算法作业 Week8

p436 16.3-7

```
HUFFMAN(C)
    n=|C|
    Q=C
    for(i=n;i>1;i-=2)
        allocate a new node $z$
        z.left=x=ExTRACT-MIN(Q)
        z.middle=m=ExTRACT-MIN(Q)
        z.right=y=ExTRACT-MIN(Q)
        z.freq=x.freq+m.freq+y.freq
        INSERT(Q, z)
    return EXTRACT-MIN(Q)
```

证明：

设x,y,m是C中最小的三个值，则假设$C' = \{C - \{x, y, m\}\} \cup \{z\}$，其中 $z.freq = x.freq + y.freq + m.freq$

设T'是由C'生成的最优的树，而将T'中的z连接x, y, m得到T，显然有

$B(T) = B(T') + x.freq + y.freq + m.freq$

假设T不是最优树，T''才是。

由于x, y, m必须是兄弟（否则通过与其他叶子节点替换，显然不最优），则用其父节点x替换x, y, m，生成另一棵树T'''，则$T''' = T'' - x.freq - y.freq - m.freq < T - x.freq - y.freq - m.freq = T'$，这与$T'$最优矛盾。证毕。

p433 16.4-1

证明：

1. S是一个有限集
2. 对于任意$B \in \mathcal{I}_k, |B| \le k$，故对于任意$A \subseteq B$，有$|A| \le k$，$A \in \mathcal{I}_k$
3. 如果$|A| < |B|$，则必然存在$x \in B - A$，而且$|A \cup \{x\}| = |A| + 1 \le |B|$，故$A \cup \{x\} \in \mathcal{I}_k$

证毕

p447 Problem 16-2

a

算法：

1. 将S中的元素按照p_i的大小升序排列，得到S'
2. 依次执行S'中的任务

证明：

采用数学归纳法

1. 当$|S| = 2$时，显然成立
2. 假设当$|S| \leq k$时成立，当$|S| = k + 1$时：

   设最优情况下，第$k + 1$个任务落在原来任务序列的第i和第$i + 1$个之间($0 \leq i \leq k$)。则由归纳假设，1~i和(i+1)~k的任务都按照升序排列会使得总完成时间最少。

   并且，如果$p_i > p_{i+1}$时间，则将其对换，时间会更少，不满足假设。故$p_i \leq p_{i+1}$。

   在此基础上，新的任务时间花费p_{new}必须满足$p_i \leq p_{new} \leq p_{i+1}$，否则将$p_{new}$与其邻居对换，总花费减少。

   因此，当$|S| = k + 1$时，也会满足条件

运行时间：只需要排序即可: $\Theta(n) = n \cdot lgn$

b

算法：

1. 将S中的元素按照r_i的大小升序排列，得到队列S'
2. 初始化另一个优先队列Q，以p_i为key；同时，初始化当前时间$T = 0$
3. 循环执行以下过程，直到Q, S'均为空：

   (1)比较Q中p_i最小的元素a_i和S'中r_j最小的元素a_j

   (2)$\Delta T = min(p_i, r_j - T)$

   (3)如果p_i更小，则在ΔT的时间内执行完成a_i，修改$T = T + \Delta T$；如果$r_j - T$更小，则在ΔT的时间

内执行部分a_i，修改$p_i = p_i - p_j$，将a_i, a_j同时放入Q中

证明：

改思路采用贪心算法，在任一时刻，执行已释放（可执行）的任务中剩余完成时间最少的任务。由(a)问可知，在该时刻的策略始终是最优策略。

运行时间：对S排序和循环执行均为$nlgn$，所以$\Theta(n) = nlgn$