

Collatz conjecture

Tamaki ISII

24. Mar. 2024 19:50:31

1 コラッツ予想の定義

コラッツ予想は以下のような問題として知られている。[1]

Definition 1.

関数 $c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定める。

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{if } x \equiv 0 \pmod{2} \\ 3x + 1 & \text{if } x \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

(End of Definition)

Conjecture 1.

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [c^n(x) = 1]$$

(End of Conjecture)

Fact 1.

関数 c は全射である。

(End of Fact)

2 コラッツ予想と同値の問題: M32 問題の定義及び同値性の証明

2.1 M32 問題の定義

Definition 2.

関数 $fm: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定める。

$$fm(j) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{3j}{2} & \text{if } j \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{3j+1}{4} & \text{if } j \equiv 1 \pmod{8} \\ \frac{j+2}{4} & \text{if } j \equiv 2 \pmod{8} \\ \frac{3j-1}{2} & \text{if } j \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{3j+1}{8} & \text{if } j \equiv 5 \pmod{16} \\ \frac{3j+2}{4} & \text{if } j \equiv 6 \pmod{8} \\ \frac{3j+9}{16} & \text{if } j \equiv 13 \pmod{32} \\ \frac{j+3}{16} & \text{if } j \equiv 29 \pmod{32} \end{cases}$$

(End of Definition)

Conjecture 2.

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [fm^n(x) = 1]$$

(End of Conjecture)

Fact 2.

関数 fm は全射である。

(End of Fact)

2.2 コラッツ予想と M32 問題の同値性

Theorem 1.

Conjecture 1 \iff Conjecture 2

(End of Theorem)

Proof of Theorem 1.

以下, Fact 1, Fact 2 は宣言なく用いる。
証明内で使用する集合, 関数を定義する。

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{N} \mid x \equiv 2 \pmod{9} \vee x \equiv 8 \pmod{9}\}$$

関数 $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ を下記のように定める。

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{2x+5}{9} & \text{if } x \equiv 2 \pmod{9} \\ \frac{2x+2}{9} & \text{if } x \equiv 8 \pmod{9} \end{cases}$$

以下, f が全単射であることを注意。
ここで, Definition 1, Definition 2 から,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 2 \pmod{36}] &\implies c^3(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x) \quad , \\ \forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 8 \pmod{36}] &\implies c^2(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x) \quad , \\ \forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 11 \pmod{18}] &\implies c^2(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x) \quad , \\ \forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 17 \pmod{18}] &\implies c^2(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x) \quad , \\ \forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 20 \pmod{72}] &\implies c^4(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x) \quad , \\ \forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 26 \pmod{36}] &\implies c^3(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x) \quad , \\ \forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 56 \pmod{144}] &\implies c^5(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x) \quad , \\ \forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 128 \pmod{144}] &\implies c^4(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x) \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

eq. 2.1 から,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N}[c^n(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad . \tag{2.2}$$

eq. 2.2 の両辺の関数を繰り返し合成することを考えて,

$$\forall x \in A, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad . \tag{2.3}$$

Step 1.

始めに,

$$\text{Conjecture 1} \implies \text{Conjecture 2} \tag{2.A}$$

を示す。

Conjecture 1 を仮定する。以下, この仮定を “仮定 1” と称する。

eq. 2.3 の n, k について, k が増えるにつれ n も増やせるから,

$$\forall x \in A, \forall a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[n \geq a \wedge c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad . \tag{2.4}$$

ここで, $c(1) = 4, c^2(1) = 2, c^3(1) = 1$ に注意すると, Definition 1 から,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}[(c^a(x) = 1 \wedge n \geq a) \\ \implies (c^n(x) = 1 \vee c^n(x) = 2 \vee c^n(x) = 4)] \quad . \end{aligned} \tag{2.5}$$

