复变函数计算总结

核 31　　钱昊远　整理

2024 年 11 月 2 日

C-R 方程

函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z = x + iy$ 处可导的充要条件是：$u(x,y)$、$v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，而且满足柯西——黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

幂级数收敛半径

比值法：若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lambda$$

则幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$；

根值法：若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = \lambda$$

则幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$。

常见的泰勒级数

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

上述级数收敛域为 $|z| < 1$，下列级数收敛域为 $|z| < +\infty$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

洛朗级数的展开方法

洛朗级数的展开，一般采用在已知泰勒级数的收敛域内使用泰勒展开的方式展开。常见的方式为：在 $|z-z_0|<R_2$ 内展开

$$(z-z_0)^k\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^l}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{ln}}(z-z_0)^{ln+k}$$

其中 $r\geq R_2,k\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{N}_+$；或在 $|z-z_0|>R_1$ 内展开

$$(z-z_0)^k\frac{1}{1-\left(\frac{r}{z-z_0}\right)^l}=\sum_{n=0}^{\infty}r^{ln}\frac{1}{(z-z_0)^{ln-k}}$$

其中 $0<r\leq R_1,k\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{N}_+$。

孤立奇点的分类

若对一切 $n<0$ 有 $C_n=0$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的可去奇点。此时若令 $f(z_0)=C_0$，可以得到在整个圆盘 $|z-z_0|<\delta$ 内解析的函数 $f(z)$。

若只有有限个（至少一个）整数 $n<0$，使得 $C_n\neq0$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的极点。设对于正整数 m，$C_{-m}\neq0$，而当 $n<-m$ 时，$C_n=0$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶极点，1 阶极点又叫做简单极点。

若有无限个整数 $n<0$，使得 $C_n\neq0$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的本性奇点。

当函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta\,(0<\delta\leq+\infty)$ 内解析时：

$$\begin{gathered}\lim_{z\to z_0}f(z)=C_0\neq\infty\iff z_0\text{ 是 }f(z)\text{ 的可去奇点}\\ \lim_{z\to z_0}f(z)=\infty\iff z_0\text{ 是 }f(z)\text{ 的极点}\\ \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=C_{-m}\neq0\,(m\in\mathbb{N}_+)\iff z_0\text{ 是 }f(z)\text{ 的 }m\text{ 阶极点}\\ \lim_{z\to z_0}f(z)\text{ 不存在}\iff z_0\text{ 是 }f(z)\text{ 的本性奇点}\end{gathered}$$

若 $f(z_0)$ 在 z_0 解析，那么 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点的充要条件为

$$f^{(n)}(z_0)=0\quad(n=0,1,\cdots,m-1),\quad f^{(m)}(z_0)\neq0$$

函数的零点与极点的关系为（可去奇点当做解析点看待）：

$$z_0\text{ 是 }f(z)\text{ 的 }m\text{ 阶极点}\iff z_0\text{ 是 }\frac{1}{f(z)}\text{ 的 }m\text{ 阶零点}$$

若对一切 $n>0$ 有 $C_n=0$，则称 ∞ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点。

若只有有限个（至少一个）整数 $n>0$，使得 $C_n\neq0$，则称 ∞ 是函数 $f(z)$ 的极点。设对于正整数 m，$C_m\neq0$，而当 $n>m$ 时，$C_n=0$，则称 ∞ 是函数 $f(z)$ 的 m 阶极点。

若有无限个整数 $n>0$，使得 $C_n\neq0$，则称 ∞ 是函数 $f(z)$ 的本性奇点。

当函数 $f(z)$ 在 $R<|z|<-\infty\,(R\geq0)$ 内解析时：

$$\begin{gathered}\lim_{z\to\infty}f(z)=C_0\neq\infty\iff\infty\text{ 是 }f(z)\text{ 的可去奇点}\\ \lim_{z\to\infty}f(z)=\infty\iff\infty\text{ 是 }f(z)\text{ 的极点}\\ \lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^m}=C_m\neq0\,(m\in\mathbb{N}_+)\iff\infty\text{ 是 }f(z)\text{ 的 }m\text{ 阶极点}\\ \lim_{z\to\infty}f(z)\text{ 不存在}\iff\infty\text{ 是 }f(z)\text{ 的本性奇点}\end{gathered}$$

留数

设 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的有限孤立奇点，把 $f(z)$ 在 z_0 处的洛朗展开式中的负一次幂的系数 C_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数，记作

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = C_{-1}$$

易知若 z_0 为 $f(z)$ 的有限可去奇点，则 $\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = 0$。

若 z_0 为 $f(z)$ 的 $m\,(m \in \mathbb{N}_+)$ 阶极点，则

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

其中当 $m=1$ 时，即 z_0 为简单极点时，

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0) f(z)\right]$$

设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 均在 z_0 处解析，若 $p(z_0) \neq 0$，z_0 为 $Q(z)$ 的一阶零点，则 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，且

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

设 ∞ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，把 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内的洛朗展开式中的负一次幂的系数的相反数 $-C_{-1}$ 称为 $f(z)$ 在 ∞ 处的留数，记作

$$\operatorname{Res}\left[f(z), \infty\right] = -C_{-1}$$

注意：即使 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点，$\operatorname{Res}\left[f(z), \infty\right]$ 也未必是 0。

无穷远点的留数可以转化为坐标原点的留数：

$$\operatorname{Res}\left[f(z), \infty\right] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}, 0\right]$$

若 $f(z)$ 在扩充复平面上只有有限个孤立奇点（包含无穷远点），记为 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$，则 $f(z)$ 在各点处的留数总和为零。

复积分

设曲线 C 的参数方程为

$$z(t) = x(t) + i(t) \quad (a \le t \le b)$$

则复积分可以转化为普通的定积分

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，且 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

其中 z_0 与 z_1 均为区域 D 内的点。

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，C 是 D 内包围各奇点的一条正向简单闭曲线，则

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]$$

利用留数计算实积分

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ 的积分，令 $z = e^{i\theta}$，$dz = ie^{i\theta}d\theta$ 则

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$

此时

$$R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz}$$

当 θ 经历变程 $[0, 2\pi]$ 时，对应的 z 正好沿单位圆 $|z| = 1$ 的正向绕行一周。记

$$f(z) = R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{1}{iz}$$

$f(z)$ 在积分闭路 $|z| = 1$ 上无奇点，在 $|z| < 1$ 内有 n 个奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，则

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]$$

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ 的积分，令

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m} \quad (a_0 b_0 \neq 0, m - n \geq 2)$$

其中 $Q(z)$ 在实轴上无零点，记 $R(z)$ 在上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 内的极点为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[R(z), z_k\right]$$

如果 $R(z)$ 为偶函数，则

$$\int_0^{+\infty} R(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[R(z), z_k\right]$$

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,e^{iax}dx\ (a > 0)$ 的积分，当 $R(x)$ 是真分式且在实轴上无奇点时，记 $f(z) = R(z)\,e^{iaz}$，其在在上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 内的极点为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]$$

同时可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(ax)\,dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(ax)\,dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]\right)$$