一维 SN 方法求解中子输运方程

1 一维平板 SN 方法

1.1 离散 SN 方程

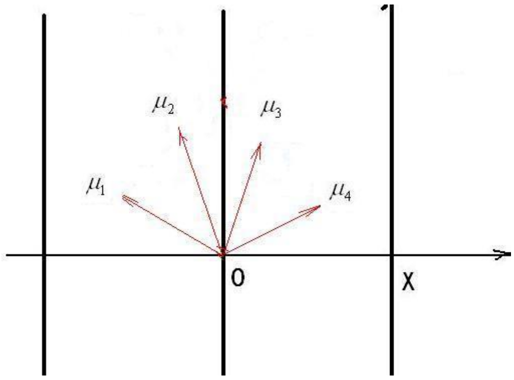
各向同性的一维平板单速中子输运方程为：

$$\mu\frac{\partial\phi(x,\mu)}{\partial x}+\sum(x)\phi(x,\mu)=S(x)x\in(0,X) \tag{1-1}$$

广义源为：

$$\mathbf{S}(x)=\frac{\sum_s(x)+\nu\Sigma_f(x)}{2}\int_{-1}^{1}\phi(x,\mu')\mathrm{d}\mu'+q(x) \tag{1-2}$$

平板和离散化的角度如下图（1-1）所示，以 S4 为例。



图（1-1）一维平板及离散化角度

这里的平板是右板块，左边是对称边界条件，右边是真空边界条件。
边界条件如下：

$$\begin{array}{ll}\phi(x,\mu)|_{x=0}=\phi(x,-\mu)|_{x=0} & \mu>0\\ \phi(x,\mu)|_{x=X}=0 & \mu<0\end{array} \tag{1-3}$$

离散 SN 方法就是利用特别选定的一组方向余弦值$\{\mu_m\}$把输运方程离散化。源项的积分采用高斯求积公式处理，即在区间$(-1，1)$内选定一组方向余弦值$\{\mu_m\}$及其相应求积权重$\{w_m\}$，$m=1,2,\cdots,N$，则源项中积分近似表示为：

$$\int_{-1}^{1}\phi(x,\mu')d\mu'\approx\sum_{m=1}^{N}w_m\phi(x,\mu_m) \tag{1-4}$$

对$\{\mu_m\}$中某一离散值，记$\phi_m(x)\simeq\phi(x,\mu_m)$，输运方程式（1）可离散化为：

$$\mu_m\frac{\partial\phi_m(x)}{\partial x}+\sum(x)\phi_m(x)=\tilde{S}(x) \tag{1-5}$$

$$\tilde{S}(x)=\frac{\sum_s(x)+\nu\sum_f(x)}{2}\sum_{j=1}^{N}w_j\phi_j(x)+q(x) \tag{1-6}$$

式（1-5）和（1-6）是一组耦合的一阶常微分方程，可利用差分法求解。

将区间[0, X]离散化为一组离散值$\left\{x_{k+\frac{1}{2}}\right\}$：

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{k+\frac{1}{2}} = X$$

对式（1-5）和（1-6）在小区间$\left(x_{k-\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}}\right)$上积分，记$\phi_{k\pm\frac{1}{2},m} = \phi_m(x_{k\pm\frac{1}{2}})$，$\Delta x_k = x_{k+\frac{1}{2}} - x_{k-\frac{1}{2}}$得到差分方程：

$$\mu_m\left(\phi_{k+\frac{1}{2},m} - \phi_{k-\frac{1}{2},m}\right) + \Delta x_k \sum\nolimits_k \phi_{km} = \Delta x_k S_k \qquad (1-7)$$
$$k = 1,2,\cdots,K; m = 1,2,\cdots,N$$

其中：

$$\phi_{km} = \frac{1}{\Delta x_k}\int_{x_k-\frac{1}{2}}^{x_k+\frac{1}{2}} \phi_m(x)dx,$$
$$S_k = \frac{1}{\Delta x_k}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \tilde{S}(x)dx, \qquad (1-18)$$

我们假设ϕ_{km}前的界面，也就是总截面，在每个小区间内都是常数。

为了数值积分公式（1-4）精度尽可能高，选择高斯求积系数$\{\mu_m\}$和$\{w_m\}$需要满足三个原则：

（1） 为了让（1-4）式的积分通量值大于等于 0，需要让近似值$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^{N} w_m\phi_m(x) \geqslant 0$，对所有$m = 1,2,\cdots,N$，$w_m > 0$。

（2） 由$x = 0$处的反射边界条件推出，若某一方向余弦值包含在$\{\mu_m\}$中，则反射方向余弦，其相反数，也包含在$\{\mu_m\}$中，即关于$\mu = 0$对称并且取相反数，而$\{w_m\}$关于 $\mu = 0$对称但正负号相同。

