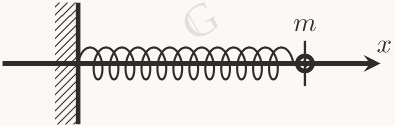
TD 7 : États quasi-classiques

On considère un point matériel de masse m attaché à un ressort de raideur k. Ce point matériel coulisse librement sur un axe (Ox), sans frottement. On suppose que la gravité ne joue aucun rôle dans ce problème. L'origine de l'axe (Ox) est prise au point d'équilibre où le point matériel est au repos, si bien que la force de rappel exercée par le ressort s'écrit simplement $F(x) = -kx$



$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \frac{i}{\hbar\beta}\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\right)$$

Question 1. Donner l'équation classique du mouvement, et en déduire la trajectoire $x(t)$ pour une condition initiale $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$. Donnez l'expression de l'énergie mécanique totale $\mathcal{E}_{cl}$ en introduisant $p = mv$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Solutions On considère le sy m } et un référentiel $\mathcal{R}$ considéré comme galinéen.

Trajectoire : En appliquant la deuxième loi de Newton / principe fondamental de la dynamique à ce sy $\mathcal{R}$ il vient que :

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx,$$

On cherche donc une solution sous la forme

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi_0),$$

avec $A, \varphi_0 \in \mathbb{R}$ quelconque $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, et avec le $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ il vient que

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

Énergie : L'énergie $\mathcal{E}_c$ cinétique s'écrit

$$\mathcal{E}_c(p) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m},$$

et la somme $\mathcal{E}_p$:

$$F = -\mathcal{E}_p',$$

l'énergie potentiel $\mathcal{E}_p$ étant définie à une constante prè

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2,$$

on a donc l'énergie mécanique totale $\mathcal{E}_{cl}$:

$$\mathcal{E}_{cl}(x,p) = \mathcal{E}_c(p) + \mathcal{E}_p(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

Question 2. On s'intéresse maintenant au traitement quantique de ce problème. Le hamiltonien du système, qui est l'observable représentant l'énergie, s'écrit :

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \hat{\boldsymbol{X}}^2,$$

où $\hat{\boldsymbol{X}}$ et $\hat{\boldsymbol{P}}$ sont les observables position et impulstion, avec pour commutateur $[\hat{\boldsymbol{X}}, \hat{\boldsymbol{P}}] = i\hbar$.

$a)$ On introduit l'opérateur "annihilation" défini par :

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \hat{\boldsymbol{X}} + i \frac{1}{\sqrt{\hbar m \omega_0}} \hat{\boldsymbol{P}} \right)$$

Calculer le commutateur $[\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{a}}^\dagger]$, où $\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger$ est l'opérateur "création" obtenue par conjugaison hermitique de $\hat{\boldsymbol{a}}$. Les opérateurs création et annihilation sont-ils des observables ?

$b)$ Donner l'expression de $\hat{\boldsymbol{X}}$ et de $\hat{\boldsymbol{P}}$ en fonction des opérateurs annihilation et création.

$c)$ Établir l'expression de $\hat{\boldsymbol{H}}$ en fonction des opérateurs création et annihilation. En déduire une expression du hamiltonien ne faisant intervenir que l'opérateur "nombre" $\tilde{\boldsymbol{N}} = \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger \tilde{\boldsymbol{a}}$. L'opérateur nombre est-il hermitien ?

