复变函数期中复习

核 31　　钱昊远　整理

2024 年 11 月 2 日

1　复数

1.1　复数的表示与运算

复数的表示

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

其中 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为复数 z 的模，$\theta = \mathrm{Arg}\ z$ 为复数 z 的辐角，用 $\arg z$ 表示 z 的主辐角（$-\pi < \arg z \leq \pi$），$\mathrm{Arg}\ z = \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$。

棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

n 次方根

若 $w^n = z$，则

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos\left[\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)\right] + i\sin\left[\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)\right] \right\}$$

其中 $k = 0, 1, \ldots, n-1$。

1.2　平面点集与平面曲线

邻域

平面点集的类型

区域与闭区域

简单闭曲线

1.3　无穷大与复球面

无穷大

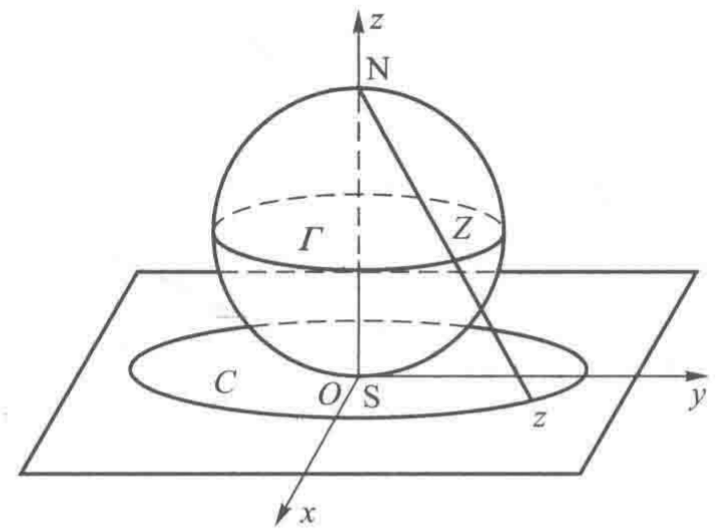
可以定义一个特殊的复数——无穷大：

$$\infty = \frac{1}{0}$$

扩充复平面

可设想复平面上有一理想点与 ∞ 相对应，此点称为无穷远点，复平面加上无穷远点称为扩充复平面。即 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。

复球面



2 复变函数

2.1 基本知识

定义、单值函数、多值函数

像与原像（参见课本第六章）

极限、连续性

2.2 解析函数

导数与微分

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内有定义，$z_0 + \Delta z$ 是邻域内任一点，若

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在有限的极限值 A，则称 $f(z)$ 在 z_0 处可导，记作

$$f'(z_0) = \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = A$$

也称

$$df(z_0) = f'(z_0)\, dz$$

为 $f(z)$ 在 z_0 处的微分，故也称 $f(z)$ 在 z_0 点可微。

解析

若 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析；若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或者说 $f(z)$ 是 D 内的解析函数。若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点。

$$f(z)\text{ 在 } z_0 \text{ 处解析} \Longrightarrow f(z)\text{ 在 } z_0 \text{ 处可导}$$
$$f(z)\text{ 在区域 } D \text{ 内解析} \Longleftrightarrow f(z)\text{ 在区域 } D \text{ 内处处可导}$$

解析函数求导的四则运算法则与链式法则略，反函数的求导法则如下：设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析且 $f'(z)\neq 0$，又反函数 $z=f^{-1}(w)=\varphi(w)$ 存在且连续，则

$$\varphi'(w)=\left.\frac{1}{f'(z)}\right|_{z=\varphi(w)}=\frac{1}{f'(\varphi(w))}$$

C-R 方程

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z=x+iy$ 处可导的充要条件是：$u(x,y)$、$v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，而且满足柯西——黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

在此条件下：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial v}$$

也可记忆为：

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

调和函数

若二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数，且满足二维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数，或说函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内调和。

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 都是区域 D 内的调和函数。

设函数 $\varphi(x,y)$ 及 $\psi(x,y)$ 均为区域 D 内的调和函数，且满足 C-R 方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

则称 ψ 是 φ 的共轭调和函数。（$-\varphi$ 是 ψ 的共轭调和函数）

复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是在区域 D 内，$f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$ 是实部 $u(x,y)$ 的共轭调和函数。

