École Polytechnique Fédérale de Lausanne 1 mai 2024
Semestre de printemps 2024
Prof. Laurent Villard
Dr Giovanni Di Giannatale

Physique Numérique – Exercice 5

A rendre jusqu'au mardi 14 mai 2024 sur le site https://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=1174656

5 Équation d'onde dans un milieu inhomogène : propagation d'une vague dans un océan de profondeur non uniforme

On s'intéresse à la propagation de vagues en eaux peu profondes dans un milieu unidimensionnel de profondeur variable. Soit $h_0(x)$ la profondeur de l'eau au repos. Le champ scalaire $f(x,t)$ représente alors la hauteur de la vague et est régi par l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g h_0 \frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{1}$$

avec $g = 9.81\text{m}^2/\text{s}$ l'accélération de la pesanteur. Le domaine est tel que $x \in [x_L, x_R]$. Diverses conditions aux bords seront considérées.

5.1 Calculs analytiques [10pts]

On considère le cas d'une profondeur h_0 constante.

(a) **[2pts]** Donner l'expression de la solution générale de l'équation. Quelle est la vitesse de propagation ?

(b) **[3pts]** Pour une condition au bord gauche fixe et une condition au bord libre, calculer les modes propres et fréquences propres correspondants.

(c) **[5pts]** On considère maintenant le cas général $h_0(x)$ non uniforme. En s'inspirant de la dérivation faite dans les Notes de Cours, Section 4.2.4, pour le cas de l'Eq.(1), faire l'analyse WKB de l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g h_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{2}$$

5.2 Implémentation en C++ [5pts]

Télécharger le fichier Exercice5_2024_student.zip du site Moodle.

(a) On écrira et implémentera le schéma explicite à 3 niveaux (section 4.2.1 du cours), en l'adaptant. Pour les dérivées en x, utiliser les différences finies centrées aux points de maillage :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_i) \approx \frac{F(x_{i+1}) - F(x_{i-1})}{2\Delta x}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{F(x_{i+1}) - 2F(x_i) + F(x_{i-1})}{(\Delta x)^2} \tag{3}$$

où F est soit f, soit h_0, et $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ (maillage régulier).

(b) Implémenter 3 choix possibles pour la condition au bord gauche ($x = x_L$) : fixe, libre et sortie de l'onde. Faire de même pour le bord droite ($x = x_R$). *Indication : pour la sortie au bord gauche, s'inspirer de la démarche des Notes de Cours, Eqs.(4.44)-(4.46).* **Votre rapport doit inclure une description de ce cas.** *Pas besoin pour les autres cas, puisque celles-ci sont déjà décrites dans les Notes de Cours, il suffit de les citer.*

(c) Implémenter 2 choix possibles pour la forme initiale de la vague, $f(x,0) = f_{\text{init}}(x)$:

— (1) donnée par

$$f_{\text{init}}(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_1) \\ \frac{A}{2}\left(1 - \cos\left(2\pi \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\right) & (x_1 < x < x_2) \\ 0 & (x_2 \leq x) \end{cases} \tag{4}$$

avec A, x_1 et x_2 des constantes donées en input.

— (2) donnée par un mode propre tel que calculé dans la partie analytique (5.1(b)). On donnera en input le numéro n de ce mode propre.

(d) Implémenter 3 choix possibles pour la direction de propagation initiale de la vague : (1) progressive (vers les x croissants) ; (2) rétrograde (vers les x décroissants) ; (3) système initialement au repos.

5.3 Vitesse de propagation constante [12pts]

On considère le cas d'un bassin de 10m de long ($x_L = 0, x_r = L = 10$), de profondeur $h_0 = 3$m constante. La condition au bord gauche est fixe. La condition au bord droite est libre.

(a) **[4pts]** Direction de propagation et réflexions :
On prend une forme de vague initiale donnée par l'Eq.(4), avec $A = 1$m, $x_1 = 2$m, $x_2 = 6$m. Choisir les conditions initiales pour que la vague parte (1) vers la gauche, (2) vers la droite, (3) vague initialement au repos. Simuler jusqu'à un temps t_{fin} pour que l'onde ait le temps de faire 2 aller-retours.

(b) **[4pts]** Limite de stabilité :
Prendre un des cas de la partie précédente, avec un nombre d'intervalles n_x donné. Vérifier et illustrer que la solution devient instable dès que $|\beta_{\text{CFL}}| > 1$.

(c) **[4pts]** Modes propres :
Initialiser un des modes propres calculés analytiquement, avec une amplitude arbitraire (mais non-nulle !), $f(x, t \leq 0) = f_n(x)\ \forall x$. Comparer ensuite la solution numérique avec la solution analytique après une période d'oscillation : $t_{\text{fin}} = T_n$, avec T_n égal à la période calculée analytiquement. Faire une étude de convergence en variant Δt et Δx à β_{CFL} constant. On mesurera l'erreur comme $\int_{x_L}^{x_R} |f_{num}(x, t = T) - f_{ana}(x, t = T)|\, dx$.
Inditcation : prendre un petit nombre d'intervalles n_x (par exemple 20). Choisir un nombre de pas de temps entier n_{steps}, avec $\Delta t = t_{\text{fin}}/n_{\text{steps}}$, de telle sorte que $\beta_{\text{CFL}} \leq 1$. Puis faire l'étude de convergence en effectuant une série de simulations avec $(n_x, 2n_x, 4n_x, 8n_x, ...)$ et $(n_{\text{steps}}, 2n_{\text{steps}}, 4n_{\text{steps}}, 8n_{\text{steps}}, ..)$, respectivement.