（3） 离散角度 N 确定时，数值积分尽量求得精度更高的数值。当被积函数$f(x)$是次数不高于（2N+1）阶多项式时，高斯积分公式精确成立。

1.2 离散 SN 方程解法

方程源项S_k是角通量的函数，需要用源迭代法求解。因此我们假设源项S_k已知，也就是随便给它赋一个初值，则我们得到的差分方程式（1-7）为一组 K*N 阶线性代数方程组，未知量（2K+1）*N 个：从边界$x = 0$开始到$x = X$分成的 K 个小区间，再将小区间二分，得到 2K 个更小的区间，这些小区间的边界有（2K+1）个，然后有 N 个角度值，每个角度值上都有（2K+1）个。

需要引入辅助方程，也就是菱形差分公式。我们假定，在取定一个角度μ_m下，通量$\phi_m(x)$在每个小网格$\left(x_{k-\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}}\right)$上线性变化，则得到：

$$\phi_{k,m} = \frac{1}{2}\left(\phi_{k+\frac{1}{2},m} + \phi_{k-\frac{1}{2},m}\right) \qquad (1-9)$$
$$k = 1,2,\cdots,K; m = 1,2,\cdots,N$$

对于$\mu_m < 0$，从式（1-7）和（1-9）可解出$\phi_{k-\frac{1}{2},m}$得到：

$$\phi_{k-\frac{1}{2},m} = \frac{2 + \mathcal{L}_{km}}{2 - \mathcal{L}_{km}}\phi_{k+\frac{1}{2},m} - \frac{2\mathcal{L}_{km}}{2 - \mathcal{L}_{km}}\frac{S_k}{\sum_k} \qquad (1-10)$$

$$\mathcal{L}_{km}=\frac{\sum_k \Delta x_k}{\mu_m}$$

利用$x=X$处真空边界条件：$\phi_{K-\frac{1}{2},m}=0; m=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$，对于$\mu_m<0$，可以递推解出同一角度下的其他通量值。

对于$\mu_m>0$，从（1-7）和（1-9）解出$\phi_{k+\frac{1}{2},m}$得到：

$$\phi_{k+\frac{1}{2},m}=\frac{2-\mathcal{L}_{km}}{2+\mathcal{L}_{km}}\phi_{k-\frac{1}{2},m}+\frac{2\mathcal{L}_{km}}{2+\mathcal{L}_{km}}\frac{S_k}{\sum_k} \quad (1-11)$$

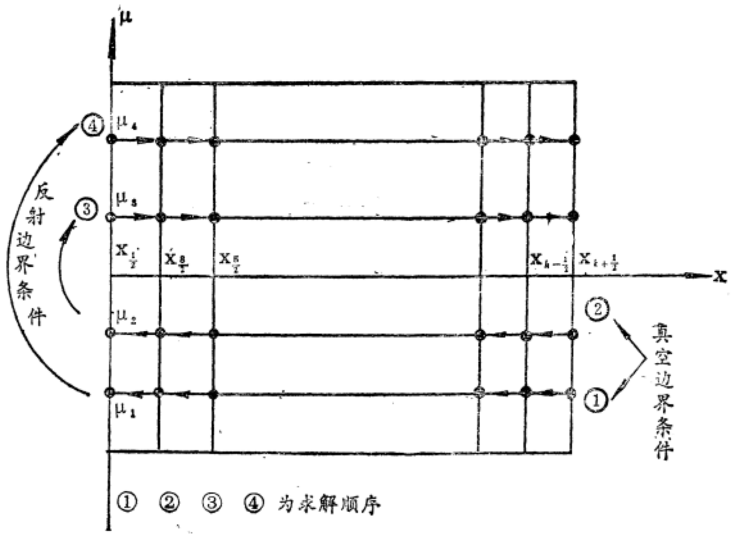
$$\mathcal{L}_{km}=\frac{\sum_k \Delta x_k}{\mu_m}$$

由于$\mu_m<0$时已经得到$\phi_{\frac{1}{2},m}$，利用$x=0$处的反射边界条件

$$\phi_{\frac{1}{2},m}=\phi_{\frac{1}{2},N+1-m}$$

$$m=\frac{N}{2}+1,\cdots,N$$

总之，求解顺序为先对所有$\mu_m<0$，$m=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$递推求解，然后再对所有$\mu_m<0$，$m=\frac{N}{2}+1,\cdots,N$递推求解，这便是一次迭代的计算。计算顺序如下图（1-2）所示。



图（1-2）一维平板一次迭代计算顺序

求解的核心公式为：

$$\mu_m\left(\phi_{k+\frac{1}{2},m}-\phi_{k-\frac{1}{2},m}\right)+\Delta x_k\Sigma_k\phi_{k,m}=\Delta x_k S_k$$

$$\phi_{k,m}=\frac{1}{2}\left(\phi_{k+\frac{1}{2},m}+\phi_{k-\frac{1}{2},m}\right)$$

$$S_k=\frac{(\Sigma_s+\nu\Sigma_f)_k}{4}\sum_{m=1}^{N} w_m(\phi_{k-\frac{1}{2},m}+\phi_{k+\frac{1}{2},m})+q_k$$