2.3 初等函数

指数函数

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$$

指数函数 $f\left(z\right)=e^z$ 有如下性质：

指数函数是单值函数。

指数的运算法则（与实数的相同）：

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$$

e^z 在全平面解析，且

$$\left(e^z\right)'=e^z$$

由 $e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}$ 可知

$$|e^z|=e^x,\quad \mathrm{Arg}\ e^z=y+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$$

故 $\forall z\in\mathbb{C}$，都有 $e^z\neq 0$。又可得 e^z 是以 $2k\pi i(k\in\mathbb{Z},k\neq 0)$ 为周期的函数。

e^z 当 z 趋于 ∞ 时没有极限。

对数函数

满足方程 $e^w=z\left(z\neq 0\right)$ 的函数 $w=f\left(z\right)$ 称为对数函数，

$$w=\mathrm{Ln}\ z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\ z\quad(z\neq 0)$$

对数函数 $f\left(z\right)=\mathrm{Ln}\ z$ 有如下性质：

因为 $\mathrm{Arg}\ z$ 是多值函数，故对数函数是多值函数，且每两个值相差 $2k\pi$ 的整数倍。如果规定 $\mathrm{Arg}\ z$ 取主值 $\arg z$，就得到 $\mathrm{Ln}\ z$ 的一个单值“分支”，记作

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

并把它称为 $\mathrm{Ln}\ z$ 的主值。而其余各个值可由

$$\mathrm{Ln}\ z=\ln z+2k\pi i\quad(k\in\mathbb{Z},k\neq 0)$$

表达，对于每一个固定的 k，上式为一单值函数，称为 $\mathrm{Ln}\ z$ 的一个分支。

对数的运算法则：（注意是 Ln 而不是 ln）

$$\mathrm{Ln}\left(z_1z_2\right)=\mathrm{Ln}\ z_1+\mathrm{Ln}\ z_2$$

$$\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}\ z_1-\mathrm{Ln}\ z_2$$

注意：$\mathrm{Ln}\ z^n=n\mathrm{Ln}\ z\left(n\in\mathbb{N}_+,n>1\right)$ 不再成立。这本质上是因为 $\sum_{i=1}^n\mathrm{Ln}\ z=n\mathrm{Ln}\ z$ 不成立，前者的两个相邻分支相差 $2\pi i$，后者的两个相邻分支相差 $2n\pi i$。

$\ln z$ 在除去原点及负实轴的复平面上解析，且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

$\mathrm{Ln}\ z$ 的各分支在除去原点及负实轴的复平面上也解析，且有相同的导数值。（若更改 $\arg z$ 的定义，可以改变 $\mathrm{Ln}\ z$ 的解析范围。）

幂函数

函数 $w = z^\alpha$ 规定为

$$z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln}\ z} \quad (\alpha \in \mathbb{C}, z \neq 0)$$

当 α 为正实数且 $z = 0$ 时，规定 $z^\alpha = 0$

幂函数在不同的 α 值的情况下取值有所差异，详见课本。

$w = z^\alpha$（的相应分支）在除原点和负实轴的复平面内是解析的，

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha - 1}$$

三角函数

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

注：当 z 为实数时，该定义与实数范围内的三角函数定义等价。其余的三角函数可由 $\cos z$ 与 $\sin z$ 导出，此处不再列出。

余弦函数 $\cos z$ 和正弦函数 $\sin z$ 的性质如下：

正余弦函数的许多性质（单值性、周期性、奇偶性、运算法则）与实数范围内的相同。特别的，$|\sin z| \leq 1$ 与 $|\cos z| \leq 1$ 在复数范围内不再成立，且 $\sin z$ 与 $\cos z$ 都是无界的。

正余弦函数在复平面上解析，

$$(\cos z)' = -(\sin z) \qquad (\sin z)' = (\cos z)$$

反三角函数

双曲函数与反双曲函数

3 级数

3.1 复数项级数与复变函数项级数

复数项级数

设 $\{z_n\}\,(n = 1, 2, \cdots)$ 为一复数序列，表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

称为复数项无穷级数。若它的部分和序列

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} z_k=z_1+z_2+\cdots+z_n$$

有极限 $\lim_{n\to\infty} S_n=S$（S 为有限复数），则称级数是收敛的，S 称为级数的和；若不然，则称级数是发散的。

复数项级数的部分和序列

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} z_k=\sum_{k=1}^{n} x_k+i\sum_{k=1}^{n} y_k$$

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 都收敛。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件为

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=0$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛。如果 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 不收敛，称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛。

