Collatz conjecture

Tamaki ISII

2. Apr. 2024 00:12:03

1 コラッツ予想の定義

コラッツ予想は以下のような問題として知られている。[1]

Definition 1.

関数 $c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を次のように定める。

$$c(x) \stackrel{\mathbf{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{if} \quad x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{if} \quad x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

(End of Definition)

Conjecture 1.

$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[c^n(x) = 1]$

(End of Conjecture)

Fact 1.

関数 c は全射である。 **(End of Fact)**

2 コラッツ予想と同値の問題: M32 問題の定義及び同値性の証明

2.1 M32 問題の定義

Definition 2.

関数 $fm\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を次のように定める。

$$fm(j) \stackrel{\mathbf{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{3j}{2} & \text{if} \quad j \equiv 0 \pmod 4 \\ \dfrac{3j+1}{4} & \text{if} \quad j \equiv 1 \pmod 8 \\ \dfrac{j+2}{4} & \text{if} \quad j \equiv 2 \pmod 8 \\ \dfrac{3j-1}{2} & \text{if} \quad j \equiv 3 \pmod 4 \\ \dfrac{3j+1}{8} & \text{if} \quad j \equiv 5 \pmod{16} \\ \dfrac{3j+2}{4} & \text{if} \quad j \equiv 6 \pmod 8 \\ \dfrac{3j+9}{16} & \text{if} \quad j \equiv 13 \pmod{32} \\ \dfrac{j+3}{16} & \text{if} \quad j \equiv 29 \pmod{32} \end{cases}$$

(End of Definition)

Conjecture 2.

$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[fm^n(x) = 1]$

(End of Conjecture)

Fact 2.

関数 fm は全射である。 **(End of Fact)**

2.2 コラッツ予想と M32 問題の同値性

Theorem 1.

$$\text{Conjecture 1} \iff \text{Conjecture 2}$$

(End of Theorem)

Proof of Theorem 1.
以下, Fact 1, Fact 2 は宣言なく用いる。
証明内で使用する集合, 関数を定義する。

$$A \overset{\textbf{def}}{=} \{x \in \mathbb{N} \mid x \equiv 2 \pmod 9 \vee x \equiv 8 \pmod 9\}$$

関数 $f\colon A \to \mathbb{N}$ を下記のように定める。

$$f(x) \overset{\textbf{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{2x+5}{9} & \text{if} \quad x \equiv 2 \pmod 9 \\ \dfrac{2x+2}{9} & \text{if} \quad x \equiv 8 \pmod 9 \end{cases}$$

以下, f が全単射であることに注意。
ここで, Definition 1, Definition 2 から,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 2 \pmod{36} &&\implies c^3(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad ,\\
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 8 \pmod{36} &&\implies c^2(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad ,\\
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 11 \pmod{18} &&\implies c^2(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad ,\\
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 17 \pmod{18} &&\implies c^2(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad ,\\
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 20 \pmod{72} &&\implies c^4(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad ,\\
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 26 \pmod{36} &&\implies c^3(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad ,\\
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 56 \pmod{144} &&\implies c^5(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad ,\\
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 128 \pmod{144} &&\implies c^4(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad 。
\end{aligned} \tag{2.1}$$

eq. 2.1 から,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N}[c^n(x) = (f^{-1} \circ fm \circ f)(x)] \quad 。 \tag{2.2}$$

eq. 2.2 の両辺の関数を繰り返し合成することを考えて,

$$\forall x \in A, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad 。 \tag{2.3}$$

Step 1.
始めに,

$$\text{Conjecture 1} \implies \text{Conjecture 2} \tag{2.A}$$

を示す。
Conjecture 1 を仮定する。以下, この仮定を “仮定 1” と称する。
eq. 2.3 の n, k について, k が増えるにつれ n も増やせるから,

$$\forall x \in A, \forall a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[n \geq a \ \wedge \ c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad 。 \tag{2.4}$$

ここで, $c(1) = 4,\ c^2(1) = 2,\ c^3(1) = 1$ に注意すると, Definition 1 から,

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}[(c^a(x) = 1 \ \wedge \ n \geq a)\\ &\qquad \implies (c^n(x) = 1 \ \vee \ c^n(x) = 2 \ \vee \ c^n(x) = 4)] \quad 。\end{aligned} \tag{2.5}$$