根据杜书华《输运问题的计算机模拟》一书上的计算流程可以写出计算程序。

1.3 程序设计

题目已知条件如下图

1. 根据杜书华等编著的**“输运问题的计算机模拟”**第 9 章给出方程和计算框图进行编程，对单速一维均匀平板裸堆进行计算。算出角通量分布，通量分布和有效增值系数 k，并将计算结果与该书 p148－150 上的数据进行对照。

堆尺寸： a＝66.0053 cm

边界条件： 左边为对称边界条件，右边为真空边界条件。

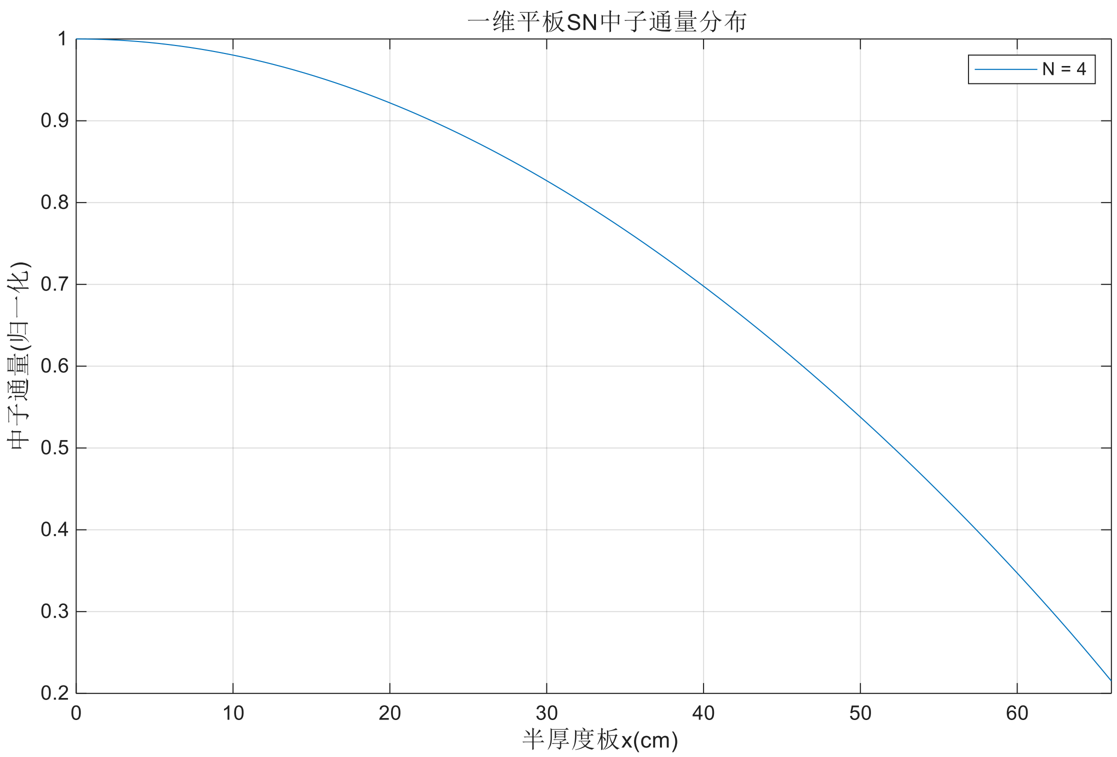
核截面数据：

$\Sigma_t = 0.050/cm$ $\Sigma_s = 0.030/cm$ $\nu\Sigma_f = 0.0225/cm$

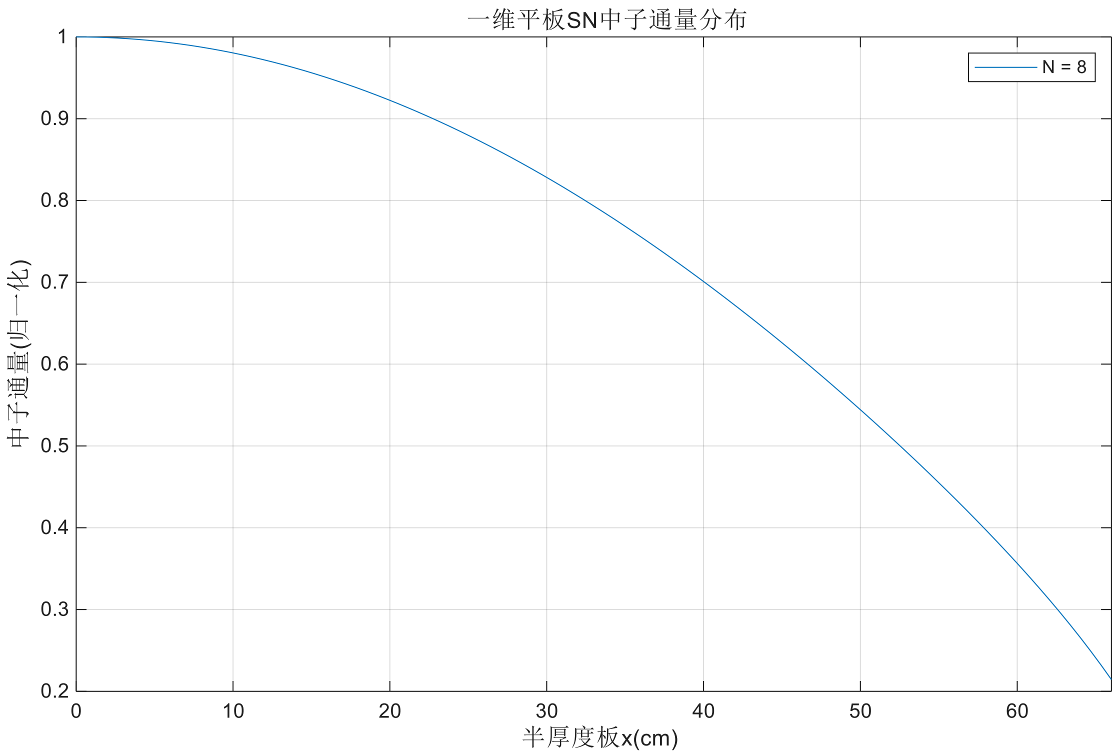
使用 MATLAB 编写，最开始给中子源设置初值，本程序中设置为全为 1 的矩阵，设置有效增殖系数初值为 0.1，在多次迭代过程中，利用中子角通量计算中子通量。结束迭代的判断标准是本次迭代计算得到的 keff 和上一次迭代得到的 keff 相差小于某个值，则认为达到稳定，结束迭代并画出中子通量分布，输出有效增殖系数。

程序中可以修改阶数 N，可以求解 4、6、8、10 阶数，用一个函数来根据阶数获取不同的高斯求积系数组。

1.4 计算结果




```
有效增值系数（平均值）：  0.99955358
有效增值系数（最大值）：  0.99955361
有效增值系数（最小值）：  0.99955356
迭代次数：  55.000000
```




```
有效增值系数（平均值）：  0.99991042
有效增值系数（最大值）：  0.99991043
有效增值系数（最小值）：  0.99991040
迭代次数：  57.000000
```

2 一维球体 SN 方法

2.1 离散 SN 方程

稳态、单能、各向同性源的一维球的输运方程可以写成：

$$\mu\frac{\partial\phi(r,\mu)}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial\phi(r,\mu)}{\partial\mu}+\Sigma(r)\phi(r,\mu)=S(r) \qquad (2-1)$$

$$S(r)=\frac{\Sigma_s+\nu\Sigma_i}{2}\int_{-1}^{1}\phi(r,\mu')d\mu'+q(r) \qquad (2-2)$$

$$0<r<R$$

等价于下面的守恒形式方程