复变函数项级数

设 $\{f_n(z)\}$ 为区域 D 内的函数，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

为区域 D 内的复变函数项级数。该级数的前 n 项和

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$$

称为级数的部分和。

设 z_0 为区域 D 内的一点，若 $\lim_{n\to\infty} S_n(z_0)=S(z_0)$ 存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 处是收敛的，此时 $S(z_0)$ 就是它的和，即 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)=S(z_0)$。若级数在 D 内处处收敛，则级数的和就是 D 内的一个函数 $S(z)$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=S(z)$$

3.2 幂级数

幂级数定义

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n=C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\cdots+C_n(z-z_0)^n+\cdots$$

的复变函数项级数称为幂级数。其中 $C_n\,(n=0,1,2,\cdots)$ 与 z_0 均为复常数。

阿贝尔定理

若幂级数在点 $z_1\,(z_1 \neq z_0)$ 处收敛，则级数在圆域 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 内绝对收敛。

若幂级数在点 $z_2\,(z_2 \neq z_0)$ 处发散，则满足 $|z-z_0|>|z_2-z_0|$ 的点 z 使级数发散。

收敛半径

若存在一个有限正数 R，使得 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n$ 在圆周 $|z-z_0|=R$ 内绝对收敛，在圆周 $|z-z_0|=R$ 的外部发散，则 R 称为此幂级数的收敛半径。特别的，若对任意的 $z \neq z_0$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n$ 均发散，则 $R=0$；若对任意的 z，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n$ 均收敛，则 $R=\infty$。

比值法：若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lambda$$

则幂级数的收敛半径 $R=\frac{1}{\lambda}$；

根值法：若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\lambda$$

则幂级数的收敛半径 $R=\frac{1}{\lambda}$。

运算法则

同实变量幂级数一样，复变量幂级数也能进行加、减、乘、代换等运算，且在收敛圆内部，幂级数的和是一个解析函数，可以逐项求导及逐项积分任意次。

3.3 泰勒级数

泰勒定理

设函数 $f\,(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内的一点，R 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，则当 $|z-z_0|<R$ 时，$f\,(z)$ 可展为幂级数

$$f\,(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n$$

其中 $C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}\,(z_0)\,,\quad n=0,1,2,\cdots$

函数在一点解析的充要条件是它在这点的邻域内可以展开为幂级数。

常见的泰勒级数

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

上述级数收敛域为 $|z|<1$，下列级数收敛域为 $|z|<+\infty$

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}z^n=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$$

3.4 洛朗级数

洛朗定理

设函数 $f(z)$ 在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内处处解析，则 $f(z)$ 一定能在此圆环域中展开为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

其中

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\quad(n\in\mathbb{Z})$$

而 C 为此圆环域内绕 z_0 的任一简单闭曲线。注意：不能将 C_n 写成 $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，因为 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R_1$ 内不一定处处解析。

洛朗级数中的正整次幂部分称为解析部分，其在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛；负整次幂部分称为主要部分，其在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛。

洛朗级数的展开方法

洛朗级数的展开，一般采用在已知泰勒级数的收敛域内使用泰勒展开的方式展开。常见的方式为：在 $|z-z_0|<R_2$ 内展开

$$(z-z_0)^k\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^l}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{ln}}(z-z_0)^{ln+k}$$

其中 $r\ge R_2,k\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{N}_+$；或在 $|z-z_0|>R_1$ 内展开

$$(z-z_0)^k\frac{1}{1-\left(\frac{r}{z-z_0}\right)^l}=\sum_{n=0}^{\infty}r^{ln}\frac{1}{(z-z_0)^{ln-k}}$$

其中 $0<r\le R_1,k\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{N}_+$。

4 留数

4.1 孤立奇点与零点

有限孤立奇点的定义

若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析，但在 z_0 的某一个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

在孤立奇点 $z=z_0$ 的去心邻域内，函数 $f(z)$ 可展开为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

函数在 z_0 处的奇异性质完全体现在洛朗级数的负整次幂部分，即主要部分。

有限孤立奇点的分类

若对一切 $n<0$ 有 $C_n=0$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的可去奇点。此时若令 $f(z_0)=C_0$，可以得到在整个圆盘 $|z-z_0|<\delta$ 内解析的函数 $f(z)$。

若只有有限个（至少一个）整数 $n<0$，使得 $C_n\neq 0$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的极点。设对于正整数 m，$C_{-m}\neq 0$，而当 $n<-m$ 时，$C_n=0$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶极点，1 阶极点又叫做简单极点。

