TU Berlin – FG Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Gabriele Steidl
Dr. Robert Beinert, Dr. Marzieh Hasannasab, Dr. Michael Quellmalz

Numerische Mathematik I
Wintersemester 2020/21

Programmieraufgabe 4

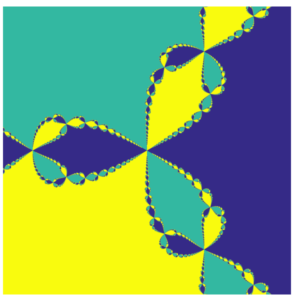
In dieser Programmieraufgabe werden wir das Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen und Minimierern implementieren.

1. Schreibe eine Funktion `newton(F, dF, x0, delta, epsilon, maxIter)`, welche das Newton-Verfahren für die Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (`F`), deren Ableitung J_F (`dF`) und den Startwert $x^{(0)}$ (`x0`) ausführt. Die Parameter δ (`delta`) und ϵ (`epsilon`) sind die Genauigkeiten für das Abbruchkriterium und `maxIter` die Anzahl der maximalen Iterationen. Implementiere die letzten drei Parameter optional mit Standardwerten $\delta = \epsilon = 10^{-4}$ und maximal 100 Iterationen.

2. Verwende das implementierte Newton-Verfahren, um die Nullstellen der Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - 2x$$
zu bestimmen. Verwende hierfür die Startwerte $x^{(0)} = 0{,}1$, $x^{(0)} = 2$ und $x^{(0)} = -2$, die Toleranzen $\delta = \epsilon = 10^{-10}$ und maximal 50 Iterationen. Stelle die Funktion f auf dem Interval $[-2{,}1; 2{,}2]$ grafisch dar und markiere die berechneten Nullstellen.

3. Verwende das implementierte Newton-Verfahren, um die Nullstellen der Funktion
$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 \\ \frac{3}{4}\, e^{-x_1} - x_2 \end{pmatrix}$$
zu bestimmen. Verwende hierfür den Startwert $x^{(0)} = (0{,}08; 0{,}7)^T$. Gib das Ergebnis auf den Bildschirm aus.

4. Verwende das implementierte Newton-Verfahren, um die Gleichung
$$z^3 = 1$$
mit $z \in \mathbb{C}$ zu lösen. Das Ergebnis, eine der dritten Einheitswurzeln, hängt maßgeblich vom gewählten Startwert ab. Um das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens zu untersuchen, diskretisiere die Menge $B_\infty = \{x + iy : -1 \le x, y \le 1\}$ in x- und y-Richtung jeweils durch 512 äquidistante Punkte. Verwende diese als Startwerte für das Newton-Verfahren mit $\delta = \epsilon = 10^{-5}$ und maximal 15 Iterationen. Erzeuge aus den Ergebnissen ein Farbbild, wobei alle Gitterpunkte, die gegen dieselbe Einheitswurzel konvergieren, die gleiche Farbe haben. Beispielsweise:



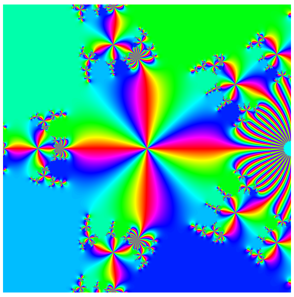
 Abgabe am: 3. Februar 2021

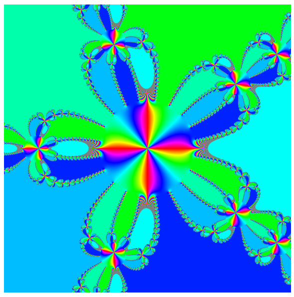
Hinweis: Es kann hier Startwerte geben, für welche das Newton-Verfahren nicht konvergiert.

5. Verwende das implementierte Newton-Verfahren, um die Gleichung

$$z^5 = 1,$$

mit $z \in \mathbb{C}$ zu lösen. Wähle als Startwerte wieder die Gitterpunkte des diskretisierten Balls B_∞. Für die restlichen Parameter verwende $\delta = \epsilon = 10^{-14}$ und starte das Newton-Verfahren einmal mit 5 maximalen Iterationen und einmal mit 15 maximalen Iteration. Erzeuge für beide Experimente aus den Ergebnissen jeweils ein Farbbild, wobei der Farbwert die Phase[1] des Ergebnisses repräsentiert. Beispielsweise:





Hinweis: Es kann hier Startwerte geben, für welche das Newton-Verfahren nicht konvergiert.

6. Verwende das implementierte Newton-Verfahren, um die Funktion

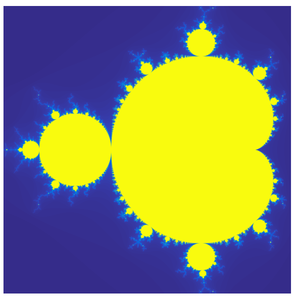
$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x_1+1)^4 + (x_2-1)^4$$

zu minimieren. Verwende hierfür den Startwert $x^{(0)} = (-1{,}1; 1{,}1)^T$ und gebe das Ergebnis auf den Bildschirm aus.

7. Betrachte die Iteration

$$z^{(k+1)} = (z^{(k)})^2 + c \qquad \text{mit} \qquad z^{(0)} = c$$

für ein $c \in \mathbb{C}$. Als Startwerte verwende die Gitterpunkte der Menge $M \coloneqq \{x + iy : -1.5 \le x \le 0.5, -1 \le y \le 1\}$, wobei in x- und y-Richtung mit 1024 äquidistanten Punkten diskretisiert wird. In manchen Punkten konvergiert diese Folge, in anderen divergiert sie. Um dies grafisch darzustellen, bestimme für jeden Gitterpunkt c die Anzahl der Iterierten, deren Betrag kleiner oder gleich 2 ist. Führe für jeden Punkt maximal 256 Iterationen aus. Beispielsweise:



[1] Die Phase $\varphi \in [-\pi, \pi)$ ist der Winkel in der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$.

Verwende außer `skimage`, `numpy` und `matplotlib` keine weiteren Pakete. Kommentiere den Quellcode! Füge deiner Abgabe ein Hauptprogramm (Python-Skript) bei, welches eigenständig alle Ausgaben erzeugt. Beschrifte die Ausgaben direkt oder erläutere in einer Readme-Datei in welcher Reihenfolge die Ausgaben erfolgen.