Annexe D

Propriétés des facteurs d'homothétie

D.1 Loi de puissance des facteurs homothétiques

Théorème D.1.1 (Loi de puissance)**.** *Si le facteur $f(\lambda)$ est bien défini indépendamment de $n > 0$ (ce qui est le cas pour les solutions homothétiques), alors f est une loi de puissance.*

Démonstration. Posons $g(n) = \mu'(n) > 0$ ou < 0 (*i.e.* μ strictement monotone). La définition de f équivaut à l'existence d'une fonction $\chi(\lambda) = 1/f(\lambda)$ telle que

$$g(\lambda n) = \chi(\lambda)\, g(n) \qquad (\forall\, \lambda, n > 0).$$

En prenant $n = 1$, on a $\chi(\lambda) = g(\lambda)/g(1)$. Donc, pour tous $a, b > 0$,

$$\chi(ab) = \frac{g(ab)}{g(1)} = \frac{\chi(a)\, g(b)}{g(1)} = g(a)\, g(b),$$

c'est-à-dire que χ est *multiplicative*. Sous une hypothèse physique très faible (continuité, mesurabilité ou simple localement bornée), toute fonction multiplicative sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme

$$\chi(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}.$$

□

D.2 Équivalence entre $f(\lambda)$ et $\mu(n)$

Théorème D.2.1. *Les expressions*

$$f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha} \quad \textit{et} \quad \mu(n) \propto n^{\alpha}$$

sont équivalentes.

Démonstration. 1. 1. Si $\mu(n) = C\, n^{\alpha}$ avec $C \neq 0$:
Alors $\mu'(n) = C\alpha\, n^{\alpha-1}$. Par conséquent,

$$f(\lambda) = \frac{C\alpha\, n^{\alpha-1}}{C\alpha\, (\lambda n)^{\alpha-1}} = \lambda^{1-\alpha}.$$

2. Réciproque : si $f(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}$ pour tout $\lambda > 0$ et $n > 0$: Posons $g(n) = \mu'(n)$. L'hypothèse s'écrit

$$\frac{g(n)}{g(\lambda n)} = \lambda^{1-\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad g(\lambda n) = \lambda^{\alpha-1} g(n),$$

pour tout $n > 0$ et tout $\lambda > 0$.

Fixons $n_0 > 0$ et définissons $\varphi(\lambda) \equiv g(\lambda n_0)$. La relation ci-dessus donne

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}\,\varphi(1),$$

donc $\varphi(\lambda) = C_1\lambda^{\alpha-1}$ avec $C_1 = g(n_0)$. En remplaçant $\lambda = x/n_0$, on obtient pour tout $x > 0$

$$g(x) = C_1\,x^{\alpha-1}.$$

Ainsi, $g(n) = \mu'(n) = C\,n^{\alpha-1}$ avec C constant. En intégrant (si $\alpha \neq 0$), on a

$$\mu(n) \propto n^{\alpha}.$$

Pour $\alpha = 0$, $\mu'(n) = C\,n^{-1}$ et $\mu(n) = C\ln n + \text{const}$.

□

Remarque D.2.2. La démonstration utilise la propriété fonctionnelle multiplicative $g(\lambda n) = \lambda^{\alpha-1}g(n)$. Sous une hypothèse faible de continuité (ou dérivabilité) en n, cette équation force la forme de puissance $g(n) \propto n^{\alpha-1}$. Sans régularité, des solutions pathologiques peuvent exister mais ne sont pas physiquement pertinentes dans le contexte thermodynamique.