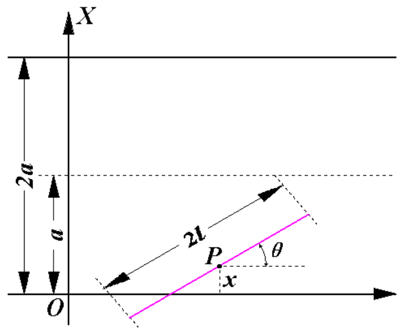
蒲丰投针计算模拟

何仕杰 2021010266

1 问题描述

将长度为$2l$的针随意投到地面上，地面上所有区域都是间隔$2a$的平行线，如下图（1-1）所示。



图（1-1）蒲丰投针

通过大量随机的投掷实验，观察此针和平行线相交的次数，从而计算出概率值，利用此概率值计算得出圆周率π的近似值。

2 数学分析

该针投到地面上的位置可以用两个参数(x,θ)描述，由对称性，x为该针中心的坐标（若以图（1-1）所示将下面的线作为参考线），范围从 0 到a，θ为该针和平行线夹角，范围从 0 到π。

任意投针，表示（x,θ）任取，那么针和平行线相交的数学条件为：

$$x \le l \cdot \sin\theta \qquad (2-1)$$

要产生任意且随机的（x,θ），可以利用均匀分布的概率密度函数，x在$[0,a]$上均匀取值，其分布密度函数：

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/a & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad (2-2)$$

类似，θ分布函数：

$$f_2(\theta) = \begin{cases} 1/\pi & 0 \le \theta \le \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad (2-3)$$

从而得到产生任意（x,θ）的过程为：

$$\begin{cases} x = a\xi_1 \\ \theta = \pi\xi_2 \end{cases} \qquad (2-4)$$

其中ξ_1和ξ_2为在[0,1]上均匀分布的随机变量。

每次投针实验，实际上变成在计算机上从两个均匀分布的随机变量中抽样得到（x,θ），然后定义描述针和和平行线相交状况的随机变量$s(x,\theta)$，为：

$$s(x,\theta) = \begin{cases} 1 & x \le l \cdot \sin\,\theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad (2-5)$$

如果投针 N 次，则：

$$\bar{s}_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}s(x_i,\theta_i) \quad (2-6)$$

是针与平行线相交概率 P 的估计值，事实上：

$$P=\iint s(x,\theta)f_1(x)f_2(\theta)dxd\theta=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\pi}\int_0^{l\sin\theta}\frac{dx}{a}=\frac{2l}{\pi a} \quad (2-7)$$

于是有：

$$\pi=\frac{2l}{aP}\approx\frac{2l}{a\bar{s}_N}=\frac{2l}{a}\left(\frac{N}{n}\right) \quad (2-8)$$

计算值和理论值误差：

$$\Delta\pi=\frac{2l}{a}\left(\frac{N}{n}\right)-\pi \quad (2-9)$$

根据概率论中心极限定理，如果随机变量序列$X_1,X_2\cdots X_N$独立同分布，且具有有限非零的方差σ^2，即：

$$0\neq\sigma^2=\int\left(x-E(X)\right)^2f(x)dx<\infty \quad (2-10)$$

$f(X)$是X的分布函数，则：

$$\lim_{N\to\infty}P\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma}|\bar{X}_N-E(X)|<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad (2-11)$$

当N充分大时，有如下近似式：

$$P(|\bar{X}_N-E(X)|<\frac{\lambda_\alpha\sigma}{\sqrt{N}})\approx\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\lambda_\alpha}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1-\alpha \quad (2-12)$$

其中α为置信度，$1-\alpha$为置信水平。也就是说不等式$|\bar{X}_N-E(X)|<\frac{\lambda_\alpha\sigma}{\sqrt{N}}$近似地以概率$1-\alpha$成立，且误差收敛速度的阶为$O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$。

通常，蒙特卡洛方法的误差为：

$$\varepsilon=\frac{\lambda_\alpha\sigma}{\sqrt{N}} \quad (2-13)$$

上式中λ_α与α一一对应，但是σ是未知的，因此，需要用其估计值：

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2-\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i\right)^2} \quad (2-14)$$

