Optimisation Numérique

Département de Mathématiques
Master Mathématiques

Sommaire

Programmation Linéaire I

Algorithme Dual du Simplexe

On considère le programme $(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{L}) \qquad \begin{cases} \min z = c^\top x \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

et son dual $(\mathcal{D})$

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} \max w = b^\top y \\ A^\top y \leq c, \end{cases}$$

Programmation Linéaire II

Algorithme Dual du Simplexe

Remarque

Soit B une base de $(\mathcal{L})$, $\pi = c_B^\top B^{-1}$ et $\bar{c}_N = c_N^\top - \pi N$. On a

$$\bar{c}_N \geq 0 \iff \pi A \leq c^\top \qquad (A^\top \pi^\top \leq c).$$

Si B est réalisable alors elle est optimale pour $(\mathcal{L})$ si et seulement si $\pi^\top$, le vecteur des multiplicateurs du simplexe, qui lui est associé est réalisable pour le dual $(\mathcal{D})$.

Dans l'algorithme dual du simplexe on part d'une base B non réalisable $(B^{-1}b \not\geq 0)$ telle que $\bar{c}_N \geq 0$ puis on fait des changements de base jusqu'à avoir $(B^{-1}b \geq 0)$.

Programmation Linéaire III

Algorithme Dual du Simplexe

Algorithme

1. Pour choisir une colonne r qui quitte la base on doit choisir une composante $\bar{b}_r < 0$ de $\bar{b} = B^{-1}b$.
2. Pour choisir une colonne s à introduire dans la base on doit déterminer

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} = \max\left\{\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \,\middle|\, \bar{a}_{rk} < 0,\ k \text{ indice hors-base}\right\}.$$

On effectue des pivotages sur $\bar{a}_{rs}$ jusqu'à ce que :

1. $\bar{b} \geq 0$, et dans ce cas B est optimale,
2. il existe un indice r tel que $\bar{b}_r < 0$ et $\bar{a}_{rs} \geq 0$, et dans ce cas le dual n'as pas de solution optimale finie.

Programmation Linéaire IV

Algorithme Dual du Simplexe

Exemple

$$(\mathcal{L}) \qquad \begin{cases} \min z = 2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Programmation Linéaire V

Algorithme Dual du Simplexe

2	0	1	0	0	0
−1	−1	1	1	0	−5
−1	2	−4	0	1	−8

La base $B = (a_4, a_5)$ n'est pas réalisable, $\bar{c}_N = (2 \quad 0 \quad 1)$ et $\bar{b} = (-5 \quad -8)^\top$ $(r = 2)$.

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} = \max\left\{\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \,\middle|\, \bar{a}_{rk} < 0,\ k \neq 4,\ k \neq 5\right\} = \max\left\{\frac{2}{-1}, \frac{1}{-4}\right\} = \frac{\bar{c}_3}{\bar{a}_{23}}.$$

Programmation Linéaire VI

Algorithme Dual du Simplexe

7/4	1/2	0	0	1/4	−2	L0+$\frac{1}{4}$L2
−5/4	−1/2	0	1	1/4	−7	L1+$\frac{1}{4}$L2
1/4	−1/2	1	0	−1/4	2	$\frac{-1}{4}$L2

La base $B = (a_4, a_3)$ n'est pas réalisable, $\bar{c}_N = (7/4 \quad 1/2 \quad 1/4)$ et $\bar{b} = (-7 \quad 2)^\top$ $(r = 1)$.

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} = \max\left\{\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \,\middle|\, \bar{a}_{rk} < 0,\ k \neq 3,\ k \neq 4\right\} = \max\left\{\frac{7/4}{-5/4}, \frac{1/2}{-1/2}\right\} = \frac{\bar{c}_2}{\bar{a}_{12}}.$$

Programmation Linéaire VII

Algorithme Dual du Simplexe

$1/2$	0	0	1	$1/2$	-9	L0+L1
$5/2$	1	0	-2	$-1/2$	14	-2L1
$3/2$	0	1	-1	$-1/2$	9	L2-L1

$\bar{b} \geq 0$, donc le tableau est optimal.
$x_1^* = 0$, $x_2^* = 14$, $x_3^* = 9$, $z^* = 9$.