若有无限个整数 $n<0$，使得 $C_n\neq 0$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的本性奇点。

当函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta\,(0<\delta\leq+\infty)$ 内解析时：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=C_0\neq\infty \iff z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的可去奇点}$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \iff z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的极点}$$
$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z)=C_{-m}\neq 0\,(m\in\mathbb{N}_+) \iff z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的 } m \text{ 阶极点}$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) \text{ 不存在} \iff z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的本性奇点}$$

有限极点与零点的关系

若 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)\quad(m\in\mathbb{N}_+)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 处解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。一个不恒为零的解析函数的零点是孤立的。

若 $f(z_0)$ 在 z_0 解析，那么 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点的充要条件为

$$f^{(n)}(z_0)=0\quad(n=0,1,\cdots,m-1),\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

函数的零点与极点的关系为（可去奇点当做解析点看待）：

$$z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的 } m \text{ 阶极点} \iff z_0 \text{ 是 } \frac{1}{f(z)} \text{ 的 } m \text{ 阶零点}$$

无穷远点

设函数 $f(z)$ 在无穷远点的邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则无穷远点 ∞ 称为 $f(z)$ 的孤立奇点。

在 $R<|z|<+\infty$ 内，$f(z)$ 有洛朗级数展开式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}\quad(R<|z|<+\infty)$$

其中 $\sum_{n=-\infty}^{0} C_n z^n$ 为解析部分，$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 为主要部分。

若对一切 $n>0$ 有 $C_n=0$，则称 ∞ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点。

若只有有限个（至少一个）整数 $n>0$，使得 $C_n\neq 0$，则称 ∞ 是函数 $f(z)$ 的极点。设对于正整数 m，$C_m\neq 0$，而当 $n>m$ 时，$C_n=0$，则称 ∞ 是函数 $f(z)$ 的 m 阶极点。

若有无限个整数 $n>0$，使得 $C_n\neq 0$，则称 ∞ 是函数 $f(z)$ 的本性奇点。

当函数 $f(z)$ 在 $R<|z|<-\infty\,(R\geq 0)$ 内解析时：

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = C_0 \neq \infty \iff \infty \text{ 是 } f(z) \text{ 的可去奇点}$$
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \iff \infty \text{ 是 } f(z) \text{ 的极点}$$
$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^m} = C_m \neq 0\,(m \in \mathbb{N}_+) \iff \infty \text{ 是 } f(z) \text{ 的 } m \text{ 阶极点}$$
$$\lim_{z\to\infty} f(z) \text{ 不存在} \iff \infty \text{ 是 } f(z) \text{ 的本性奇点}$$

4.2 留数的定义与计算

有限孤立奇点处留数的定义

设 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的有限孤立奇点，把 $f(z)$ 在 z_0 处的洛朗展开式中的负一次幂的系数 C_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数，记作

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = C_{-1}$$

易知若 z_0 为 $f(z)$ 的有限可去奇点，则 $\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = 0$。

函数在有限极点的留数

若 z_0 为 $f(z)$ 的 $m\,(m \in \mathbb{N}_+)$ 阶极点，则

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

其中当 $m=1$ 时，即 z_0 为简单极点时，

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0) f(z)\right]$$

设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 均在 z_0 处解析，若 $P(z_0) \neq 0$，z_0 为 $Q(z)$ 的一阶零点，则 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，且

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

函数在无穷远点的留数

设 ∞ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，把 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内的洛朗展开式中的负一次幂的系数的相反数 $-C_{-1}$ 称为 $f(z)$ 在 ∞ 处的留数，记作

$$\mathrm{Res}\left[f(z), \infty\right] = -C_{-1}$$

注意：即使 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点，$\mathrm{Res}\left[f(z), \infty\right]$ 也未必是 0。

无穷远点的留数可以转化为坐标原点的留数：

$$\mathrm{Res}\left[f(z), \infty\right] = -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

若 $f(z)$ 在扩充复平面上只有有限个孤立奇点（包含无穷远点），记为 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$，则 $f(z)$ 在各点处的留数总和为零。

5 复积分

5.1 复积分的定义与性质

复积分的定义（见课本）

复积分的基本计算方法

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ （u、v 均为实变函数）在光滑曲线 C 上连续，则复积分 $\int_C f(z)\,dz$ 存在，且

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C (udx-vdy)+i\int_C (vdx+udy)$$