Solutions

a) l'o $\hat{\boldsymbol{X}}$ et $\hat{\boldsymbol{P}}$

sont hermitiens, s'écrit :

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}} + i\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\hat{\boldsymbol{P}}\right)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}}^\dagger - i\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\hat{\boldsymbol{P}}^\dagger\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}} - i\frac{1}{\sqrt{\hbar m}}\right.$$

Avec le commutateur :

$$\begin{aligned}
[\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger] &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}} + i\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\hat{\boldsymbol{P}}, \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}} - i\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\hat{\boldsymbol{P}}\right] \\
&= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\hat{\boldsymbol{P}}, \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}}\right] - \frac{i}{2}\left[\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}}, \frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\hat{\boldsymbol{P}}\right] \\
&= -i\left[\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}}, \frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\hat{\boldsymbol{P}}\right] \\
&= -\frac{i}{\hbar}\underbrace{[\hat{\boldsymbol{X}}, \hat{\boldsymbol{P}}]}_{i\hbar} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ce ne sont pas de

b)

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{X}} &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\boldsymbol{a}} + \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger), \\
\hat{\boldsymbol{P}} &= \sqrt{\hbar m\omega_0}\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger - \tilde{\boldsymbol{a}})
\end{aligned}$$

c)

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{\boldsymbol{X}}^2 = \frac{\hbar\omega_0}{2}(\underbrace{\tilde{\boldsymbol{a}}\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger}_{\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}}+1} + \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}}) = \hbar\omega_0\left(\tilde{\boldsymbol{N}} + \frac{1}{2}\right)$$

$\tilde{\boldsymbol{N}}^\dagger = \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{N}}$ donc $\tilde{\boldsymbol{N}}$ e

Plus loin 2.

a) On peut réécrire les opérateurs normalisés (adimensionnés) en les notant à l'aide d'un tilde,« ˜ ». On introduit ainsi l'opérateur d'annihilation (voir Cohen–Tannoudji *et al.*, *Mécanique quantique*, tome 1, Oscillateur harmonique unidimensionnel, § B, p. 507) :

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}} + i\frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\hat{\boldsymbol{P}}\right),$$

b) On peut adimensionner l'énergie $\hat{\boldsymbol{H}} = \hbar\omega_0\tilde{\boldsymbol{H}}$, avec $\tilde{\boldsymbol{H}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{X}}^2 + \tilde{\boldsymbol{P}}^2\right),$$

avec les opérateurs adimensionnés position $\tilde{\boldsymbol{X}}$ et impultion $\tilde{\boldsymbol{P}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{\boldsymbol{X}} = \sqrt{\frac{1}{2}}(\tilde{\boldsymbol{a}} + \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger),$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}\hat{\boldsymbol{P}} = \sqrt{\frac{i}{2}}(\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger - \tilde{\boldsymbol{a}}).$$

c) Et leur commutateur et aussi adimensionné $[\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{P}}] = i$. Et on peut réécrire les opérateurs "annihilation" $\tilde{\boldsymbol{a}}$ et "création" $\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger$:

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\boldsymbol{X}} + i\tilde{\boldsymbol{P}}\right), \qquad \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\boldsymbol{X}} - i\tilde{\boldsymbol{P}}\right),$$

avec le commutateur :

$$[\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger] = \frac{1}{2}[\tilde{\boldsymbol{X}} + i\tilde{\boldsymbol{P}}, \tilde{\boldsymbol{X}} - i\tilde{\boldsymbol{P}}] = \frac{i}{2}[\tilde{\boldsymbol{P}}, \tilde{\boldsymbol{X}}] - \frac{i}{2}[\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{P}}] = -i\underbrace{[\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{P}}]}_{i} = 1$$

et

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{X}} - i\tilde{\boldsymbol{P}}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{X}} + i\tilde{\boldsymbol{P}}\right) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{X}}^2 + \tilde{\boldsymbol{P}}^2 + i\underbrace{[\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{P}}]}_{i}\right) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{X}}^2 + \tilde{\boldsymbol{P}}^2 - 1\right),$$

donc on peut réécrire l'hamiltonien adimensioné :

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{X}}^2 + \tilde{\boldsymbol{P}}^2\right) = \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}} + \frac{1}{2} = \tilde{\boldsymbol{N}} + \frac{1}{2}$$