特に, x の議論範囲について, $A \subset \mathbb{N}$ であることにも注意して, eq. 2.5 から,

$$\forall x \in A, \forall a \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}[(c^a(x) = 1 \ \wedge \ n \geq a \ \wedge \ c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)) \implies (1 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x) \ \vee \ 2 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x) \ \vee \ 4 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x))] \quad 。 \tag{2.6}$$

ここで, f^{-1} の終域に注目すると, f の定義から,

$$\forall x \in A, \forall k \in \mathbb{N}[(f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x) \in A] \quad 。 \tag{2.7}$$

特に, $1, 4 \notin A$, $2 \in A$ に注意して, eq. 2.6, eq. 2.7 から,

$$\forall x \in A, \forall a \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}[(c^a(x) = 1 \ \wedge \ n \geq a \ \wedge \ c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)) \implies 2 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad 。 \tag{2.8}$$

eq. 2.8 に, 一階述語の規則[1]を用いて式を変形して,

$$\forall x \in A, \exists a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[c^a(x) = 1 \ \wedge \ n \geq a \ \wedge \ c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \implies \forall x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}[2 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad 。 \tag{2.9}$$

仮定 1, eq. 2.4 から,

$$\forall x \in A, \exists a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[c^a(x) = 1 \ \wedge \ n \geq a \ \wedge \ c^n(x) = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad 。 \tag{2.10}$$

eq. 2.9, eq. 2.10 から,

$$\forall x \in A, \exists k \in \mathbb{N}[2 = (f^{-1} \circ fm^k \circ f)(x)] \quad 。 \tag{2.11}$$

関数 f の像について, $f(A) = \mathbb{N}$ が成り立つことに注意して, eq. 2.11 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}[2 = (f^{-1} \circ fm^k)(x)] \quad 。 \tag{2.12}$$

eq. 2.12 の両辺を f に代入, 仮定 1 を仮定解除して,

$$\text{Conjecture 1} \implies \text{Conjecture 2} \quad 。$$

(Step End)

Step 2.
次に,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N}[1 = c^n(x)] \impliedby \text{Conjecture 2} \tag{2.B}$$

を示す。

Conjecture 2 を仮定する。以下, この仮定を "仮定 2" と称する。

関数 f^{-1} の像について, $f^{-1}(\mathbb{N}) = A$ が成り立つことに注意して, eq. 2.3 の x に $f^{-1}(x)$ を代入すると,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[(c^n \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ fm^k)(x)] \quad 。 \tag{2.13}$$

ここで, f^{-1} の終域に注意すると, f の定義から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}[(f^{-1} \circ fm^k)(x) \in A] \quad 。 \tag{2.14}$$

eq. 2.14 から, eq. 2.13 に関して, 左辺も A に属するから, 両辺を f に代入, 右辺と左辺を入れ替えて,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[fm^k(x) = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad 。 \tag{2.15}$$

[1]具体的には, $\forall x, \forall a, \forall k, \forall n[P(x,a,k,n) \implies Q(x,n)] \vdash \forall x, \exists a, \exists k, \exists n[P(x,a,k,n)] \implies \forall x, \exists k[Q(x,k)]$ という規則。

ここで Definition 2 から, $fm(1) = 1$ に注意すると,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}[(fm^a(x) = 1 \ \wedge \ k \geq a) \implies fm^k(x) = 1] \quad 。 \tag{2.16}$$

eq. 2.16 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}[(fm^a(x) = 1 \ \wedge \ k \geq a \ \wedge \ fm^k(x) = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)) \implies 1 = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad 。 \tag{2.17}$$

eq. 2.17 に, 一階述語の規則[2]を用いて式を変形して,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[fm^a(x) = 1 \ \wedge \ k \geq a \ \wedge \ fm^k(x) = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \implies \forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[1 = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad 。 \tag{2.18}$$

仮定 2, eq. 2.15 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[fm^a(x) = 1 \ \wedge \ k \geq a \ \wedge \ fm^k(x) = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad 。 \tag{2.19}$$

eq. 2.18, eq. 2.19 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[1 = (f \circ c^n \circ f^{-1})(x)] \quad 。 \tag{2.20}$$

