Matrix Analysis and Applications (Autumn 2022) **Final Project**

综合课题研究

Lecturer: Feng Chen chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao zhangtr22,jyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn

1 基本要求

A. 本次大作业采用分组形式进行。每 1 ∼ 2 名同学可以自由组合为一个小组，共同协作讨论完成文献调研、仿真实验、展示 PPT 以及附录文档，并派一名代表将所有相关内容（PPT、文档、仿真程序等）一起压缩打包 (以组员 *"姓名 1_ 姓名 2_ 学号 1_ 学号 2"* 形式进行压缩文件命名) 上传网络学堂，同时在"作业内容"中再次注明小组成员。其他小组成员也要提交作业，*但无需重复上传附件*，只需在"作业内容"中注明小组成员，并写明由哪位成员负责提交附件。

B. 作业成果以展示 PPT 为主，其内容包含作业中各项要求所对应的*技术路线、理论推导、算法设计、实现方法、数值实验结果等内容*；各项要求间详略分配可自行安排，*整体篇幅以支撑 10 分钟的公开展示为宜*。附录文档主要包括作业中所涉及，但不宜以 PPT 形式展示的诸细节，如详细推导过程、算法设计思路、实验数据整理、代码自述文件、关键参考文献等，具体形式和内容可根据需要自行安排。

C. 展示内容应充分说明问题的解决思路，以及理论或算法的特点，结合自己的理解给出相应结论。其方案应当兼顾时间复杂度与准确性，对具有创新性的想法和内容，将给予一定加分。仿真实验程序中应包括必要的注释以保证可读性。

D. 对于超过 1 人完成的作业，展示 PPT 中应在末页注明各成员贡献比例（如 $1 : 0.9$），并说明每位成员负责的工作内容。没有分工说明或说明不充分的报告将被予以一定程度的扣分。

E. 作业应独立完成。一经发现抄袭现象，抄袭与被抄袭者的成绩均以 0 分计。实验代码或仿真程序的主体部分应自己编写，直接调用网上公开的程序代码应在代码文件的相应位置进行注释，并在报告中对出处进行引用。使用过多的公开代码会影响报告得分。

F. 所有小组需在最终报告截止前提交所有相关资料。截止时间为 **12.18（14 周周日）晚**。没有按时完成的小组将被扣分。*所有小组都应当为课堂展示做好准备*，我们会根据完成情况进行课上展示抽查。

2 课题研究内容

在以下两项课题中 **任选一项** 完成：
课题中涉及的测试图片资源可于 https://cloud.tsinghua.edu.cn/d/32e8626b9f7e42e48a7c/获取。

2.1 图分割（Graph Partitioning）

图（graph）是一种常见的可用于描述不同对象之间关系的数据结构，在多个领域均具有广泛的应用。数学上，一个简单无向图可用一个二元组定义：$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$。其中，$\boldsymbol{V} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ 是顶点（vertex）集合，$\boldsymbol{E} = \{e_{ij}\}$ 是边（edge）集合，其中 e_{ij} 表示连接顶点 v_i 和 v_j 的边。我们假定任意一条边 $e_{ij} \in \boldsymbol{E}$ 具有权重 $w_{ij} \geq 0$，并定义加权邻接矩阵（weighted adjacency matrix）$\boldsymbol{W} = (w_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$，其中，如果顶点 i 和 j 之间没有边，则对应的权重 $w_{ij} = 0$。[1]对任意两个顶点 $u, v \in \boldsymbol{V}$，我们用 $w(u,v)$ 表示连接顶点 u 和 v 的边上的权重。对任意顶点 $v_i \in \boldsymbol{V}$，定义它的度（degree）为其到其他所有顶点的权重之和，即为 $d_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$，进而定义度矩阵（degree matrix）$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$。

在本次课题中，我们考虑图分割（graph partition）任务，其目的是找出 $\boldsymbol{V}$ 的两个子集 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \varnothing$，并最小化 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对应的子图间的相似度。在图论领域，这样的相似度可以用 cut 来度量：

$$\mathrm{cut}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) := \sum_{u \in \boldsymbol{A}, v \in \boldsymbol{B}} w(u, v).$$

对由最小化 cut 来定义的图分割问题，存在多种方法可以高效求解其全局最优解。但是在实际应用中，更常用的优化目标是最小化 normalized cut（Ncut）或 RatioCut：

$$\mathrm{Ncut}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) := \frac{\mathrm{cut}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})}{\sum_{u \in \boldsymbol{A}, t \in \boldsymbol{V}} w(u, t)} + \frac{\mathrm{cut}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})}{\sum_{v \in \boldsymbol{B}, t \in \boldsymbol{V}} w(v, t)},$$

$$\mathrm{RatioCut}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) := \frac{\mathrm{cut}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})}{|\boldsymbol{A}|} + \frac{\mathrm{cut}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})}{|\boldsymbol{B}|}.$$

