A题Grid简单题解

题目大意

给出n*m大小的棋盘和p个有特殊性质的互不相交的矩形障碍物，问两两非障碍物格子之间的最短距离和。

P个矩形的性质：二维和一维都不相交，映射到x轴（或y轴）的相邻距离>=1

解法

找规律计数题。

先考虑所有障碍物1*1的情况。

发现只有一种情况不是理想最短，即两个格子同行或者同列并且中间有障碍物，这样会绕路。

由于题目的性质，其他所有情况都是理想最优。

解法

先求两两格子理想最短距离和。

减去一个矩形障碍物和它外面的格子的两两距离。

多减的要加回来。

最后再加上之前说的那一种绕路情况的距离。

注意分类讨论加起来就可以了，线性复杂度O(n)离散化O(nlogn)。

B 切切糕 solution

清华大学 何昊天

2020 年 12 月 12 日

题意简介

两个人分 N 块切糕（切糕大小两人都已知），按照如下流程进行：

- 第一个人任选一块切糕切成两个部分
- 第二个人决定是否要先选一部分，先选的权力有使用次数限制
- 重复上述步骤，直到所有切糕都分完

在两人都足够聪明（即尽可能让自己获得更多切糕）的情况下，询问第一个人最终能得到的切糕总大小是多少

基本思路

考虑最简单的模型：只有 1 块切糕，一个人切、另一个人先选，则切的人会选择将切糕平分，最终两个人都能获得这块切糕的一半

在这个模型中，其实第一个人的策略是选择一种巧妙的切法，使得无论第二个人使不使用优先权力，其得到的切糕总量都是相同的，设 $f[i][j]$ 表示切到第 i 块切糕、第二个人剩余 j 次优先权时，第二个人能够获得的切糕量，$a[i]$ 表示被切的第 i 块切糕的大小，则第一个人会将这块切糕切成 $x, a[i]-x(x \geq a[i]-x)$ 两部分，使得：

$$x + f[i+1][j-1] = a[i] - x + f[i+1][j]$$

通过上面这个方程也不难发现，第一个人会选择先切大小较小的切糕，因此可以先对切糕从小到大排序，然后用 DP 进行计算

例外情况

注意到上一页的方法有一个缺陷：直接利用方程解出来的 x 可能是超过 $a[i]$ 的，换句话说，第一个人需要将切糕切出一份负数的才能使得这个策略进行，但这显然是不合法的

从第二个人的角度来考虑，如果可以切出负数，根据是否使用优先权得到的切糕总量相同这一性质，不使用优先权拿走大小为负的切糕也是最优策略之一，如果不能切出负数，那么第二个人不使用优先权拿到的会是大小为 0 的切糕，这对第二个人是更优的，所以碰到这种情况则第二个人直接不使用优先权即可

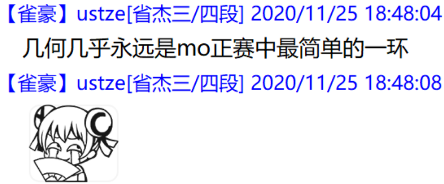
C 非欧几何 solution

清华大学 何昊天

2020 年 12 月 12 日

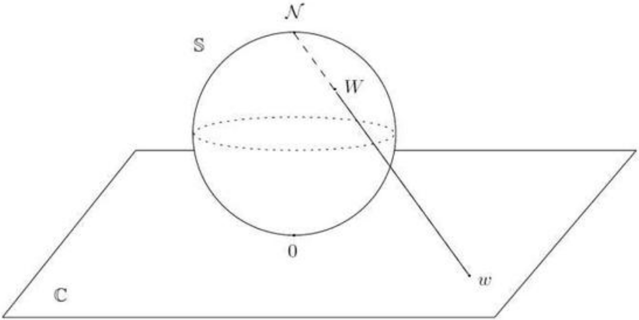
ustze 帅照

感谢 ustze 为本题贡献主角 id!