関数 f^{-1} の像について, $f^{-1}(\mathbb{N}) = A$ が成り立つことに注意して, eq. 2.20 から,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N}[1 = (f \circ c^n)(x)] \quad 。 \tag{2.21}$$

eq. 2.21 の両辺を f^{-1} に代入して,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N}[2 = c^n(x)] \quad 。 \tag{2.22}$$

特に, $c(2) = 1$ に注意して, eq. 2.22 の両辺を c に代入して,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N}[1 = c^n(x)] \quad 。 \tag{2.23}$$

仮定 2 を仮定解除, eq. 2.23 から,

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N}[1 = c^n(x)] \impliedby \text{Conjecture 2} \quad 。$$

(Step End)

Step 3.

さらに,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[x \notin A \implies c^n(x) \in A] \tag{2.C}$$

を示す。

Definition 1 から,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 0 \pmod 6 \implies (c\hat{\ }\max\{n \in \mathbb{N} \mid (2^n \mid x)\})(x) \equiv 3 \pmod 6] && (2.24a) \quad , \\
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 1 \pmod 6 \implies c^2(x) \equiv 2 \pmod 9 \qquad] && (2.24b) \quad , \\
&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 3 \pmod 6 \implies c^2(x) \equiv 5 \pmod 9 \qquad] && (2.24c) \quad 。
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Definition 1 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 4 \pmod 6 \implies c(x) \equiv 2 \pmod 3] \quad 。 \tag{2.25}$$

eq. 2.25 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 4 \pmod 6 \implies (c(x) \in A \ \vee \ c(x) \equiv 5 \pmod 9)] \quad 。 \tag{2.26}$$

[2] 具体的には, $\forall x, \forall a, \forall k, \forall n[P(x,a,k,n) \implies Q(x,n)] \vdash \forall x, \exists a, \exists k, \exists n[P(x,a,k,n)] \implies \forall x, \exists n[Q(x,n)]$ という規則。

Definition 1 から,

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{N}[\ x \equiv 5 \pmod{18} \Longrightarrow c(x)^2 \equiv 8 \pmod{27}\ ] \quad ,\\&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 14 \pmod{36} \Longrightarrow c(x)^3 \equiv 11 \pmod{27}] \quad ,\\&\forall x \in \mathbb{N}[x \equiv 32 \pmod{36} \Longrightarrow c(x)^2 \equiv 8 \pmod{9}\ \ ] \quad 。\end{aligned} \tag{2.27}$$

eq. 2.27 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[x \equiv 5 \pmod 9 \implies c^n(x) \in A] \quad 。 \tag{2.28}$$

よって, eq. 2.24, eq. 2.26, eq. 2.28 から,

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[x \equiv 0 \pmod 6 \Longrightarrow c^n(x) \in A]\\&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Because eq. 2.24a, eq. 2.24c, eq. 2.28} \quad ,\\&\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[x \equiv 1 \pmod 6 \Longrightarrow c^n(x) \in A] \quad \text{Because eq. 2.24b} \quad ,\\&\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[x \equiv 3 \pmod 6 \Longrightarrow c^n(x) \in A] \quad \text{Because eq. 2.24c, eq. 2.28} \quad ,\\&\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[x \equiv 4 \pmod 6 \Longrightarrow c^n(x) \in A] \quad \text{Because eq. 2.26, eq. 2.28} \quad ,\\&\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[x \equiv 5 \pmod 9 \Longrightarrow c^n(x) \in A] \quad \text{Because eq. 2.28} \quad 。\end{aligned} \tag{2.29}$$

ここで, A の定義から,

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{N}[x \notin A \implies (x \equiv 0 \pmod 6 \ \vee\ x \equiv 1 \pmod 6\\&\qquad\qquad \vee\ x \equiv 3 \pmod 6 \ \vee\ x \equiv 4 \pmod 6 \ \vee\ x \equiv 5 \pmod 9)] \quad 。\end{aligned} \tag{2.30}$$

よって, eq. 2.29, eq. 2.30 から,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[x \notin A \implies c^n(x) \in A] \quad 。$$

(Step End)

ここで, eq. 2.C に注目すると eq. 2.B を $\forall x \in A$ の場合から $\forall x \in \mathbb{N}$ の場合に一般化できる。よって,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}[1 = c^n(x)] \impliedby \text{Conjecture 2} \quad 。 \tag{2.31}$$

つまり, eq. 2.31 から,

$$\text{Conjecture 1} \impliedby \text{Conjecture 2} \quad 。 \tag{2.32}$$

以上のことから, eq. 2.A, eq. 2.32 から,

$$\text{Conjecture 1} \iff \text{Conjecture 2} \quad 。$$

Q.E.D.