作业中要求使用的误差传递公式如下：

$$p=\frac{2l}{\pi a},\pi=\frac{2l}{ap},\frac{\Delta\pi}{\pi}=\frac{\Delta p}{p}$$

$$\Delta\pi=\frac{\pi}{p}\frac{2\sigma_p}{\sqrt{N}}=2\pi\sqrt{\frac{1-p}{Np}}$$

3 程序设计

采用 MATLAB 编写蒙特卡洛模拟算法，以下是伪代码：

```
// 蒙特卡洛方法模拟蒲丰投针实验

// 设置实验参数
设置针的长度 L 为 3
设置平行线间距 d 为 4
设置投针总次数 N 为 1000000

// 初始化变量
初始化相交次数 X 为 0
预分配空间用于存储估计的π值、投针次数、误差和理论误差

// 进行随机投针实验
对于从 1 到 N 的每次投针：
    随机生成针中心到最近线的距离 x_center 和针与平行线的夹角 theta
    判断针是否与平行线相交，如果相交则增加相交次数 X
    如果当前投针次数是 100 的倍数：
        计算 π 的估计值 pi_estimate
        将估计值、投针次数、误差和理论误差存储到相应数组中

// 计算最终的 π 估计值
计算最终完成所有投针后 π 的估计值 final_pi_estimate

// 显示结果
显示最终估算的 π 值和相对误差

// 可视化
创建图形
绘制实际误差曲线、正理论误差曲线、负理论误差曲线和零误差线
添加图例、设置坐标轴标签和标题、显示网格
设置横纵坐标范围
```

