(\frac{\delta G}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \partial_\theta \left(\frac{\delta F}{\delta \rho(x, \theta)} \right) \right] \quad (3.45)$$

$$\{Q[f], Q[h]\} = - \int_{\mathbb{R}^2} dx d\theta f [\partial_x (\rho v^{\text{eff}}) + \partial_\theta (\rho a^{\text{eff}})]. \quad (3.46)$$

Les flux et termes de force (3.36) s'expriment alors en remplaçant la vitesse effective v^{eff} et l'accélération effective a^{eff} (de (3.11)) par leurs expressions issues de la dynamique hamiltonienne *nu* :

$$v = 2\pi\rho, \quad v^{\text{eff}}(\theta) \rightarrow \partial_\theta h(x, \theta), \quad a^{\text{eff}}(\theta) \rightarrow -\partial_x h(x, \theta), \quad (3.47)$$

où $h(x, \theta)$ est l'hamiltonien *nu* (par exemple $h = \varepsilon(\theta) + V(x)$). L'équation (3.9) devient alors une équation de transport collisionless (type Vlasov) :

$$\partial_t \rho + \partial_x (\partial_\theta h \rho) - \partial_\theta (\partial_x h \rho) = 0. \quad (3.48)$$

Hiérarchie des moments (charges nues). Pour toute fonction test $f(\theta)$, l'équation (3.34) devient

$$j_{[f]}(x, t) = \int d\theta f(\theta) \partial_\theta h \rho(x, \theta, t), \quad F_{[f]}(x, t) = - \int_{\mathbb{R}} d\theta \partial_x h f'(\theta) \rho(x, \theta, t). \quad (3.49)$$

Pour $f(\theta) = 1$, θ et $\theta^2/2$ et $h(\theta, x) = \varepsilon(\theta) + V(x)$, l'équation (3.35) avec la charge locale (3.33) et les flux et forces (3.49), dévient les équations d'Euler classiques (Annex B) :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x (n u) = 0, \\ \partial_t (n u) + \partial_x (n u^2 + \mathcal{P}) = -n \partial_x V(x), \\ \partial_t E + \partial_x (u (E + \mathcal{P})) = 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

avec la densité de particule $n = q_{[1]}$, la vitesse moyenne du fluide $u = q_{[\theta]}/q_{[1]}$, la pression cinétique du fluide $\mathcal{P} = q_{[\theta^2]} - q_{[\theta]}^2/q_{[1]}$, l'énergie totale $E = n u^2/2 + n V + n e_{\text{int}}$ où $e_{\text{int}} = q_{[\theta^2/2]}$ est l'énergie interne d'une particule .

Remarques sur les charges globales. En l'absence de potentiel externe ($V = 0$), le système conserve certaines charges globales.

On a vu que dans un système classique non intégrable, seules ces quelques charges sont conservées. Par exemple dans un système de Gibbs sont conservé , nombre total de particules , quantité de mouvement totale , énergie cinétique totale soit respectivement $Q[1] = \int dx q_{[1]}$, $Q[\theta] = \int dx q_{[\theta]}$ et $Q[\theta^2/2] = \int dx q_{[\theta^2/2]}$.

Et on a vu qu'en revanche, dans un système intégrable, une infinité de charges sont conservées $Q[(x, \theta) \mapsto f(\theta)] = \int dx q_{[(x, \theta) \mapsto f(\theta)]}$. En particulier, dans l'espace (x, θ) , le nombres de rapidité dans chaque intervalle $[\theta, \theta + d\theta]$ est conservé :

$$\Pi(\theta)\delta\theta = Q[(x, \theta) \mapsto \delta(\cdot - \theta)\delta\theta] = \int dx \rho(x, \theta; t) \delta\theta.$$

Cela exprime que les rapidités situées dans une tranche $[\theta, \theta + d\theta]$ se déplacent en restant dans cette tranche, sans interagir ni s'échanger avec les autres tranches de rapidités.

