

阻尼线性振子稳态行为模拟报告

何仕杰 2021010266

1. 问题描述:

描述阻尼线性振子的微分方程为:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt} + A_0 \cos \omega t$$

方程右边分别为自由项、阻尼项、扰动项, 参数可变, 左边为加速度

2. 理论分析:

此微分方程为一元二阶非齐次常系数微分方程, 其解析解可以表示为齐次解和非齐次特解的和。

齐次微分方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

有形式解: $x_h(t) = e^{\lambda t}$, 代入得到特征方程:

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

特征根:

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

根据参数的不同取值, 判别式 $\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2$ 有大于 0、小于 0、等于 0 三种情况, 对应三种不同状态的解:

(1) 过阻尼 ($\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0$):

特征根:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

方程齐次解:

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

C_1 、 C_2 为常数, 由初始条件确定。

(2) 欠阻尼 ($\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0$):

特征根:

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_d, \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

方程齐次解:

$$x_h(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t))$$

C_1 、 C_2 为常数, 由初始条件确定。

(3) 临界阻尼 ($\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2 = 0$):

特征根:

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2}$$

方程齐次解:

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

C_1 、 C_2 为常数，由初始条件确定。

由于方程齐次解均为 e 指数形式，尝试特解：

$$x_p(t) = B\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

代入原线性微分方程，匹配不同阶微分的系数得到系数：

$$B = \frac{A_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, D = \frac{A_0\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

特解写成 \cos 形式：

$$x_p(t) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

其中 ϕ 满足：

$$\tan \phi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

把特解和齐次解加起来得到通解：

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C_1\cos(\omega_d t) + C_2\sin(\omega_d t)) + \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

C_1 、 C_2 为常数，由初始条件确定。

可以从理论解看出，前一项为幅值呈指数衰减的振荡或非振荡项，后一项为幅值恒定的振荡项，如果没有外力扰动，也就是后一项为 0，那么方程的解就只有衰减项，逐渐趋近于 0，如果存在外力扰动，随着时间推移，衰减项趋于 0，而只存在周期性的恒定幅值的三角函数形式的振荡项。解的状态和系统初始条件以及是否加外力扰动有关。

在存在外力扰动的情况下，系统最终的角频率、周期和施加外力的角频率、周期相同：

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega_s = \omega$$

A. 对于第一问的情况 ($\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2$):

代入通解可得到解析解为：

$$x(t) = e^{-0.25t}(0.8077\cos(2.99t) + 0.04026\sin(2.99t)) + 0.1923\cos(2t) + 0.03846\sin(2t)$$

B. 第二问改变外力角频率 ($\omega = 1, \omega = 4$):

状态 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 1$ 下角频率和周期：

$$\omega_s = \omega = 1$$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$$

状态 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 4$ 下角频率和周期：

$$\omega_s = \omega = 4$$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

C. 第三问改变固有角频率 ($\omega_0 = 4, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2$):

稳态运动时的角频率依然和外力扰动角频率相等，因为固有角频率贡献衰减项。

$$\omega_s = \omega = 2$$

D. 第四问外力扰动为 0 ($\omega_0 = 3, A_0 = 0, \omega = 2$):

要达到临界阻尼，需要判别式 $\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2 = 0$ ，则临界阻尼系数 $\gamma = 6$ 。

3. 数值模拟及物理分析:

A. 对于第一问的情况 ($\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2$):

初始条件 $x_0 = 1, v_0 = 0$, 程序采用 Euler-Cromer 方法计算位置的数值解, 并且和理论解画图比较:

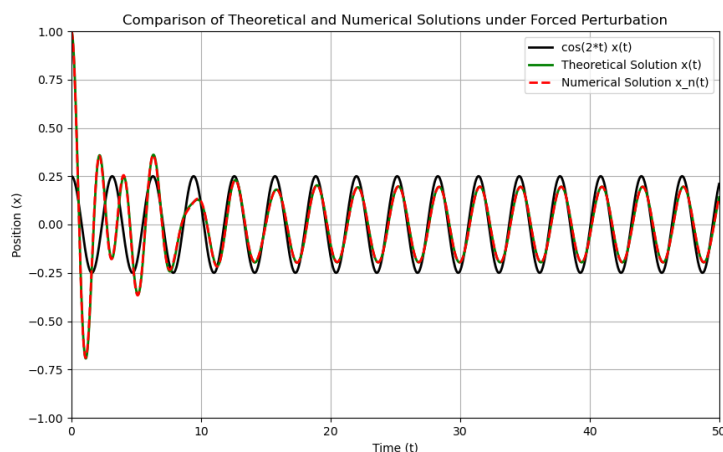


图 1 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2$ 条件理论解和数值解

a. $x(t)$ 的行为和无扰动时有何不同?

