Самостоятельная работа 4

Вариант 1 «Исследование алгоритма наименьших квадратов при линейной параметризации моделей»

Входные параметры: структура линейного объекта, свойства помехи приложенной к выходу объекта (нормально распределенная величина с нулевым математическим ожиданием и некоторой дисперсией помехи).

Модель объекта задана в виде линейной комбинации известных (базисных) функций $\varphi_1(u),...,\varphi_m(u)$:

$$\eta(u,\alpha)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(u)\alpha_j=\varphi^T(u)\alpha=\alpha^T\varphi(u),\ \alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \dots\\ \alpha_m\end{pmatrix},\ \varphi(u)=\begin{pmatrix}\varphi_1(u)\\ \dots\\ \varphi_m(u)\end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец значений выхода модели (в моменты времени $i=1,\dots,n$) имеет вид:

$$H(\alpha)=\begin{pmatrix}\varphi^T(u_1)\alpha\\ \dots\\ \varphi^T(u_n)\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi^T(u_1)\\ \dots\\ \varphi^T(u_n)\end{pmatrix}\alpha=\begin{pmatrix}\varphi_1(u_1)\ \varphi_2(u_1)\ \dots\ \varphi_m(u_1)\\ \dots\\ \varphi_1(u_n)\varphi_2(u_n)\dots\varphi_m(u_n)\end{pmatrix}\alpha=\Phi\alpha.$$

Параметры α находим по критерию наименьших квадратов

$$I(\alpha)=(H^*-\Phi\alpha)^{-T}K^{-1}(H^*-\Phi\alpha)=\min_{\alpha}$$

Необходимое условие минимума $\nabla I=0$ (где ∇I – градиент от $I(\alpha)$ по α) приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\Phi^T K^{-1}\Phi\alpha=\Phi^T K^{-1}H^*,$$

которая имеет единственное решение, если матрица $\Phi^T K^{-1}\Phi$ невырождена. Эта матрица вырождается, если: 1) либо базисные функции линейно зависимы, 2) либо число изменений n меньше числа m искомых параметров ($n<m$), 3) либо измерения не информативны. Запишем теперь решение системы:

$$\alpha=(\Phi^T K^{-1}\Phi)^{-1}\Phi^T K^{-1}H^*=N_0H^*$$

Для частного случая, когда помеха ξ некоррелирована и измерения равноточные и при использовании понятия скалярного произведения функций:

$$(\varphi_l, \varphi_k) = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^{n} \varphi_l(u_i) \varphi_k(u_i), \; (\varphi_l, \eta^*) = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^{n} \varphi_l(u_i) \eta_i^* .$$

Получаем систему:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) \ldots (\varphi_1, \varphi_m) \\ \ldots \\ (\varphi_m, \varphi_1) \ldots (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \eta^*) \\ \ldots \\ (\varphi_m, \eta^*) \end{pmatrix}$$

Если измерения выхода объекта некоррелированы, но неравноточны, то система сохраняет свой вид. Меняется лишь понятие скалярного произведения (в него вводятся веса $\sigma_i^{-2}, \; i = \overline{1, n}$):

$$(\varphi_l, \varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_l(u_i) \sigma_i^{-2} \varphi_k(u_i), \; (\varphi_l, \eta^*) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_l(u_i) \sigma_i^{-2} \eta_i^* .$$

Далее рассчитываем параметры модели, решая полученную систему уравнений, которая зачастую распадается на m независимых уравнений.

Набор моделей для реализации в рамках расчетно-графической работы:

1. $\eta(u, \alpha) = \alpha$

2. $\eta(u, \alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 (u - \overline{u}), \overline{u} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u_i$

3. $\eta(u, \alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 u_1 + \alpha_2 u_2$

4. $\eta(u_1, u_2) = \overline{\eta}^* + \alpha_1 (u_1 - \overline{u}_1) + \alpha_2 (u_2 - \overline{u}_2)$

где $\overline{\eta}^* = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \eta_{ij}, \; \overline{u}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_{1i}, \; \overline{u}_2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} u_{2j}$.

5. Разработать две линейные модели по тому же принципу что и выше приведенные самостоятельно.

