Optimisation Numérique

Département de Mathématiques
Master Mathématiques

Sommaire

Programmation Linéaire I
Dualité

On considère le programme $(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min z = c^\top x \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème sera appelé programme primal, et on lui associe le programme $(\mathcal{D})$

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max w = b^\top y \\ A^\top y \leq c, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Le problème $(\mathcal{D})$ est appelé programme dual de $(\mathcal{L})$.

Programmation Linéaire I
Dualité

Remarque

Tout programme linéaire peut se mettre sous la forme de $(\mathcal{L})$:

1. $u \leq v$ se transforme en $-u \geq -v$,
2. $u = v$ se transforme en $u \geq v$ et $-u \geq -v$,
3. la contrainte de positivité s'obtient comme pour la forme standard.

Programmation Linéaire I
Dualité

Exemple

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min z = -3x_1 + 2x_2 \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \equiv \begin{cases} \min z = -3x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \geq -4, \\ -x_2 \geq -6, \\ -x_1 - x_2 \geq -5, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$c = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}^\top, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Programmation Linéaire II
Dualité

Son dual s'écrit

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max w = -4y_1 - 6y_2 - 5y_3 + y_4 \\ -y_1 - y_3 \leq -3, \\ -y_2 - y_3 + y_4 \leq 2, \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Programmation Linéaire I
Dualité

Remarque

Le dual du dual $(\mathcal{D})$ est le primal $(\mathcal{L})$.

Le programme $(\mathcal{D})$ s'écrit

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \min -b^\top y \\ -A^\top y \geq -c, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Son dual est

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max -c^\top x \\ (-A^\top)^\top x \leq -b, \\ x \geq 0. \end{cases} \equiv \begin{cases} \min c^\top x \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Programmation Linéaire I
Dualité

1er cas (contraintes mixtes) : Considérons un programme linéaire de la forme suivante

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min c^\top x \\ A_1 x \leq b_1, \\ A_2 x \geq b_2, \\ A_3 x = b_3, \\ x \geq 0. \end{cases} \equiv \begin{cases} \min c^\top x \\ \begin{bmatrix} -A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ -A_3 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} -b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ -b_3 \end{bmatrix} \\ x \geq 0. \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$; A_1, A_2 et A_3 sont respectivement des matrices d'ordre $m_1 \times n$, $m_2 \times n$, $m_3 \times n$; $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ et $b_3 \in \mathbb{R}^{m_3}$.

Programmation Linéaire I
Dualité

Son dual s'écrit

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max \begin{bmatrix} -b_1^\top & b_2^\top & b_3^\top & -b_3^\top \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} -A_1^\top & A_2^\top & A_3^\top & -A_3^\top \end{bmatrix} u \leq c, \\ u \geq 0. \end{cases}$$

On pose

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \text{avec } u_1 \in \mathbb{R}^{m_1},\ u_2 \in \mathbb{R}^{m_2},\ u_3, u_4 \in \mathbb{R}^{m_3}.$$

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max -b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 + b_3^\top u_3 - b_3^\top u_4 \\ -A_1^\top u_1 + A_2^\top u_2 + A_3^\top u_3 - A_3^\top u_4 \leq c, \\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \geq 0. \end{cases}$$

Programmation Linéaire II
Dualité

En posant $y_1 = -u_1$, $y_2 = u_2$ et $y_3 = u_3 - u_4$ le programme devient

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 + b_3^\top y_3 \\ A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 + A_3^\top y_3 \leq c, \\ y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \in \mathbb{R}^{m_3} \text{(sans contrainte de signe).} \end{cases}$$

Programmation Linéaire I
Dualité

2ème cas (contraintes de signes différentes) : Considérons maintenant un programme avec certaines variables sans contraintes de signe.

