介绍

介绍

2022-11-11

二能级系统

二能级系统操作

表面码约定下	传统泡利算子
$\hat{I}, \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$	$\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_x, -i\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$

操作关系

$\hat{X}^2 = -\hat{Y}^2 = \hat{Z}^2 = \hat{I}^2$

$\hat{X}\hat{Z} = -\hat{Z}\hat{X}$

$[\hat{X}, \hat{Y}] \equiv \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X} = -2\hat{Z}$

能够应用上述关系的系统都可以作为一个量子比特。

基塔夫定理 - 通用完备集

Solovay-Kitaev 定理 [2, 12] 表明由 $\hat{X}, \hat{Z}, \hat{H}, \hat{S}, \hat{S}^\dagger, \hat{T}, \hat{T}^\dagger$ 和 CNOT 门可以执行任何量子算法。

最小的通用完备集可以为：$\hat{T}, \hat{H}$ 和 CNOT，因为：

$\hat{T}^2 = \hat{S}, \hat{T}^4 = \hat{Z}, \hat{H}\hat{Z}\hat{H} = \hat{X}, \hat{Z}\hat{S} = \hat{S}^\dagger, \hat{T}^7 = \hat{T}^\dagger$

表面码

表面码中物理比特通过物理 CNOT 纠缠起来，随后的测量用来探测和纠正错误。纠缠起来的物理比特来定义逻辑比特。

表面码包括，

1. 逻辑比特的构造
2. 完备集的构造 (逻辑单比特门和逻辑 CNOT 门)

量子比特和错误模型

量子比特的基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$ 对应 $\hat{Z}$ 的两个本征态

$\hat{Z}|g\rangle = +|g\rangle,\ \hat{Z}|e\rangle = -|e\rangle$

注：哈密顿量通常正比于 $-\hat{Z}$

对比特的测量直接反映的是系统的能量水平，即本征值 $+1$ 或 -1

错误来自于不想要的外界相互作用，例如从 $|e\rangle$ 到 $|g\rangle$ 的衰变，或比特跃迁频率的波动。

借助在演化中引入随机 $\hat{X}$ 翻转和 $\hat{Z}$ 相位翻转，可以模拟大部分单比特错误 [42]，更稀有的错误则对应更小的算符振幅。

表面码和纠错

错误模型表明错误可以通过补偿来消除。

表面码仅在错误会影响最终测量时才予以纠正，即纠正测量结果：$\hat{X}$ 错误影响紧随的 $\hat{Z}$ 基底测量 M_Z，$\hat{Z}$ 错误影响紧随的 $\hat{X}$ 基底测量 M_X。

表面码的纠错在经典控制软件中完成。

表面码本身更着眼于错误探测，而非纠错。

表面码和错误探测

试图用 M_Z 探测 $\hat{X}$ 错误与用 M_X 探测 $\hat{Z}$ 错误是冲突的，因为 $[\hat{X}, \hat{Z}] \neq 0$。测量本身会破坏量子态，不存在 $\hat{X}$ 和 $\hat{Z}$ 的共同本征态。

注：在量子线路上，M_Z 测量对于比特的后果等价于随机作用一个和 $\hat{Z}$ 有共同本征态的投影算符，P_g 或 P_e，M_X 类似。

宇称鉴别

由于 $[\hat{X}_a, \hat{X}_b] = 0$，所以 $[\hat{X}_a\hat{X}_b, \hat{Z}_a\hat{Z}_b] = 0$。$\hat{X}_a\hat{X}_b$ 和 $\hat{Z}_a\hat{Z}_b$ 具有共同本征态，即贝尔态，可以同时被观测，但本征值不同。通过测量他们的本征值可以在一定程度上鉴别比特 a 和 b 所处的状态。