$$\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial}{2r}(r^2\phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}[(1-\mu^2)\phi]+\Sigma(r)\phi=S(r) \qquad (2-3)$$

为减少复杂性，只考虑定常、单能、散射各项同性、真空边界条件：

$$\phi(r,\mu)|_{r-R}=0,\mu<0 \qquad (2-4)$$

的情况。把空间变量r变化区间$[0,R]$离散化为：

$$0=r_{\frac{1}{2}}<r_{\frac{3}{2}}<\cdots<r_{k+\frac{1}{2}}=R$$

约定所有介质界面都是离散点，μ区间[-1,+1]按照高斯求积组离散：$\{\mu_m\},m=1,2,\ldots,N$，每

个高斯点μ_m在小区间$\mu_{m-\frac{1}{2}} < \mu_m < \mu_{m+\frac{1}{2}}$内$\mu_{\frac{1}{2}} = -1$，$\mu_{N+\frac{1}{2}} = 1$。如此将$r-\mu$平面分割为网格

$$\Delta_k, m = \left(r_{k-\frac{1}{2}}, r_{k+\frac{1}{2}}, \mu_{m-\frac{1}{2}}, \mu_{m+\frac{1}{2}}\right)(k = 1, \cdots, K; m = 1, \cdots, N)$$

左边第一项积分为：

$$\int_{\mu_{m-\frac{1}{2}}}^{\mu_{m+\frac{1}{2}}} \int_{r_{k-\frac{1}{2}}}^{r_{k+\frac{1}{2}}} \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2\phi) r^2 dr d\mu = \int_{\mu_{m-\frac{1}{2}}}^{\mu_{m+\frac{1}{2}}} \int_{r_{k-\frac{1}{2}}}^{r_{k+\frac{1}{2}}} \mu \frac{\partial}{\partial r}(r^2\phi) dr d\mu$$

$$= w_m \mu_m \left[\mathrm{A}_{k+\frac{1}{2}} \phi\left(r_{k+\frac{1}{2}}, \mu_m\right) - \mathrm{A}_{k-\frac{1}{2}} \phi\left(r_{k-\frac{1}{2}}, \mu_m\right)\right] \quad (2-5)$$