同样用 Euler-Cromer 方法模拟出无扰动下理论解和数值解比较:

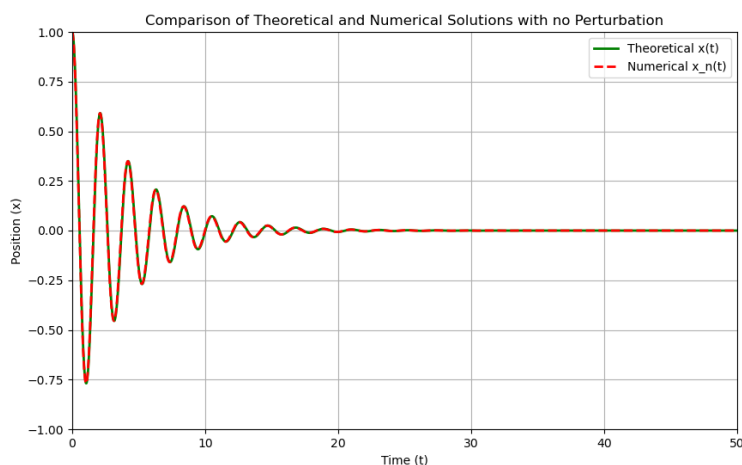


图 2 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 0, \omega = 2$ 条件理论解和数值解

无扰动下, $x(t)$ 振幅迅速减小趋于 0, 而有扰动下, 系统最终为周期余弦振荡, 这和理论分析完全契合。

b. 从初始开始数次振动后 $x(t)$ 的周期和角频率是多少?

由图 1 可以看出, 系统后期周期和频率和频率为 2 的余弦函数相同, 周期为 π , 频率为 2。

c. $x(t)$ 的极限性质是否和初始条件相关?

无关, 因为初始条件贡献给解的衰减项, 无论初始条件怎样, 时间增大, 都会衰减至 0, 最后 $x(t)$ 的极限性质的贡献项为外力扰动。

每一次改变初始条件, 都需要重新计算通解中的系数, 下面改变初始条件为:

$(x_0 = -1, v_0 = 0)$:

$$x(t) = e^{-0.25t}(-1.1923 \cos(2.99t) - 0.1254 \sin(2.99t)) + 0.1923 \cos(2t) + 0.03846 \sin(2t)$$

$(x_0 = 3, v_0 = 0)$:

$$x(t) = e^{-0.25t}(2.807692 \cos(2.99t) + 0.2090605 \sin(2.99t)) + 0.1923 \cos(2t) + 0.03846 \sin(2t)$$

$(x_0 = 1, v_0 = 1)$:

$$x(t) = e^{-0.25t}(0.8076923 \cos(2.99t) + 0.3763089 \sin(2.99t)) + 0.1923 \cos(2t) + 0.03846 \sin(2t)$$

$(x_0 = 1, v_0 = 2)$:

$$x(t) = e^{-0.25t}(1.807692 \cos(2.99t) + 0.4599331 \sin(2.99t)) + 0.1923 \cos(2t) + 0.03846 \sin(2t)$$

可以用程序模拟验证，改变初始条件得到的结果如下：

$(x_0 = -1, v_0 = 0)$:

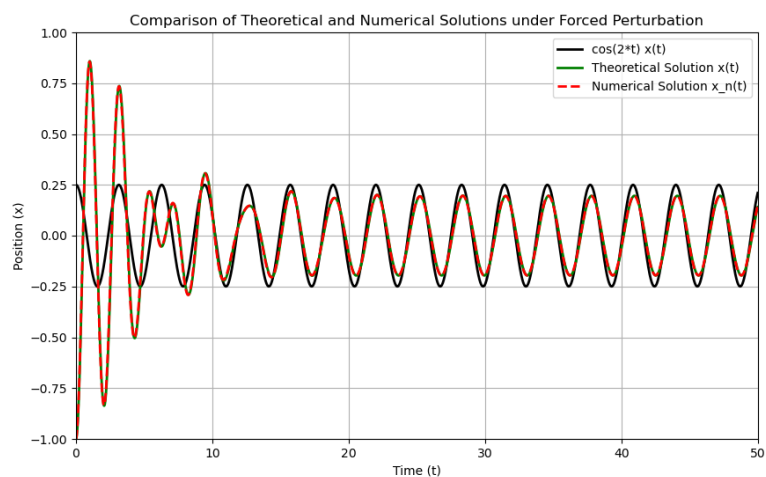


图 3 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2(x_0 = -1, v_0 = 0)$ 理论解和数值解

$(x_0 = 3, v_0 = 0)$:

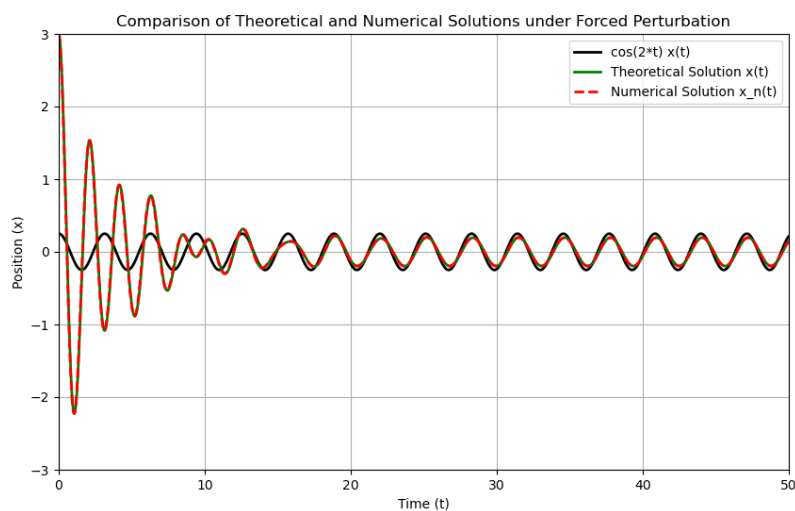


图 4 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2(x_0 = 3, v_0 = 0)$ 理论解和数值解

