Лабораторная работа №2

Метод деления интервала пополам

Постановка задачи

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Стратегия поиска

Метод относится к последовательным стратегиям и позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации в точности половину текущего интервала неопределенности. Задается начальный интервал неопределенности, а алгоритм уменьшения интервала, являясь, как и в общем случае, "гарантирующим" (см. рис. 5.2), основан на анализе величин функции в трех точках, равномерно распределенных на текущем интервале (делящих его на четыре равные части). Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$ и $l > 0$ - требуемую точность.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить среднюю точку $x_k^c = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, $|L_{2k}| = b_k - a_k$, $f(x_k^c)$.

Шаг 4. Вычислить точки: $y_k = a_k + \dfrac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = b_k - \dfrac{|L_{2k}|}{4}$ и $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Заметим, что точки y_k, x_k^c, z_k делят интервал $[a_k, b_k]$ на четыре равные части.

Шаг 5. Сравнить значения $f(y_k)$ и $f(x_k^c)$:

а) если $f(y_k) < f(x_k^c)$, исключить интервал $(x_k^c, b_k]$, положив $b_{k+1} = x_k^c$, $a_{k+1} = a_k$. Средней точкой нового интервала становится точка y_k: $x_{k+1}^c = y_k$ (рис. 5.4, *а*). Перейти к шагу 7;

б) если $f(y_k) \ge f(x_k^c)$, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Сравнить $f(z_k)$ с $f(x_k^c)$:

а) если $f(z_k) < f(x_k^c)$, исключить интервал $[a_k, x_k^c)$, положив $a_{k+1} = x_k^c$, $b_{k+1} = b_k$. Средней точкой нового интервала становится точка z_k: $x_{k+1}^c = z_k$ (рис. 5.4, *б*). Перейти к шагу 7;

б) если $f(z_k) \ge f(x_k^c)$, исключить интервалы $[a_k, y_k)$, $(z_k, b_k]$, положив $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$. Средней точкой нового интервала останется x_k^c: $x_{k+1}^c = x_k^c$ (рис. 5.4, *в*).

Шаг 7. Вычислить $\left|L_{2(k+1)}\right| = \left|b_{k+1} - a_{k+1}\right|$ и проверить условие окончания:

а) если $\left|L_{2(k+1)}\right| \le l$, процесс поиска завершается и $x^* \in L_{2(k+1)} = \left[a_{k+1}, b_{k+1}\right]$. В качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала: $x^* \cong x_{k+1}^c$;

б) если $\left|L_{2(k+1)}\right| > l$, то положить $k = k+1$ и перейти к шагу 4.