第二项积分为：

$$\int_{\mu_{m-\frac{1}{2}}}^{\mu_{m+\frac{1}{2}}} \int_{r_{k-\frac{1}{2}}}^{r_{k+\frac{1}{2}}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}[(1-\mu^2)\phi] r^2 dr d\mu$$

$$= \left(A_{k+\frac{1}{2}} - A_{k-\frac{1}{2}}\right)\left[\alpha_{m+\frac{1}{2}} \phi\left(r_k, \mu_{m+\frac{1}{2}}\right) - \alpha_{m-\frac{1}{2}} \phi\left(r_k, \mu_{m+\frac{1}{2}}\right)\right] \quad (2-6)$$

其中

$$A_{k\pm\frac{1}{2}} = r^2_{k\pm\frac{1}{2}}; \alpha_{m\pm\frac{1}{2}} = \frac{1-\mu^2_{m\pm\frac{1}{2}}}{2}$$

左边第三项积分为：

$$\int_{\mu_{m-\frac{1}{2}}}^{\mu_{m+\frac{1}{2}}} \int_{r_{k-\frac{1}{2}}}^{r_{k+\frac{1}{2}}} \Sigma(r)\phi r^2 dr d\mu = w_m \Sigma_k \int_{r_{k-\frac{1}{2}}}^{r_{k+\frac{1}{2}}} \phi(r, \mu_m) r^2 dr$$

$$= w_m \Sigma_k V_k \frac{1}{V_k} \int_{r_{k-\frac{1}{2}}}^{r_{k+\frac{1}{2}}} \phi(r, \mu_m) r^2 dr = w_m \Sigma_k V_k \phi_{k,m} \quad (2-7)$$

右边那项积分为：

$$\int_{\mu_{m-\frac{1}{2}}}^{\mu_{m+\frac{1}{2}}} \int_{r_{k-\frac{1}{2}}}^{r_{k+\frac{1}{2}}} S(r) r^2 dr d\mu = w_m \int_{r_{k-\frac{1}{2}}}^{r_{k+\frac{1}{2}}} S(r) r^2 dr$$

$$= w_m V_k \frac{\left(\Sigma_s + \nu\Sigma_f\right)_k}{2} \sum_{j=1}^{N} w_j \phi_{k,j} \equiv w_m V_k S_k \quad (2-8)$$

其中

$$S_k = \frac{(\Sigma_s + \nu\Sigma_f)_k}{2} \Sigma_{j=1}^{N} \phi_{kj} \omega_j + q_k$$

输运方程离散化为：

$$\frac{\mu_m}{V_k}\left(A_{k+\frac{1}{2}} \phi_{k+\frac{1}{2},m} - A_{k-\frac{1}{2}} \phi_{k-\frac{1}{2},m}\right) + \frac{A_{k+\frac{1}{2}} - A_{k-\frac{1}{2}} \alpha_{m+\frac{1}{2}} \phi_{k,m+\frac{1}{2}} - \alpha_{m-\frac{1}{2}} \phi_{k,m-\frac{1}{2}}}{\nu_m}$$

$$+\Sigma_k \phi_{km} = S_k \quad (2-9)$$

这里

$$A_{k\pm\frac{1}{2}}=r^2_{k\pm\frac{1}{2}};V_k=\frac{1}{3}\left(r^3_{k+\frac{1}{2}}-r^3_{k-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\phi_{km}=\frac{1}{V_k}\int_{r_{k-\frac{1}{2}}}^{r_{k+\frac{1}{2}}}\phi(r,\mu_m)r^2dr$$

$$S_k=\frac{(\Sigma_s+\nu\Sigma_f)_k}{2}\Sigma_{j=1}^{N}\phi_{kj}\omega_j+q_k$$

通过递推关系式求$\alpha_{m\pm\frac{1}{2}}$:

$$\alpha_{m+\frac{1}{2}}-\alpha_{m-\frac{1}{2}}=-\mu_m\omega_m \tag{2-10}$$

外边界真空条件：

$$\phi_{k+\frac{1}{2},m}=0,m=1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{2-11}$$

球心处对称条件：

$$\phi_{\frac{1}{2},m}=\phi_{\frac{1}{2},N+1-\mathrm{m}},m=1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{2-12}$$

