1. 常见的泰勒展开

$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \qquad (|z|<1)$

$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$

$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

$(1+z)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}z^n=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$

2. 孤立奇点与留数

定理 *2.1* (**有限孤立奇点的分类**):

当函数$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta(0<\delta\le+\infty)$内解析时:

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=C_0\ne\infty\iff z_0\text{是}f(z)\text{的可去奇点}$$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty\iff z_0\text{是}f(z)\text{的极点}$$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=C_{-m}\ne 0(m\in\mathbb{N}_+)\iff z_0\text{是}f(z)\text{的}m\text{阶极点}$$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)\text{不存在}\iff z_0\text{是}f(z)\text{的本性奇点}$$

定理 *2.2* (**有限极点与零点的关系**):

若$f(z)$在z_0解析，那么z_0为$f(z)$的m阶零点的充要条件为

$$f^{(n)}(z_0)=0\quad(n=0,1,...,m-1),\quad f^{(m)}(z_0)\ne0$$

函数的零点与极点的关系为（可去极点当做解析点看待）:

$$z_0\text{是}f(z)\text{的}m\text{阶极点}\iff z_0\text{是}\frac{1}{f(z)}\text{的}m\text{阶零点}$$

定义 *2.3* (**有限孤立奇点处的留数**):

设z_0是解析函数$f(z)$的有限孤立奇点，把$f(z)$在z_0处的洛朗展开式中的负一次幂的系数C_{-1}称为$f(z)$在z_0处的留数，记作$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}$

易知若z_0为$f(z)$的有限可去奇点，则$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0$

定理 *2.4* (**函数在有限极点处的留数**):

若z_0为$f(z)$的$m(m\in\mathbb{N}_+)$阶极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

其中当$m=1$时，即z_0为简单极点时

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$$

设$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，其中$P(z)$与$Q(z)$在z_0处均解析，

若$P(z_0)\ne0$，z_0为$Q(z)$的一阶零点，则z_0为$f(z)$的一阶极点，且

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

定理 *2.5* (**函数在无穷远点的留数**):

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$$

方法 *2.6* (**使用留数计算复积分**):

设函数$f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点$z_1,z_2,...,z_n$外处处解析，

C是D内包围各奇点的一条正向简单闭曲线，则

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

方法 *2.7* (**使用留数计算实积分：情形 1**):

对于形如$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$的积分，令$z=e^{i\theta},dz=ie^{i\theta}d\theta$，则

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz},\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\text{记}f(z)=R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}$$

设$f(z)$在积分闭路$|z|=1$上无奇点，在$|z|<1$内有n个奇点$z_1,z_2,...,z_n$,

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

方法 *2.8* (**使用留数计算实积分：情形 2**):

对于形如$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$的积分，令

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m},(a_0b_0\ne0,m-n\ge2)$$

其中$Q(z)$在实轴上无零点，记$R(z)$在上半平面内的极点$z_1,z_2,...,z_n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$$

如果$R(x)$为偶函数，则

$$\int_0^{+\infty}R(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$$

方法 *2.9* (**使用留数计算实积分：情形 3**):

对于形如$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx$的积分，当$R(x)$是真分式且在实轴上无零点时，

记$f(z)=R(z)e^{iaz}$，其在上半平面的极点为$z_1,z_2,...,z_n$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos(ax)dx=\mathrm{Re}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin(ax)dx=\mathrm{Im}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]\right)$$

3. Fourier 变换与 Laplace 变换

定理 *3.1* (**傅里叶变换的对称性**):

已知$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)]=\frac{1}{2\pi}F(-t)$$

定理 *3.2* (**傅里叶变换表（补充）**):

$$2u(t)-1=\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow\frac{2}{jw}$$

$$\cos(\omega_0t)\longleftrightarrow\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0t)\longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\delta(t+a)\longleftrightarrow e^{ja\omega}$$

$$\frac{1}{2j}[\delta(t+a)-\delta(t-a)]\longleftrightarrow\sin(a\omega)=\frac{e^{ja\omega}-e^{-ja\omega}}{2j}$$

$$\frac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)]\longleftrightarrow\cos(a\omega)=\frac{e^{ja\omega}+e^{-ja\omega}}{2}$$