$(x_0 = 1, v_0 = 1)$:

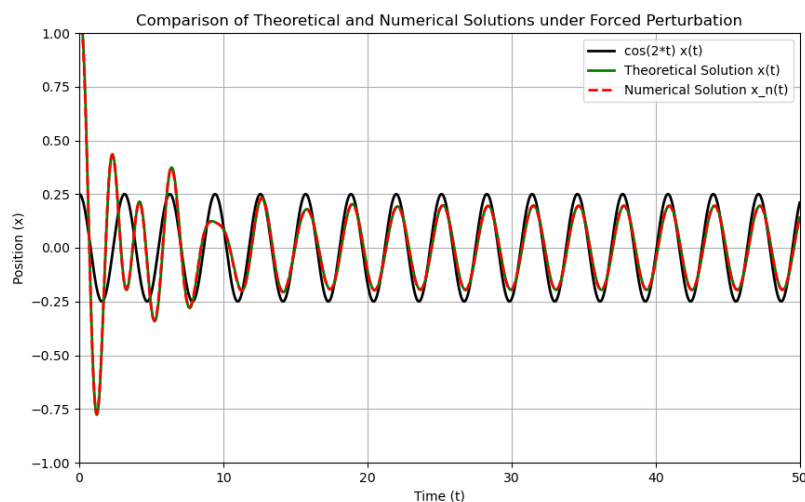


图 5 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2(x_0 = 1, v_0 = 1)$ 理论解和数值解

$(x_0 = 1, v_0 = 2)$:

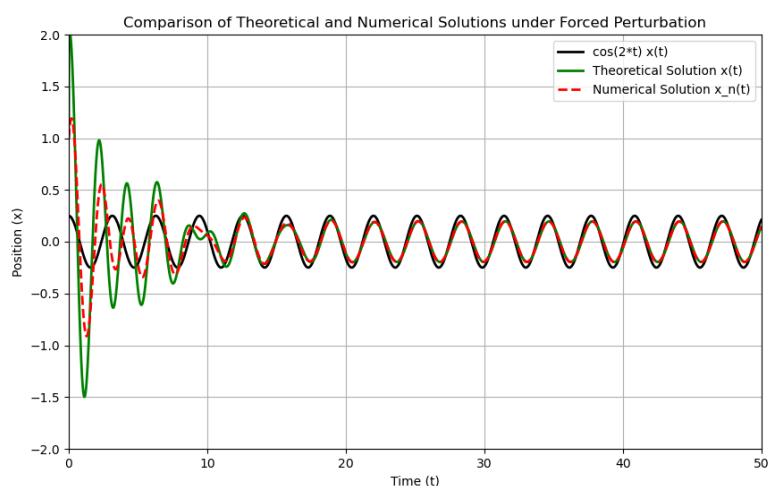


图 6 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2(x_0 = 1, v_0 = 2)$ 理论解和数值解

可以看出，无论是改变初速度还是初始位置，系统最后的极限状态都是相同频率和相位和幅值的余弦函数曲线，这是因为极限状态只和外力扰动有关，改变初始条件并没有改变外力的参数，因此最终状态是不变的。

- d. 由上面改变各种初始条件得到的结果可以看出， $x(t)$ 的短期行为和初始条件有关，比如初始位置和相位就因为 x_0, v_0 不同而不同。

综上所述， $x(t)$ 与初始条件无关的稳态部分在图中出现在大约 18 个时间单位之后，其和理论余弦函数同步且幅度稳定；而与初始条件有关的部分出现在 18 个时间单位之前，尤其是 10 个时间单位之前更明显，其振荡幅度呈减小趋势。从物理上来看，根据给出的阻尼系数可以定义时间常数 $\tau = \frac{2}{\gamma} = 4$ ，一般认为大概在 5 倍时间常数之后，振动趋于稳定，这和实验模拟结果接近。

- e. 考察能量守恒：

能量守恒方面，考察线性振子系统的动能和势能之和：

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(v^2 + \omega_0^2 x^2)$$

因此在程序中考察 $\frac{1}{2}(v^2 + \omega_0^2 x^2)$ 的守恒情况，初始条件为 $(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 的能量守恒情况如下：