这样就把复积分转化为了两个二元实变函数的线积分。

设曲线 C 的参数方程为

$$z(t)=x(t)+i(t)\quad (a\le t\le b)$$

则复积分可以转化为普通的定积分

$$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

一个重要的复积分：

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

其中 $n\in\mathbb{Z}$，C 为以 z_0 为中心，r 为半径的圆周。（注：实际上 C 只要是环绕 z_0 的简单闭曲线即可）

复积分的基本性质

复积分有以下基本性质：

1. $\int_C kf(z)\,dz=k\int_C f(z)\,dz$，其中 k 为复常数；
2. $\int_C f(z)\,dz=-\int_{C^-} f(z)\,dz$；
3. $\int_C [f(z)\pm g(z)]\,dz=\int_C f(z)\,dz\pm\int_C g(z)\,dz$；
4. $\int_C f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz$，其中 $C=C_1+C_2$；
5. $\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le\int_C |f(z)|\,|dz|$。

柯西积分定理

设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内沿任意一条简单闭曲线 C 的积分

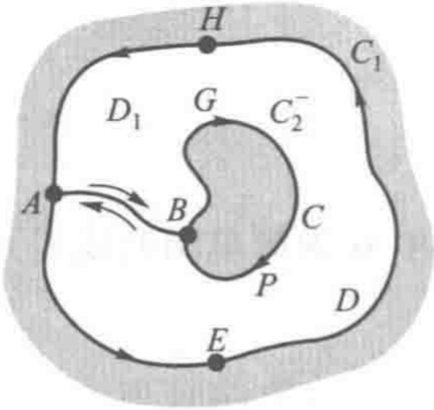
$$\int_C f(z)\,dz=0$$

如果 C 是区域 D 的边界，$f(z)$ 在 D 内解析，在闭区域 $\overline{D}$ 上连续，那么柯西积分定理依然成立。

闭路变形原理

设 C_1 与 C_2 是两条简单闭曲线，C_2 在 C_1 的内部，$f(z)$ 在 C_1 与 C_2 所围的多连通区域 D 内解析，而在 $\overline{D} = D + C_1 + C_2^-$ 上连续，则

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$



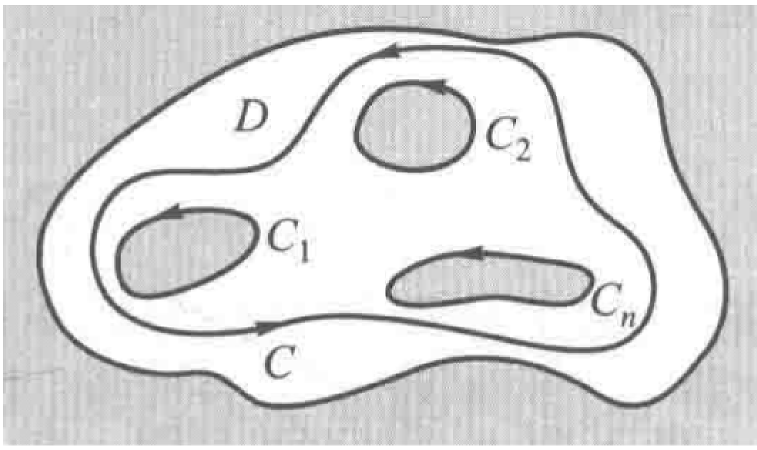
上式说明，在区域内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值。这一事实称为闭路变形原理。

复合闭路定理：设 C 为多连通区域 D 内的一条简单闭曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线，它们互不包含也互不相交，并且以 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为边界的区域全含于 D，如果 $f(z)$ 在 D 内解析，则

$$\oint_{C} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz$$

记 Γ 为由 C 及 $C_k^-\,(k = 1, 2, \cdots, n)$ 所组成的复合回路，则

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$



5.2 使用原函数积分

积分与路径无关

设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，z_0 与 z_1 为 D 内任意两点，C_1 与 C_2 为连接 z_0 与 z_1 的积分路线，且 C_1 与 C_2 都含于 D，则

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

此时任取 D 内从 z_0 到 z_1 的简单曲线 C，则积分 $\int_C f(z)\,dz$ 只与 C 的起点 z_0 和终点 z_1 有关，而与 C 的路径无关，这种积分可以写成

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$$

并把 z_0 和 z_1 分别称为积分的下限和上限。

原函数

设在单连通区域 D 内，函数 $F(z)$ 恒满足条件 $F'(z) = f(z)$，则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的原函数。若 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的原函数，则对于任意复常数 C，$F(z) + C$ 也是 $f(z)$ 的原函数。