次に, Definition 2 の行列表現を与える。これにより線形代数学的観点から Conjecture 1 を考察することが可能になる。

3　関数 fm の行列表現 M

Definition 3.

M_kを $k \times k$ 行列として下記のように定める。

$$M_k[i,j] \stackrel{\textbf{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = fm(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(End of Definition)

Comment about Definition 3.

行列 M_k は (グラフ理論の) グラフの隣接行列として解釈可能である。 **(End of Comment)**

Lemma 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}[M_k^n[i,j] = 1 \iff i = fm^n(j) \ \wedge \ \forall a \in \mathbb{N}[a \leq n \implies fm^a(j) \leq k]]$$

(End of Lemma)

証明は行列の積から自明であるから省略する。[3]

4 M に関する予想

ここで, Definition 3 に関して成立すると予想される命題を提示する。

Conjecture 3.

$$\det(M_k - \lambda I_k) = (1-\lambda)(-\lambda)^{k-1}$$

(End of Conjecture)

5 行列の定義

5.1 行列 F, G

Definition 4.

F_kを $k \times k$ 行列として下記のように定める。

$$F_k[i,j] \overset{\mathbf{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = 1 \ \wedge \ j = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(End of Definition)

Definition 5.

G_kを $k \times k$ 行列として下記のように定める。

$$G_k[i,j] \overset{\mathbf{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \ \wedge \ i \neq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(End of Definition)

5.2 M に関連した性質を持つ行列 X

Definition 6.

X_kを $k \times k$ 行列として下記のように定める。

$$X_k[i,j] \overset{\mathbf{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if} \quad M[i,j] = 1 \\ -1 & \text{if} \quad i = j \ \wedge \ i \neq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(End of Definition)

6 Conjecture 3 を仮定した場合に成り立つ補題及び Conjecture 3 についてのコメント

Lemma 2.

$$\text{Conjecture 3} \iff \det(X_k - \lambda I_k) = (1-\lambda)(-1-\lambda)^{k-1}$$

(End of Lemma)

Proof of Lemma 2.

この証明内で $\mathrm{Delete}_{i,j} A$ は行列 A の i 行 j 列を削除した行列を表す。

[3] 小さな k で M_k の冪を具体的に計算してみれば, 実際に成り立つ命題であることがすぐに分かると思います。

行列 M_k, X_k の対角成分以外が同一であることに注意して, Definition 3, Definition 6 から,

$$\begin{aligned} & \det(M_k - \lambda I_k) &&= (1-\lambda)(-\lambda)^{k-1} \\ \iff & \det(\mathrm{Delete}_{1,1}(M_k - \lambda I_k)) &&= (-\lambda)^{k-1} \\ \iff & \det(\mathrm{Delete}_{1,1}(X_k - \alpha I_k)) &&= (-1-\alpha)^{k-1} \qquad (\lambda \leftarrow 1+\alpha) \\ \iff & \det(X_k - \lambda I_k) &&= (1-\alpha)(-1-\alpha)^{k-1} \qquad 。\end{aligned} \tag{6.1}$$

eq. 6.1 から,

$$\text{Conjecture 3} \iff \det(X_k - \lambda I_k) = (1-\lambda)(-1-\lambda)^{k-1} \quad 。$$

Q.E.D.

Lemma 3.

$$\text{Conjecture 3} \implies M_k^{k-1} = F_k X_k^{-1}$$

(End of Lemma)

Proof of Lemma 3.