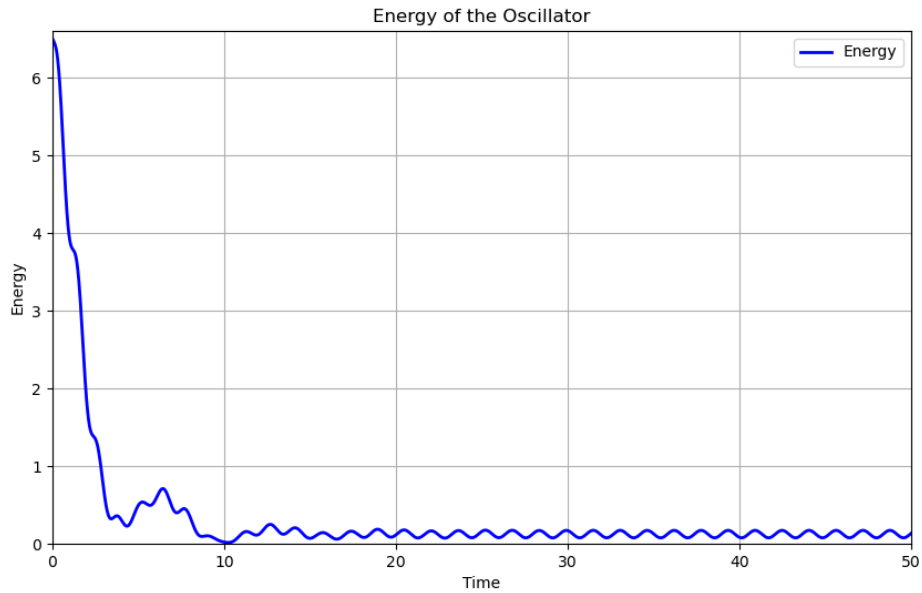


图 7 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 能量曲线

由能量曲线可以看出，振子系统的能量在稳态之前呈减小趋势，这是因为内部阻尼存在，能量耗散，最终其总机械能停留在一个比较低的能量水平波动，其频率为驱动力频率的两倍，最终能量水平之所以比较低，是因为驱动力和系统固有频率不同，驱动力频率不能和振子固有频率很好的耦合共振，如果改变外力频率和固有频率一致，可得到其能量如下变化，以初始条件 $(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 为例：

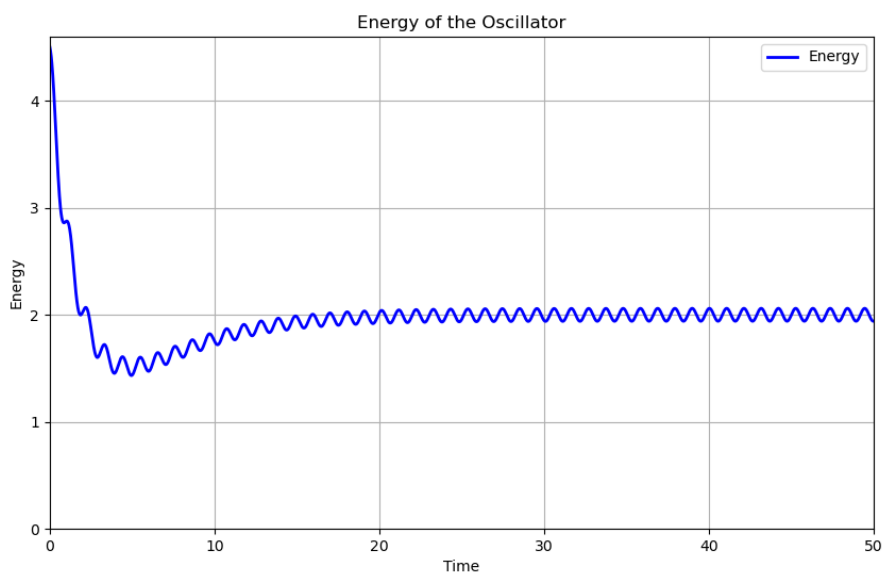


图 8 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 3(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 能量曲线

B. 问题（2）中改变驱动力频率，模拟，并计算每种情况下的周期和角频率：

(1) $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 1$, 初始条件 ($x_0 = 1, v_0 = 0$):

$$x(t) = e^{-0.25t}(0.09728\cos(2.99t) + 0.005532\sin(2.99t)) + 0.1245136\cos(t) + 0.007782\sin(t)$$

结果如下：

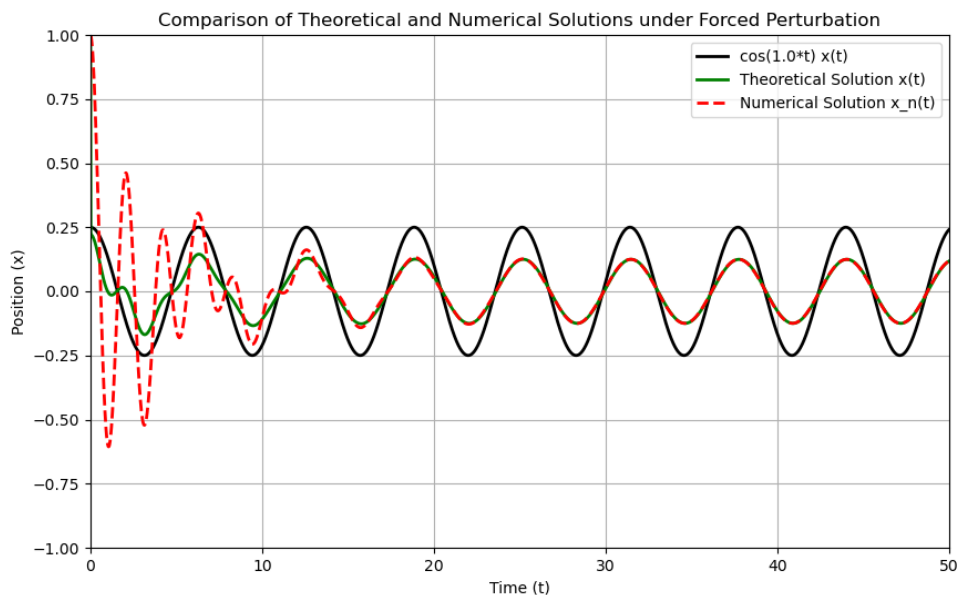


图 9 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 1(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 位置曲线

