Week 14

34.3-3

$L_1 \leqslant_P L_2$ 说明有 $x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$，并且$f$是多项式时间可完成的。

同理：

$L_2 \leqslant_P L_3$ 说明有 $x \in L_2 \iff g(x) \in L_3$，并且$g$是多项式时间可完成的。

因为构造$p(x) = g(f(x))$，由于g, f均为多项式时间可完成，所以p也是多项式时间可完成。并且有：
$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 \iff g(f(x)) \in L_3 \iff p(x) \in L_3$

所以 $L_1 \leqslant_P L_3$

34.5-7

首先，最长简单回路问题是NP问题：多项式时间可验证。已知某图的最长简单回路长度为k，对于某一路径，可非常简单地验证其是否为简单回路，并验证其是否长度为k。

对于某一哈密顿回路问题的图G，直接将其转化为最长简单回路问题，图仍然为G。显然，原来的哈密顿回路就是新问题的最长简单回路。

34-1

a

形式化描述：$\{< G, k >: G = (V, E), k = |V'|, \forall(u, v) \in E, u \notin V' \text{ or } v \notin V'\}$

NPC证明：

首先，该问题是NP问题，给定某个V'，可再多项式时间内判断其是否是独立子集。并可通过判断是否$|V'| = k$，从而判断是否为最大独立子集。

对于某一团问题的图G，取其补图$\bar{G}$。则原问题的最大团V'在补图下为最大独立集。

首先证明其是独立集。显然由于团中任意两个节点有边相连，取补之后，任意两个节点无边相连，所以为独立集。

其次证明其是最大独立集。假设，其不是最大独立集，可以添加某个节点。则在取反之前，添加该节点可以

成为一个更大的团，与最大团要求矛盾。所以其必然是最大独立集。

b

使用二分查找，选定某个整数k，查询该图是否存在节点数小于等于k的独立集。如果存在，则k小于最终的最大独立集节点数，否则k大于最终的最大独立集节点数。算法复杂度为$lg(|V|)$

c

对于每个结点，由于其有两个度，所以它必然与其他节点组成一个回路，从其中一条边出发，从另一条边返回。

因此，每个结点对应一个回路的节点数值c_i。如果c_i为偶数，则包含该节点的最大独立子集规模为$d_i = c_i/2$，如果c_i为奇数，则包含该节点的最大独立子集规模为$d_i = (c_i + 1)/2$。最终，在所有节点中选取$max(d_i)$作为最大独立子集的结果。

运行时间为$\Theta(|V|^2)$

d

首先找到该二分图的最大匹配，可以使用匈牙利算法。运行时间为$O(|V||E|)$

最小顶点覆盖等于二分图的最大匹配。证明：首先，最小顶点覆盖一定>=最大匹配，因为假设最大匹配为n，那么我们就得到了n条互不相邻的边，覆盖这些边就要用到2n个点。又因为最大匹配之外的结点，一定是孤立结点或与匹配的结点相连，所以均不是顶点覆盖，不会对最小覆盖产生影响。

最后：最大独立集=所有顶点-最小顶点覆盖结点。