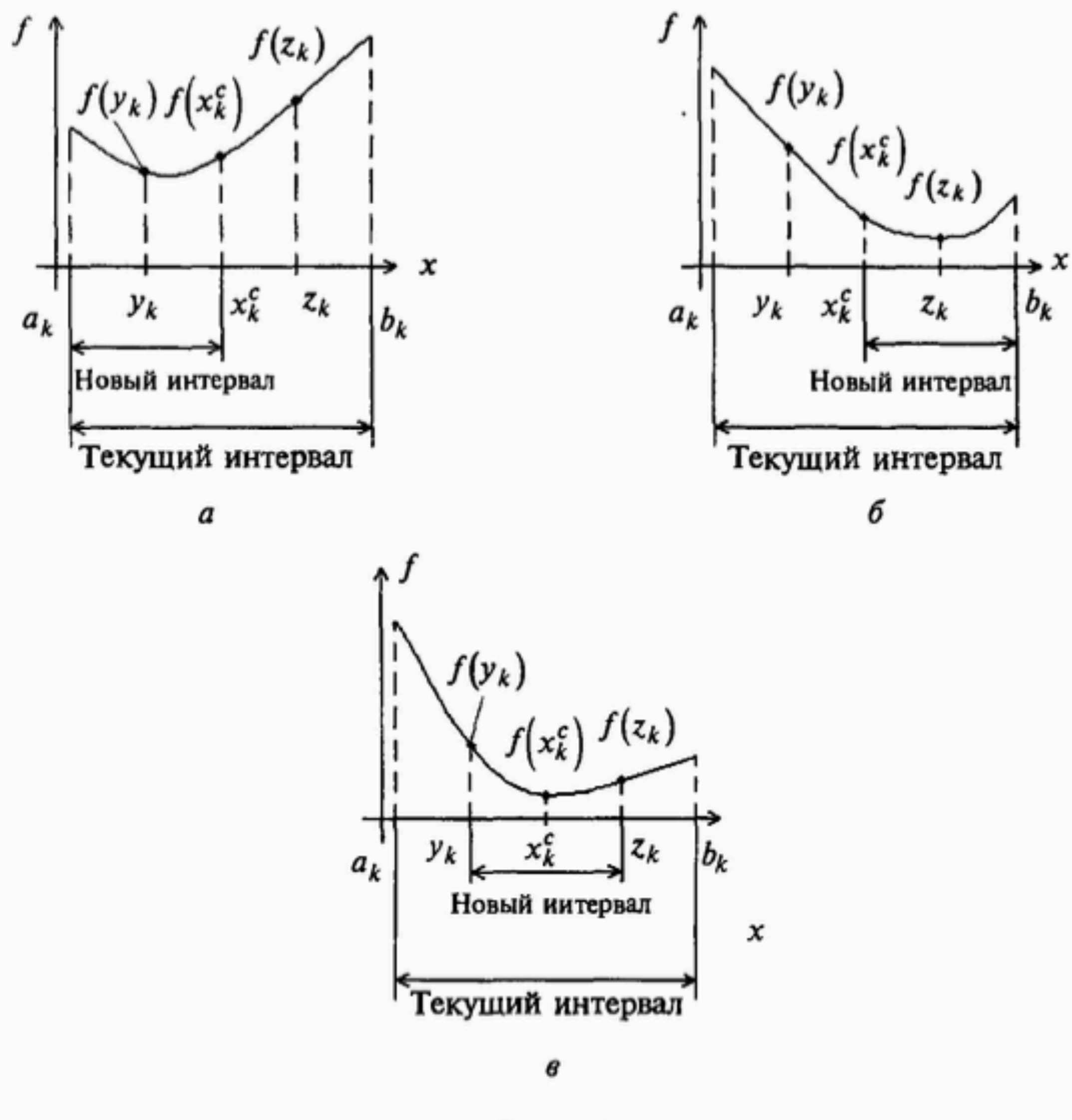

Рис. 5.4

Сходимость

Для метода деления интервала пополам характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$, где N - количество вычислений функции.

Варианты заданий

1. Методом деления интервала пополам решить задачу:
$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

2. Методом деления интервала пополам решить задачу:
$$f(x) = x^2 + 6x + 12 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

3. Методом деления интервала пополам решить задачу:
$$f(x) = 2x^2 - 2x + 14 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

4. Методом деления интервала пополам решить задачу:
$$f(x) = x^2 - 4x - 2 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

5. Методом деления интервала пополам решить задачу:
$$f(x) = (x-2)^2 + x - 2 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

6. Методом деления интервала пополам решить задачу:
$$f(x) = (2x+3)^2 - 8x - 10 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

7. Методом деления интервала пополам решить задачу:
$$f(x) = (x+1)^2 + 2x + 1 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

8. Методом деления интервала пополам задачу:
$$f(x) = x^2 + 6x + 5(x-1)^3 + 2 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

9. Методом деления интервала пополам задачу:
$$f(x) = e^{2x} - 6x^2 - 2x + 14 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

10. Методом деления интервала пополам задачу:
$$f(x) = 2e^x - 2x + 4x^2 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

11. Методом деления интервала пополам задачу:
$$f(x) = 4(x-5)^2 + e^x(x-6)^2 \to min$$
Интервал неопределённости [0,6].

12. Методом деления интервала пополам задачу:
$$f(x) = 2x + \ln(x) + x^2 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

13. Методом деления интервала пополам задачу:
$$f(x) = x^3 + x^2 - 3 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

14. Методом деления интервала пополам задачу:
$$f(x) = (x-2)^2 + (2x-5)^2 + (x+2)^3 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

15. Методом деления интервала пополам решить задачу:
$$f(x) = 5x^2 - 2x + 1 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

16. Методом равномерного поиска решить задачу:
$$f(x) = 2x^2 + 9x + 12 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

17. Методом деления интервала пополам решить задачу:

$$f(x) = 5x^2 - 2x + 3 \to min$$
Интервал неопределённости [-6,6].

18. Методом деления интервала пополам решить задачу:

$$f(x) = 7x^2 - 2x - 2 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

19. Методом деления интервала пополам решить задачу:

$$f(x) = (2x - 3)^2 + 6x - 1 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

20. Методом деления интервала пополам решить задачу:

$$f(x) = (6x + 3)^2 - 2x - 1 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

21. Методом деления интервала пополам решить задачу:

$$f(x) = (x + 1)^2 - 7x + 6 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

22. Методом деления интервала пополам задачу:

$$f(x) = 6x^2 + 2x + 4(x - 3)^3 + 2 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

23. Методом деления интервала пополам задачу:

$$f(x) = e^x - 6x^3 - 4x + 2 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

24. Методом деления интервала пополам задачу:

$$f(x) = 2e^{5x} - 6x + 2x^3 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].

25. Методом деления интервала пополам решить задачу:

$$f(x) = (x - 7)^3 + 2x + 1 \to min$$

Интервал неопределённости [-6,6].