定理 *3.3* (**三角函数公式（补充）**):

$$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos(3\alpha)=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

定理 *3.4* (**Parseval 等式**):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

定理 *3.5* (**利用留数计算 Laplace 逆变换**):

设$F(s)$除在半平面$\mathrm{Re}\,s\le c$内有有限个有限孤立奇点$s_1,s_2,...,s_n$外是解析的，且当$s\to\infty$时$F(s)\to0$，则有：$(t>0)$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k]$$

4. 常用积分

4.1. 不定积分（C 省略）

$$\int x\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{l}{n\pi}\left[-x\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+\frac{l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$$

$$\int x\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{l}{n\pi}\left[x\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+\frac{l}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$$

$$\int x^2\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{l}{n\pi}\left\{-x^2\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+\frac{2l}{n\pi}\left[x\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+\frac{l}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\right\}$$

$$\int x^2\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{l}{n\pi}\left\{x^2\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+\frac{2l}{n\pi}\left[x\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)-\frac{l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\right\}$$

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos(bx)+b\sin(bx)]$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[-b\cos(bx)+a\sin(bx)]$$

4.2. 定积分

$$\int_0^l x\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{l^2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$
$$\int_0^l x\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{l^2}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]$$
$$\int_0^l x^2\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{l^3}{n\pi}(-1)^{n+1}+\frac{2l^3}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1]$$
$$\int_0^l x^2\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{2l^3}{(n\pi)^3}(-1)^n$$
$$\int_0^l x\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]dx=\frac{4l^2}{(2n+1)^2\pi^2}(-1)^n$$
$$\int_0^l x\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]dx=(-1)^n\frac{2l^2}{(2n+1)\pi}-\frac{4l^2}{(2n+1)^2\pi^2}$$

5. 分离变量法

5.1. 傅里叶级数

定理 *5.1.1* (**傅里叶级数系数**):

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

定理 *5.1.2* (**形式正弦、形式余弦傅里叶级数系数**):

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$
$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$
$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

5.2. 常见 ODE 解的讨论

情形 *5.2.1* ($\boldsymbol{X''+\lambda X=0}$):

$$X(0)=X(l)=0\Longrightarrow X=\sin\left(\tfrac{k\pi x}{l}\right)$$
$$X'(0)=X(l)=0\Longrightarrow X=\cos\left(\tfrac{(2k+1)\pi x}{2l}\right)$$
$$X(0)=X'(l)=0\Longrightarrow X=\sin\left(\tfrac{(2k+1)\pi x}{2l}\right)$$
$$X'(0)=X'(l)=0\Longrightarrow X=\cos\left(\tfrac{k\pi x}{l}\right)$$

情形 *5.2.2* ($\boldsymbol{x^2y''+a_1xy'+a_2y=f(x)}$):

一般采用换元：$x=e^t,\frac{dy}{dt}=x\frac{dy}{dx}$

对于$x^2y''+a_1xy'+a_2y=0$，可设$y=x^k$代入求解

对于$x^2y''+xy'-n^2y=0$，分以下两种情况:

$$n=0\Longrightarrow y=c_1+c_2\ln x$$
$$n>0\Longrightarrow y=c_1x^{-n}+c_2x^n$$

情形 *5.2.3* ($\boldsymbol{x^2y''+xy'+(\beta^2x^2-n^2)y=0}$):

$$y=c_1J_n(\beta x)+c_2Y_n(\beta x)$$

方法 *5.2.1* (**常数易变法**):