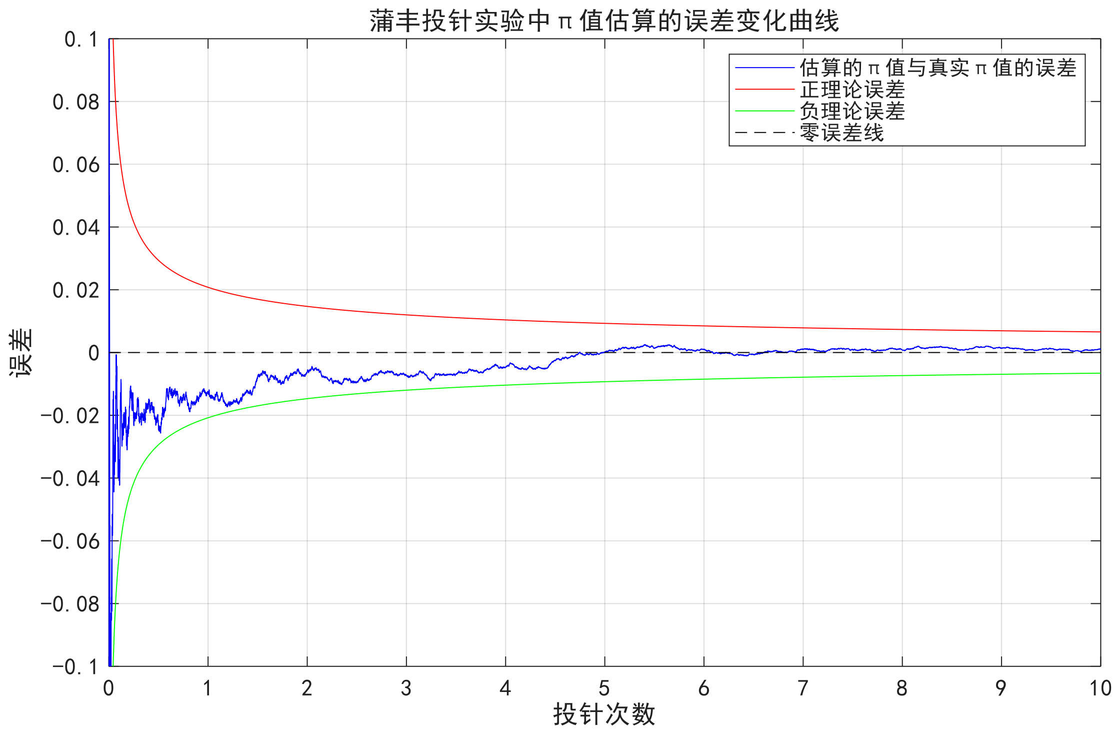
误差计算公式为：

$$\text{相对误差} = \frac{|\text{数值解} - \text{解析解}|}{\text{解析解}} \times 100\%$$

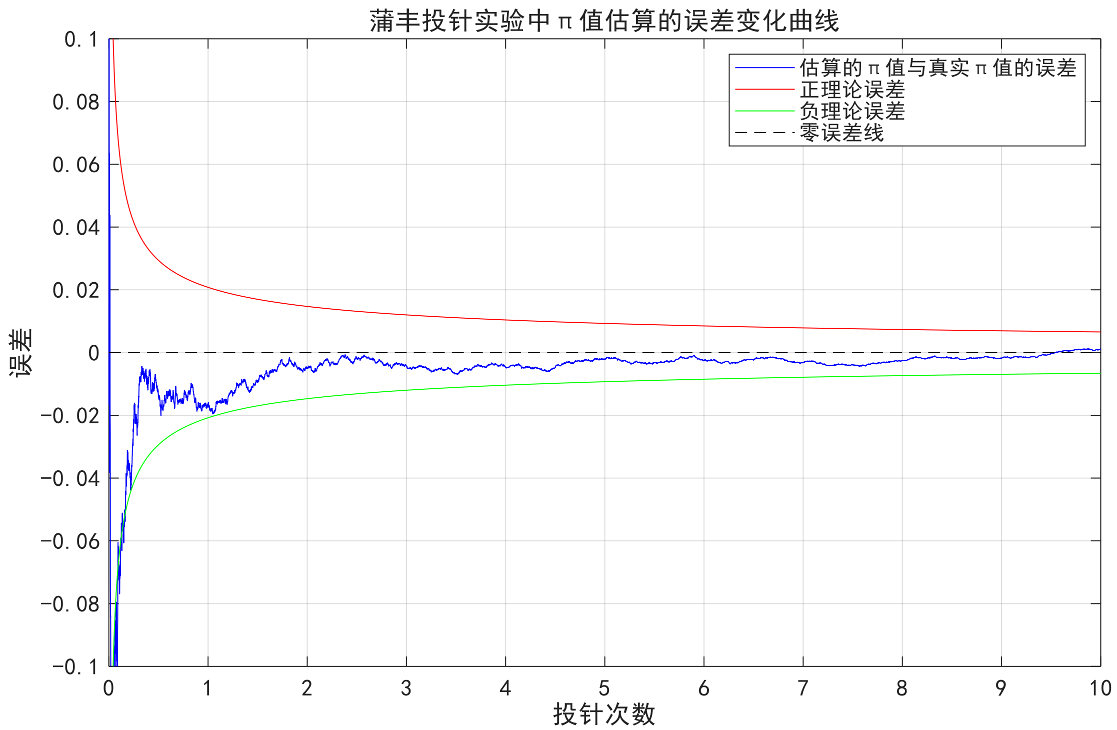
4 模拟结果

以下为几次随机性模拟的误差曲线图以及对应的相对误差：

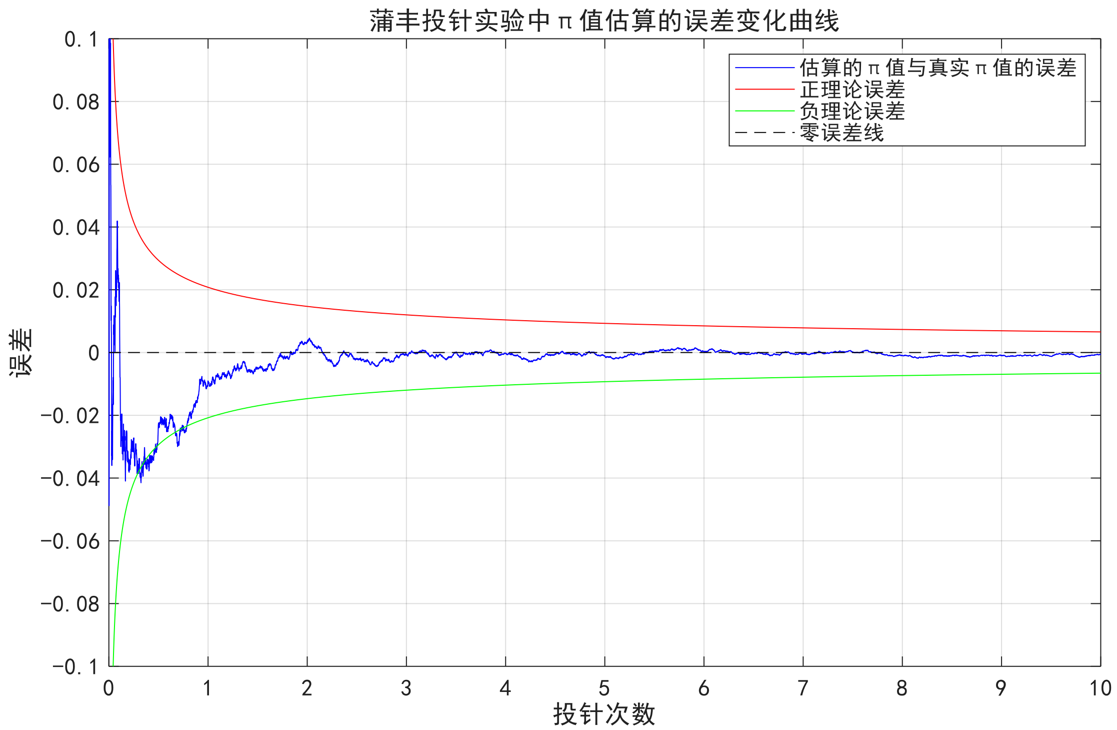
模拟组数	计算π值	相对误差
1	3.1427	0.036001%
2	3.1428	0.037887%
3	3.1410	0.020138%
4	3.1397	0.058854%