$\hat{Z}_a\hat{Z}_b$	$\hat{X}_a\hat{X}_b$	$\|\psi\rangle$
$+$	$+$	$\|\beta_{gg}\rangle = (\|gg\rangle + \|ee\rangle)/\sqrt{2}$
$+$	$-$	$\|\beta_{eg}\rangle = (\|gg\rangle - \|ee\rangle)/\sqrt{2}$
$-$	$+$	$\|\beta_{ge}\rangle = (\|ge\rangle + \|eg\rangle)/\sqrt{2}$
$-$	$-$	$\|\beta_{ee}\rangle = (\|ge\rangle - \|eg\rangle)/\sqrt{2}$

注 1：$\hat{X}_a$ 是比特 a 上的 $\hat{X}$ 算符，$\hat{X}_a\hat{X}_b$ 即 $\hat{X}_a \otimes \hat{X}_b$，而 XZ 是同一个比特上两个算符的积。

注 2：$\hat{X}_a\hat{X}_b$ 的本征值是比特 a 和 b 的 $\hat{X}$ 宇称，$\hat{Z}_a\hat{Z}_b$ 类似。

a 和 b 上的 $\hat{X}$ 或 $\hat{Z}$ 错误会将 $|\psi\rangle$ 的状态改变

$\|\psi_0\rangle$	after X_a error	after X_b error	after Z_a error	after Z_b error
$\|\beta_{gg}\rangle$; $++$	$\|\beta_{ge}\rangle$; $-+$	$\|\beta_{ge}\rangle$; $-+$	$\|\beta_{eg}\rangle$; $+-$	$\|\beta_{eg}\rangle$; $+-$
$\|\beta_{eg}\rangle$; $+-$	$-\|\beta_{ee}\rangle$; $--$	$\|\beta_{ee}\rangle$; $--$	$\|\beta_{gg}\rangle$; $++$	$\|\beta_{gg}\rangle$; $++$
$\|\beta_{ge}\rangle$; $-+$	$\|\beta_{gg}\rangle$; $++$	$\|\beta_{gg}\rangle$; $++$	$\|\beta_{ee}\rangle$; $--$	$-\|\beta_{ee}\rangle$; $--$
$\|\beta_{ee}\rangle$; $--$	$-\|\beta_{eg}\rangle$; $+-$	$\|\beta_{eg}\rangle$; $+-$	$\|\beta_{ge}\rangle$;$-+$	$-\|\beta_{ge}\rangle$; $-+$

所以只要观测到状态的宇称值发生变化，就表明发生了错误，只是不能鉴别出来。

表面码加强了这种探测和鉴别的能力。

镇定子

像 $\hat{X}_a\hat{X}_b$ 和 $\hat{Z}_a\hat{Z}_b$ 是镇定子 (stabilizers) 。用一组完备的镇定子反复测量量子系统，系统会塌缩到一个唯一的共同本征态。这个态可以不被测量影响。一旦测量结果变化，就表明有错误发生，测量后的态落入了另一个镇定子本征态。

注释: 量子测量

所谓测量一个算符 A，即意味着将系统置于 A 的一个本征态，并取得对应的本征值。

假设 A 的对角化表示为:

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3, \cdots, A_N)$$

测量 A 意味着存在一组投影算符 $\{P_i\}$,

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathrm{diag}(A_1, 0, \cdots, 0) \\ P_2 &= \mathrm{diag}(0, A_2, \cdots, 0) \\ &\vdots \\ P_N &= \mathrm{diag}(0, 0, \cdots, A_N) \end{aligned}$$

在测量时根据系统的状态 $|\psi\rangle$ 随机应用一个 P_i，将系统置为 A 的第 i 个本征态 $|A_i\rangle = P_i|\psi\rangle$ 上，系统的本征值即为 $\langle\psi|P_i|\psi\rangle$。

类似的，测量算符 B ，意味着找到另一组投影算符 $\{Q_i\}$。如果 $[A, B] = 0$，意味着施加 Q_j 不会影响施加 P_i 所得到的结果。