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，且 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

其中 z_0 与 z_1 均为区域 D 内的点。

5.3 柯西积分公式及其推论

柯西积分公式

设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D 内解析，在 $\overline{D} = D \cup C$ 上连续，z_0 是 D 内任意一点，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

把 z_0 当作变数看待，则可以写成

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

在多连通域内的柯西积分公式

设 $f(z)$ 在由简单闭曲线 C_1, C_2 所围成的多连通区域 D 内解析，在 $\overline{D} = C_1 + C_2 + D$ 上连续，C_2 在 C_1 的内部，z_0 是 D 内任意一点，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

平均值公式

设 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内解析，在 $|z - z_0| \le R$ 内连续，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) d\theta$$

最大模原理与最小模原理

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，又 $f(z)$ 不是常数，则 $|f(z)|$ 在 D 内没有最大值。

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且恒不为零，又 $f(z)$ 不是常数，则 $|f(z)|$ 在 D 内没有最小值。

5.4 解析函数的高阶导数

n 阶导数公式

设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D 内解析，而在 $\overline{D}=D\cup C$ 上连续，则 $f(z)$ 的各阶导数均在 D 内解析，对 D 内任意一点 z，有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\quad(n\in\mathbb{N}_+)$$

柯西不等式

设函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，又 $|f(z)|\le M$ 在 $|z-z_0|<R$ 内恒成立，则

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!M}{R^n}\quad(n\in\mathbb{N}_+)$$

刘维尔定理

设函数 $f(z)$ 在全平面上为解析且有界，则 $f(z)$ 为一常数。

5.5 利用留数计算复积分

留数的定义与闭合环路积分的关系

若函数 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内解析，则

$$\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$

其中 C 为 z_0 的上述去心邻域内环绕 z_0 的简单闭曲线。

类似的，设 ∞ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，即 $f(z)$ 在圆环域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,dz\quad(C:|z|=\rho>R)$$

留数定理

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析，C 是 D 内包围各奇点的一条正向简单闭曲线，则

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right]$$

5.6 利用留数计算实积分

情形 1：形如 $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$ 的积分

令 $z=e^{i\theta}$，$dz=ie^{i\theta}d\theta$ 则

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz},\quad\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

此时

$$R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta=R\left(\frac{z^2-1}{2iz},\frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz}$$

当 θ 经历变程 $[0,2\pi]$ 时，对应的 z 正好沿单位圆 $|z|=1$ 的正向绕行一周。记

$$f(z)=R\left(\frac{z^2-1}{2iz},\frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{1}{iz}$$

$f(z)$ 在积分闭路 $|z|=1$ 上无奇点，在 $|z|<1$ 内有 n 个奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，则

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta=\oint_{|z|=1}f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

情形 2：形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,dx$ 的积分

令

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}\quad(a_0b_0\neq0,m-n\geq2)$$

其中 $Q(z)$ 在实轴上无零点，记 $R(z)$ 在上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 内的极点为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[R(z),z_k]$$

如果 $R(z)$ 为偶函数，则

$$\int_0^{+\infty}R(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,dx=\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[R(z),z_k]$$

附：如果 $Q(z)$ 只比 $P(z)$ 高一次，在柯西主值意义下，可以将 $P(z)$ 中最高次项分离出来，并形成一个奇函数（或实变函数意义下的中心对称），其从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分值为零。

情形 3：形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,e^{iax}dx\,(a>0)$ 的积分

当 $R(x)$ 是真分式且在实轴上无奇点时，记 $f(z)=R(z)\,e^{iaz}$，其在在上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 内的极点为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,e^{iax}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

同时可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos(ax)\,dx=\operatorname{Re}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin(ax)\,dx=\operatorname{Im}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]\right)$$

附：情形 2、3 在实轴上有有限个简单极点的情况

若 $R(z)$ 在实轴上只有有限个简单极点，可以将这些简单极点的留数值的一半计入求和。此方法可以通过以下引理证明：

取充分小的 r，设 $f(z)$ 沿圆弧 $C_r:z-z_0=re^{i\theta}\,(\theta_1\leq\theta\leq\theta_2)$ 上连续，且

$$\lim_{r\to0}(z-z_0)\,f(z)=\lambda$$

于 C_r 上一致成立，则有

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r}f(z)\,dz=i(\theta_2-\theta_1)\,\lambda$$