Konvergenz des NEWTON-Verfahrens

Robert Beinert
Technische Universität Berlin

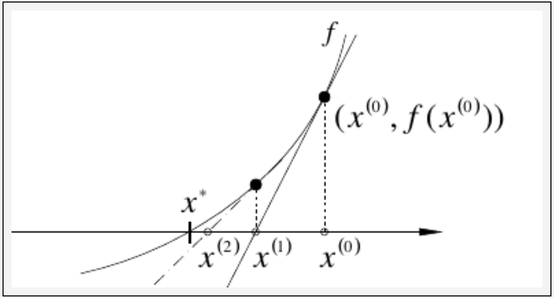
Eindimensionales NEWTON-Verfahren

- **Ziel:** Finde eine Nullstelle x^* der stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- **Ansatz:** Iteratives Linearisieren und Nullsetzen:

$$f(x) \approx f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0.$$

- Umstellen liefert die NEWTON-Iteration

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$



- **Ziel:** Finde eine Nullstelle x^* der stetig differenzierbaren Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Die Ableitung ist gegeben durch die JACOBI-Matrix

$$J_F(x) := \left(\frac{\partial F_j(x)}{\partial x_k}\right)_{j,k=1}^{N}.$$

- **Ansatz:** Iteratives Linearisieren und Nullsetzen:

$$F(x) \approx F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0.$$

- Umstellen liefert die NEWTON-Iteration

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - \left(J_F(x^{(k)})\right)^{-1} F(x^{(k)}).$$

- **Numerische Umsetzung:**
  1. Löse $J_F(x^{(k)})\,\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$.
  2. Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.

Abbruchkriterium

- Das NEWTON-Verfahren wird abgebrochen, sobald
  1. die Iteration stagniert, d.h.
  $$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_2 < \delta,$$
  2. die Funktionswerte verschwinden, d.h.
  $$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})\|_2 < \epsilon,$$
  3. oder die maximale Anzahl an Iterationen erreicht ist, d.h.
  $$k > K.$$
- Hierbei sind $\delta, \epsilon > 0$ und $K \in \mathbb{N}$ geeignete Konstanten.

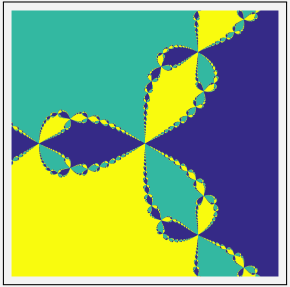
Die d-te Einheitswurzel

- Das Newton-Verfahren kann auch auf komplexe differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ angewendet werden.
- **Ziel:** Finde eine d-te Einheitswurzel, d.h. eine Lösung von

$$z^d = 1 \qquad \text{oder} \qquad z^d - 1 = 0.$$

- Die Newton-Iteration ist hier

$$z^{(k+1)} := z^{(k)} - \frac{(z^{(k)})^d - 1}{d\,(z^{(k)})^{d-1}} = \frac{1}{d}\left((d-1)\,z^{(k)} + \frac{1}{(z^{(k)})^{d-1}}\right).$$



- **Ziel:** Finde ein Minimum $\boldsymbol{x}^*$ der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Die ersten beiden Ableitungen sind gegeben durch Gradient und HESSE-Matrix

$$\nabla F(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\right)_{k=1}^{N} \qquad \text{und} \qquad H_F(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial^2 F_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{j,k=1}^{N}.$$

- Wende das NEWTON-Verfahren auf den Gradienten an:

$$\nabla F(x) \approx \nabla F(\boldsymbol{x}^{(k)}) + H_F(\boldsymbol{x}^{(k)})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k)}) = \boldsymbol{0}.$$

- Umstellen liefert die NEWTON-Iteration

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{x}^{(k)} - \left(H_F(\boldsymbol{x}^{(k)})\right)^{-1} \nabla F(\boldsymbol{x}^{(k)}).$$

- **Numerische Umsetzung:**
  1. Löse $H_F(\boldsymbol{x}^{(k)})\, \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\nabla F(\boldsymbol{x}^{(k)})$.
  2. Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$.

- **Ziel:** Finde ein Minimum x^* der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- **Alternativer Ansatz:**
  1. TAYLOR-Entwicklung bis zum quadratischen Glied
  $$F(x) \approx F(x^{(k)}) + \nabla F(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \tfrac{1}{2}\,(x - x^{(k)})^{\mathsf{T}} H_F(x^{(k)})(x - x^{(k)}).$$
  2. Minimieren durch Nullsetzen der Ableitung
  $$\nabla F(x^{(k)}) + H_F(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = \mathbf{0}.$$
- Umstellen liefert die NEWTON-Iteration
$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - \left(H_F(x^{(k)})\right)^{-1} \nabla F(x^{(k)}).$$
- Dieser Ansatz erfordert, dass $H_F(x^{(k)})$ positiv definit ist!
- Das NEWTON-Verfahren konvergiert nur zu stationären Punkten.