特に, x の議論範囲について, $A \subset \mathbb{N}$ であることにも注意して, eq. 2.5 から,

$$\begin{aligned} \forall x \in A, \forall a \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} [& (c^a(x) = 1 \wedge n \geq a \wedge c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)) \\ \implies & (1 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x) \\ & \vee 2 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x) \vee 4 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x))] \quad . \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで, f^{-1} の終域に注目すると, f の定義から,

$$\forall x \in A, \forall k \in \mathbb{N} [(f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x) \in A] \quad . \quad (2.7)$$

特に, $1, 4 \notin A, 2 \in A$ に注意して, eq. 2.6, eq. 2.7 から,

$$\begin{aligned} \forall x \in A, \forall a \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} [& (c^a(x) = 1 \wedge n \geq a \wedge c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)) \\ \implies & 2 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

eq. 2.8 に, 一階述語の規則¹を用いて式を変形して,

$$\begin{aligned} \forall x \in A, \exists a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [& (c^a(x) = 1 \wedge n \geq a \wedge c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x))] \\ \implies & \forall x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} [2 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

仮定 1, eq. 2.4 から,

$$\begin{aligned} \forall x \in A, \exists a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [& (c^a(x) = 1 \wedge n \geq a \\ & \wedge c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x))] \quad . \end{aligned} \quad (2.10)$$

eq. 2.9, eq. 2.10 から,

$$\forall x \in A, \exists k \in \mathbb{N} [2 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad . \quad (2.11)$$

関数 f の像について, $f(A) = \mathbb{N}$ が成り立つことに注意して, eq. 2.11 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} [2 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad . \quad (2.12)$$

eq. 2.12 の両辺を f に代入, 仮定 1 を仮定解除して,

$$\text{Conjecture 1} \implies \text{Conjecture 2} \quad .$$

(Step End)

Step 2.

次に,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N} [1 = c^n(x)] \iff \text{Conjecture 2} \quad (2.B)$$

を示す。

Conjecture 2 を仮定する。以下, この仮定を “仮定 2” と称する。

関数 f^{-1} の像について, $f^{-1}(\mathbb{N}) = A$ が成り立つことに注意して, eq. 2.3 の x に $f^{-1}(x)$ を代入すると,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [(c^n \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad . \quad (2.13)$$

ここで, f^{-1} の終域に注意すると, f の定義から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} [(f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x) \in A] \quad . \quad (2.14)$$

eq. 2.14 から, eq. 2.13 に関して, 左辺も A に属するから, 両辺を f に代入, 右辺と左辺を入れ替えて,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [fm^k(x) = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad . \quad (2.15)$$

¹具体的には, $\forall x, \forall a, \forall k, \forall n [P(x, a, k, n) \implies Q(x, n)] \vdash \forall x, \exists a, \exists k, \exists n [P(x, a, k, n)] \implies \forall x, \exists k [Q(x, k)]$ という規則。

ここで Definition 2 から, $fm(1) = 1$ に注意すると,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} [(fm^a(x) = 1 \wedge k \geq a) \implies fm^k(x) = 1] \quad . \quad (2.16)$$

eq. 2.16 から,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} [(fm^a(x) = 1 \wedge k \geq a \wedge fm^k(x) = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)) \\ \implies 1 = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad . \end{aligned} \quad (2.17)$$

eq. 2.17 に, 一階述語の規則²を用いて式を変形して,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [fm^a(x) = 1 \wedge k \geq a \wedge fm^k(x) = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \\ \implies \forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [1 = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

仮定 2, eq. 2.15 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [fm^a(x) = 1 \wedge k \geq a \wedge fm^k(x) = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad . \quad (2.19)$$

eq. 2.18, eq. 2.19 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [1 = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad . \quad (2.20)$$

関数 f^{-1} の像について, $f^{-1}(\mathbb{N}) = A$ が成り立つことに注意して, eq. 2.20 から,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N} [1 = (f \circ c^n)(x)] \quad . \quad (2.21)$$

eq. 2.21 の両辺を f^{-1} に代入して,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N} [2 = c^n(x)] \quad . \quad (2.22)$$

特に, $c(2) = 1$ に注意して, eq. 2.22 の両辺を c に代入して,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N} [1 = c^n(x)] \quad . \quad (2.23)$$

仮定 2 を仮定解除, eq. 2.23 から,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N} [1 = c^n(x)] \iff \text{Conjecture 2} \quad .$$

(Step End)

Step 3.