能量曲线：

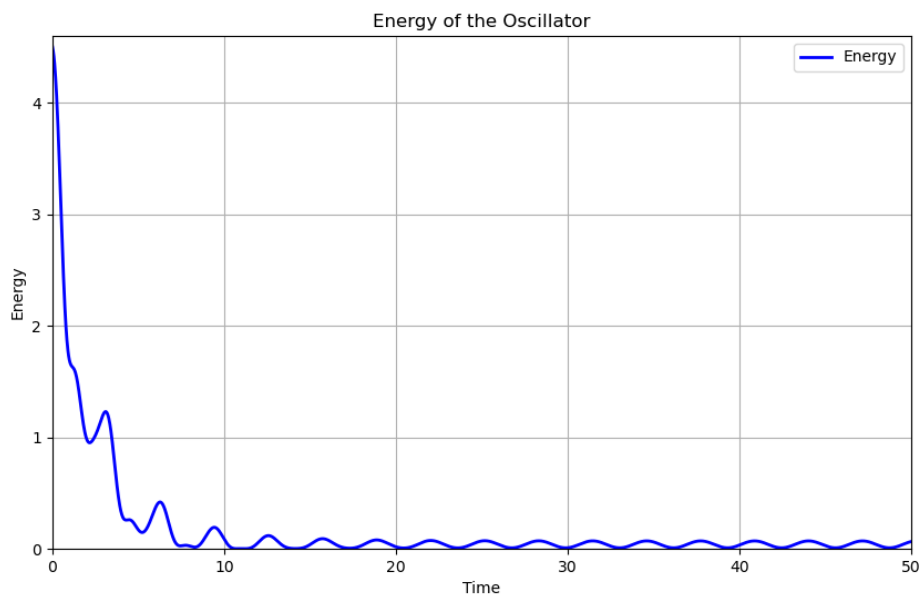


图 10 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 1(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 能量曲线

由图可见，当振子稳定后，其能量水平很低，但并没有到 0，对能量曲线局部放大：

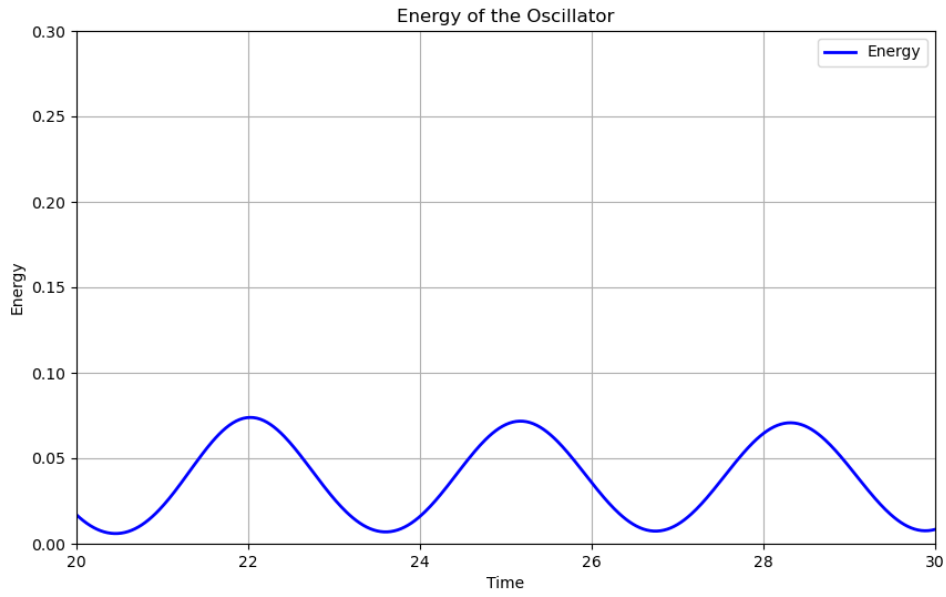


图 11 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 1 (x_0 = 1, v_0 = 0)$ 能量曲线局部放大
周期和角频率为:

$$\omega_s = \omega = 1$$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$$

(2) $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 4$, 初始条件 $(x_0 = 1, v_0 = 0)$:

$$x(t) = e^{-0.25t} (1.132075 \cos(2.99t) + 0.044179 \sin(2.99t)) - 0.1320755 \cos(4t) + 0.03773585 \sin(4t)$$

结果如下:

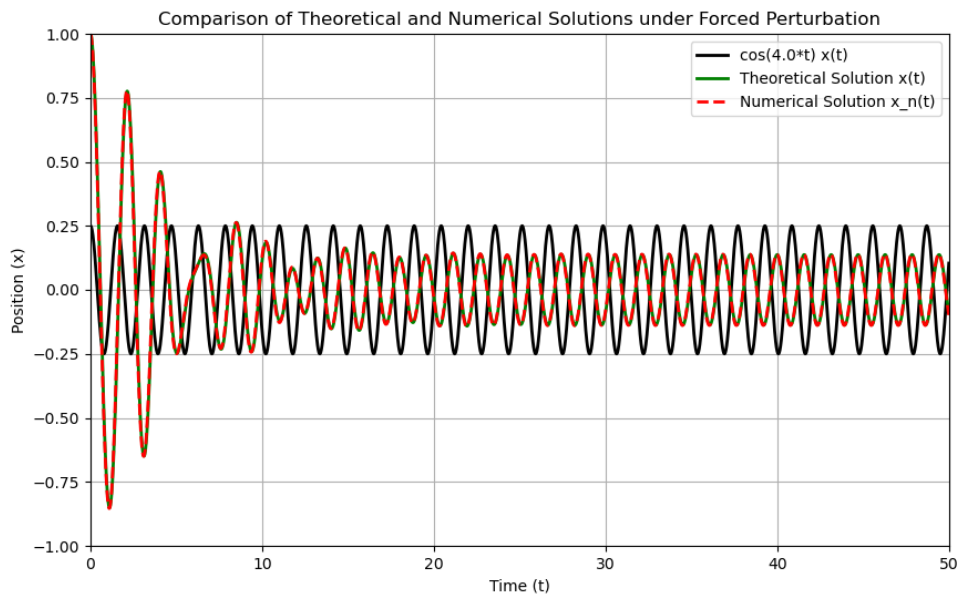


图 12 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 4 (x_0 = 1, v_0 = 0)$ 位置曲线
考察其能量守恒, 能量曲线如下:

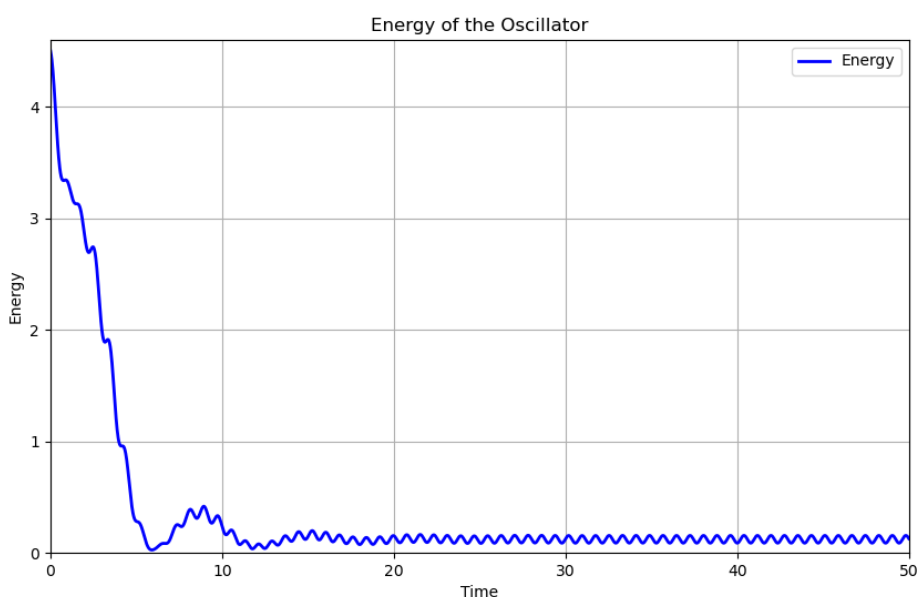


图 13 $\omega_0 = 3, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 4(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 能量曲线

周期和频率为:

$$\omega_s = \omega = 4$$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

因此，由数值计算曲线、理论曲线和 \cos 函数曲线的同步程度可以进一步验证系统稳态频率和驱动力频率相同。

c. 本题第三问计算 $\omega_0 = 4, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2$, 初始条件 $(x_0 = 1, v_0 = 0)$:

$$x(t) = e^{-0.25t}(-0.082759 \cos(3.99218t) + 0.2418521 \sin(3.99218t)) + 0.082759 \cos(2t) + 0.00689655 \sin(2t)$$

结果如下:

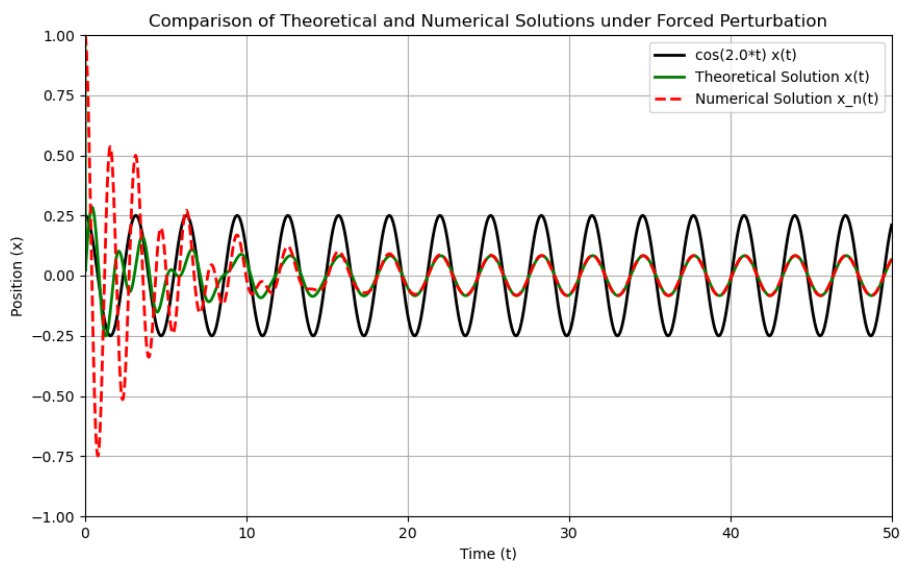


图 14 $\omega_0 = 4, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 位置曲线
考察其能量守恒，能量曲线如下：