Conjecture 3 を仮定する。以下, この仮定を "仮定 1" と称する。
仮定 1, ケイリーハミルトンの定理から,

$$M_k^{k-1} = M_k^k \quad 。 \tag{6.2}$$

仮定 1, Lemma 2 から,

$$\det(X_k) \neq 0 \quad 。 \tag{6.3}$$

特に, $M_k - G_k = X_k$, $I_k = F_k + G_k$ に注意して, Definition 3, Definition 4, Definition 5, Definition 6, eq. 6.2, eq. 6.3 から,

$$\begin{aligned} & M_k^{k-1} F_k = F_k && \iff M_k^{k-1}(I_k - G_k) = F_k \\ \iff & M_k^{k-1} - M_k^{k-1} G_k = F_k && \iff M_k^k - M_k^{k-1} G_k = F_k \\ \iff & M_k^{k-1}(M_k - G_k) = F_k && \iff M_k^{k-1} X_k = F_k \\ \iff & M_k^{k-1} = F_k X_k^{-1} && \qquad 。\end{aligned} \tag{6.4}$$

特に, Definition 2 から $\forall n \in \mathbb{N}[fm^n(1) = 1]$ であることに注意して, これに Lemma 1 を適用すると,

$$M_k^k[i,1] = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad 。 \tag{6.5}$$

行列 A を右から掛ける操作は対象の第 1 列以外を全て 0 にするから, Definition 4, eq. 6.5 から,

$$M_k^k F_k = F_k \quad 。 \tag{6.6}$$

eq. 6.2, eq. 6.6 から,

$$M_k^{k-1} F_k = F_k \quad 。 \tag{6.7}$$

eq. 6.4, eq. 6.7 から,

$$M_k^{k-1} = F_k X_k^{-1} \quad 。 \tag{6.8}$$

仮定 1 を仮定解除, eq. 6.8 から,

$$\text{Conjecture 3} \implies M_k^{k-1} = F_k X_k^{-1} \quad 。$$

Q.E.D.

Comment about Conjecture 3.
Conjecture 3 を証明すれば, Lemma 2, Lemma 3 をより強力にできる。このことから, Conjecture 3 の証明は最優先課題である。
また, Conjecture 3 は Conjecture 2 が $fm(1) = 1$ 以外のループを持たないことを示唆している。
(End of Comment)

Comment—Conjecture 3 の証明に向けた試み.
Conjecture 3 を示す最も簡単な方法は, $\det(M_{k+1} - \lambda I_{k+1}) = (-1-\lambda)\det(M_k - \lambda I_k)$ と $\det(X_1 - \lambda I_1) = (1-\lambda)$ を示し数学的帰納法を用いることだろう。しかし, $\det(M_{k+1} - \lambda I_{k+1}) = (-1-\lambda)\det(M_k - \lambda I_k)$ は $k \equiv 5, 9 \pmod{12}$ で証明が非常に困難となる。($5, 9$ でない場合は余因子展開により簡単に示せる。)
もう一つの方法は $\prod_{i=1}^{k}(M_k + I_k)[i, \sigma(i)] \neq 0$ を満たす $\sigma \in \mathrm{Aut}(k)$ が単位置換以外に存在しないことを示すことである。これに関連して, $\mathrm{perm}(M_k + I_k) = 2$ を示すことも有効と考えられる。(perm は行列のパーマネントを表す。)
また, 行列 $M_k - \lambda I_k$ の分解を考えることも役に立つかもしれない。しかし, 少なくとも LU 分解に関しては簡単に表せる形はしていない。
加えて, 行列 M_k と相似な行列を考えることも有効であると考える。関連して, M_k のジョルダン標準形を求めることを考えたが, 簡単に表せる形をしていないことが判明した。
(End of Comment)

7 関数 fm の疑似的な逆関数の定義及び性質

7.1 関数 fm の疑似的な逆関数の定義

Definition 7.
関数 $fminva\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を次のように定める。

$$fminva(i) \stackrel{\mathbf{def}}{=} \begin{cases} 16i - 3 & \text{if} \quad i \equiv 0 \pmod 2 \\ 4i - 2 & \text{if} \quad i \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

(End of Definition)

Definition 8.
関数 $fminvb\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を次のように定める。

$$fminvb(i) \stackrel{\mathbf{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{2i}{3} & \text{if} \quad i \equiv 0 \pmod 6 \\ \dfrac{4i-1}{3} & \text{if} \quad i \equiv 1 \pmod 6 \\ \dfrac{8i-1}{3} & \text{if} \quad i \equiv 2 \pmod 6 \\ \dfrac{16i-9}{3} & \text{if} \quad i \equiv 3 \pmod 6 \\ \dfrac{2i+1}{3} & \text{if} \quad i \equiv 4 \pmod 6 \\ \dfrac{4i-2}{3} & \text{if} \quad i \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

(End of Definition)

7.2 関数 fm の疑似的な逆関数の性質

Fact 3.