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \hbar\omega_0\tilde{\boldsymbol{H}} = \hbar\omega_0\left(\tilde{\boldsymbol{N}} + \frac{1}{2}\right).$$

Question 3. Nous allos cherhcer maintenant les états propres de $\tilde{a}$, appelés étant quasi-classique. Nous noterons $|\alpha\rangle$ un état propre de $\tilde{\boldsymbol{a}}$ associé à la valeur propre α, cette dernière pouvant être un nombre complexe. On rappelle que les états propres de $\tilde{\boldsymbol{N}}$, appelés états nombres et notés $|n\rangle$ avec n entier naturel, forment une base orthonormée de l'espace des états et vérifient :

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle,\ \tilde{\boldsymbol{a}}|\varphi_{n+1}\rangle = \sqrt{n+1}\,|\varphi_n\rangle,\ \tilde{\boldsymbol{a}}|0\rangle = 0.$$

$a)$ Montrer que :

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle$$

$b)$ On impose que c_0 soit réel et positif : donner sa valeur.

$c)$ Déterminez la valeur moyenne et la variance de $\tilde{\boldsymbol{N}}$ lorsque le système est dans un état $|\alpha\rangle$.

$d)$ Déterminez la valeur moyenne $\langle\hat{\boldsymbol{X}}\rangle_\alpha$ et la variance $\Delta\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha^2$ de $\hat{\boldsymbol{X}}$ lorsque le système est dans un état $|\alpha\rangle$. En déduire que $\Delta\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha/\langle\hat{\boldsymbol{X}}\rangle_\alpha$ tend vers zéro lorsque $|\alpha|$ tend vers l'infini.

Solutions

a)

$$|\alpha\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(\alpha)|\varphi_n\rangle \quad\Rightarrow\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha c_n(\alpha)|\varphi_n\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \tilde{\boldsymbol{a}}|\alpha\rangle = \sum_n c_{n+1}(\alpha)\sqrt{n+1}|\varphi_n\rangle,$$

$$\Rightarrow\quad c_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}c_n(\alpha) \;\Rightarrow\; c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0(\alpha)$$

b) On

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_n |c_n(\alpha)|^2 = 1 \;\Rightarrow\; |c_0(\alpha)|^2\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} = 1$$

$$\Rightarrow\quad c_0(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} \;\Rightarrow\; |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\varphi_n\rangle$$

c)