已知其次方程$y''+ay'+by=0$的解是y_1,y_2

那么$y''+ay'+by=f(x)$的特解$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$,其中

$$\begin{cases}c_1'y_1+c_2'y_2=0\\ c_1'y_1'+c_2'y_2'=f\end{cases}$$

也可直接通过下式求出y:

$$y=\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{y_1(t){y_2}'(t)-y_2(t){y_1}'(t)}f(t)dt$$

6. 贝塞尔函数

方法 *6.1* (**在贝塞尔函数系下展开**):

$$f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)$$
$$A_k=\frac{1}{\frac{R^2}{2}J_{n-1}^2\left(\mu_k^{(n)}\right)}\int_0^R rf(r)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)dr$$

常见的展开有:

$$1=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2}{\mu_m^{(0)}J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r\right)$$
$$r^2=\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{2R^2}{\mu_m^{(0)}J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)}-\frac{4R^2J_2\left(\mu_m^{(0)}\right)}{\left(\mu_m^{(0)}\right)^2J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)}\right]J_0\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{2R^2}{\mu_m^{(0)}J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)}-\frac{8R^2}{\left(\mu_m^{(0)}\right)^3J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)}\right]J_0\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)$$

定理 *6.2* (**贝塞尔正交函数系（补充）**):

若$\lambda_i(i=1,2,3,...)$是$J_1(x)$的正零点，则函数系

$$\left\{1,J_0\left(\frac{\lambda_i}{R}x\right):i=1,2,3,...\right\}$$

在$[0,R]$上是带权函数x的完全的正交函数系，且

$$\int_0^R xJ_0\left(\frac{\lambda_i}{R}x\right)J_0\left(\frac{\lambda_j}{R}x\right)dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \frac{R^2}{2}J_0^2(\lambda_i), & i=j\end{cases}$$

定理 *6.3* (**半奇数阶的贝塞尔函数展开式**):

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

定理 *6.4* (**伽马函数的性质**):

$$\Gamma(1)=1,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\frac{1}{\Gamma(-n)}=0,(n\in\mathbb{N})$$
$$\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)\Longrightarrow\Gamma(m+1)=m!,(m\in\mathbb{N})$$

7. 行波法

方法 *7.1* (**半无界弦振动问题：延拓法**):

在$x\geq0,t\geq0$范围内有如下弦振动方程与初值条件:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t)\\ u(x,0)=\varphi(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\end{cases}$$

当$x-at\geq0$时，直接代入达朗贝尔公式即可；当$x-at<0$时:

若补充边界条件$u(0,t)=0$，则对f,φ,ψ进行奇延拓，最终结果为:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(at+x)-\varphi(at-x))+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(\xi)d\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{t-\frac{x}{a}}\int_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x}f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]$$

若补充边界条件$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$，则对$f,\varphi,\psi$进行偶延拓，最终结果为:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(at+x)+\varphi(at-x))+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^{at+x}\psi(\xi)d\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\left\{\int_0^{t-\frac{x}{a}}\left[\int_0^{a(t-\tau)-x}f(\xi,\tau)d\xi+\int_0^{a(t-\tau)+x}f(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau+\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right\}$$

方法 *7.2* (**半无界弦振动问题：行波法**):

在$x\geq0,t\geq0$范围内有如下弦振动方程与初值条件:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\\ u(x,0)=\varphi(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\end{cases}$$

设解为$u=f_1(x+at)+f_2(x-at)$，代入初值条件可得如下方程组:

$$\begin{cases}f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)\\ a({f_1}'(x)-{f_2}'(x))=\psi(x)\end{cases}$$

求解可得到$x\geq0$情形下的$f_1(x),f_2(x)$；接着考虑$x<0$情形下的$f_2(x)$:

若补充边界条件$u(0,t)=h(t)$，则可得到如下方程:

$$f_1(at)+f_2(-at)=h(t)$$

若补充边界条件$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=h(t)$，则可得到如下方程:

$${f_1}'(at)+{f_2}'(-at)=h(t)$$