第十一次课后作业参考答案

May 16, 2018

必做题

1 Ex.7.2.1

1.1 b)

$\{a^nb^nc^i|i \leq n\}$

证明：

假设$L = \{a^nb^nc^i|i \leq n\}$是上下文无关的，选任意的$n$，取$z = a^nb^nc^n$，任选满足条件：$z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$的$u, v, w, x, y$，由于长度所限，$vwx$不可能同时包含$a$和$c$，

1. 若vwx中没有a，则vwx中只含有b和c，并至少有其中一个符号。据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它有n个a而含有多于n个b或多于n个c或者二者都满足，因而可知它不属于L；
2. 若vwx中没有c，则vwx中只含有a和b，并至少有其中一个符号。据泵引理知uwy一定属于L，但它有n个c而含有少于n个a或多于n个b或者二者都满足，因而可知它不属于L。

无论以上哪种情况成立，我们都可以得出L中有不属于L的串的结论。因此L不是上下文无关语言。

1.2 c)

$\{0^p|p\text{是素数}\}$

证明：假设$L = \{0^p|p\text{是素数}\}$是上下文无关的，那么存在满足泵引理的条件的常数n，考虑某个素数$p \geq n + 2$（这样的素数必定存在，因为有无穷多个素数），设$z = 0^p$。根据泵引理，可以把z打断为$z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$。设$|v| + |x| = m$，则$|u| + |w| + |y| = p - m$。考虑串$uv^{p-m}wx^{p-m}y$，据泵引理知该串一定属于$L$。但是$|uv^{p-m}wx^{p-m}y| = |u| + |w| + |y| + (p - m)|v| + (p - m)|x| = p - m + (p - m)m = (m + 1)(p - m)$。由$vx \neq \varepsilon$可知$m \geq 1$，因此$m + 1 > 1$。由$|v| + |x| \leq |vwx| \leq n$可知$m \leq n$，又由$p \geq n + 2$可知$p - m \geq 2$。从而得知$|uv^{p-m}wx^{p-m}y|$有两个大于1的因子，因此$|uv^{p-m}wx^{p-m}y|$不是素数，不属于$L$，所以$L$不是上下文无关语言。

1.3 e)

$\{a^nb^nc^i|n \leq i \leq 2n\}$

证明：假设$L = \{a^nb^nc^i|n \leq i \leq 2n\}$是上下文无关的，选任意的$n$，取$a^nb^nc^n$，任选满足条件：$z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$的$u, v, w, x, y$，由于长度所限，$vwx$ 不可能同时包含a和c，

1. 若vwx中没有a，则vwx中只可能含有b和c。若v和x中含有b，据泵引理知uwy一定属于L，但它有n个a而含有少于n个b，因而可知它不属于L；若v和x中不含有b，则只能含有c，据泵引理知uwy一定属于L，但它有n个a和n个b而含有少于n个c，因而可知它不属于L;
2. 若vwx中没有c，则vwx中只可能含有a和b。据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它有n个c而含有多于n个a或多于n个b或者二者都满足，因而可知它不属于L。

无论以上哪种情况成立，我们都可以得出L中有不属于L的串的结论。因此L不是上下文无关语言。

2 Ex.7.3.1(b)

证明：

由于L是上下文无关语言，所以存在L的CNF文法，该文法只包含$A \to BC$和$A \to x$两种形式的产生式。从L的文法来构造L/a的文法时，对于L中的任何一个变量X，在L/a中都对应一个变量X'，但要满足如下的条件：如果X能生成串wa，X'能产生串w（其中a为商L/a中的a）。L/a的文法的初始变量为S'。

1. 考虑L中的任意一个形如$A \to BC$的产生式，此产生式只有两种使用环境:
   (a) 在从初始变量到某个串v的推导过程中，其中某一步使用了$A \to BC$，而由这个A生成的子串处在v的非结尾部分，即不包含v的最后一个终结符；
   (b) 或者在从初始变量到串v的推导过程中, 其中某一步使用了$A \to BC$，而这个A生成的子串处于v的结尾部分，即包含了v的最后一个终结符号。