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}[fm(x) = y \implies (fminva(y) = x \ \veebar \ fminvb(y) = x)]$$

(End of Fact)

Comment about *fminva*, *fminvb*.
関数 *fminva* は偶数が入力されると奇数, 奇数が入力されると偶数を返すので, $fminva^n$ の一般式を予測することは簡単である。
対して, *fminvb* は入力が 6 を法として分類され, 出力は 32 を法として分類されるので, $fminvb^n$ の一般式を予測することは困難である。 **(End of Comment)**

8　行列 M, X について予想されている事項に関する Note

Note 1.
行列式, 固有多項式:

$$\det(M_k - \lambda I_k) = (1-\lambda)(-\lambda)^{k-1} \tag{8.1}$$

$$\det(X_k - \lambda I_k) = (1-\lambda)(-1-\lambda)^{k-1} \tag{8.2}$$

階数:

$$\mathrm{rank}(M_k) = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+7}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+11}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+14}{24} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{8} \right\rfloor \tag{8.3}$$

$$\mathrm{rank}(X_k) = k \tag{8.4}$$

$$\mathrm{rank}(M_k - I_k) = k-1 \tag{8.5}$$

$$\mathrm{rank}(X_k - I_k) = k-1 \tag{8.6}$$

$$\mathrm{rank}(X_k + I_k) = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+7}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+11}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+14}{24} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{8} \right\rfloor \tag{8.7}$$

(End of Note)

9　最後に

今後は, Conjecture 3 の証明を目指す。

10　References

[1] Wikipedia. コラッツの問題. [URL], [Archived] on 2023-03-26.

