

UNIVERSITÉ PARIS-EST-CRÉTEIL
ESIFE

CHAÎNES DE MARKOV

Spécialité : INGÉNIEUR, 1ère année

BÉATRICE DE TILIÈRE

La partie “Rappels de probabilités” est basée sur des notes écrites en collaboration avec Frédérique Petit pour la préparation au CAPES. Je tiens à remercier Bernard Marchal de m’avoir donné ses notes de cours de “Processus stochastiques”, je m’en suis largement inspirée et en ai tiré tous les dessins de graphes pour les chaînes de Markov.

Contents

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Modélisation des phénomènes aléatoires | 3 |
| 2 | Construction d'espaces probabilisés | 3 |
| 3 | Conditionnement et indépendance | 3 |
| 4 | Variables aléatoires | 3 |
| 5 | Introduction et définitions | 3 |
| 6 | Dynamique d'une chaîne de Markov | 3 |
| 7 | Classification des états | 4 |
| 7.1 | Classes de communication | 4 |
| 7.2 | Période | 5 |
| 7.3 | Exercices : Classes de communication et période | 6 |
| 7.4 | Réurrence et Transience | 10 |
| 7.4.1 | Définitions | 11 |
| 7.4.2 | Critères de récurrence/transience | 11 |
| 7.4.3 | Classes récurrentes/transientes | 15 |
| 7.5 | Exercices : récurrence/transience | 17 |

1 Modélisation des phénomènes aléatoires

Content of the first chapter...

2 Construction d'espaces probabilisés

Content of the second chapter...

3 Conditionnement et indépendance

Content of the third chapter...

4 Variables aléatoires

Content of the fourth chapter...

5 Introduction et définitions

Content of the fifth chapter...

6 Dynamique d'une chaîne de Markov

Content of the sixth chapter...

Chapitre 7

Classification des états

7 Classification des états

L'espace des états étant souvent de grande taille, il est utile de le partitionner en des sous-ensembles dont les éléments ont les mêmes comportements au regard de propriétés importantes. Pour ce faire, nous introduisons une relation d'équivalence sur les états.

7.1 Classes de communication

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ définie sur un espace d'états E , de matrice de transition P .

Definition 1 (7.1). • Soient deux états x et y . Nous dirons que x conduit à y ou que y est accessible depuis x , noté $x \rightarrow y$, si :

$$\exists n \in \mathbb{N}, P^{(n)}(x, y) = P[X_n = y \mid X_0 = x] > 0.$$

Cette relation signifie que partant de x , nous avons une probabilité non nulle d'atteindre y à un certain temps n .

- Nous dirons que x communique avec y , noté $x \leftrightarrow y$, si chacun des états x, y est accessible depuis l'autre, c'est-à-dire $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$.

Proposition 7.1. La relation de communication \leftrightarrow est une relation d'équivalence.

Proof. • **Réflexivité:** $x \leftrightarrow x$. Immédiat en observant que

$$P^{(0)}(x, x) = P[X_0 = x \mid X_0 = x] = 1.$$

- **Symétrie:** $x \leftrightarrow y \implies y \leftrightarrow x$. Évident par définition.

- **Transitivité:** $x \leftrightarrow y$ et $y \leftrightarrow z \implies x \leftrightarrow z$. Pour cela, il suffit de montrer la transitivité de la relation d'accessibilité. Supposons que $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow z$. Alors il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $P^{(n)}(x, y) > 0$ et $P^{(m)}(y, z) > 0$. Or, d'après les équations de Chapman-Kolmogorov, on a

$$P^{(n+m)}(x, z) = \sum_{y' \in E} P^{(n)}(x, y') P^{(m)}(y', z) \geq P^{(n)}(x, y) P^{(m)}(y, z) > 0.$$

La première inégalité provient du fait que tous les termes de la somme sont positifs ou nuls. En conséquence, $x \rightarrow z$. □

Definition 2 (7.3). • Les états E de la chaîne peuvent être partitionnés en classes d'équivalence appelées **classes irréductibles**. Si E est réduit à une seule classe, la chaîne de Markov est dite **irréductible**.

- La relation d'accessibilité s'étend aux classes : une classe d'équivalence C' est accessible depuis une classe C , noté $C \rightarrow C'$, si

$$\forall (x, x') \in C \times C', x \rightarrow x'.$$

À noter l'équivalence :

$$\forall (x, x') \in C \times C', x \rightarrow x' \iff \exists (x, x') \in C \times C', x \rightarrow x'.$$

La relation d'accessibilité définit une relation d'ordre partiel entre les classes d'équivalence.