题意简介

给定球面上的两组圆（每个圆都经过北极点，且一定不会经过南极点），其中一组圆的并称为安全区域，另一组圆的并称为危险区域，再给出球面上若干个点，询问每个点是否在安全区域内和危险区域内



基本思路

我们考虑一个基本模型：设球面的半径为 1，然后将球心搬到 $(0,0,1)$ 处，则球面的方程为 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$，球面上的一个圆可以当成该圆所在平面和球面的交线，附加一个平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 即可表示这个圆

对球面上一个非北极点的点 (x,y,z)，将该点与北极点连线延长后与 xOy 平面会交于唯一一个点，我们记后者在 xOy 平面上的坐标为 (u,v)，根据相似三角形的相关性质可以推导出如下变换关系式：

$$\begin{cases} x=\frac{4u}{4+u^2+v^2} \\ y=\frac{4v}{4+u^2+v^2} \\ z=\frac{2u^2+2v^2}{4+u^2+v^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{2x}{2-z} \\ v=\frac{2y}{2-z} \end{cases}$$

我们称这个变换为球极投影，因为除了北极点外球面上的点都能和平面上的点一一对应，所以我们可以把整个问题通过这个变换转移到平面上来解决

球极投影的性质

考虑将平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 通过变换映射到 xOy 平面上，可得 $(2C+D)(u^2+v^2)+4Au+4Bv+4D=0$，当 $2C+D=0$ 时（此时原平面恰好过北极点）这是平面上的直线方程，换言之球极投影将球面上的圆周变成了 xOy 上的直线

注意到题意中所有的圆都不包含南极点，且球极投影之后南极点变为原点，因此每个球面上的圆对应 xOy 上包含原点的半平面，不在一组圆的并内可以转换成不在这些半平面的交里，因此这个问题变成了一个半平面交问题

剩余的问题都是计算几何基础问题，此处不再赘述

区间众数

By nzhtl1477

良心题

题意

- 查询区间有多少长度为奇数的子区间，满足其众数为区间中间那个位置的下标（不是下标位置的值）

性质

- 定义“可行区间”为一个长度为奇数的区间[l,r]，满足(l+r)/2为[l,r]的众数
- 以一个位置x为中心，假设有y个i满足a[i]==x，则最多有y段极长的区间[l_j,r_j]满足对任意k在[l_j,r_j]中，[x-k,x+k]是可行区间

证明

- 考虑从中心开始向外拓展，当前从[x-(i-1),x+(i-1)]拓展至[x-i,x+i]
- 若a[x-i]与a[x+i]均不为x，且[x-(i-1),x+(i-1)]不是可行区间，则[x-i,x+i]一定不是可行区间
- 所以对x，将所有a[i]==x的i变换为|x-i|后排序为一个数组b，在相邻两个元素b_j与b_{j+1}之间只可能有一个k满足[x-k,x+k]是可行区间，[x-(k+1),x+(k+1)]不为可行区间

性质

- 以一个位置x为中心，假设有y个i满足a[i]==x，则最多有y段极长的可行区间[l_j,r_j]满足对任意k在[l_j,r_j]中，[x-k,x+k]是可行区间
- 所有值的出现次数和为n，故最多有n段极长的可行区间

第一部分

- 如何计算出所有可行的区间?
- 已知有三种O(nsqrtn)的算法，这里讲解一种常数最好而且最简单的

第一部分

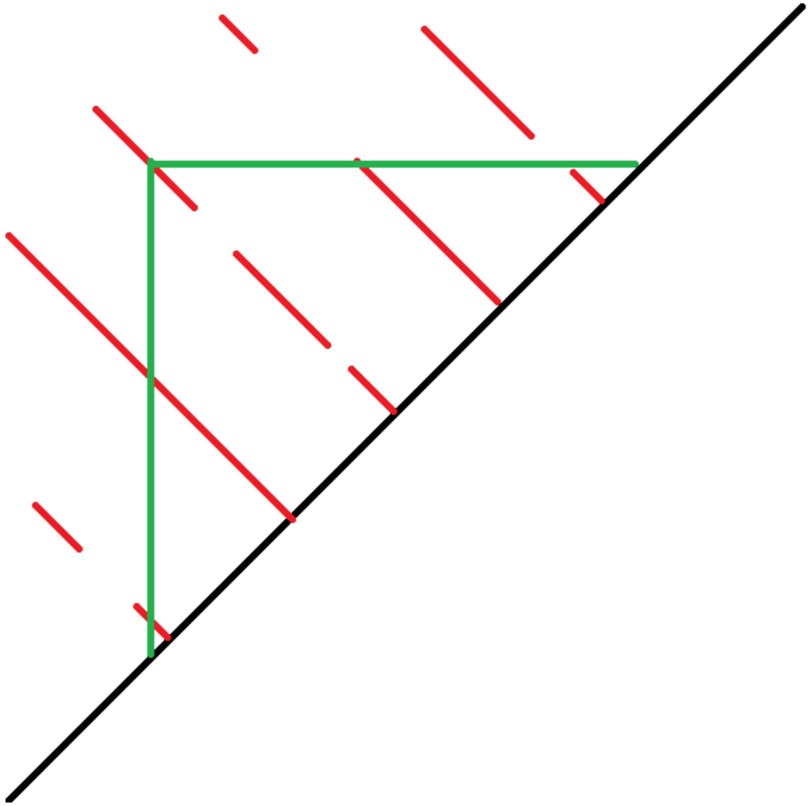
- 考虑对每个值出现次数进行根号分治
- 如果一个值x出现次数>sqrtn，这样的x有O(sqrtn)个，对于每个x，可以以其为中心暴力拓展出所有可行区间，时间复杂度为O(n)单次，总时间复杂度O(nsqrtn)