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{\boldsymbol{N}}\rangle_\alpha &= \langle\alpha|\tilde{\boldsymbol{N}}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}}|\alpha\rangle = \|\tilde{\boldsymbol{a}}|\alpha\rangle\|^2 = \|\alpha|\alpha\rangle\|^2 = |\alpha|^2\underbrace{\||\alpha\rangle\|^2}_{1} = |\alpha|^2\\
\tilde{\boldsymbol{N}}^2 &= \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\underbrace{\tilde{\boldsymbol{a}}\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger}_{\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}}+1}\tilde{\boldsymbol{a}} = (\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2(\tilde{\boldsymbol{a}})^2 + \tilde{\boldsymbol{N}},\\
\langle(\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2(\tilde{\boldsymbol{a}})^2\rangle_\alpha &= \langle\alpha|(\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2(\tilde{\boldsymbol{a}})^2|\alpha\rangle = \|(\tilde{\boldsymbol{a}})^2|\alpha\rangle\|^2 = \|\alpha^2|\alpha\rangle\|^2 = |\alpha|^4,\\
\langle\tilde{\boldsymbol{N}}^2\rangle_\alpha &= \langle(\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2(\tilde{\boldsymbol{a}})^2\rangle_\alpha + \langle\tilde{\boldsymbol{N}}\rangle_\alpha = |\alpha|^4 + |\alpha|^2,\\
\mathbb{V}_\alpha(\tilde{\boldsymbol{N}}) &= \langle(\tilde{\boldsymbol{N}} - \langle\tilde{\boldsymbol{N}}\rangle_\alpha)^2\rangle_\alpha = \langle\tilde{\boldsymbol{N}}^2\rangle_\alpha - \langle\tilde{\boldsymbol{N}}\rangle_\alpha^2 = |\alpha|^2 = \langle\tilde{\boldsymbol{N}}\rangle_\alpha
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{\boldsymbol{a}}\rangle_\alpha &= \langle\alpha|(\tilde{\boldsymbol{a}}|\alpha\rangle) = \langle\alpha|(\alpha|\alpha\rangle) = \alpha\\
\langle\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\rangle_\alpha &= (\langle\alpha|\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)|\alpha\rangle = (\langle\alpha|\alpha^*)|\alpha\rangle = \alpha^*\\
\langle\hat{\boldsymbol{X}}\rangle_\alpha &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\boldsymbol{a}} + \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)\right\rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\tilde{\boldsymbol{a}}\rangle_\alpha + \langle\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\rangle_\alpha) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\sqrt{2}\Re(\alpha),\\
\langle\hat{\boldsymbol{P}}\rangle_\alpha &= \sqrt{\hbar m\omega_0}\left\langle\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger - \tilde{\boldsymbol{a}})\right\rangle_\alpha = \sqrt{\hbar m\omega_0}\frac{i}{\sqrt{2}}(\langle\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\rangle_\alpha - \langle\tilde{\boldsymbol{a}}\rangle_\alpha) = \sqrt{\hbar m\omega_0}\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha) = \sqrt{\hbar m\omega_0}\sqrt{2}\Im(\alpha),\\
\hat{\boldsymbol{X}}^2 &= \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{a}} + \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2}((\tilde{\boldsymbol{a}})^2 + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}}}_{\tilde{\boldsymbol{N}}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{a}}\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger}_{\underbrace{\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}}}_{\tilde{\boldsymbol{N}}}+1} + (\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2) = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2}((\tilde{\boldsymbol{a}})^2 + 2\tilde{\boldsymbol{N}} + (\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2 + 1),\\
\hat{\boldsymbol{P}}^2 &= \hbar m\omega_0\frac{1}{2}(-(\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger - \tilde{\boldsymbol{a}})^2) = \hbar m\omega_0\frac{1}{2}(-((\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2 - \tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger\tilde{\boldsymbol{a}} - \tilde{\boldsymbol{a}}\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger + (\tilde{\boldsymbol{a}})^2) = \hbar m\omega_0\frac{1}{2}(1 - ((\tilde{\boldsymbol{a}})^2 - 2\tilde{\boldsymbol{N}} + (\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2)),\\
\langle(\tilde{\boldsymbol{a}})^2\rangle_\alpha &= \langle\alpha|(\tilde{\boldsymbol{a}}^2|\alpha\rangle) = \langle\alpha|(\alpha^2|\alpha\rangle) = \alpha^2,\\
\langle(\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2\rangle_\alpha &= (\langle\alpha|(\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2)|\alpha\rangle = (\langle\alpha|(\alpha^*)^2)|\alpha\rangle = (\alpha^*)^2,\\
\langle(\tilde{\boldsymbol{a}})^2 \pm \tilde{\boldsymbol{N}} + (\tilde{\boldsymbol{a}}^\dagger)^2\rangle_\alpha &= (\alpha \pm \alpha^*)^2,\\
\langle\hat{\boldsymbol{X}}^2\rangle_\alpha &= \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2}((\alpha + \alpha^*)^2 + 1) = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2}((2\Re(\alpha))^2 + 1),\\
\langle\hat{\boldsymbol{P}}^2\rangle_\alpha &= \hbar m\omega_0\frac{1}{2}(1 - (\alpha - \alpha^*)^2) = \hbar m\omega_0\frac{1}{2}(1 - (2\Im(\alpha))^2),\\
\mathbb{V}_\alpha(\hat{\boldsymbol{X}}) &= \langle(\hat{\boldsymbol{X}} - \langle\hat{\boldsymbol{X}}\rangle_\alpha)^2\rangle_\alpha = \langle\hat{\boldsymbol{X}}^2\rangle_\alpha - \langle\hat{\boldsymbol{X}}\rangle_\alpha^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2},\\
\mathbb{V}_\alpha(\hat{\boldsymbol{P}}) &= \langle(\hat{\boldsymbol{P}} - \langle\hat{\boldsymbol{P}}\rangle_\alpha)^2\rangle_\alpha = \langle\hat{\boldsymbol{P}}^2\rangle_\alpha - \langle\hat{\boldsymbol{P}}\rangle_\alpha^2 = \hbar m\omega_0\frac{1}{2},\\
\frac{\Delta\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha}{\langle\hat{\boldsymbol{X}}\rangle_\alpha} &= \frac{1}{2\Re(\alpha)} = \frac{1}{2|\alpha|\cos\theta} \underset{\substack{|\alpha|\to\infty\\ \cos\theta\neq 0}}{\longrightarrow} 0,\\
\frac{\Delta\hat{\boldsymbol{P}}_\alpha}{\langle\hat{\boldsymbol{P}}\rangle_\alpha} &= \frac{1}{2\Im(\alpha)} = \frac{1}{2|\alpha|\sin\theta} \underset{\substack{|\alpha|\to\infty\\ \sin\theta\neq 0}}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Plus loin 3. {cf Cohen Tome 1 , §Complément G_V Etats cohérents “quasi classiques” de l’oscillateur harmonique page 588}