   对于(a)的的情况，由于A并未生成v的最后一个终结符，所以L/a的文法中应包含原有的产生式$A \to BC$，否则可能无法生成串w；对于(b)的情况，添加新的产生式$A' \to BC'$，引入C'是因为C'最终也会生成串v的最后一个终结符。

2. 考虑L中的任意一个形如$A \to x$的产生式，此产生式与前面的$A \to BC$类似，也分两种使用情况。对于类似(a)的情况，L/a中要保留产生式$A \to x$。对于类似(b)的情况，如果$A \to x$中的x与L/a中的a不同，则保留$A \to x$，否则可能导致无法生成串w；如果$x = a$，则需要在L/a中添加$A' \to \varepsilon$，这样可以确保L/a产生的串比L的串只相差一个结尾的终结符a。

按照上述的方法构造的每一个产生式都是$A \to BC$或$A \to x$的形式，因此是上下文无关的。

3 Ex.7.3.2

$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m | n, m \geq 0\}$
$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} | n, m \geq 0\}$

3.1 a

解答：

G1：

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AC \\ A & \to & aAbb \mid \varepsilon \\ C & \to & cC \mid \varepsilon \end{array}$$

G2：

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB \\ A & \to & aA \mid \varepsilon \\ B & \to & bBcc \mid \varepsilon \end{array}$$

3.2 b

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^{2n} c^{4n} | n \geq 0\}$不是CFG。

证明：

假设$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^{2n} c^{4n} | n \geq 0\}$是上下文无关的，选任意的$n$，取$z = a^n b^{2n} c^{4n}$，任选满足条件：$z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$的$u, v, w, x, y$，由于长度所限，$vwx$不可能同时包含$a$、$b$和$c$，

1. 若vwx只包含a，据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它有$2n$个b和$4n$个c而含有多于n个a，因而可知它不属于L；

2. 若vwx只包含b，据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它有n个a和$4n$个c而含有多于$2n$个b，因而可知它不属于L；

3. 若vwx只包含c，据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它有n个a和$2n$个b而含有多于$4n$个c，因而可知它不属于L；

4. 若vwx只包含a和b，据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它有$4n$个c而含有多于n个a或多于$2n$个b或者二者都满足，因而可知它不属于L；

5. 若vwx只包含b和c，据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它有n个a而含有多于$2n$个b或多于$4n$个c或者二者都满足，因而可知它不属于L。

无论以上哪种情况成立，我们都可以得出L中有不属于L的串的结论。因此L不是上下文无关语言。

4 Ex.7.3.6

证明：

设$G = (V, \Sigma, R, S)$是语言L的CFG，构造一个CFG $G^R = (V, \Sigma, R', S)$。其中R中的每一条规则$A \to \alpha$都被替换成R'中的$A \to \alpha^R$。

可以看出G^R的每一棵语法分析树都是G中相应的语法分析树的镜像，因此有$L(G) = (L(G^R))^R$。

思考题

---

5 Ex.7.2.1(f)

证明：

假设$L = \{ww^Rw\}$是上下文无关的，选任意的n，取$z = 0^n1^n1^n0^n0^n1^n$，任选满足条件：$z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$的$u, v, w, x, y$，

1. 若vwx只包含0，据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它不是ww^Rw的形式，因而可知它不属于L；

2. 若vwx只包含1，据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它不是ww^Rw的形式，因而可知它不属于L；

3. 若vwx在第一个0和1之间，则vwx是0^p1^q的形式，据泵引理知uv^2wx^2y一定属于L，但它不是ww^Rw的形式，因而可知它不属于L；其它情况可以用类似的方法证明。

无论以上哪种情况成立，我们都可以得出L中有不属于L的串的结论。因此L不是上下文无关语言。

6 Ex.7.3.3

6.1 b)

证明：设$L = \{a^nb^nc^m | m \leq n\}$是上下文无关语言，则$max(L) = \{a^nb^nc^n\}$，因为$max(L)$不是上下文无关语言，所以上下文无关语言对运算$max(L)$不封闭。

6.2 c)

证明：设$L = \{a^nb^nc^na^nb^nc^n\}$是上下文无关语言，则$half(L) = \{a^nb^nc^n\}$，因为$half(L)$不是上下文无关语言，所以上下文无关语言对运算$half(L)$不封闭。