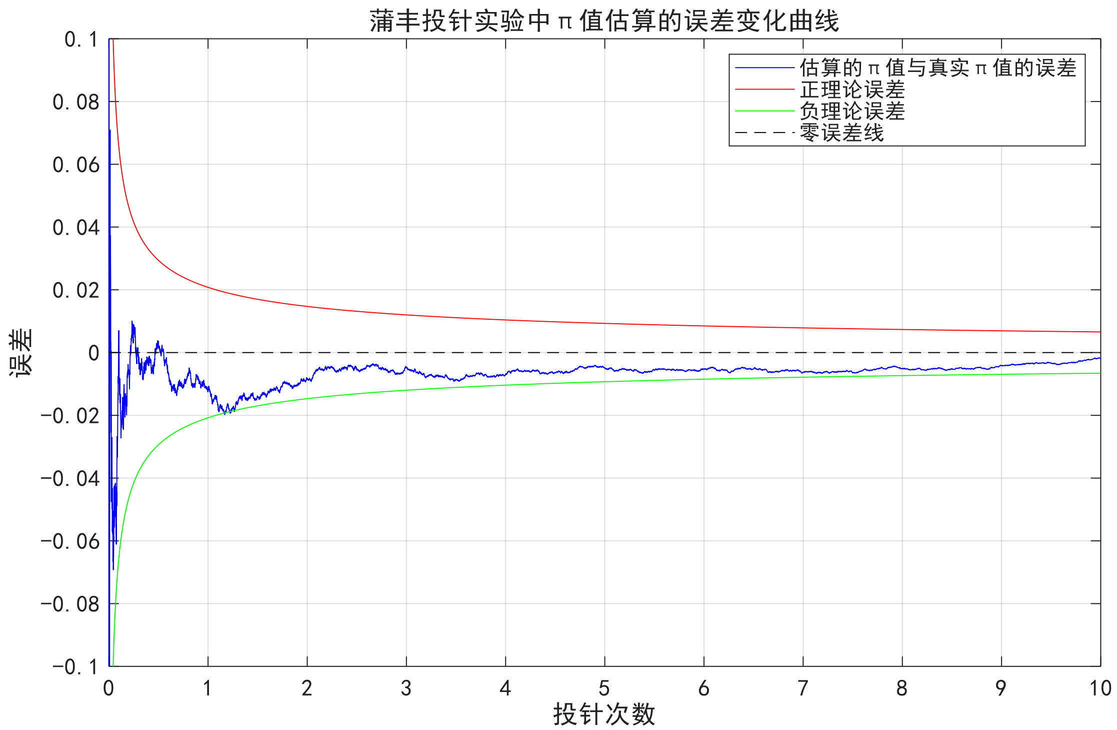
图（4-1）第一组模拟



图（4-2）第二组模拟



图（4-3）第三组模拟



图（4-4）第四组模拟