A Matrix examples

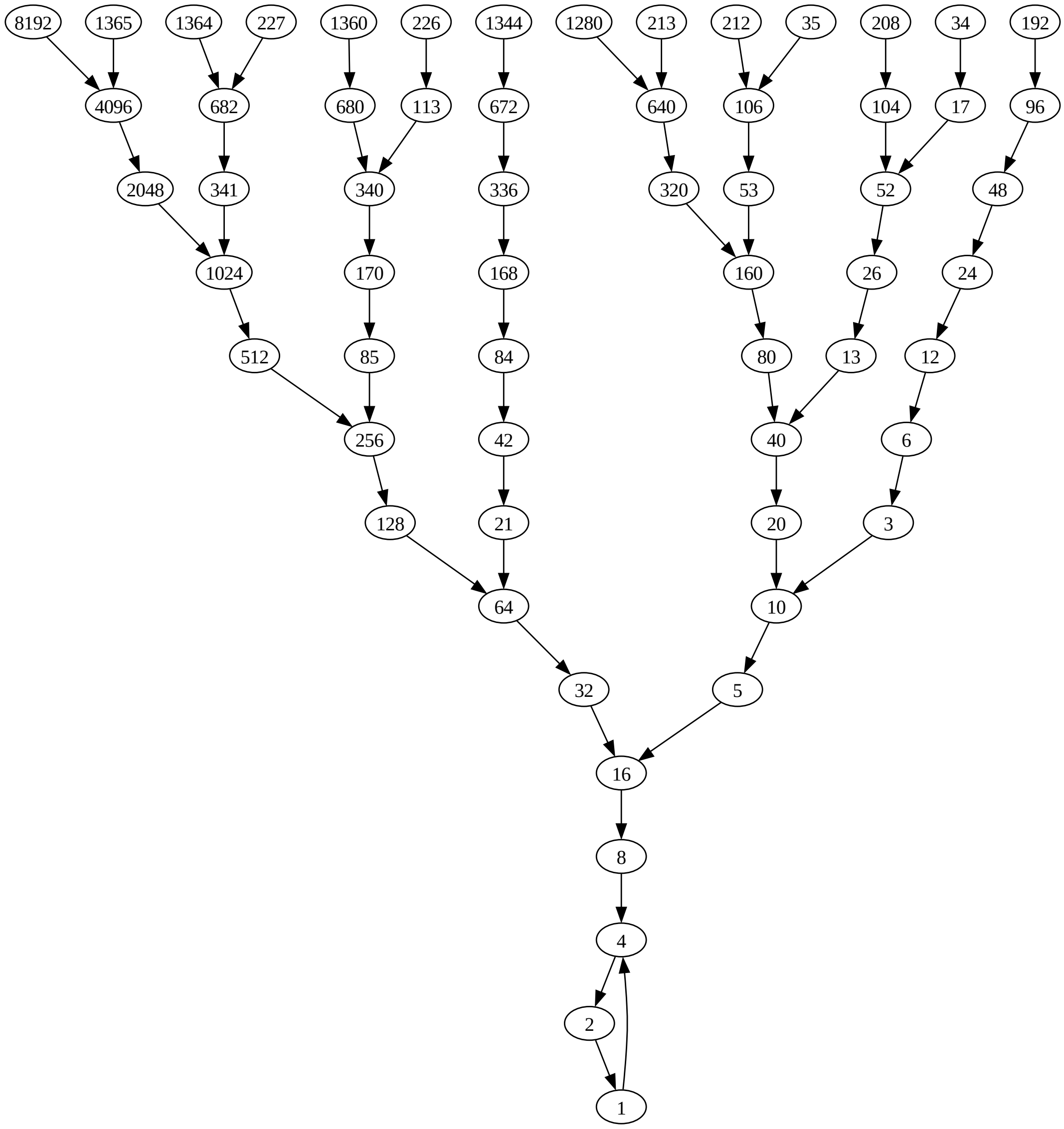
$$M_{27} =$$

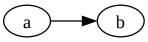
$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$X_{18} =$

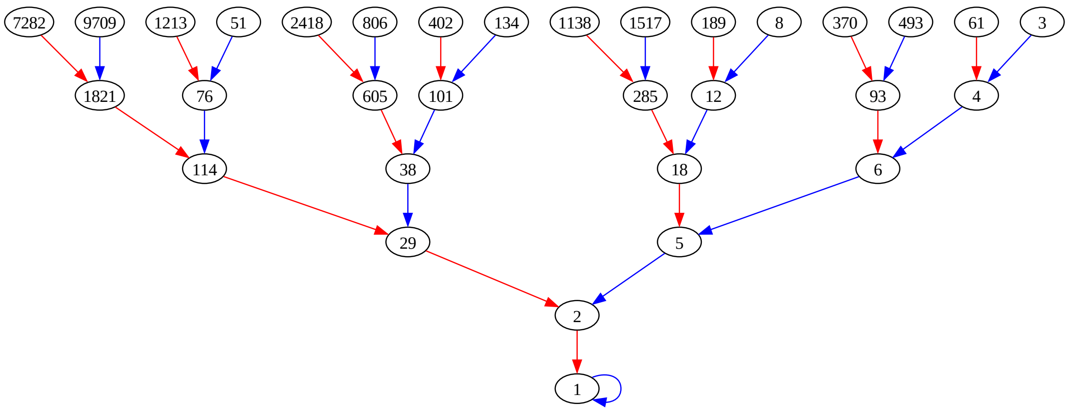
$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}$$

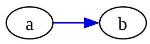
B　c のグラフ



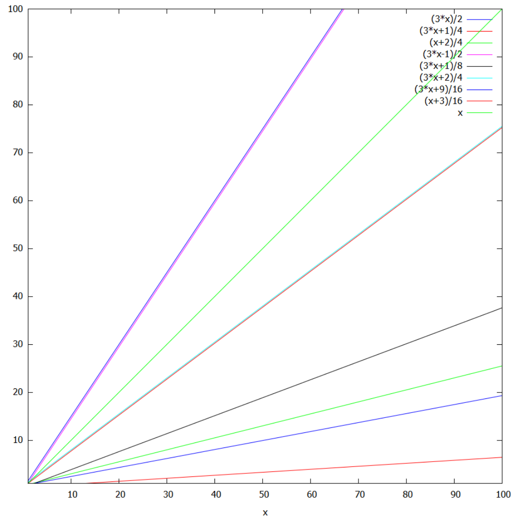
このグラフで， は $c(a) = b$ を表す。

C　fm のグラフ



このグラフで， は $fm(a) = b \wedge fminva(b) = a$ を， は $fm(a) = b \wedge fminvb(b) = a$ を表す。

