Optimisation Numérique

Département de Mathématiques
Master Mathématiques

Sommaire

Programmation Linéaire I

Base Réalisable de Départ

Supposons que les contraintes du problème sont données par

$$\begin{array}{lll} A_1x+s & = b_1 & (1)\\ A_2x-t & = b_2 & (2)\\ A_3x & = b_3 & (3)\\ x,s,t\geq 0 & & \end{array}$$

où $x\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}^n$; A_1, A_2 et A_3 sont respectivement des matrices d'ordre $m_1\times n$, $m_2\times n$, $m_3\times n$; $b_1\in\mathbb{R}^{m_1}$, $b_2\in\mathbb{R}^{m_2}$ et $b_3\in\mathbb{R}^{m_3}$ avec $b_1\geq 0$, $b_2\geq 0$ et $b_3\geq 0$.
Les vecteurs $s\in\mathbb{R}^{m_1}$ et $t\in\mathbb{R}^{m_2}$ sont des variables d'écart.

Programmation Linéaire II

Base Réalisable de Départ

On veut modifier ces contraintes pour avoir la matrice $I_{m,m}$ comme base initiale réalisable. Pour cela on introduit des variables artificielles $u\in\mathbb{R}^{m_2}$ et $v\in\mathbb{R}^{m_3}$ dans les contraintes (2) et (3) de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} A_2x-t+u & = b_2 & (2')\\ A_3x+v & = b_3 & (3')\\ x,s,t,u,v\geq 0. & & \end{array}$$

Dans le système d'équations (1), (2′) et (3′), on dispose d'une base initiale (réalisable puisque $b_1,b_2,b_3\geq 0$).

Une solution $(x,s,t,u,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2}\times\mathbb{R}^{m_2}\times\mathbb{R}^{m_3}$ du système d'équations (1), (2′) et (3′) ne fournit une solution du système d'équations (1), (2) et (3) que si $u=0$ et $v=0$.

Programmation Linéaire III

Base Réalisable de Départ

Pour avoir une solution du système d'équations (1), (2′) et (3′), on va résoudre le programme linéaire suivant

$$(\mathcal{L}') \quad \begin{cases} \min w = \sum_{i=1}^{m_2} u_i + \sum_{j=1}^{m_3} v_j \\ A_1 x + s = b_1 \\ A_2 x - t + u = b_2 \\ A_3 x + v = b_3 \\ x, s, t, u, v \geq 0 \end{cases}$$

Si l'ensemble des contraintes X formé du système d'équations (1), (2) et (3) est non vide, alors l'optimum de w est nul.

Programmation Linéaire IV

Base Réalisable de Départ

On applique l'algorithme du simplexe à $(\mathcal{L}')$. Soit B la base optimale associé à ce dernier problème. Il y a trois cas à distinguer :

1. Les composantes des vecteurs u et v sont toutes hors-base. Alors B est réalisable pour $(\mathcal{L})$.
2. Une composante de u ou de v est une variable de base strictement positive. Dans ce cas $w > 0$ et $X = \emptyset$.
3. Il y a des variables artificielles dans la base et sont nulles. Soit a_s une colonne de A hors-base et a_r une colonne de base artificielle ; c'est à dire une colonne de B associée à une variable artificielle. Pour pouvoir remplacer la colonne a_r par la colonne a_s tout en gardant B réalisable, il faut et il suffit que $\bar{a}_{rs} \neq 0$ ($\bar{a}_{rs} = B^{-1} a_s$ et $\bar{a}_{rs}$ la $r$ème composante de $\bar{a}_s$). Dans ce cas on va chercher toutes les colonnes a_s de A non artificielles et hors-base et les remplacer par des colonnes a_r de base, artificielles quand ceci est possible ; c'est à dire quand $\bar{a}_{rs} \neq 0$. On a alors deux situations :

Programmation Linéaire V

Base Réalisable de Départ

1. La dernière base ne contient aucun vecteur artificiel. Elle est donc réalisable pour $(\mathcal{L})$.
2. La dernière base contient encore des vecteurs artificiels. Dans ce cas le rang de A est strictement inférieur à m.

Programmation Linéaire I

Tableaux Simplexe

On considère toujours le programme $(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ce programme est équivalent au programme suivant

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min z \\ c^\top x - z = 0 \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Programmation Linéaire II
Tableaux Simplexe

Définition

On dit que $(\mathcal{L})$ est mis sous forme canonique s'il est mis sous la forme standard et que dans cette forme on a une base B dont les colonnes sont les vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^m$ et que $c_B = 0$.

Programmation Linéaire I
Tableaux Simplexe

On peut représenter la dernière forme de $(\mathcal{L})$ par le tableau suivant

$c^\top$	-1	0
	0	b_1
A	$\vdots$	$\vdots$
	0	b_m

Soit B est une base initiale réalisable quelconque de A. On obtient la forme canonique de $(\mathcal{L})$ en prémultipliant le tableau qui lui est associé par le tableau suivant

1	$-\pi = -c_B^\top B^{-1}$
0	
$\vdots$	B^{-1}
0	

Programmation Linéaire II
Tableaux Simplexe

Illustration

Supposons que B est formée des m premières colonnes de A de sorte que $A = \begin{pmatrix} B \\ N \end{pmatrix}$. Le premier tableau à la forme suivante