第一部分

- 对于出现次数<sqrtn的数，扫描线扫i=1->n，维护对每一个j=1->sqrtn，对应最小的k满足[i-k,i+k]中众数的出现次数为j
- 扫到具体的i时，算出之前提到的b数组后把b数组与这个k的数组进行归并，即可以得到每段极长的可行区间
- 扫描线从i移动至i+1时，对于每个j，其所对应的k以及区间的变化量为O(1)，故总时间复杂度为O(nsqrtn)

第二部分

- 当计算出所有极长段后，如何求每个区间的子区间个数?
- 问题转换为一个如图所示的数点问题，数绿色部分中红色线段总长度
- 存在多种实现方法
- 可以用树状数组O(logn)实现



第二部分

- 综上所述这题可以做到O(nsqrtn+q)的时间复杂度
- 题解中的方法可以做到3.5s通过，数据有比例调参针对这个方法

Fact

- 实际上因为区间众数可以O(n^1.49)做，所以每次暴力二分+区间众数可以做到O(n^1.49+q)，这个看起来非常暴力的做法是目前理论上更优的解，只是not practical

区间矩阵乘法

By ccz181078

良心题

Solution

$$\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{j=0}^{d-1}\sum_{k=0}^{d-1} a_{p_1+d\cdot i+j}\cdot a_{p_2+d\cdot j+k}$$
$$=\sum_{j=0}^{d-1}\left(\sum_{i=0}^{d-1} a_{(p_1+j)+d\cdot i}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{d-1} a_{(p_2+d\cdot j)+k}\right)$$

左边是公差 $d=O(\sqrt{n})$ 的等差数列对应位置的区间和，右边是区间和，可以预处理每个公差的前缀和，询问时只需枚举 j，时间复杂度 $O\left((n+m)\sqrt{n}\right)$。

QwQ

- 这题开了std三倍时限，不知道为什么有人觉得会卡常qwq

F

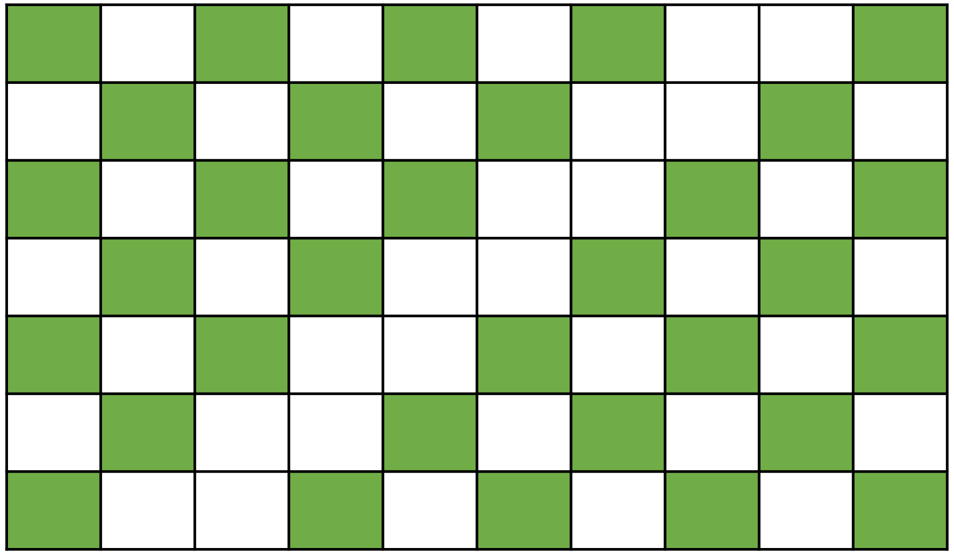
- N行M列
- A[i] = 第i列的棋子数量
- 棋子之间不能边相邻
- 一定有a[i]<= ceil(n/2)
- 当n是偶数时，一定有解（将棋盘黑白染色，然后只在黑格里放棋子）
- N是奇数？？