- Une classe d'équivalence C est dite **fermée** si, pour tout x, y tels que $(x \in C$ et $x \rightarrow y \implies y \in C)$. Autrement dit, $\forall x \in C, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{y \in C} P^{(n)}(x, y) = 1,$$

autrement dit encore, C est une classe dont on ne peut pas sortir.

- Une classe fermée réduite à un point $C = \{x\}$ est appelée un **état absorbant**. Un état x est absorbant si et seulement si $p(x, x) = 1$.

7.2 Période

Dans cette partie, nous étudions la période associée à une classe.

Definition 3 (7.4). Étant donné un état $x \in E$, la période de l'état x , notée $d(x)$, est le plus grand commun diviseur des entiers n tels que $P^{(n)}(x, x)$ est strictement positif :

$$d(x) = \text{PGCD}\{n \geq 1 \mid P^{(n)}(x, x) > 0\}.$$

Par convention, $d(x) = 0$ si l'ensemble des $n \geq 1$ tels que $P^{(n)}(x, x) > 0$ est vide.

Theorem 1 (7.5). Si deux états communiquent, alors ils ont la même période.

Proof. Soient x et y deux états qui communiquent, $x \leftrightarrow y$. Montrons que $d(y)$ divise $d(x)$. Ceci revient à prouver que $d(y)$ divise tout $n \geq 1$ tel que $P^{(n)}(x, x) > 0$; soit donc un tel n . Comme x et y communiquent, il existe deux entiers $k, \ell \geq 1$ tels que $P^{(k)}(x, y) > 0$ et $P^{(\ell)}(y, x) > 0$. De plus, d'après les équations de Chapman-Kolmogorov :

$$P^{(n+k+\ell)}(y, y) \geq P^{(\ell)}(y, x)P^{(n)}(x, x)P^{(k)}(x, y) > 0,$$

et

$$P^{(k+\ell)}(y, y) \geq P^{(\ell)}(y, x)P^{(k)}(x, y) > 0.$$

Ainsi, $d(y)$ divise $n + k + \ell$ et $k + \ell$; et par suite, divise la différence n . On a donc montré que $d(y)$ divise $d(x)$. En intervertissant les rôles de x et y , nous prouvons que $d(x)$ divise $d(y)$, ce qui entraîne que $d(x) = d(y)$. \square

Definition 4 (7.6). *La période d'une classe est la période de chacun de ses éléments. Une classe est dite **apériodique** si sa période est 1.*

7.3 Exercices : Classes de communication et période

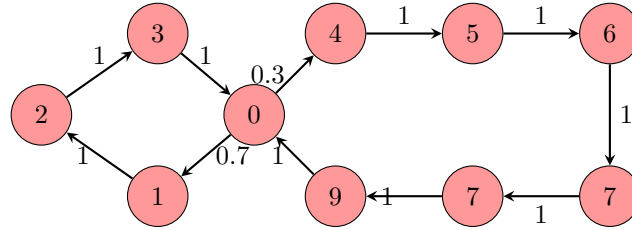
Exercice 1 (7.3). *Considérons une chaîne de Markov définie sur un espace $E = \{0, \dots, 9\}$ formé de 10 états, dont la matrice de transition est :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Tracer son graphe.*
2. *Déterminer les classes de la chaîne et leurs périodes.*

Solution de l'exercice 7.1

1. Traçons son graphe :



2. Nous constatons qu'il y a deux cycles donc les états de chacun des deux cycles communiquent. De plus, ces deux cycles contiennent le même état 0, ce qui implique qu'ils communiquent. Il n'y a donc qu'une seule classe ; la chaîne est **irréductible**.

Afin de déterminer la période de cette chaîne de Markov, il suffit de déterminer celle d'un de ses états ; prenons $x = 0$. Partant de 0, nous sommes de nouveau en 0 au bout de 4 transitions en passant par le petit cycle et au bout de 7 transitions en passant par le grand cycle. Nous avons :

$$P^{(4)}(0, 0) = 0.7 \quad \text{et} \quad P^{(7)}(0, 0) = 0.3.$$

Nous en déduisons que le PGCD ne peut être que 1 ; la chaîne est donc **apériodique**. En résumé, cette chaîne est formée d'une seule classe apériodique.