さらに,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [x \notin A \implies c^n(x) \in A] \quad (2.C)$$

を示す。

Definition 1 から,

$$\forall x \in \mathbb{N} [x \equiv 0 \pmod{6} \implies (c^{\max\{n \in \mathbb{N} \mid (2^n \mid x)\}}(x) \equiv 3 \pmod{6})] \quad (2.24a) \quad ,$$

$$\forall x \in \mathbb{N} [x \equiv 1 \pmod{6} \implies c^2(x) \equiv 2 \pmod{9}] \quad (2.24b) \quad ,$$

$$\forall x \in \mathbb{N} [x \equiv 3 \pmod{6} \implies c^2(x) \equiv 5 \pmod{9}] \quad (2.24c) \quad .$$

(2.24)

Definition 1 から,

$$\forall x \in \mathbb{N} [x \equiv 4 \pmod{6} \implies c(x) \equiv 2 \pmod{3}] \quad . \quad (2.25)$$

eq. 2.25 から,

$$\forall x \in \mathbb{N} [x \equiv 4 \pmod{6} \implies (c(x) \in A \vee c(x) \equiv 5 \pmod{9})] \quad . \quad (2.26)$$

²具体的には, $\forall x, \forall a, \forall k, \forall n [P(x, a, k, n) \implies Q(x, n)] \vdash \forall x, \exists a, \exists k, \exists n [P(x, a, k, n)] \implies \forall x, \exists n [Q(x, n)]$ という規則。

Definition 1 から,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{N} [x \equiv 5 \pmod{18} \implies c(x)^2 \equiv 8 \pmod{27}] & , \\ \forall x \in \mathbb{N} [x \equiv 14 \pmod{36} \implies c(x)^3 \equiv 11 \pmod{27}] & , \\ \forall x \in \mathbb{N} [x \equiv 32 \pmod{36} \implies c(x)^2 \equiv 8 \pmod{9}] & . \end{aligned} \quad (2.27)$$

eq. 2.27 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [x \equiv 5 \pmod{9} \implies c^n(x) \in A] . \quad (2.28)$$

よって, eq. 2.24, eq. 2.26, eq. 2.28 から,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [x \equiv 0 \pmod{6} \implies c^n(x) \in A] & \\ \text{Because eq. 2.24a, eq. 2.24c, eq. 2.28} & , \\ \forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [x \equiv 1 \pmod{6} \implies c^n(x) \in A] & \text{Because eq. 2.24b} , \\ \forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [x \equiv 3 \pmod{6} \implies c^n(x) \in A] & \text{Because eq. 2.24c, eq. 2.28} , \\ \forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [x \equiv 4 \pmod{6} \implies c^n(x) \in A] & \text{Because eq. 2.26, eq. 2.28} , \\ \forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [x \equiv 5 \pmod{9} \implies c^n(x) \in A] & \text{Because eq. 2.28} . \end{aligned} \quad (2.29)$$

ここで, A の定義から,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{N} [x \notin A \implies (x \equiv 0 \pmod{6} \vee x \equiv 1 \pmod{6} \\ \vee x \equiv 3 \pmod{6} \vee x \equiv 4 \pmod{6} \vee x \equiv 5 \pmod{9})] . \end{aligned} \quad (2.30)$$

よって, eq. 2.29, eq. 2.30 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [x \notin A \implies c^n(x) \in A] .$$

(Step End)

ここで, eq. 2.C に注目すると eq. 2.B を $\forall x \in A$ の場合から $\forall x \in \mathbb{N}$ の場合に一般化できる。
よって,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} [1 = c^n(x)] \iff \text{Conjecture 2} . \quad (2.31)$$

つまり, eq. 2.31 から,

$$\text{Conjecture 1} \iff \text{Conjecture 2} . \quad (2.32)$$

以上のことから, eq. 2.A, eq. 2.32 から,

$$\text{Conjecture 1} \iff \text{Conjecture 2} .$$

Q.E.D.