N是奇数

- 如果a[i]=(n+1)/2，那么这一列的棋子摆放方案是唯一确定的。
- 用这些列将棋盘划分成若干个互相不影响的部分，分别解决。于是现在可以假设a[1]=a[m]=(n+1)/2，a[i]<=(n-1)/2（i=2,3,…,m-1)
- 如果m是奇数，那么一定有解。（和之前类似黑白染色就行）
- 如果m是偶数？？？

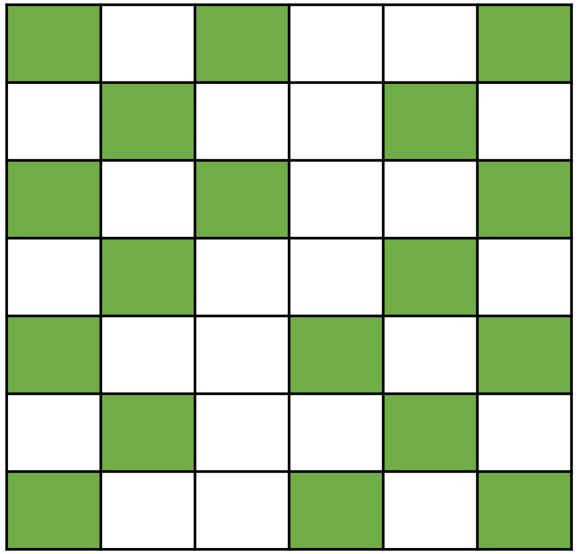
一个例子

- M = 10,
- N=7
- A[1..10] = [4,3,3,3,3,3,3,3,3,4]



另一个例子

- M = 6,
- N=7
- A[1..10] = [4,3,2,2,3,4]



贪心策略?

- $(a[1]=a[m]=(n+1)/2$, m是偶数)
- 给棋盘黑白染色，设$b[i]$为第i列的黑格里的棋子总数，$w[i]$为第i列的白格里的棋子总数$(w[i]=a[i]-b[i])$。于是$w[1]=0$, $w[m] = (n+1)/2$
- 对偶数i，显然有
- $w[i] <= (n+1)/2 – b[i-1]=(n+1)/2+w[i-1]-a[i-1]$， 以及
- $w[i+1]<=(n-1)/2 – b[i]=(n-1)/2+w[i]-a[i]$
- 从左到右摆，每次想让w尽可能大!
- 黑格从上往下摆，白格从下往上摆，就

可以取到上界了。

黑	白	黑	白	黑	白	黑	白	黑	白
白	黑	白	黑	白	黑	白	黑	白	黑
黑	白	黑	白	黑	白	黑	白	黑	白
白	黑	白	黑	白	黑	白	黑	白	黑
黑	白	黑	白	黑	白	黑	白	黑	白
白	黑	白	黑	白	黑	白	黑	白	黑
黑	白	黑	白	黑	白	黑	白	黑	白

G. 密集子图

- 令d(i)表示生成的子图中点1到点i的最短路。对于图中的任意一点点i，连向点i的边有以下限制：
- [1] 满足 d(j) <= d(i) - 2 的点j不能向点i连边
- [2] 满足 d(j) = d(i) - 1 的点j可以向点i连边，且满足此条件的点集至少需向点i连出一条边
- [3] 满足 d(j) >= d(i) 的点j可以向点i连边。

G. 密集子图

- 由此考虑按点1到所有点的最短路长度分层进行状压DP。
- 令f[S][T][i]表示 d(x) <= i 的点集为S， d(x) = i 的点集为T，形成这样的子图的概率。
- 转移时枚举 d(x) = i + 1 的点集S'，根据上述3个限制转移至f[S∪S'][S'][i+1]。转移复杂度可以优化至O(1)。
- 时间O(4^n*n)，内存O(3^n*n)。

H. 线段树

- 所求即为线段树中每个节点对答案的贡献之和。
- 考虑一并处理每一种长度的所有节点对答案的贡献。
- 对于每一种长度的所有节点，维护这一类节点的4种信息：节点长度，节点个数，所有节点区间左端点之和，所有节点区间右端点之和。
- 从根节点[1, n]起从上至下逐层处理线段树节点。每次将当前层所有长度的节点的以上4种信息转移到下一层不同长度的节点上。
- 由于共有log n层，且每一层节点长度的种类数不超过2，故时间复杂度为O(log n)。