2.2 离散 SN 方程解法

在球几何情况下，不仅空间网格的边界角通量$\phi_{k\pm\frac{1}{2},m}$与网格点通量$\phi_{k,m}$有耦合关系，而且方向网格的边界角通量$\phi_{k,m\pm\frac{1}{2}}$与网格点通量也有耦合关系。除了引入空间网格的角通量和网格点通量的关系式外，还要引入方向网格边界通量与网格点通量的关系式，即

$$\phi_{k,m}=\frac{1}{2}\left(\phi_{k+\frac{1}{2},m}+\phi_{k-\frac{1}{2},m}\right) \tag{2-13}$$

$$\phi_{k,m}=\frac{1}{2}\left(\phi_{k,m+\frac{1}{2}}+\phi_{k,m-\frac{1}{2}}\right) \tag{2-14}$$

$$k=1,2,\cdots,K;m=1,2,\cdots,N$$

式（2-9）（2-10）（2-11）共有 3KN 个方程，3KN+K+N 个未知量。两组边界条件提供 N 个关系式，还缺 K 个方程。空间网格边界通量初始值由边界条件提供，要求给出$\mu=-1$处的通量值$\phi_{k,\frac{1}{2}},k=1,2,\cdots,K$作为方向网格边界通量的初始值，此时输运方程的差分格式：

$$-\frac{1}{V_k}(A_{k+\frac{1}{2}}\phi_{k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}-A_{k+\frac{1}{2}}\phi_{k-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+\Sigma_k\phi_{k,\frac{1}{2}}=S_k \tag{2-15}$$

$$k=1,2,\cdots,K$$

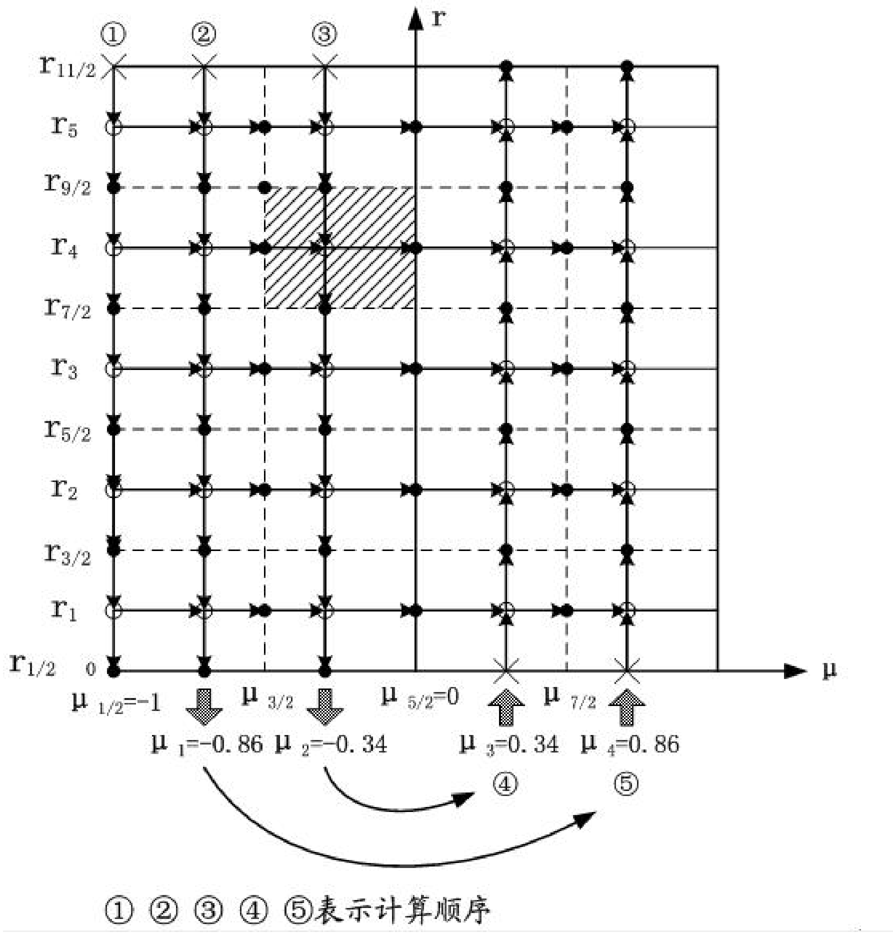
计算顺序如下图（2-1）所示。

（1）计算

$$A_{k+\frac{1}{2}}=r^2_{k+\frac{1}{2}},k=0,1,\cdots,K \tag{2-16}$$

$$V_k=\frac{1}{3}\left(r^3_{k+\frac{1}{2}}-r^3_{k-\frac{1}{2}}\right) \tag{2-17}$$

$$\alpha_{m+\frac{1}{2}} - \alpha_{m-\frac{1}{2}} = -\mu_m \omega_m; m = 1,2,\cdots,N \tag{2-18}$$



图（2-1）一次迭代求解顺序图

（2）给出迭代初值$\phi_{k,\mathrm{m}}^{(0)}, k = 1,\cdots,Km = 1,\cdots,N$

（3）计算源项（i 为迭代次数）

$$S_k^{(i)} = \frac{(\Sigma_z + \nu\Sigma_f)_k}{2} \sum_{j=1}^{N} \phi_{k,j}^{(i)} \omega_j + q_k \tag{2-19}$$

$$k = 1,\cdots,Km = 1,\cdots,N$$

（4）

$$\phi_{k-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(i+1)} = 2\phi_{k,\frac{1}{2}}^{(i+1)} - \phi_{k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(i+1)} \tag{2-20}$$