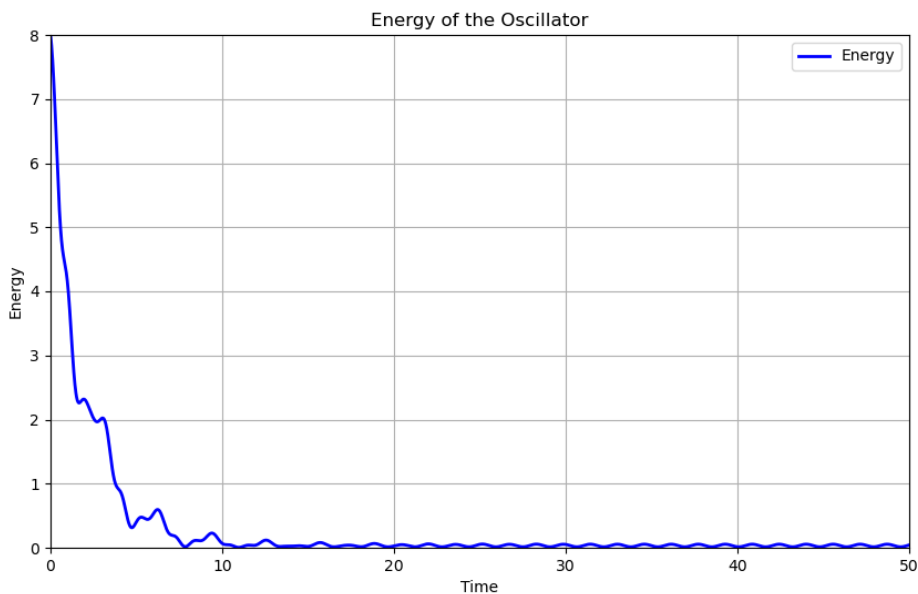


图 15 $\omega_0 = 4, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 能量曲线

局部放大：

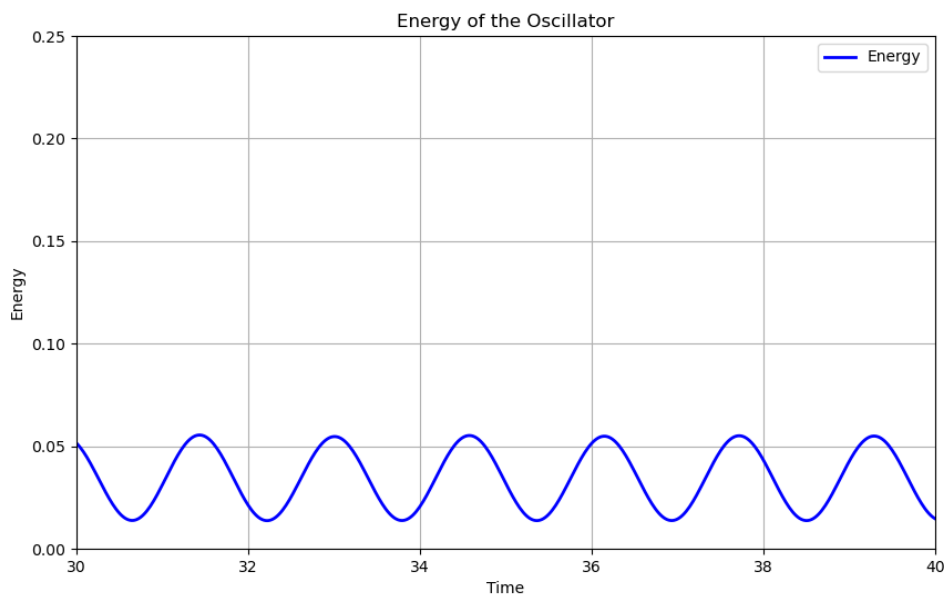


图 16 $\omega_0 = 4, \gamma = 0.5, A_0 = 1, \omega = 2(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 能量曲线局部放大
稳态运动时的角频率和周期：

$$\omega_s = \omega = 2$$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$$

进一步验证，稳态时的角频率和周期和固有频率无关，和驱动力角频率和周期有关，微分方程中决定稳态频率的参数为 ω 。

D. 本题第四问， $\omega_0 = 3, A_0 = 0$ ，初始条件 $(x_0 = 1, v_0 = 0)$ ，确定阻尼系数

γ 的临界值（临界阻尼系数）：

在本题条件下，位置随时间的函数如下：

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\gamma}{2\omega_d} \sin(\omega_d t) \right)$$

其中 $\omega_d = \sqrt{9 - \frac{\gamma^2}{4}}$.