Recherche des états quasi classiques

Introduction du paramètre α_0 pour caractériser un mouvement classique

Les équations classiques du mouvement d’un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m et de pulsation ω, s’écrivent :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{1}{m}p(t), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) = -m\omega^2 x(t)$$

Les calculs quantiques que nous développerons plus loin seront plus simples si nous introduisons dès maintenant les quantités sans dimensions :

$$\hat{x}(t) = \beta\ x(t), \quad \hat{p}(t) = \frac{1}{\hbar\beta}\ p(t), \quad \text{où} \ \ \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

Il vient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{x}(t) = \omega\ \hat{p}(t), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{p}(t) = -\omega\ \hat{x}(t)$$

On définie :

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ [\hat{x}(t) + i\ \hat{p}(t)] \ \ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) = -i\omega\ \alpha(t) \ \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} \ \text{avec} \ \ \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{x}(0) + i\ \hat{p}(0)]$$

D’ailleur :

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}], \quad \hat{p}(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}[\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^* e^{i\omega t}]$$

Quant à l’énergie classique $\mathscr{H}$ du système, elle est constante au cours du temps et égale à :

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}[p(0)]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2[x(0)]^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\{[\hat{x}(0)]^2 + [\hat{p}(0)]\} = \hbar\omega|\alpha_0|^2$$

Pour un oscillateur macroscopique, l’énergie $\mathscr{H}$ est très supérieure au quantum $\hbar\omega$, de sorte que : $|\alpha_0| \gg 1$

Conditions définissant les états quasi classiques

Les états quasi classiques sont vecteurs propres de l’opérateur $\hat{a}$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Question 4. Soit $|\phi(t)\rangle$ l'état de l'oscillateur harmonique à l'instant t. Montrer que l'on peut écrire $|\phi(t)\rangle = \sum_n b_n(t)|\varphi_n\rangle$, puis déterminer et résoudre les équations d'évolution des $b_n(t)$ lorsque le système n'est soumis à aucune mesure.

Question 5. On suppose qu'à $t = 0$ le système est dans un état quasi-classique : $|\phi(0)\rangle = |\alpha\rangle$. Montrer que qu'à un instant t ultérieur, on a $|\phi(t)\rangle = e^{-i\omega_0 t/2}|\alpha e^{-i\omega_0 t}\rangle$.