次に, Definition 2 の行列表現を与える。これにより線形代数的観点から Conjecture 1 を考察することが可能になる。

3 関数 fm の行列表現 M

Definition 3.

M_k を $k \times k$ 行列として下記のように定める。

$$M_k[i, j] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } i = fm(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(End of Definition)

Comment about Definition 3.

行列 M_k は (グラフ理論の) グラフの隣接行列として解釈可能である。 (End of Comment)

Lemma 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} [M_k^n[i, j] = 1 \iff i = fm^n(j) \wedge \forall a \in \mathbb{N} [a \leq n \implies fm^a(j) \leq k]]$$

(End of Lemma)

証明は行列の積から自明であるから省略する。³

4 Mに関する予想

ここで, Definition 3 に関して成立すると予想される命題を提示する。

Conjecture 3.

$$\det(M_k - \lambda I_k) = (1 - \lambda)(-\lambda)^{k-1}$$

(End of Conjecture)

5 行列の定義

5.1 行列 F, G

Definition 4.

F_k を $k \times k$ 行列として下記のように定める。

$$F_k[i, j] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1 \wedge j = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(End of Definition)

Definition 5.

G_k を $k \times k$ 行列として下記のように定める。

$$G_k[i, j] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \wedge i \neq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(End of Definition)

5.2 Mに関連した性質を持つ行列 X

Definition 6.

X_k を $k \times k$ 行列として下記のように定める。

$$X_k[i, j] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } M[i, j] = 1 \\ -1 & \text{if } i = j \wedge i \neq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(End of Definition)

6 Conjecture 3 を仮定した場合に成り立つ補題

Lemma 2.

$$\text{Conjecture 3} \iff \det(X_k - \lambda I_k) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)^{k-1}$$

(End of Lemma)

Proof of Lemma 2.

この証明内で $\text{Delete}_{i,j}A$ は行列 A の i 行 j 列を削除した行列を表す。

³小さな k で M_k の冪を具体的に計算してみれば, 実際に成り立つ命題であることがすぐに分かると思います。

行列 M_k , X_k の対角成分以外が同一であることを注意して, Definition 3, Definition 6 から,

$$\begin{aligned}
 \det(M_k - \lambda I_k) &= (1 - \lambda)(-\lambda)^{k-1} \\
 \iff \det(\text{Delete}_{1,1}(M_k - \lambda I_k)) &= (-\lambda)^{k-1} \\
 \iff \det(\text{Delete}_{1,1}(X_k - \alpha I_k)) &= (-1 - \alpha)^{k-1} \quad (\lambda \leftarrow 1 + \alpha) \\
 \iff \det(X_k - \lambda I_k) &= (1 - \alpha)(-1 - \alpha)^{k-1} \quad .
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

eq. 6.1 から,

$$\text{Conjecture 3} \iff \det(X_k - \lambda I_k) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)^{k-1} \quad .$$

Q.E.D.

Lemma 3.

$$\text{Conjecture 3} \implies M_k^{k-1} = F_k X_k^{-1}$$

(End of Lemma)

Proof of Lemma 3.

Conjecture 3 を仮定する。以下, この仮定を “仮定 1” と称する。

仮定 1, ケイリーハミルトンの定理から,

$$M_k^{k-1} = M_k^k \quad . \tag{6.2}$$

仮定 1, Lemma 2 から,

$$\det(X_k) \neq 0 \quad . \tag{6.3}$$

特に, $M_k - G_k = X_k$, $I_k = F_k + G_k$ に注意して, Definition 3, Definition 4, Definition 5, Definition 6, eq. 6.2, eq. 6.3 から,

$$\begin{aligned}
 M_k^{k-1} F_k &= F_k & \iff M_k^{k-1} (I_k - G_k) &= F_k \\
 \iff M_k^{k-1} - M_k^{k-1} G_k &= F_k & \iff M_k^k - M_k^{k-1} G_k &= F_k \\
 \iff M_k^{k-1} (M_k - G_k) &= F_k & \iff M_k^{k-1} X_k &= F_k \\
 \iff M_k^{k-1} &= F_k X_k^{-1} \quad .
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

