

编织变换和逻辑 CNOT

编织变换和逻辑 CNOT

编织变换

单个逻辑比特的编织变换

开孔移动的步骤：

对算符的影响

2022-11-29

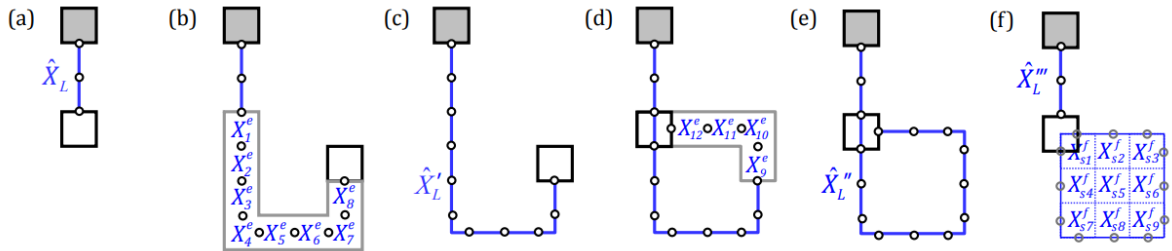
编织变换

编织变换 (Braiding transformation) 将双挖孔比特中的一个孔沿着二维平面上的一条闭合路径移动。

编织变换可以将两个逻辑比特纠缠起来，等价于一个逻辑 CNOT。

单个逻辑比特的编织变换

下面考虑一个双孔 Z-cut 比特的一个开孔空绕一圈的编织变换是如何进行的。



在一个完全镇定的阵列上，编织一个 Z-cut 比特对 \hat{X}_L 算符的影响。

(a). 双孔 Z-cut 比特，及其原始的 \hat{X}_L 算符

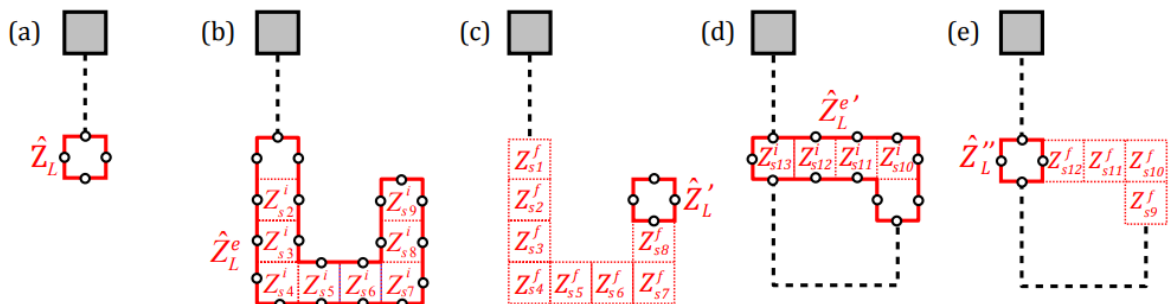
(b). 编织变换中的第一次移动，那些被孤立出来的数据比特被在 \hat{X} 基底下进行测量，给出 X_1^e, \dots, X_8^e

(c). \hat{X}_L 算符变成 $\hat{X}'_L = \hat{X}_1 \dots \hat{X}_8 \hat{X}_L$

(d). 编织变换中的第二次移动，同样在 \hat{X} 基底下测量那些被孤立出来的数据比特，给出 X_9^e, \dots, X_{12}^e

(e). \hat{X}'_L 算符变成 $\hat{X}''_L = \hat{X}_1 \dots \hat{X}_{12} \hat{X}'_L$, $\hat{X}_1 \dots \hat{X}_{12}$ 构成了一个封闭的环

(f). $\hat{X}_1 \dots \hat{X}_{12}$ 构成的环与其包围的 9 个镇定子的积相同，因此可以被其镇定。于是将 \hat{X}''_L 变成 \hat{X}'''_L 。 \hat{X}'''_L 和原始的 \hat{X}_L 可能会相差一个符号，也即是否需要考虑作一个关于副产品算符 \hat{Z}_L 的修正。这可以由 $X_1^e X_2^e \dots X_{12}^e$ 或所包围的镇定子的积 $X_{s1}^f X_{s2}^f \dots X_{s9}^f$ 来确定



在一个完全镇定的阵列上，编织一个 Z-cut 比特对 \hat{Z}_L 算符的影响。

(a). 双孔 Z-cut 比特，以及其原始的 \hat{Z}_L 算符

(b). 编织变换中的第一次移动。 \hat{Z}_L 算符变成 $\hat{Z}_L^e = \hat{Z}_{s2} \dots \hat{Z}_{s9} \hat{Z}_L$

(c). 镇定子 $\hat{Z}_{s1}, \dots, \hat{Z}_{s8}$ 重新上线，并且等待 d 个 surface code cycles 好修正对 $Z_{s1}^e, \dots, Z_{s8}^e$ 的测量错误。此时的逻辑算符 $\hat{Z}_L' = (\hat{Z}_{s1} \dots \hat{Z}_{s8})(\hat{Z}_{s2} \dots \hat{Z}_{s9})\hat{Z}_L$

(d). 编织变换中的第二次移动。将 \hat{Z}_L' 变成 $\hat{Z}_L^{e'} = \hat{Z}_{s10} \dots \hat{Z}_{s13} \hat{Z}_L'$

(e). 上线镇定子 $\hat{Z}_{s9}, \dots, \hat{Z}_{s12}$ ，逻辑算符变成 \hat{Z}_L'' ，其与原始的 \hat{Z}_L 可能相差一个符号，即可能需要考虑一个副产品 \hat{X}_L 算符的修正，这可由 $(Z_{s9}^f \dots Z_{s12}^f)(Z_{s10}^i \dots Z_{s13}^i)(Z_{s1}^f \dots Z_{s8}^f)(Z_{s2}^i \dots Z_{s9}^i)$ 来确定

注意，虽然上面是两张图，但实际上是同一个编织变换，实际的执行更接近如下的顺序：

- 上a\下a → 下b → 上b\下c → 上c → 下d → 上d\下e → 上e → 上f

开孔移动的步骤：

1. 沿着封闭路径先移动几个 cells，即将这些 cells 上的镇定子离线；

个数可以是介于 1 和 d 之间的、小于总路径长度的任意数目，这有助于纠错；

移动中离线的比特在移动完成后记得重新上线；

这一轮移动完成后先等上 d 个 cycles 来纠 measurement 的错。

2. 再沿着封闭路径移动剩下的距离。

沿着剩下的路劲直到回到起点，注意事项与第一步同。

之所以分成两步来移动，是因为只用一步会导致路径中圈的那些比特会被孤立出来，失去和 surface code 的联系。

对算符的影响

在第一步移动中， \hat{X}_L 算符被拉长，第二步之后，新的 $\hat{X}_L'' = \hat{X}_L \cdot \hat{X}_{loop}$ 。其中 $\hat{X}_{loop} = \hat{X}_1 \dots \hat{X}_{12} = \hat{X}_{s1} \dots \hat{X}_{s9}$ 。编织变换后逻辑比特的不动态也就是 \hat{X}_{loop} 的本征态，本征值就是圈起来的镇定子的输出。

在编织变换中， \hat{Z}_L 算符先被撑大，再变小，再被撑大，再变小。最终的 \hat{Z}_L'' 和 \hat{Z}_L 只可能存在符号上的差异 (中间那些镇定子累积起来的)。