Pour chaque valeur de θ , la quantité $\Pi(\theta)\delta\theta$ est une charge globale conservée. Et pour chaque valeur de θ , $\Pi(\theta)\delta\theta$ respecte une équation de continuité locale de type (3.8) sans terme de force. On a donc une infinité d'équations de continuité. Quand $\delta\theta \rightarrow 0$, on retrouve l'équation GHD (3.9) sans terme de force

$$\partial_t \rho + \partial_x (v^{\text{eff}} \rho) = 0. \quad (3.51)$$

Un potentiel externe $V(x)$ non nul induit, dans l'espace (x, θ) , un couplage entre les différentes tranches de rapidités : c'est-à-dire qu'il provoque un transport des rapidités selon x , reliant ainsi des tranches de rapidités.

Cette structure constitue l'analogue classique de la description en termes de **distribution de rapidité** dans le cadre intégrable et fournit le point de départ naturel pour comprendre la théorie **GHD**.

En particulier, pour décrire la dynamique à l'échelle d'Euler, il devient nécessaire de suivre l'évolution de $\rho(x, \theta, t)$ pour toutes les valeurs de θ , contrairement au cas non intégrable où seules quelques densités locales suffisent.

3.3 Régime de quasi-condensation et limite Gross–Pitaevskii

Dans cette section, nous considérons un système décrit par le modèle LL ,sans potentiel extérieur, dans le régime (qBEC), correspondant à la limite $t \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow 0$ (paramètres définis en (2.66) et (2.63)) . Dans ces conditions, la dynamique du gaz peut être décrite par les équations hydrodynamiques issues de l'équation de GP. L'objectif est de montrer que les équations de GHD reproduisent, dans certaines situations, les équations hydrodynamiques dérivées de GP.

3.3.1 Évolution temporelle selon l'équation de Gross–Pitaevskii

Dans le régime qBEC, la dynamique d'un gaz unidimensionnel décrit par le modèle LL à l'état fondamental peut être décrite par l'équation GP dépendante du temps. On a vu l'équation GP dépendante du temps dans (1.46), avec $\hbar = m = 1$. Pour généraliser et pour l'utiliser dans un autre chapitre, écrivons-la avec un potentiel externe :

$$i\partial_t \psi = \left(-\frac{1}{2}\partial_x^2 + V + g|\psi|^2 \right) \psi. \quad (3.52)$$

En utilisant la représentation de Madelung $\psi(x, t) = \sqrt{n(x, t)} e^{i\theta(x, t)}$, on obtient les équations dites hydrodynamiques de la forme de (3.50) :

$$\partial_t n + \partial_x (nu) = 0, \quad (3.53)$$

$$\partial_t (nu) + \partial_x \left(nu^2 + \mathcal{P} + \tilde{\mathcal{P}}_Q \right) = -n\partial_x V, \quad (3.54)$$

où la vitesse du fluide, la *pression classique* et un terme de *pression quantique* sont définis par

$$u = \partial_x \theta, \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2}gn^2, \quad \tilde{\mathcal{P}}_Q = -\frac{n}{2}\partial_x \left(\frac{\partial_x \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right). \quad (3.55)$$

On peut aussi écrire (3.54) sous la forme

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} + \frac{2\mathcal{P} + \mathcal{P}_Q}{n} + V \right) = 0, \quad (3.56)$$

où l'on nomme dans la littérature la *pression quantique* :

$$\mathcal{P}_Q = \frac{1}{2} \sqrt{n} \partial_x^2 \sqrt{n}. \quad (3.57)$$

Dans la suite nous nous intéressons à la dynamique en l'absence de potentiel extérieur V .

Dans la limite dite de **Thomas-Fermi (TF) 1D**, les fluctuations de densité sont faibles et le terme de *pression quantique* peut être négligé [Str98]. Le terme de pression se réduit alors à la pression classique $\mathcal{P} = \frac{1}{2}gn^2$. En utilisant la relation de Gibbs-Duhem $\frac{d\mathcal{P}}{d\mu} = n$, on obtient l'équation d'état classique du gaz qBEC :

$$\mu = gn. \quad (3.58)$$

Les équations de Madelung ((3.53) (3.54)), se réduisent à :

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \quad (3.59)$$

$$\partial_t(nu) + \partial_x(nu^2 + \mathcal{P}) = 0. \quad (3.60)$$

3.3.2 Description par les équations Hydrodynamiques Généralisés

Dans la suite, nous allons montrer que les équations (3.59) et (3.60) peuvent être retrouvées à partir des équations **GHD**.