5.4 Vague sur un récif de corail [18pts]

On représente la profondeur de l'océan par le profil suivant :

$$h_0(x) = \begin{cases} h_L & (x_L \le x \le x_a), \\ \frac{1}{2}(h_L + h_C) + \frac{1}{2}(h_L - h_C)\cos\left(\pi\frac{x-x_a}{x_b-x_a}\right) & (x_a < x < x_b) \\ h_C & (x_b \le x \le x_c) \\ \frac{1}{2}(h_R + h_C) - \frac{1}{2}(h_R - h_C)\cos\left(\pi\frac{x-x_c}{x_d-x_c}\right) & (x_c < x < x_d) \\ h_R & (x_d \le x \le x_R) \end{cases} \tag{5}$$

On prendra $h_L = 7000$m, $h_C = 35$m, $h_R = 200$m, $x_L = 0$, $x_a = 300$km, $x_b = 700$km, $x_c = 720$km, $x_d = 850$km, $x_R = 1000$km. Simuler l'évolution d'une vague se propageant de gauche à droite, dont la forme initiale est donnée par l'Eq.(4) avec $A = 1$m, $x_1 = 50$km, $x_2 = 250$km, et appliquer la condition aux bords gauche et droite "sortie de l'onde".

Indications : *Attention de prendre une résolution spatiale suffisante. D'autre part, pour éviter d'obtenir des fichiers de sortie trop volumineux, on peut n'écrire $f(x,t)$ que tous les n_{stride} pas de temps. Simuler un temps t_{fin} suffisant pour que la vague ait passé complètement ls barrière de corail, soit environ 12000s. Choisir Δt de telle sorte que $\max(\beta_{\text{CFL}}) = 1$.*

Pour calculer la vitesse de propagation et l'amplitude, on peut par exemple trouver le premier temps $t = t_{\text{crete,i}}$ pour lequel f est maximum pour $x = x_i$ fixé (un point de la grille spatiale), afin d'obtenir le mouvement de la crête de la vague. Attention, il faut faire une interpolation quadratique de $f(x_i,t)$, à $x = x_i$ fixé , au voisinage du maximum sur la grille temporelle, pour éviter des sauts brusques. On obtient ainsi un ensemble de valeurs $(x_i, t_{crete,i})$. L'amplitude est alors la valeur de $f(x_i, t_{crete,i})$. Et on obtient la vitesse de propagation par différences finies $v = (x_{i+k} - x_{i-k})/(t_{crete,i+k} - t_{crete,i-k})$, avec $k \ge 1$ un nombre entier, choisi pour réduire les oscillations de v.

(a) **[2pts]** Illuster la solution obtenue.

(b) **[4pts]** Quelle hauteur atteint la vague au lorsqu'elle est sur le récif de corail $x_b < x < x_c$ et lorqu'elle a passé le récif $(x_d < x < x_R)$? Comparer avec la solution WKB.

(c) **[4pts]** Estimer la vitesse de propagation de la vague en fonction de sa position. Comparer avec la solution WKB.

(d) **[4pts]** Etudier et illustrer ce qui se passe avec des fonds océaniques de plus en plus raides, en rapprochant le point x_a du point x_b. Comparer avec WKB.

(e) **[4pts]** Supposer maintenant que l'équation de la vague est donnée par l'Eq.(2). Recalculer la vague obtenue, illustrer le résultat. Analyser la hauteur de la vague et la vitesse de propagation. Comparer avec la solution WKB.

5.5 Supplément facultatif

— Etudier ce qui se passserait si l'équation des vagues était

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2 f\right) \ . \tag{6}$$

Modifier le code en conséquence et faire l'analyse WKB. Simuler et comparer avec la solution WKB.

— Considérer le cas à deux dimensions d'espace, $h_0 = h_0(x,y)$, avec un maillage en x et en y. Choisir différentes formes pour la profondeur de l'océan : essayer d'obtenir une focalisation des ondes.

5.6 Rédaction du rapport en LaTeX

Rédiger un rapport de **maximum 15 pages, figures comprises** dans lequel les calculs analytiques et les résultats des simulations numériques des questions ci-dessus sont présentés et discutés.

5.7 Soumission du rapport en format pdf et du fichier source C++

(a) Préparer le fichier source LaTeX du rapport `RapportExercice7_Nom1_Nom2.tex`

(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` `RapportExercice7_Nom1_Nom2.pdf`

(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice7_Nom1_Nom2.cpp`

(d) Préparer le fichier source Matlab ou Python `Analyse_Nom1_Nom2.m ou .py`

(e) Déposer les fichiers sur Moodle avec ce lien.

En plus des points énoncés ci-dessus, on attribue [**5pts**] pour la participation en classe et la qualité générale du rapport.