特に, Definition 2 から $\forall n \in \mathbb{N}[fm^n(1) = 1]$ であることを注意して, これに Lemma 1 を適用すると,

$$M_k^k[i, 1] = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad . \tag{6.5}$$

行列 A を右から掛ける操作は対象の第 1 列以外を全て 0 にするから, Definition 4, eq. 6.5 から,

$$M_k^k F_k = F_k \quad . \tag{6.6}$$

eq. 6.2, eq. 6.6 から,

$$M_k^{k-1} F_k = F_k \quad . \tag{6.7}$$

eq. 6.4, eq. 6.7 から,

$$M_k^{k-1} = F_k X_k^{-1} \quad . \tag{6.8}$$

仮定 1 を仮定解除, eq. 6.8 から,

$$\text{Conjecture 3} \implies M_k^{k-1} = F_k X_k^{-1} \quad .$$

Q.E.D.

Comment about Conjecture 3.

Conjecture 3 を証明すれば, Lemma 2, Lemma 3 をより強力にできる。このことから, Conjecture 3 の証明は最優先課題である。

また, Conjecture 3 は Conjecture 2 が $fm(1) = 1$ 以外のループを持たないことを示唆している。
(End of Comment)

Comment—Conjecture 3 の証明に向けた試み.

Conjecture 3 を示す最も簡単な方法は, $\det(M_{k+1} - \lambda I_{k+1}) = (-1 - \lambda)\det(M_k - \lambda I_k)$ と $\det(X_1 - \lambda I_1) = (1 - \lambda)$ を示し数学的帰納法を用いることだろう。しかし, $\det(M_{k+1} - \lambda I_{k+1}) = (-1 - \lambda)\det(M_k - \lambda I_k)$ は $n \equiv 5, 9 \pmod{12}$ で証明が非常に困難となる。(5, 9 でない場合は余因子展開により簡単に示せる。)

私が考えたもう一つの証明法は $\prod_{i=1}^k (M_k + I_k)[i, \sigma(i)] = 0$ を満たす $\sigma \in \text{Aut}(k)$ が単位置換以外に存在しないことを示すことである。これには組み合わせ論的方法が有効である可能性が考えられる。これに関連して, $\text{perm}(M_k + I_k) = 2$ を示すことも有効と考えられる。(perm は行列のパーマネントを表す。)
(End of Comment)

7 関数 fm の疑似的な逆関数の定義及び性質

7.1 関数 fm の疑似的な逆関数の定義

Definition 7.

関数 $fminva: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定める。

$$fminva(i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 16i - 3 & \text{if } i \equiv 0 \pmod{2} \\ 4i - 2 & \text{if } i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

(End of Definition)

Definition 8.

関数 $fminvb: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように定める。

$$fminvb(i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{2i}{3} & \text{if } i \equiv 0 \pmod{6} \\ \frac{4i-1}{3} & \text{if } i \equiv 1 \pmod{6} \\ \frac{8i-1}{3} & \text{if } i \equiv 2 \pmod{6} \\ \frac{16i-9}{3} & \text{if } i \equiv 3 \pmod{6} \\ \frac{2i+1}{3} & \text{if } i \equiv 4 \pmod{6} \\ \frac{4i-2}{3} & \text{if } i \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

(End of Definition)

7.2 関数 fm の疑似的な逆関数の性質

Fact 3.

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} [fm(x) = y \implies (fminva(y) = x \vee fminvb(y) = x)]$$

(End of Fact)

Comment about $fminva$, $fminvb$.

関数 $fminva$ は偶数が入力されると奇数, 奇数が入力されると偶数を返すので, $fminva^n$ の一般式を予測することは簡単である。

対して, $fminvb$ は入力が 6 を法として分類され, 出力は 32 を法として分類されるので, $fminvb^n$ の一般式を予測することは困難である。
(End of Comment)

8 行列 M , X について予想されている事項に関する Note

Note 1.