À $t = 0$, le facteur d'occupation $\nu(x, \theta, 0)$ ne peut prendre que deux valeurs : il vaut 1 si θ appartient à l'intervalle $[\theta_-(x, 0), \theta_+(x, 0)]$, et 0 sinon. Comme ν satisfait l'équation de transport (3.44), sa valeur est conservée le long des caractéristiques.

Ainsi, la distribution prend la forme d'une *mer de Fermi*, délimitée par deux bords $\theta_{\pm}(x, t)$:

$$\nu(x, \theta, t) = \begin{cases} 1, & \theta \in [\theta_-(x, t), \theta_+(x, t)], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.61)$$

L'évolution temporelle des bords est donnée par deux équations de type transport (Fig 3.2) [Doy+17] :

$$\partial_t \theta_+(x, t) + v^{\text{eff}}(\theta_+) \partial_x \theta_+(x, t) = 0, \quad (3.62)$$

$$\partial_t \theta_-(x, t) + v^{\text{eff}}(\theta_-) \partial_x \theta_-(x, t) = 0. \quad (3.63)$$

3.3.3 Connexion hydrodynamique : de la GHD à l'équation de Gross–Pitaevskii

Vitesse efficace aux bords de la mer de Fermi. La vitesse du fluide au point x s'écrit simplement :

$$u = \frac{\theta_- + \theta_+}{2}. \quad (3.64)$$

Dans la limite $\gamma \rightarrow 0$, la distribution de rapidité prend la forme d'un demi-cercle [LL63] :

$$\rho(\theta) = \frac{n}{2\pi c^2} \sqrt{-(\theta - \theta_-)(\theta - \theta_+)}, \quad (3.65)$$

avec la vitesse du son

$$c = \sqrt{gn}. \quad (3.66)$$

La largeur de la mer de Fermi, $\theta_+ - \theta_-$, est reliée à la densité par

$$n = \int_{\theta_-}^{\theta_+} d\theta \rho(\theta), \quad (3.67)$$

ce qui donne après intégration :

$$\theta_+ - \theta_- = 4c. \quad (3.68)$$

Considérons d'abord le cas où le centre de masse de la mer de Fermi est nul, c'est-à-dire $\theta_+ = -\theta_-$. Les bords se déplacent alors à la vitesse du son $\pm c$. Pour $\gamma \rightarrow 0$ et $t \rightarrow 0$, les bords se situent en $\theta_{\pm} = \pm 2c$ [LL63], et la vitesse effective s'écrit simplement :

$$v^{\text{eff}}(\theta_{\pm}) = \frac{1}{2}\theta_{\pm}. \quad (3.69)$$

Si le centre de masse n'est pas nul ($\theta_+ \neq -\theta_-$), la vitesse effective peut être décomposée en une translation correspondant à la vitesse du barycentre u , à laquelle s'ajoute un décalage de $\pm c$ lié à l'écart des bords. On obtient alors les expressions explicites :

$$v^{\text{eff}}(\theta_+) = \frac{3}{4}\theta_+ + \frac{1}{4}\theta_-, \quad (3.70)$$

$$v^{\text{eff}}(\theta_-) = \frac{3}{4}\theta_- + \frac{1}{4}\theta_+. \quad (3.71)$$

Autrement dit, une petite déformation localisée aux extrémités de la mer de Fermi se propage à la vitesse du son par rapport au centre de masse du système, ce qui correspond à la valeur de v^{eff} aux bords.