I. 狗蛋与二五仔

- 记 $f(r,i,j,k,l,em,m,atk,o)$ 表示对方体力为 i，我方体力为 j，对方手牌数为 k，我方手牌数为 l，对方场上的卡牌配置为 em，我方场上的卡牌配置为 m，我方场上的已攻击的卡牌的情况为 atk，我方剩余操作次数为 o，还剩余 r 次随机伤害时，我方赢的概率
- m 和 em 需要分别记录 1 点体力和 2 点体力的卡牌的数量
- atk 需要分别记录有多少 1 点体力和 2 点体力的卡牌还可以攻击
- o 需要区分进行过攻击操作和未进行过任何操作的情况，比如可以用 $O+1$ 表示后者，O 表示前者

I. 狗蛋与二五仔(cont’d)

- m, em, atk 需要状态压缩处理，否则空间可能不够
- 当 $r \neq 0$ 时计算转移到不同情况的平均胜率
- 当 $r = 0$ 时枚举玩家的决策取最高胜率
- 在使用结束回合决策的时候需要将双方的信息互换
- 由于每打出一张牌，所有角色的体力总和会减少 1，游戏一定能在有限回合内结束（不会转移出环）
- 可以使用记忆化搜索来实现

J 合法序列

- 注意到只要前 2^k 位确定了，就能确定每个长度为 k 的bit pattern是否允许出现
- 前 2^k 位中的每个0对应一个不允许出现的pattern
- 枚举前 2^k 位后DP：设 $f_{i,mask}$ 为长度为 i 的前缀以 $mask$ 编码的 $k-1$ 位二进制串结尾的方案数，转移时枚举向后添加的 0/1，根据前 2^k 位判断 $mask$ 加上这一位之后是否允许出现
- （别忘了先判断前 2^k 位是否合法

J 合法序列

- 时间复杂度：$O\left(2^{2^k}4^k n\right)$
- 注意到转移关系与 i 无关，且是线性的，因此可以矩阵乘法表示转移并快速幂，复杂度是 $O(2^{2^k}8^k\log n)$
- 比赛中这两种算法都是可以过的，而且实际上合法的 2^k 位前缀远少于2^{2^k}，所以常数非常小

K 独立

- 题目简述
- 给定一幅 n 个点最多 $n/2$ 条边的无向图，边是随机的，对于每个点 i，取它能得到 a_i 分，对于每条边 (x_i, y_i, z_i)， 如果点 x_i, y_i 都取了，会失去 z_i 分，问最多能得几分。
- 解法
- 首先考虑树的 case，这种情况是好做的，直接拿树形 dp 就能搞定。观察到题目中边是随机的，那么环的数目其实很少，有兴趣的同学可以自己算一算。所以做法就是对于每个联通块，我们不停地在图中找环，每次删掉环里的一个点，直到剩下的点形成一棵树。假设删掉的点的集合是 S，我们暴力枚举每个点取或不取，共有 2^S 种情况，对于每种情况，再树形 dp 一下就可以了。时间复杂度 $O(n)$。

solution

liuzhangfeiabc

题目大意

- 你需要实现一个特殊规则的麻将模拟器。
- 除了基本的麻将牌之外还有3种特殊牌。
- 其余规则与普通麻将规则基本相同，当然还有一些特殊的要求。
- 玩家的策略是固定的。
- 给出牌堆，要求输出玩家的游戏全过程。

这有什么好写题解的

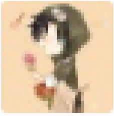
- 这当然是一道绝好的模拟题。
- 所以模拟就完事了呗。
- 唯一需要注意的就是怎么计算和牌距离和判断是否和牌。
- 这可以用一个dp来实现。

和牌距离

- 从左到右考虑所有种类的牌，记录当前有几个刻子、对子、顺子，还有即将成为顺子的单张、搭子（两张相邻的牌）。
- f[i][j][x][y][z]：考虑前i种牌，要凑出j(0~1)个对子，x(0~4)个顺子+刻子，目前有y个单张，z个搭子即将成为顺子，最少向手牌里添加几张牌。
- 转移时枚举下一种牌要用几张。
- 为了实现出牌，可以再记录一个g表示对于f记录的东西，手里的最后一张有用的牌是什么。（当然因为复杂度什么的不重要，直接枚举出哪张牌也行。）

总结

~~代码不长也就6个多k。~~



九条可怜

过气算法竞赛选手

Johnson、SunIsMeSZP、武弘勋、小萌喵酱、Scape 等 147 人赞同了该回答

题出的好！覆盖知识点广，题目又着切合实际的背景，解法比较自然。

给出题人点赞 ！