代入（2-15）得到

$$\phi_{k,\frac{1}{2}}^{(i+1)} = \frac{V_k S_k^{(i)} + \left(A_{k+\frac{1}{2}} + A_{k-\frac{1}{2}}\right)\phi_{k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(i+1)}}{2A_{k-\frac{1}{2}} + \Sigma_k V_k} \tag{2-21}$$

$$k = K, K-1,\cdots,1$$

（5）对于$\mu_m < 0(\neq -1)$

$$\boldsymbol{\phi}_{k-\frac{1}{2},m}^{(i+1)} = 2\boldsymbol{\phi}_{k,m}^{(i+1)} - \boldsymbol{\phi}_{k+\frac{1}{2},m}^{(i+1)} \tag{2-22}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{k,m+\frac{1}{2}}^{(i+1)} = 2\boldsymbol{\phi}_{k,m}^{(i+1)} - \boldsymbol{\phi}_{k,m=\frac{1}{2}}^{(i+1)}; m = 1,2,\cdots,\frac{N}{2}, \mathrm{k} = K, K-1,\cdots,2,1.$$

（2-22）代入（2-9）得：

$$\boldsymbol{\phi}_k^{(i+1)} = (V_k\boldsymbol{S}_k^{(i)} + \boldsymbol{E}_{km}\boldsymbol{\phi}_{k+\frac{1}{2},m}^{(i+1)} + \boldsymbol{G}_{km}\boldsymbol{\phi}_{k,m-\frac{1}{2}}^{(i+1)})/(E_{km} + G_{km} + \sum_k V_k) \qquad (2-23)$$

$$E_{km} = | \mu_m | \left(A_{k+\frac{1}{2}} + A_{k-\frac{1}{2}}\right) \qquad (2-24)$$

$$G_{km} = \left(A_{k+\frac{1}{2}} - A_{k\equiv\frac{1}{2}}\right)\frac{\left(\alpha_{m+\frac{1}{2}} + \alpha_{m-\frac{1}{2}}\right)}{w_m} \qquad (2-25)$$

（6）对于$\mu_m > 0$

$$\boldsymbol{\phi}_{k+\frac{1}{2},m}^{(i+1)} = 2\boldsymbol{\phi}_{k,m}^{(i+1)} - \boldsymbol{\phi}_{k-\frac{1}{2},m}^{(i+1)} \qquad (2-26)$$

$$\boldsymbol{\phi}_{k,m+\frac{1}{2}}^{(i+1)} = 2\boldsymbol{\phi}_{k,m}^{(i+1)} - \boldsymbol{\phi}_{k,m-\frac{1}{2}}^{(i+1)}$$

$$\boldsymbol{\phi}_k^{(i+1)} = \frac{\left[\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{S}_k^{(i)} + \boldsymbol{E}_{km}\boldsymbol{\phi}_{k-\frac{1}{2},m}^{(i+1)} + \boldsymbol{G}_{km}\boldsymbol{\phi}_{k,m-\frac{1}{2}}^{(i+1)}\right]}{E_{km} + G_{km} + \sum_k V_k} \qquad (2-27)$$

$$m = \frac{N}{2} + 1,\cdots,N, k = 1,2,\cdots,K$$

（7）比较前后两次迭代结果，若满足误差要求，结束迭代，若不满足，返回（3）继续计算。

关于负通量的处理详细见杜书华书。流程图见杜书华书。

2.3 程序设计

题目中给出已知条件为：

2. 根据该书给出的方程和框图编制程序，对单速一维均匀裸球堆进行计算。算出角通量分布，通量分布和有效增值系数 k，并将计算结果与该书 p150—151 上数据进行对照。