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min c_1^\top x_1 + c_2^\top x_2 + c_3^\top x_3 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 \geq b, \\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}^{m_3}. \end{cases}$$

Ce programme s'écrit de façon équivalente, en posant $x_1' = -x_1$ et $x_3 = x_3' - x_3''$,

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min -c_1^\top x_1' + c_2^\top x_2 + c_3^\top x_3' - c_3^\top x_3'' \\ -A_1 x_1' + A_2 x_2 + A_3 x_3' - A_3 x_3'' \geq b, \\ x_1',\ x_2,\ x_3',\ x_3'' \geq 0. \end{cases}$$

Programmation Linéaire II
Dualité

On pose

$$x = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2 \\ x_3' \\ x_3'' \end{bmatrix}$$

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min \begin{bmatrix} -c_1^\top & c_2^\top & c_3^\top & -c_3^\top \end{bmatrix} x \\ \begin{bmatrix} -A_1 & A_2 & A_3 & -A_3 \end{bmatrix} x \geq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Son dual est

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max b^\top y \\ A_1^\top y \geq c_1, \\ A_2^\top y \leq c_2, \\ A_3^\top y = c_3, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Programmation Linéaire I
Dualité

Primal	**Dual**
min	max
Second membre b	Second membre c
Objectif c	Objectif b
Contraintes A	Contraintes $A^\top$
Variable $i \quad \geq 0$	Contrainte $i \quad \leq c_i$
Variable $i \quad \leq 0$	Contrainte $i \quad \geq c_i$
Variable i sans contrainte de signe	Contrainte $i \quad = c_i$
Contrainte $i \quad \geq$	Variable $i \quad \geq 0$
Contrainte $i \quad \leq$	Variable $i \quad \leq 0$
Contrainte $i \quad =$	Variable i sans contrainte de signe

Programmation Linéaire II
Dualité

Exemple

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min z = x_1 + 9x_2 + 5x_3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 1, \\ -2x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 1, \\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max w = 6y_1 + y_2 + y_3 \\ 4y_1 + 3y_2 - 2y_3 = 1, \\ 6y_1 - 2y_2 + 9y_3 \geq 9, \\ 2y_1 + 3y_2 + 8y_3 \leq 5, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0. \end{cases}$$

Programmation Linéaire III
Dualité

Exemple

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min z = c^\top x \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max w = b^\top y \\ A^\top y \leq c. \end{cases}$$

Programmation Linéaire I
Interprétation Economique

Interprétation économique

1. Une entreprise E1 peut fabriquer n produits
2. des quantités x_j, $j = 1, \dots, n$
3. à partir de m ressources b_i (quantité disponible), $i = 1, \dots, m$
4. chaque unité du produit j consomme la quantité a_{ij} de la ressource b_i
5. le profit unitaire de chaque produit j est c_j
6. la quantité totale consommée du produit i est $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j$
7. l'entreprise doit maximiser $\sum_{j=1}^m c_j x_j$ avec les contraintes que $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i$, pour $i = 1, \dots, m$

Programmation Linéaire II
Interprétation Economique

L'entreprise doit résoudre

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^m c_j x_j \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \equiv \begin{cases} \max c^\top x \\ Ax \le b, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Programmation Linéaire I
Interprétation Economique

1. Supposons qu'une autre entreprise E2 veut racheter les ressourses b_i, $i = 1, \dots, m$ à des prix unitaires y_i
2. L'entreprise E2 doit minimiser le prix $\sum_{i=1}^m b_i y_i$ à payer à l'entreprise E1
3. l'entreprise E1 ne veut vendre les quantités a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, nécessaires pour la fabrication du produit j que si $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \ge c_j$

L'entreprise E2 doit résoudre

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1, \dots, n \\ y_i \ge 0, \quad 1 = 1, \dots, m. \end{cases} \equiv \begin{cases} \min b^\top y \\ A^\top y \ge c, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Programmation Linéaire II
Interprétation Economique

Conclusion

Les deux programmes à résoudre par les deux entreprises E1 et E2 sont duaux.

$$\text{E1} \quad \begin{cases} \max c^\top x \\ Ax \le b, \\ x \ge 0. \end{cases} \qquad \text{E2} \quad \begin{cases} \min b^\top y \\ A^\top y \ge c, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Programmation Linéaire I
Théorème de Dualité

On considère maintenant le programme $(\mathcal{L})$ sous sa forme standard

$$\text{Primal} \quad (\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min c^\top x \\ Ax = b, \\ x \ge 0. \end{cases} \qquad \text{Dual} \quad (\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max b^\top y \\ A^\top y \le c. \end{cases}$$

Théorème

Soit x un point réalisable pour le primal $(\mathcal{L})$, et y un point réalisable pour le dual $(\mathcal{D})$. Alors $c^\top x \ge b^\top y$.