D fm の xy グラフ



E Maxima code

```
fm(j):=block(
    if mod(j,4)=0 then(
        return((3*j)/2)
    )
    elseif mod(j,8)=1 then(
        return((3*j+1)/4)
    )
    elseif mod(j,8)=2 then(
        return((j+2)/4)
    )
    elseif mod(j,4)=3 then(
        return((3*j-1)/2)
    )
    elseif mod(j,16)=5 then(
        return((3*j+1)/8)
    )
    elseif mod(j,8)=6 then(
        return((3*j+2)/4)
    )
    elseif mod(j,32)=13 then(
        return((3*j+9)/16)
    )
    else(
        return((j+3)/16)
    )
);


fminva(i):=block(
    if mod(i,2)=0 then(
        return(16*i-3)
    )
    else(
        return(4*i-2)
    )
);
```

```
fminvb(i):=block(
    if mod(i,6)=0 then(
        return((2*i)/3)
    )
    elseif mod(i,6)=1 then(
        return((4*i-1)/3)
    )
    elseif mod(i,6)=2 then(
        return((8*i-1)/3)
    )
    elseif mod(i,6)=3 then(
        return((16*i-9)/3)
    )
    elseif mod(i,6)=4 then(
        return((2*i+1)/3)
    )
    else(
        return((4*i-2)/3)
    )
);


fm_print(j):=block(
    if mod(j,4)=0 then(
        printf(true,"A"),
        return((3*j)/2)
    )
    elseif mod(j,8)=1 then(
        printf(true,"B"),
        return((3*j+1)/4)
    )
    elseif mod(j,8)=2 then(
        printf(true,"C"),
        return((j+2)/4)
    )
    elseif mod(j,4)=3 then(
        printf(true,"D"),
        return((3*j-1)/2)
    )
    elseif mod(j,16)=5 then(
        printf(true,"E"),
        return((3*j+1)/8)
    )
    elseif mod(j,8)=6 then(
        printf(true,"G"),
        return((3*j+2)/4)
    )
    elseif mod(j,32)=13 then(
        printf(true,"H"),
        return((3*j+9)/16)
    )
    else(
        printf(true,"I"),
        return((j+3)/16)
    )
);
```

```
fminva_print(i):=block(
    if mod(i,2)=0 then(
        printf(true,"J"),
        return(16*i-3)
    )
    else(
        printf(true,"K"),
        return(4*i-2)
    )
);


fminvb_print(i):=block(
    if mod(i,6)=0 then(
        printf(true,"L"),
        return((2*i)/3)
    )
    elseif mod(i,6)=1 then(
        printf(true,"M"),
        return((4*i-1)/3)
    )
    elseif mod(i,6)=2 then(
        printf(true,"N"),
        return((8*i-1)/3)
    )
    elseif mod(i,6)=3 then(
        printf(true,"O"),
        return((16*i-9)/3)
    )
    elseif mod(i,6)=4 then(
        printf(true,"P"),
        return((2*i+1)/3)
    )
    else(
        printf(true,"Q"),
        return((4*i-2)/3)
    )
);


mrank(k):=floor(k/6)+floor((k+7)/8)+floor((k+11)/16)
    +floor((k+14)/24)+floor((k+2)/6)+floor((k+2)/8);
```

F C++ code

```
int fm(int j){
    if(j%4 == 0){
        return (3*j)/2;
    }
    else if(j%8 == 1){
        return (3*j+1)/4;
    }
    else if(j%8 == 2){
        return (j+2)/4;
    }
    else if(j%4 == 3){
        return (3*j-1)/2;
    }
    else if(j%16 ==5){
        return (3*j+1)/8;
    }
    else if(j%8 == 6){
        return (3*j+2)/4;
    }
    else if(j%32 == 13){
        return (3*j+9)/16;
    }
    else{
        return (j+3)/16;
    }
}

int fminva(int i){
    if(i%2 == 0){
        return 16*i-3;
    }
    else{
        return 4*i-2;
    }
}

int fminvb(int i){
    if(i%6 == 0){
        return (2*i)/3;
    }
    else if(i%6 == 1){
        return (4*i-1)/3;
    }
    else if(i%6 == 2){
        return (8*i-1)/3;
    }
    else if(i%6 == 3){
        return (16*i-9)/3;
    }
    else if(i%6 == 4){
        return (2*i+1)/3;
    }
    else{
        return (4*i-2)/3;
    }
}
```