Question 6. En déduire la position moyenne $\langle \hat{\boldsymbol{X}} \rangle_\alpha(t)$ de l'oscillateur harmonique dans un tel état. Comparez avec l'expression de $x(t)$ donnée par la mécanique classique et en déduire que $\mathcal{E}_{cl} = \langle \hat{\boldsymbol{H}} \rangle_\alpha - \mathcal{E}_0$. Quelle est la signification physique de $\mathcal{E}_0$?

4) On peut toujours décompo $\{|\varphi_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$|\phi(t)\rangle \quad = \quad \sum_n b_n(t)|\varphi_n\rangle,$$

l'equation de Schrödinger :

$$(i\hbar\partial_t \quad = \quad \underbrace{\hbar\omega_0(\tilde{\mathbf{N}}+1/2)}_{\hat{\boldsymbol{H}}})|\phi(t)\rangle,$$

implique

$$\sum_n i\hbar\partial_t b_n(t)|\varphi_n\rangle \quad = \quad \sum_n \hbar\omega(n-1/2)b_n(t)|\varphi_n\rangle,$$

soit en pro $|\varphi_n\rangle$:

$$i\hbar\partial_t b_n(t) \quad = \quad \hbar\omega(n-1/2)b_n(t),$$

soit l'évolution d'un état stationnaire

$$b_n(t) \quad = \quad e^{-i\omega_0(n+1/2)t}b_n(0)$$

5) $|\phi(0)\rangle = |\alpha\rangle \Rightarrow b_n(0) = c_0\frac{\alpha^2}{\sqrt{n!}}$ soit

$$|\phi(t)\rangle = c_0\sum_n e^{-i\omega_0(n+1/2)t}\frac{\alpha^2}{\sqrt{n!}}|\varphi_n\rangle = e^{-i\omega_0 t/2}c_0\sum_n\frac{(\alpha e^{-i\omega_0 t})^n}{\sqrt{n!}}|\varphi_n\rangle = e^{-i\omega_0 t/2}|\alpha e^{-i\omega_0 t}\rangle$$

6)

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{\mathbf{a}}\rangle_{\phi(t)} &= \langle\phi(t)|\tilde{\mathbf{a}}|\phi(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega_0 t},\\
\langle\tilde{\mathbf{a}}^\dagger\rangle_{\phi(t)} &= \langle\phi(t)|\tilde{\mathbf{a}}^\dagger|\phi(t)\rangle = \alpha^* e^{i\omega_0 t},\\
\langle\hat{\mathbf{X}}\rangle_{\phi(t)} &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\sqrt{\frac{1}{2}}(\langle\tilde{\mathbf{a}}\rangle_{\phi(t)} + \langle\tilde{\mathbf{a}}^\dagger\rangle_{\phi(t)}) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\sqrt{2}\Re(\alpha e^{-i\omega_0 t}\ ) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\sqrt{2}|\alpha|\cos(\omega_0 t-\theta),
\end{aligned}$$

que l'on peut comparer à l'ex $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t-\theta)$ avec $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\sqrt{2}|\alpha|$. Lorsque $x(t) = x_0$, $p = 0$ soit :

$$\mathcal{E}_{cl} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2,$$

soit

$$\mathcal{E}_{cl} = \hbar\omega_0|\alpha|^2$$

en prenant $x_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}}|\alpha|$.
En remarquant que

$$\langle\hat{\boldsymbol{H}}\rangle_{\phi(t)} = \hbar\omega_0(\langle\hat{\mathbf{N}}\rangle_{\phi(t)} + 1/2) = \hbar\omega_0(|\alpha|^2+1/2) = \mathcal{E}_{cl} + \underbrace{\frac{\hbar\omega_0}{2}}_{\mathcal{E}_0}.$$

$$\mathcal{E}_{cl} = \langle\hat{\boldsymbol{H}}\rangle_{\phi(t)} - \mathcal{E}_0$$

où $\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$ e