Optimisation Numérique

Département de Mathématiques
Master Mathématiques

Sommaire

Programmation Linéaire I
L'Algorithme du Simplexe

Algorithme du Simplexe

1. Choisir une base réalisable B et poser $k = 0$.
2. A l'étape k on a une base B et la solution de base correspondante $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$. On calcule
$$\bar{b} = B^{-1}b, \quad \pi = c_B^\top B^{-1}, \quad \bar{c}_N = c_N^\top - \pi N.$$
3. Si $\bar{c}_N \geq 0$, stop, le minimum est atteint.

Programmation Linéaire II
L'Algorithme du Simplexe

Sinon il existe un indice s tel que $\bar{c}_s < 0$. Soit a_s la colonne de A d'indice s. Calculer $\bar{a}_s := B^{-1}a_s$.

- Si $\bar{a}_s \leq 0$, stop ; le minimum égal à $-\infty$.
- Sinon, calculer
$$\hat{x}_s := \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \mid \bar{a}_{is} > 0 \right\}.$$

4. Chercher la variable x_t correspondant à la colonne r de B (l'indice de cette variable est donné par par l'indice de la colonne $Be_r = a_t$ dans A). La variable d'indice s prend la valeur $\hat{x}_s$ et rentre en base et la colonne d'indice t s'annule et sort de la base. On construit ensuite la nouvelle base réalisable en remplaçant la colonne a_t de A par a_s.
5. Faire $k \leftarrow k + 1$ et retourner à 2.

Programmation Linéaire III

L'Algorithme du Simplexe

Exemple

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min z = -3x_1 + 2x_2 \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

L'Algorithme du Simplexe

Programmation Linéaire IV

L'Algorithme du Simplexe

La forme standard de $(\mathcal{L})$ est

$$\begin{cases} \min z = -3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_2 - x_6 = 1, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

$$c = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'Algorithme du Simplexe

Programmation Linéaire V

L'Algorithme du Simplexe

Soit

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les variables de base sont x_2, x_3, x_4 et x_5.

$$c_{B_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top, \quad c_{N_0} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix}^\top,$$

L'Algorithme du Simplexe

Programmation Linéaire VI

L'Algorithme du Simplexe

$$\bar{b} = B_0^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \pi = c_{B_0}^\top B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\pi N_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_{N_0} = c_{N_0}^\top - \pi N_0 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\bar{c}_1 = -3 < 0$ et $\bar{c}_1$ correspond à la variable hors-base x_1. La colonne a_1 rentre en base.

$$\bar{a}_1 = B_0^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Programmation Linéaire VII

L'Algorithme du Simplexe

$$\hat{x}_1 := \min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \mid \bar{a}_{is} > 0\right\} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}}, \quad B_0 e_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

La variable x_3 quitte la base. La nouvelle base est alors

$$B = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

et les variables de base sont x_1, x_2, x_4 et x_5.

Programmation Linéaire VIII

L'Algorithme du Simplexe

$$c_B = \begin{pmatrix}-3 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top \text{ et } c_N = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^\top.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&-1\\-1&0&1&-1\end{pmatrix}, \quad \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix}4\\1\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$\pi = c_B^\top B^{-1} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}, \quad \pi N = \begin{pmatrix}-3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N = c_N^\top - \pi N = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}.$$

On a $\bar{c}_N \geq 0$ et donc B est une base réalisable optimale ; et $x^* = \begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}$. La valeur minimale du problème est $z^* = z(x^*) = -10$.

Programmation Linéaire I

Changement de Base

Deux bases consécutives construites par l'algorithme du simplexe sont adjacentes. C'est à dire qu'elles ne diffèrent que par une seule colonne. Si l' on dispose d'une base initiale B_0 et de son inverse B_0^{-1}, on peut calculer l'inverse de la base suivante B à partir de B_0^{-1}. Supposons que B est obtenue en remplaçant la colonne a_r par la colonne a_s. Soit $\bar{a}_s = B_0^{-1} a_s$. On a

$$a_s = B_0\bar{a}_s = \bar{a}_{1s}b_1 + \bar{a}_{2s}b_2 + \ldots + \bar{a}_{rs}b_r + \ldots + \bar{a}_{ms}b_m,$$

où $b_1, b_2, \ldots, b_m$ désignent les colonnes de B. On posera $b_r = a_r$.

Programmation Linéaire II

Changement de Base

On aura donc

$$b_r = \frac{1}{\bar{a}_{rs}}a_s - \frac{\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}}b_1 - \frac{\bar{a}_{2s}}{\bar{a}_{rs}}b_2 - \ldots - \frac{\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}}b_m.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Alors $B_0\alpha = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_r b_r + \ldots + \alpha_m b_m$. En remplaçant b_r par son expression et en arrangeant les termes on obtient

$$\begin{aligned} B_0\alpha = {} & (\alpha_1 - \alpha_r\tfrac{\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}})b_1 + (\alpha_2 - \alpha_r\tfrac{\bar{a}_{2s}}{\bar{a}_{rs}})b_2 + \ldots + \\ & +(\alpha_{r-1} - \alpha_r)\tfrac{\bar{a}_{r-1s}}{\bar{a}_{rs}}b_{r-1} + \tfrac{\alpha_r}{\bar{a}_{rs}}a_s + \\ & +(\alpha_{r+1} - \alpha_r\tfrac{\bar{a}_{r+1s}}{\bar{a}_{rs}})b_{r+1} + \ldots + (\alpha_m - \alpha_r\tfrac{\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}})b_m. \end{aligned}$$

Programmation Linéaire III
Changement de Base

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_r \frac{\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}} \\ \alpha_2 - \alpha_r \frac{\bar{a}_{2s}}{\bar{a}_{rs}} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_r}{\bar{a}_{rs}} \\ \alpha_{r+1} - \alpha_r \frac{\bar{a}_{r+1s}}{\bar{a}_{rs}} \\ \vdots \\ \alpha_m - \alpha_r \frac{\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -\frac{\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -\frac{\bar{a}_{2s}}{\bar{a}_{rs}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\bar{a}_{rs}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\bar{a}_{r+1s}}{\bar{a}_{rs}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

Programmation Linéaire IV
Changement de Base

Donc $B_0\alpha = BE\alpha$, où

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -\frac{\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -\frac{\bar{a}_{2s}}{\bar{a}_{rs}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\bar{a}_{rs}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\bar{a}_{r+1s}}{\bar{a}_{rs}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $B_0 = BE$ et $B^{-1} = EB_0^{-1}$.
La matrice E est la matrice de changement de base.