Programmation Linéaire I
Théorème de dualité

Preuve

On a $A^\top y \leq c$ puisque y est réalisable pour le dual. Donc $x^\top A^\top y \leq x^\top c = c^\top x$. D'où $b^\top y \leq c^\top x$ puisque x est réalisable pour le primal ($Ax = b$ et $x \geq 0$).

Programmation Linéaire I
Théorème de dualité

Théorème

Si l'un des deux programmes $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{D})$ admet une solution optimale, alors l'autre admet aussi une une solution optimale et leur valeur optimale sont égales ($z = w$).
Si l'un admet un optimum infini, alors l'autre est incompatible.

Programmation Linéaire I
Théorème de dualité

Preuve

Soit x^* une solution de base associée à la base B. Soit $\pi = c_B^\top B^{-1}$ et $y^* = \pi^\top$. On va montrer que y^* est solution optimale pour $(\mathcal{D})$.

$$A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

$$y^{*\top} A = c_B^\top B^{-1} A = c_B^\top B^{-1} \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_B^\top & c_B^\top B^{-1} N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c_B^\top & c_N^\top \end{pmatrix} = c^\top$$

puisque $\bar{c}_N = c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \geq 0$ (B base optimale). Donc $A^\top y^* \leq c$ et y^* est réalisable pour le dual.
D'autre part, $b^\top y^* = y^{*\top} b = c_B^\top B^{-1} b = c^\top x^*$, et donc y^* est solution optimale de $(\mathcal{D})$ d'après le théorème faible de dualité.

Programmation Linéaire II
Théorème de dualité

Supposons que $\inf\{c^\top x \mid x \in X\} = -\infty$. Alors

$$\forall M > 0 \quad \exists x_M \in X \quad \text{tel que} \quad c^\top x_M < -M.$$

Si u est réalisable pour le dual $(\mathcal{D})$, on doit avoir $b^\top u \leq c^\top x_M$, d'après le théorème de dualité faible. Et donc $b^\top u < -M$ pour tout $M > 0$, ce qui n'est pas possible.

Programmation Linéaire III

Théorème de Dualité

Remarque

En écrivant que

$$y^{*\top} A = \begin{pmatrix} c_B^\top & c_B^\top B^{-1} N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_B^\top & c_N^\top - \bar{c}_N \end{pmatrix} = c^\top - \begin{pmatrix} 0_m^\top & \bar{c}_N \end{pmatrix},$$

on aura

$$A^\top y^* + \begin{pmatrix} 0_m \\ \bar{c}_N^\top \end{pmatrix} = c^\top.$$

$\bar{c}_N^\top$ *représente les variables d'écart pour le dual.*

Programmation Linéaire I

Théorème de Complémentarité

Théorème

Soit x un vercteur réalisable pour le primal $(\mathcal{L})$ et y un vecteur réalisable pour le dual $(\mathcal{D})$. Alors x et y solutions optimales, respectivement pour $(\mathcal{L})$ et pour $(\mathcal{D})$, si et seulement si, $x^\top (A^\top y - c) = 0$.

Programmation Linéaire I

Théorème de Complémentarité

Preuve

Soit x et y tels que $Ax = b$, $x \geq 0$ et $A^\top y \leq c$. Si x et y sont optimales, alors $c^\top x = b^\top y$ (Théorème de dualité). Donc $c^\top x = x^\top c = x^\top A^\top y$. D'où $x^\top (c - A^\top y) = 0$.
Inversement, $x^\top (c - A^\top y) = 0$ entraîne que $c^\top x = b^\top y$ et donc x est solution optimale de $(\mathcal{L})$ et y est solution optimale de $(\mathcal{D})$ (utiliser le théorème faible de dualité).

Programmation Linéaire II

Théorème de Complémentarité

Remarque

Si on note a_j la jeme colonne de A, le théorème implique que

$$x^\top (c - A^\top y) = \sum_{j=1}^{n} x_j (c_j - a_j^\top y) = 0$$

et par suite $x_j (c_j - a_j^\top y) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$ puisque $x_j \geq 0$ et $a_j^\top y \leq c_j$.
En particulier, si $x_j > 0$ alors la jeme contrainte du dual est saturée $(c_j - a_j^\top y = 0)$ et si $a_j^\top y < c_j$ alors $x_j = 0$.