可以证明，根据 Ncut 和 RatioCut 定义的图分割问题是 NP 难的。但通过一定的松弛，可以高效地求取其近似解。更多的介绍和讨论可参考 [1] 及其中的参考文献。

本研究内容共 4 个要求，如下：

要求 1. 简述最小化 Ncut 和 RatioCut 相比于最小化 cut 的优势。

要求 2. 进行理论推导，分别将最小化 Ncut 和 RatioCut 的优化目标等价转化为和矩阵 $\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{D}$ 等有关的形式，并进行适当的松弛以得到近似解。

要求 3. 编程实现上一要求中得到的图分割算法，并分析算法的时间复杂度。

要求 4. 在给定测试图片上利用图分割算法进行近似的图像分割，并对比基于 Ncut 和基于 RatioCut 的结果。提示：需要考虑如何定义图片中不同像素点之间的权值、如何确定合适的分割次数等。

[1] 注意这里图的简单性保证了 $w_{ii} = 0$，无向性保证了 $w_{ij} = w_{ji}$。

2.2 鲁棒主成分分析（RPCA）

在计算机视觉与模式识别任务中，通常都假设观测数据近似存在于一个低维的子空间下。为找出这样的子空间，经典的主成分分析（PCA）方法假定数据受到较小的高斯噪声污染，即数据 $\boldsymbol{D}$ 由一个低秩矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和一个独立同分布的高斯噪声矩阵 $\boldsymbol{E}$ 构成。当给定超参数 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 时，该任务可以建模为如下的优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}} \|\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}, \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \le r,\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$$

这是一个凸问题，可以通过对矩阵 $\boldsymbol{D}$ 进行奇异值分解，得到最优解析解。

然而在实际应用中，若出现较高幅度的尖锐噪声或严重的离群点时，PCA 的性能会受到很大的影响。而另一方面，当噪声矩阵 $\boldsymbol{E}$ 足够稀疏时，原始的低秩矩阵仍然可能被恢复。该任务可以建模为如下的优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}}\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) + \lambda\|\boldsymbol{E}\|_0, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$$

其中 $\|\boldsymbol{E}\|_0$ 是一个常用的不严格矩阵 0-范数定义，指矩阵中非零元素的个数。由于 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 和 $\|\boldsymbol{E}\|_0$ 都是非凸的，直接优化该问题非常困难，因此需要对其进行凸松弛。

对于范数 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$，一种松弛方法是使用核范数 $\|\boldsymbol{A}\|_* = \mathrm{tr}(\sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}})$，即该矩阵奇异值的和；对于矩阵 0-范数 $\|\boldsymbol{E}\|_0$，其常规的松弛方法是使用 1-范数 $\|\boldsymbol{E}\|_1 = \max_j \Sigma_{i=1}^{m}|\boldsymbol{e}_{i,j}|$。由此，原问题被转换为如下凸优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}}\ \|\boldsymbol{A}\|_* + \lambda\|\boldsymbol{E}\|_1, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$$

这被称为鲁棒主成分分析（Robust Principal Component Analysis）[2]。使用梯度下降法理论上即可获得其全局最优解；具有更强收敛性的其他针对性优化方法，在综述 [3] 中有总结。

本研究内容共 4 个要求，如下：

要求 1. 请利用矩阵运算的求导法则，写出一种通用优化方法（如梯度下降等）直接求解该问题时的计算过程，并编程实现之：要求输入原始数据矩阵 $\boldsymbol{D}$，给出相应的低秩矩阵 $\boldsymbol{A}$（可使用常规的矩阵计算库函数，但若使用 Autograd 等自动求导框架会适当减分）。

要求 2. 选择一种针对该问题的特殊优化算法，简述其原理；写出相应公式和算法，并编程实现之；通过实验比较其收敛速度与上一问实现的算法的差异。

要求 3. 除 RPCA 以外，还有许多低秩矩阵恢复（Low-Rank Matrix Restoration）模型能解决类似问题，如矩阵补全（Matrix Completion），低秩表示（Low-Rank Representation）等。其建模方法略有不同。请任选一种模型，对其优化目标进行详细介绍与推导，写出一种相应优化算法的流程，并编程实现之。

要求 4. 自选指标，在给定测试图片上对 PCA，RPCA 以及你所选择的方法进行对比，展示其低秩成分图与噪声图，分析其效果优劣、去噪特性，以及各超参数的影响；也可自选图片作为补充。

初始参考文献

[1] Von Luxburg U. A tutorial on spectral clustering[J]. Statistics and computing, 2007, 17(4): 395-416.

[2] Candès E J, Li X, Ma Y, et al. Robust principal component analysis?[J]. Journal of the ACM (JACM), 2011, 58(3): 1-37.

[3] 史加荣, 郑秀云, 魏宗田, 等. 低秩矩阵恢复算法综述 [J]. 计算机应用研究, 2013, 30(6): 1601-1605.