Лабораторная работа №3

Метод золотого сечения

Метод золотого сечения

Постановка задачи

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Для построения конкретного метода одномерной минимизации, работающего по принципу последовательного сокращения интервала неопределенности, следует задать правило выбора на каждом шаге двух внутренних точек. Конечно, желательно, чтобы одна из них всегда использовалась в качестве внутренней и для следующего интервала. Тогда число вычислений функции сократится вдвое и одна итерация потребует расчета только одного нового значения функции. В методе золотого сечения в качестве двух внутренних точек выбираются точки золотого сечения.

Определение 5.3. Точка производит *"золотое сечение" отрезка*, если отношение длины всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей.

На отрезке $[a_0, b_0]$ имеются две симметричные относительно его концов точки y_0 и z_0:

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - y_0} = \frac{b_0 - y_0}{y_0 - a_0} = \frac{b_0 - a_0}{z_0 - a_0} = \frac{z_0 - a_0}{b_0 - z_0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618 .$$

Кроме того, точка y_0 производит золотое сечение отрезка $[a_0, z_0]$, а точка z_0 - отрезка $[y_0, b_0]$ (рис. 5.8).

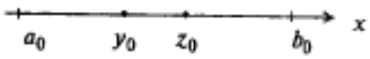


Рис. 5.8

Стратегия поиска

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм уменьшения интервала опирается на анализ значений функции в двух точках (см. рис. 5.2). В качестве точек вычисления функции выбираются точки золотого сечения. Тогда с учетом свойств золотого сечения на каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, точность $l > 0$.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить

$$y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0); \quad z_0 = a_0 + b_0 - y_0, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}38196 .$$

Шаг 4. Вычислить $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 5. Сравнить $f(y_k)$ и $f(z_k)$:

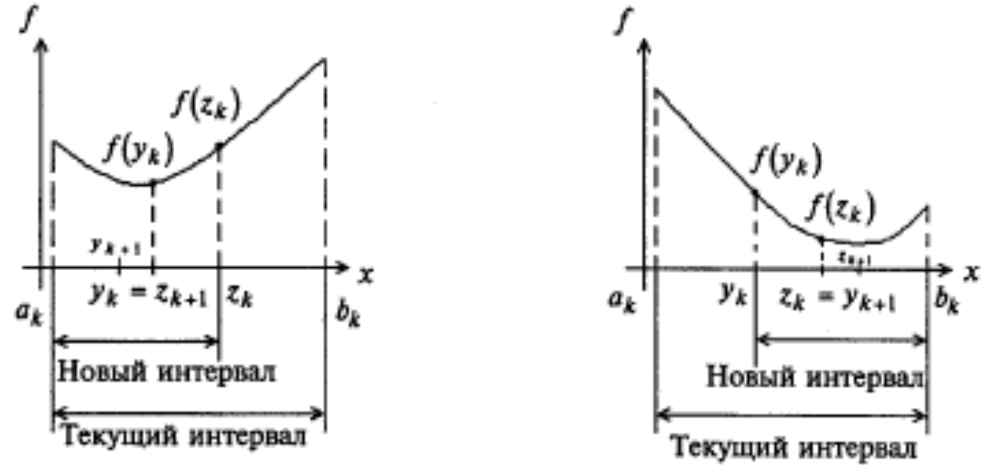
а) если $f(y_k) \le f(z_k)$, то положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$ и $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$, $z_{k+1} = y_k$ (рис. 5.9, *а*). Перейти к шагу 6;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$ и $y_{k+1} = z_k$, $z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$ (рис. 5.9, *б*).

Шаг 6. Вычислить $\Delta = |a_{k+1} - b_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

а) если $\Delta \le l$, процесс поиска завершается и $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала: $x^* \cong \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$;

б) если $\Delta > l$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 4.



а *б*

Рис. 5.9

Сходимость

Для метода золотого сечения характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = (0{,}618)^{N-1}$, где N - количество вычислений функции.

З а м е ч а н и я 5.6.

1. Текущие интервалы неопределенности имеют следующий вид: $L_0, L_2, L_3, L_4, \ldots$. Они отражают тот факт, что на первой итерации производится два вычисления функции, а на последующих - по одному.

2. Сокращение длины интервала неопределенности постоянно:

$$\frac{|L_0|}{|L_2|} = \frac{|L_2|}{|L_3|} = \frac{|L_3|}{|L_4|} = \ldots = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618.$$

3. Если задана величина $R(N)$, то требуемое для достижения желаемой точности количество вычислений функции находится как наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $N \ge 1 + \dfrac{\ln R(N)}{\ln 0{,}618}$.

Варианты заданий

1. Методом золотого сечения решить задачу:
$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

2. Методом золотого сечения решить задачу:
$$f(x) = x^2 + 6x + 12 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

3. Методом золотого сечения решить задачу:
$$f(x) = 2x^2 - 2x + 14 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

4. Методом золотого сечения решить задачу:
$$f(x) = x^2 - 4x - 2 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

5. Методом золотого сечения решить задачу:
$$f(x) = (x - 2)^2 + x - 2 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

6. Методом золотого сечения решить задачу:
$$f(x) = (2x + 3)^2 - 8x - 10 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

7. Методом золотого сечения решить задачу:
$$f(x) = (x + 1)^2 + 2x + 1 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

8. Методом золотого сечения задачу:
$$f(x) = x^2 + 6x + 5(x - 1)^3 + 2 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

9. Методом золотого сечения задачу:

$$f(x) = e^{2x} - 6x^2 - 2x + 14 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

10. Методом золотого сечения задачу:

$$f(x) = 2e^{x} - 2x + 4x^2 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

11. Методом золотого сечения задачу:

$$f(x) = 4(x-5)^2 + e^{x}(x-6)^2 \to min$$

Интервал неопределённости [0,6].

12. Методом золотого сечения задачу:

$$f(x) = 2x + \ln(x) + x^2 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

13. Методом золотого сечения задачу:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

14. Методом золотого сечения задачу:

$$f(x) = (x-2)^2 + (2x-5)^2 + (x+2)^3 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

15. Методом золотого сечения решить задачу:

$$f(x) = 5x^2 - 2x + 1 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

16. Методом золотого сечения решить задачу:

$$f(x) = 2x^2 + 9x + 12 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

17. Методом золотого сечения решить задачу:

$$f(x) = 5x^2 - 2x + 3 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

18. Методом золотого сечения решить задачу:

$$f(x) = 7x^2 - 2x - 2 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

19. Методом золотого сечения решить задачу:

$$f(x) = (2x - 3)^2 + 6x - 1 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

20. Методом золотого сечения решить задачу:

$$f(x) = (6x + 3)^2 - 2x - 1 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

21. Методом золотого сечения решить задачу:

$$f(x) = (x + 1)^2 - 7x + 6 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

22. Методом золотого сечения задачу:

$$f(x) = 6x^2 + 2x + 4(x - 3)^3 + 2 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

23. Методом золотого сечения задачу:

$$f(x) = e^x - 6x^3 - 4x + 2 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

24. Методом золотого сечения задачу:

$$f(x) = 2e^{5x} - 6x + 2x^3 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

25. Методом золотого сечения решить задачу:

$$f(x) = (x - 7)^3 + 2x + 1 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].