行列式, 固有多項式:

$$\det(M_k - \lambda I_k) = (1 - \lambda)(-\lambda)^{k-1} \quad (8.1)$$

$$\det(X_k - \lambda I_k) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)^{k-1} \quad (8.2)$$

階数:

$$\text{rank}(M_k) = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+7}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+11}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+14}{24} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{8} \right\rfloor \quad (8.3)$$

$$\text{rank}(X_k) = k \quad (8.4)$$

$$\text{rank}(M_k - I_k) = k - 1 \quad (8.5)$$

$$\text{rank}(X_k - I_k) = k - 1 \quad (8.6)$$

$$\text{rank}(X_k + I_k) = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+7}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+11}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+14}{24} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{8} \right\rfloor \quad (8.7)$$

(End of Note)

9 最後に

今後は、Conjecture 3 の証明を目指す。

10 References

[1] Wikipedia. コラッツの問題. [URL], [Archived] on 2023-03-26.

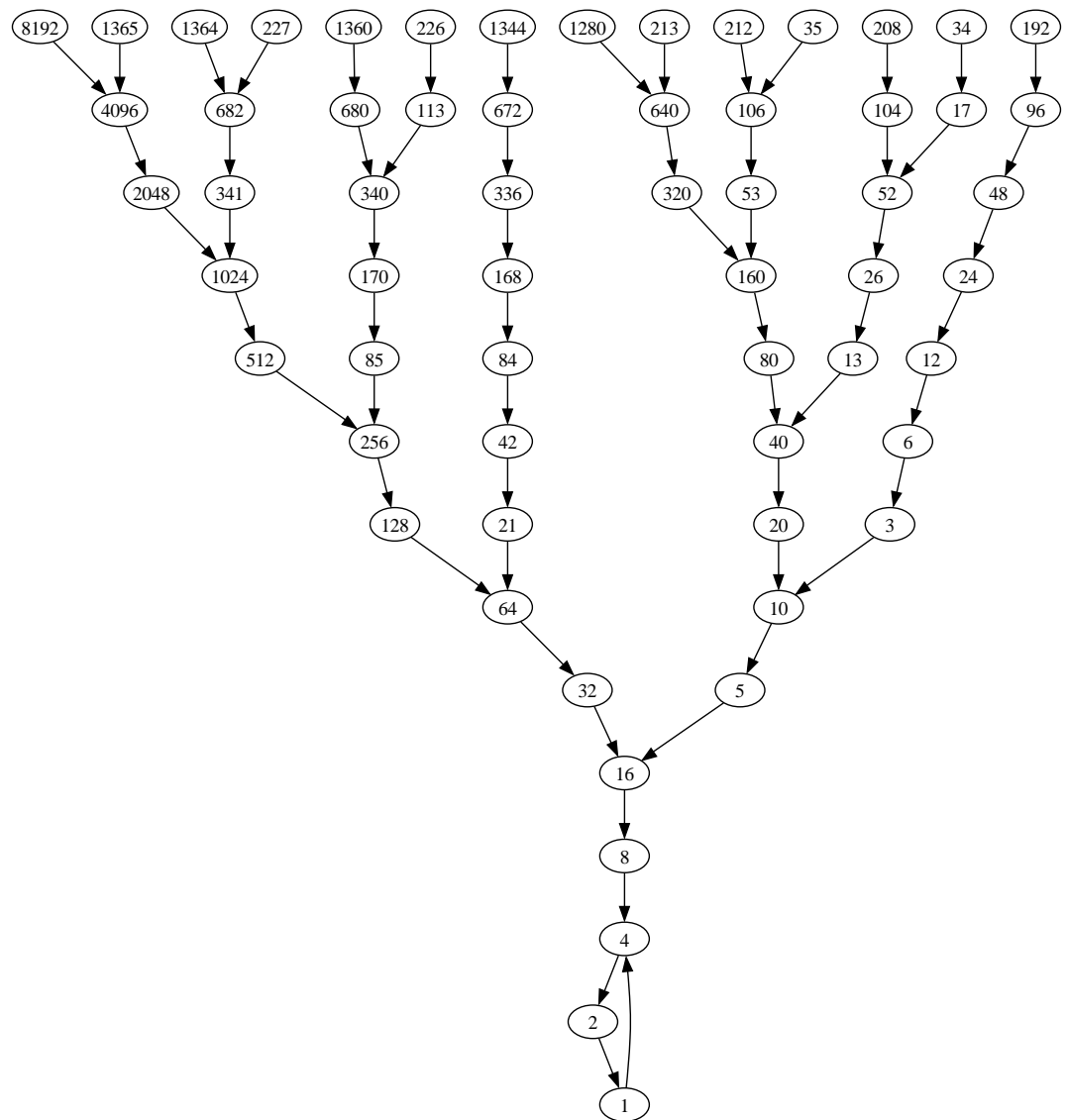
A Matrix examples

$$M_{27} =$$

[illegible]

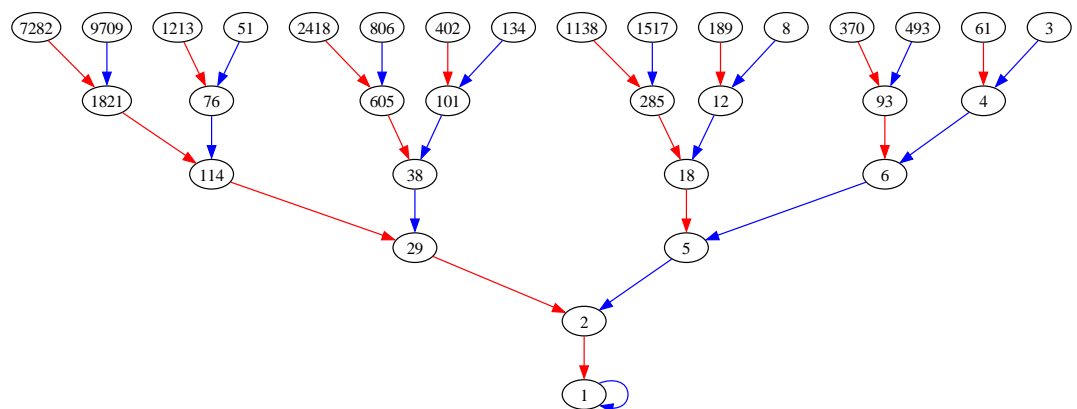
[illegible]

B c のグラフ



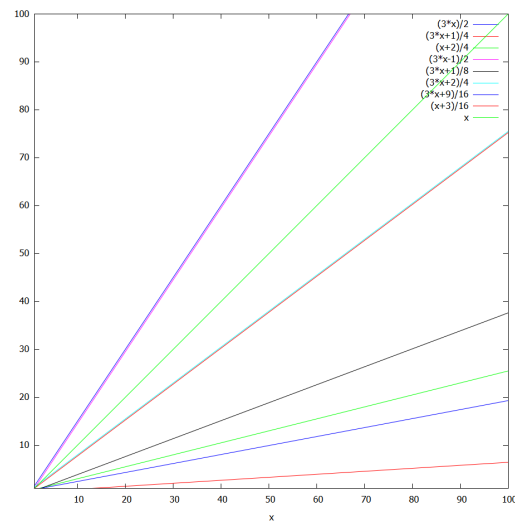
このグラフで, $a \rightarrow b$ は $c(a) = b$ を表す。

C fm のグラフ



このグラフで, $a \rightarrow b$ は $fm(a) = b \wedge fminva(b) = a$ を, $a \rightarrow b$ は $fm(a) = b \wedge fminvb(b) = a$ を表す。