堆尺寸： R=145.5436 cm

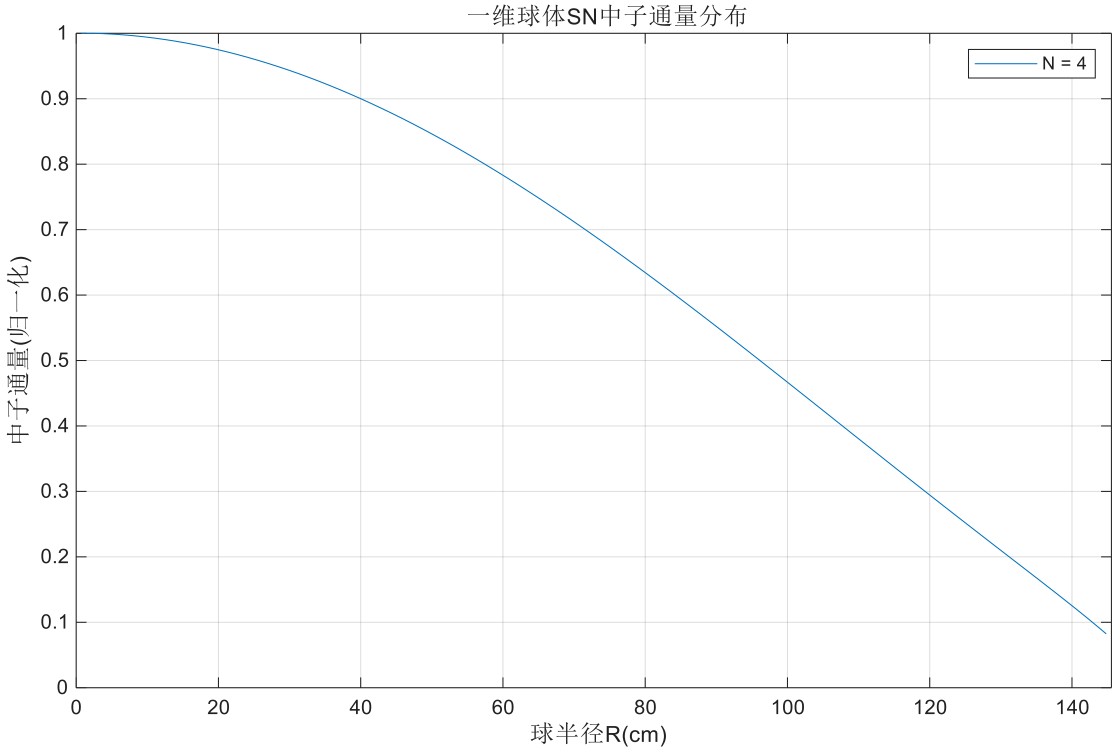
边界条件：外表面为真空边界条件。

核截面数据：

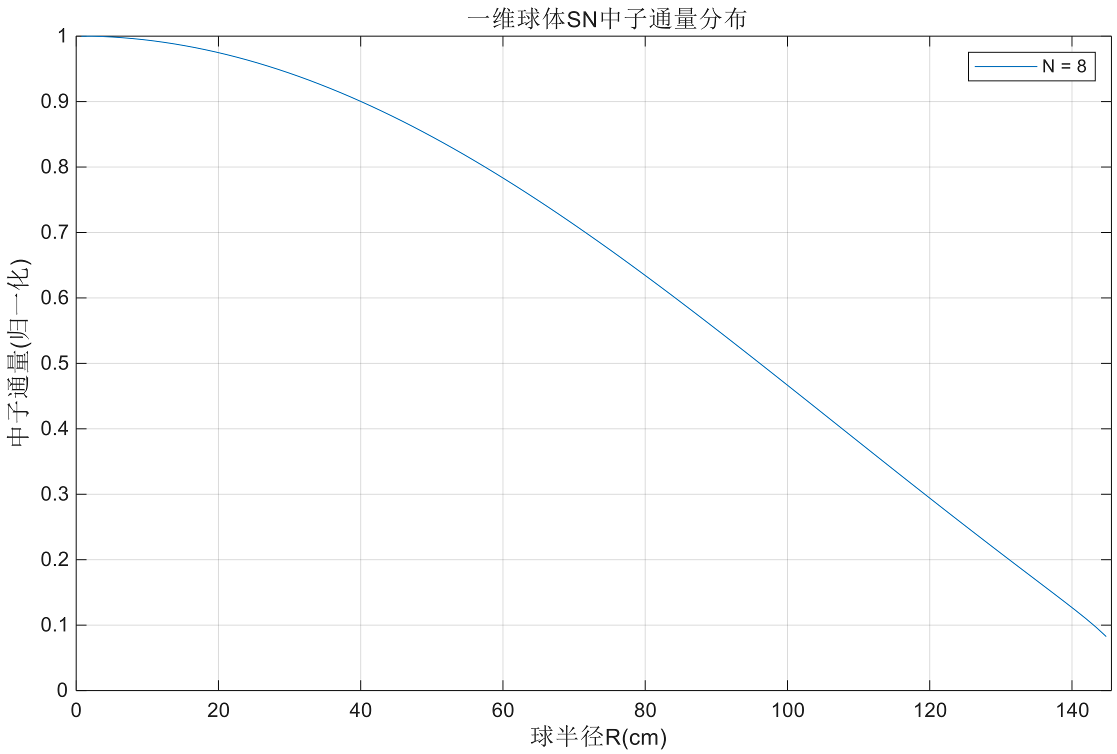
Σ_t=0.050/cm　　Σ_s= 0.030/cm　　$\nu\Sigma_f$=0.0225/cm

使用 MATLAB 编写，大体和一维平板情况类似。

2.4 计算结果



有效增值系数（平均值）： 0.54786030
有效增值系数（最大值）： 1.00019927
有效增值系数（最小值）： 0.10000000
迭代次数： 119.000000



```
有效增值系数（平均值）：  0.54779046
有效增值系数（最大值）：  1.00005890
有效增值系数（最小值）：  0.10000000
迭代次数：  119.000000
```