При расчете параметров модели реализовать два вариант генерации помехи: равноточный и не равноточный случаи.

Вариант 2 «Исследование простейшего алгоритма адаптивной идентификации параметров моделей»

При **линейной** параметризации модели $(\eta(u,\alpha) = \varphi^T(u)\alpha)$ на итерациях с номерами n и $n-1$ параметры модели вычисляются из условия равенства выходов модели и объекта:

$$\eta_n^* = \varphi^T(u_n)\alpha_n,$$

$$\eta_{n-1}^* = \varphi^T(u_{n-1})\alpha_{n-1}.$$

Алгебраический вид этого алгоритма (с использованием операции псевдообращения матриц) имеет вид:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{(\eta_n^* - \varphi^T(u_n)\alpha_{n-1})}{\varphi^T(u_n)\varphi(u_n)}\varphi(u_n) =$$

$$= \alpha_{n-1} + (\eta_n^* - \varphi^T(u_n)\alpha_{n-1})(\varphi^T(u_n))^+, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь знак "+" – псевдообращения (обобщенного обращения) матрицы.

Если есть аддитивная помеха, т. е. $\eta_n^* = \varphi^T(u_n)a + \xi_n$, то из алгоритма перестройки параметров следует, что

$$\alpha_n \underset{n\to\infty}{--\!>} a + \frac{\xi_n}{\varphi^T(u_n)\varphi(u_n)}\varphi(u_n).$$

Дополнительная помеха в оценках параметров асимптотически не убывает и для ее нейтрализации необходимо применять дополнительно сглаживание (последовательный пересчёт оценок математического ожидания) получаемых оценок $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Сглаживание помех можно осуществлять по одному из перечисленных алгоритмов:

1) С учетом экспоненциального забывания информации

$$\alpha_n = (\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i})^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\alpha_i = \alpha_{n-1} + \delta_n^{-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$\delta_n = 1 + \lambda\delta_{n-1}, \delta_0 = 0,\ n = 1, 2, ...,$$

$$0 < \lambda < 1, \text{ например, } 0.9 \le \lambda \le 0.995.$$

2) Метод скользящего среднего

$$\hat{\alpha}_n = k^{-1}\sum_{i=n+1-k}^{n}\alpha_i = \hat{\alpha}_{n-1} + k^{-1}(\alpha_n - \alpha_{n-k}),$$

$$n = k+1,\ k+2, ...,$$

где, k – количество усредняемых значений.

3)

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + n^{-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1}),\ n = 1, 2, \dots .$$

4) Применение в алгоритме адаптивного пересчета дополнительного положительного параметра γ :

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \gamma \frac{(\eta_n^* - \varphi^T(u_n)\alpha_{n-1})}{\varphi^T(u_n)\varphi(u_n)} \varphi(u_n),\ \ \gamma > 0,\ \ n = 1, 2, \ldots;$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{(\eta_n^* - \varphi^T(u_n)\alpha_{n-1})}{\gamma + \varphi^T(u_n)\varphi(u_n)} \varphi(u_n),\ \ \gamma > 0,\ \ n = 1, 2, \ldots.$$

При **нелинейной** параметризации модели $\eta(u, \alpha)$ на каждом шаге модель линеаризуется и приращения параметров находится из равенства выхода модели и линеаризованной модели

$$\eta_n^* = \eta(u_n, \alpha_{n-1}) + \nabla_\alpha^T \eta(u_n, \alpha_{n-1}) \Delta\alpha_n$$

с учетом того же критерия минимум квадрата нормы приращения

$\|\Delta\alpha_n\|^2 = \min$.

В итоге алгоритм перестройки параметров нелинейной модели приобретает вид:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{(\eta_n^* - \eta(u_n, \alpha_{n-1}))}{\nabla_\alpha^T \eta(u_n, \alpha_{n-1}) \nabla_\alpha \eta(u_n, \alpha_{n-1})} \nabla_\alpha \eta(u_n, \alpha_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots.$$

Имитация объекта

1. Формирование сигнальной части объекта.
2. Формирование аддитивной помехи (метод полярных координат)