D fm の xy グラフ



E Maxima code

```
fm(j):=block(
  if mod(j,4)=0 then(
    return((3*j)/2)
  )
  elseif mod(j,8)=1 then(
    return((3*j+1)/4)
  )
  elseif mod(j,8)=2 then(
    return((j+2)/4)
  )
  elseif mod(j,4)=3 then(
    return((3*j-1)/2)
  )
  elseif mod(j,16)=5 then(
    return((3*j+1)/8)
  )
  elseif mod(j,8)=6 then(
    return((3*j+2)/4)
  )
  elseif mod(j,32)=13 then(
    return((3*j+9)/16)
  )
  else(
    return((j+3)/16)
  )
);
```

```
fminva(i):=block(
  if mod(i,2)=0 then(
    return(16*i-3)
  )
  else(
    return(4*i-2)
  )
);
```

```

fminvb(i):=block(
  if mod(i,6)=0 then(
    return((2*i)/3)
  )
  elseif mod(i,6)=1 then(
    return((4*i-1)/3)
  )
  elseif mod(i,6)=2 then(
    return((8*i-1)/3)
  )
  elseif mod(i,6)=3 then(
    return((16*i-9)/3)
  )
  elseif mod(i,6)=4 then(
    return((2*i+1)/3)
  )
  else(
    return((4*i-2)/3)
  )
);

fm_print(j):=block(
  if mod(j,4)=0 then(
    printf(true,"A"),
    return((3*j)/2)
  )
  elseif mod(j,8)=1 then(
    printf(true,"B"),
    return((3*j+1)/4)
  )
  elseif mod(j,8)=2 then(
    printf(true,"C"),
    return((j+2)/4)
  )
  elseif mod(j,4)=3 then(
    printf(true,"D"),
    return((3*j-1)/2)
  )
  elseif mod(j,16)=5 then(
    printf(true,"E"),
    return((3*j+1)/8)
  )
  elseif mod(j,8)=6 then(
    printf(true,"G"),
    return((3*j+2)/4)
  )
  elseif mod(j,32)=13 then(
    printf(true,"H"),
    return((3*j+9)/16)
  )
  else(
    printf(true,"I"),
    return((j+3)/16)
  )
);

```

```

fminva_print(i):=block(
  if mod(i,2)=0 then(
    printf(true,"J"),
    return(16*i-3)
  )
  else(
    printf(true,"K"),
    return(4*i-2)
  )
);

fminvb_print(i):=block(
  if mod(i,6)=0 then(
    printf(true,"L"),
    return((2*i)/3)
  )
  elseif mod(i,6)=1 then(
    printf(true,"M"),
    return((4*i-1)/3)
  )
  elseif mod(i,6)=2 then(
    printf(true,"N"),
    return((8*i-1)/3)
  )
  elseif mod(i,6)=3 then(
    printf(true,"O"),
    return((16*i-9)/3)
  )
  elseif mod(i,6)=4 then(
    printf(true,"P"),
    return((2*i+1)/3)
  )
  else(
    printf(true,"Q"),
    return((4*i-2)/3)
  )
);

mrank(k):=floor(k/6)+floor((k+7)/8)+floor((k+11)/16)
+floor((k+14)/24)+floor((k+2)/6)+floor((k+2)/8);

```


F C++ code

```
int fm(int j){
    if(j%4 == 0){
        return (3*j)/2;
    }
    else if(j%8 == 1){
        return (3*j+1)/4;
    }
    else if(j%8 == 2){
        return (j+2)/4;
    }
    else if(j%4 == 3){
        return (3*j-1)/2;
    }
    else if(j%16 ==5){
        return (3*j+1)/8;
    }
    else if(j%8 == 6){
        return (3*j+2)/4;
    }
    else if(j%32 == 13){
        return (3*j+9)/16;
    }
    else{
        return (j+3)/16;
    }
}
```

```
int fminva(int i){
    if(i%2 == 0){
        return 16*i-3;
    }
    else{
        return 4*i-2;
    }
}
```

```
int fminvb(int i){
    if(i%6 == 0){
        return (2*i)/3;
    }
    else if(i%6 == 1){
        return (4*i-1)/3;
    }
    else if(i%6 == 2){
        return (8*i-1)/3;
    }
    else if(i%6 == 3){
        return (16*i-9)/3;
    }
    else if(i%6 == 4){
        return (2*i+1)/3;
    }
    else{
        return (4*i-2)/3;
    }
}
```