Forme hydrodynamique des équations de Gross–Pitaevskii. En introduisant la densité n (via $4\sqrt{gn} = \theta_+ - \theta_-$) et la vitesse du fluide u définies plus haut, les équations (3.62)–(3.63) se réécrivent sous la forme

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \quad (3.72)$$

$$\partial_t(nu) + \partial_x(nu^2) = -g n \partial_x n. \quad (3.73)$$

Il s'agit exactement des équations de continuité et d'Euler (3.59)–(3.60), mais écrites sans le terme de *pression quantique* ni le potentiel extérieur.

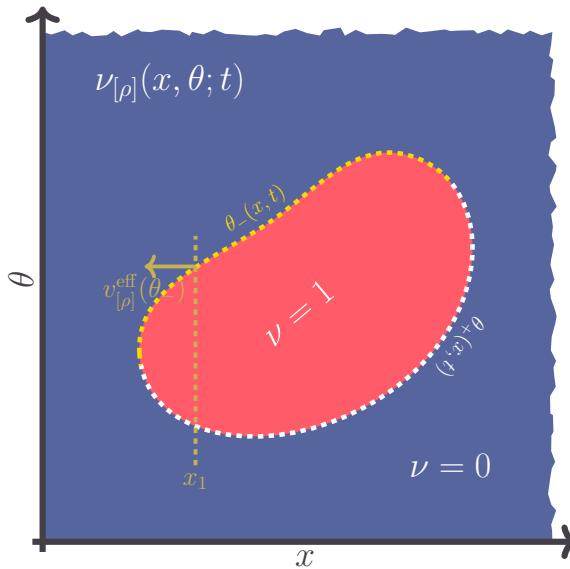


FIGURE 3.2 – Schéma de l'évolution du facteur d'occupation $\nu(x, \theta, t)$ dans la limite $\gamma \rightarrow 0$. Initialement rectangulaire et homogène, la distribution forme une mer de Fermi délimitée par $\theta_{\pm}(x, t)$: rouge $\nu = 1$, bleu $\nu = 0$.

Correspondance avec les équations GP. Les équations (3.72)–(3.73) correspondent exactement aux équations hydrodynamiques (3.59)–(3.60), obtenues à partir de GP lorsque le terme de pression quantique est négligé. La correspondance est donc valable pour une configuration initiale correspondant à une seule mer de Fermi. En revanche, si le système initial contient plusieurs mers de Fermi (par exemple deux pics de densité séparés), cette équivalence avec les équations GP n'est plus vérifiée.

Résumé sur la dynamique hydrodynamique généralisée (GHD)

La dynamique d'un système quantique isolé intégrable possède des propriétés de relaxation particulières.

Dans un système chaotique (non intégrable), l'état localement relaxé est bien décrit par un ensemble de Gibbs classique, caractérisé par les trois quantités locales conservées : la densité de particules n , la quantité de mouvement par unité de longueur p et l'énergie par unité de longueur e_{int} .

En revanche, pour un système intégrable, l'état stationnaire local ne peut pas être capturé par un simple ensemble de Gibbs : il est correctement décrit par un **GGE**, entièrement déterminé par la distribution de rapidités $\rho(\theta)$.

Lorsque l'on considère des variations spatiales lentes, cette description s'étend naturellement à une distribution de rapidités dépendant de la position, $\rho(x, \theta)$.

L'évolution de cette fonction est alors gouvernée, à l'échelle d'Euler, par les équations de **GHD**. Ces équations traduisent la propagation des quasiparticules et la réorganisation locale des charges conservées.

Dans certaines limites particulières, la **GHD** se connecte aux descriptions hydrodynamiques plus familières. En particulier, dans l'état fondamental et pour un paramètre de Lieb $\gamma \rightarrow 0$, les équations de **GHD** se réduisent à celles de l'hydrodynamique issues de l'équation de Gross–Pitaevskii dépendante du temps, lorsque le terme de pression quantique peut être négligé.

Ainsi, la **GHD** fournit un cadre cohérent et rigoureux pour décrire la dynamique hors équilibre des systèmes intégrables, reliant la description microscopique en termes de rapidités aux équations effectives de l'hydrodynamique macroscopique.