$c_B^\top$	$c_N^\top$	-1	0
		0	b_1
B	N	$\vdots$	$\vdots$
		0	b_m

Programmation Linéaire III
Tableaux Simplexe

Illustration

La forme canonique est alors représentée par le tableau suivant

$0\dots0$	$\bar{c}_N$	-1	$-c_B^\top B^{-1} b$
		0	
$I_{m,m}$	$B^{-1}N$	$\vdots$	$\bar{b} = B^{-1}b$
		0	

Pour exécuter l'étape suivante de l'algorithme du simplexe on cherche la colonne a_s de A qui va rentrer en base et la colonne a_r de B qui va quitter la base et on prémultiplie le tableau précédent par le tableau suivant

Programmation Linéaire IV

Tableaux Simplexe

1	0	...	0	0	$\frac{-\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}}$	0	...	0
0	1	...	0	0	$\frac{-\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}}$	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0	0	...	0	1	$\frac{-\bar{a}_{r-1s}}{\bar{a}_{rs}}$	0	...	0
0	0	...	0	0	$\frac{1}{\bar{a}_{rs}}$	0	...	0
0	0	...	0	0	$\frac{-\bar{a}_{r+1s}}{\bar{a}_{rs}}$	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0	0	...	0	0	$\frac{-\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}}$	0	...	1

Programmation Linéaire V

Tableaux Simplexe

Exemple

Soit à résoudre le problème

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Programmation Linéaire VI

Tableaux Simplexe

Le premier tableau simplexe est

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
-1	-2	0	0	0	-1	0
-3	2	1	0	0	0	2
-1	2	0	1	0	0	4
1	1	0	0	1	0	5

On prend comme variables de base x_3, x_4 et x_5.
On a déjà la forme canonique.

Programmation Linéaire VII

Tableaux Simplexe

La variable x_2 va rentrer en base (coût réduit le plus négatif).

$$\hat{x}_2 = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} \mid \bar{a}_{i2} > 0\right\} = \min\left\{\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}\right\} = 1 = \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{12}}.$$

La variable x_3 quitte la base.
On prémultiplie le tableau précédent par

1	1	0	0
0	$1/2$	0	0
0	-1	1	0
0	$-1/2$	0	1

Programmation Linéaire VIII

Tableaux Simplexe

On obtient le second tableau

-4	0	1	0	0	-1	2
$-3/2$	1	$1/2$	0	0	0	1
2	0	-1	1	0	0	2
$5/2$	0	$-1/2$	0	1	0	4

La variable x_1 va rentrer en base.

$$\hat{x}_1 = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \mid \bar{a}_{i1} > 0\right\} = \min\left\{\frac{2}{2}, \frac{4}{5/2}\right\} = 1 = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}}.$$

La variable x_4 quitte la base.

Programmation Linéaire IX

Tableaux Simplexe

On prémultiplie le tableau précédent par

1	0	2	0
0	1	$3/4$	0
0	0	$1/2$	0
0	0	$-5/4$	1

Programmation Linéaire X

Tableaux Simplexe

On obtient le tableau

0	0	-1	2	0	-1	6
0	1	$-1/4$	$3/4$	0	0	$5/2$
1	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	1
0	0	$3/4$	$-5/4$	1	0	$3/2$

La variable x_3 va rentrer en base.

$$\hat{x}_3 = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} \mid \bar{a}_{i3} > 0\right\} = \min\left\{\frac{3/2}{4/3}\right\} = 2 = \frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{33}}.$$

La variable x_5 quitte la base.

Programmation Linéaire XI

Tableaux Simplexe

On prémultiplie le tableau précédent par

1	0	0	$4/3$
0	1	0	$1/3$
0	0	1	$2/3$
0	0	0	$4/3$

Programmation Linéaire XII

Tableaux Simplexe

On obtient le tableau

0	0	0	1/3	4/3	−1	8
0	1	0	1/3	1/3	0	3
1	0	0	−1/3	2/3	0	2
0	0	1	−5/3	4/3	0	2

On a $\bar{c}_N \geq 0$ et le tableau est optimal. On obtient la solution $x_1^* = 2$, $x_2^* = 3$, $x_3^* = 2$, $x_4^* = x_5^* = 0$ et $z^* = -8$.

Programmation Linéaire XIII

Tableaux Simplexe

−1	−2	0	0	0	−1	0	L0
−3	2	1	0	0	0	2	L1
−1	2	0	1	0	0	4	L2
1	1	0	0	1	0	5	L3

−4	0	1	0	0	−1	2	L0←L0+L1
−3/2	1	1/2	0	0	0	1	L1←1/2L1
2	0	−1	1	0	0	2	L2←L2-L1
5/2	0	−1/2	0	1	0	4	L3←L3-1/2L1

Programmation Linéaire XIV

Tableaux Simplexe

0	0	−1	2	0	−1	6	L0←L0+2L2
0	1	−1/4	3/4	0	0	5/2	L1←L1+3/4L2
1	0	−1/2	1/2	0	0	1	L2←1/2L2
0	0	3/4	−5/4	1	0	3/2	L3←L3-5/4L3

0	0	0	1/3	4/3	−1	$8 = -z$	L0←L0+4/3L3
0	1	0	1/3	1/3	0	$3 = x_2$	L1←L1+1/3L3
1	0	0	−1/3	2/3	0	$2 = x_1$	L2←L2+2/3L3
0	0	1	−5/3	4/3	0	$2 = x_3$	L3←4/3L3

Les variables hors-base sont nulles.