根据临界阻尼系数的定义，物体位置不振荡地随时间逐渐减小到 0，回到平衡位置几乎静止，并且用时最短，此时的阻尼系数就是临界阻尼系数。

先大致确定临界阻尼系数的范围：

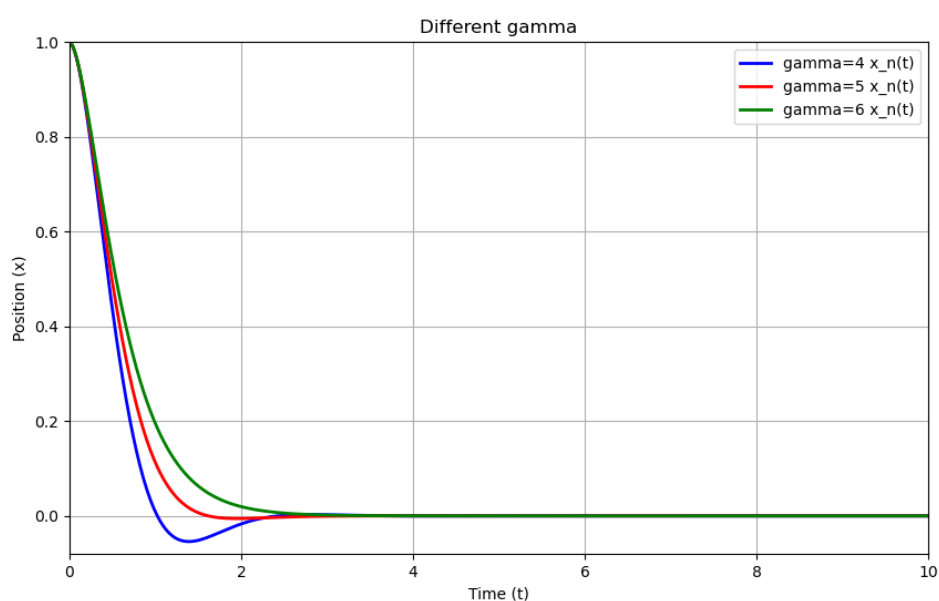


图 17 $\omega_0 = 3, \gamma = 4, 5, 6, A_0 = 0(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 位置曲线

局部放大：

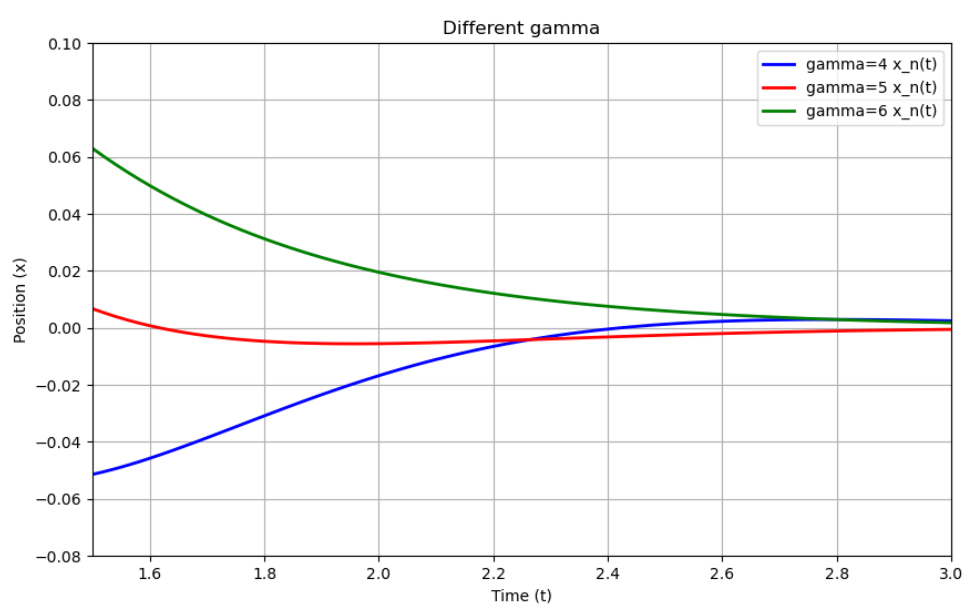


图 18 $\omega_0 = 3, \gamma = 4, 5, 6, A_0 = 0(x_0 = 1, v_0 = 0)$ 位置曲线局部放大

可见, $\gamma = 5$ 还不是临界阻尼系数, 于是, 程序从 $\gamma = 5$ 开始, 逐步增加最大至 6, 直到在时间 0 到 10 范围内, 位置全部为正, 则此时的 γ 即为临界阻尼系数。

伪代码如下:

```
较精确确定临界 gamma
设置参数和初始变量
    x_0 = 1.0      # 初始位置
    v_0 = 0.0      # 初始速度
    omega_0 = 3.0  # 角频率
    gamma = 5.0    # 阻尼系数
    d_gamma = 0.0001 # 阻尼系数步长
    A_0 = 0.0      # 初始振幅
    omega = 2.0    # 外力角频率
    dt = 0.02      # 时间步长
    t = 0.0        # 初始时间
    x_n = x_0      # 当前位置
    v_n = v_0      # 当前速度
    a_n = -8.0     # 初始加速度
    w_d = 0.5 * sqrt(36 - gamma^2)  # 有阻尼自然频率
    signal = 0     # 信号标志
当 gamma 小于 6 时
    当 t 小于 10 时
        计算加速度 a_n
        更新速度 v_n
        更新位置 x_n
        如果 x_n 小于 0
            重置状态到初始值
            更新 gamma 和 w_d
            退出内部循环
        更新时间 t
        如果 t 大于等于 10
            设置信号标志 signal
            退出内部循环
    如果 signal 不等于 0
        打印 gamma
        退出外部循环
```

程序输出临界阻尼系数 $\gamma = 5.792899999998152$, 精度受算法本身和计算机截断误差影响。