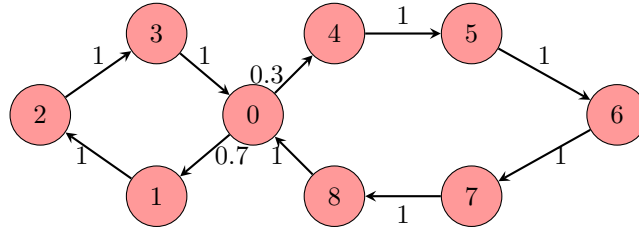
Exercice 2 (7.2). Reprenons la chaîne précédente avec un état de moins dans le second cycle. C'est-à-dire, considérons la chaîne de Markov définie sur un espace $E = \{0, \dots, 8\}$ formé de 9 états, dont la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Tracer son graphe.
2. Déterminer les classes de la chaîne et leurs périodes.

Solution de l'exercice 7.2

1. Traçons son graphe :



2. Comme précédemment, cette chaîne de Markov ne contient qu'une seule classe et est donc **irréductible**. Étudions la période en étudiant celle du sommet 0. Partant de 0, nous sommes de nouveau en 0 au bout de 4 transitions en passant par le petit cycle et au bout de 6 transitions en passant par le grand cycle. De plus, pour revenir en 0, on est obligé de passer par le petit ou par le grand cycle ("ou" non exclusif). Ainsi, nous avons

$$P^{(n)}(0, 0) > 0 \quad \text{si et seulement si } n = 4k + 6\ell \quad \text{pour } (k, \ell) \neq (0, 0).$$

Donc

$$d(0) = \text{PGCD}\{n \geq 1 \mid P^{(n)}(0, 0) > 0\} = \text{PGCD}\{4k + 6\ell \mid (k, \ell) \neq (0, 0)\} = \text{PGCD}\{4, 6\} = 2.$$

La chaîne est **périodique de période 2**. Il existe donc deux sous-classes,

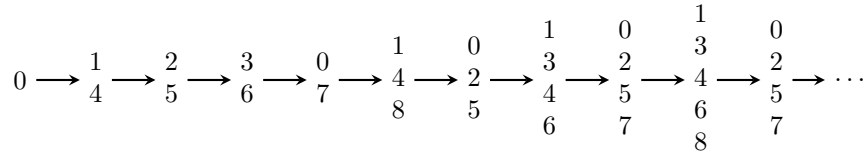


Fig. 1: sous-classes

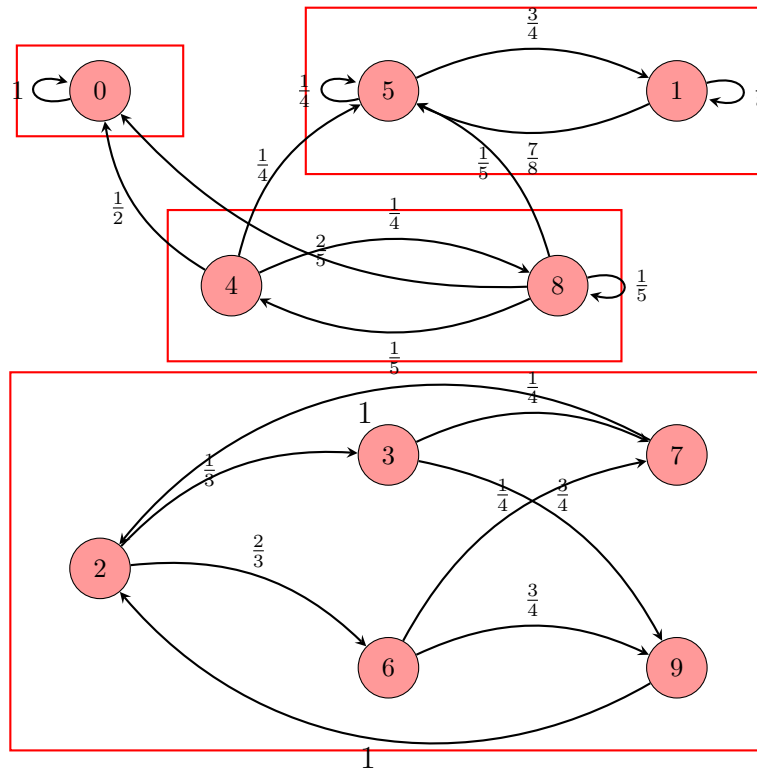
Exercice 3 (7.3). Soit la chaîne de Markov à 10 états $E = \{0, \dots, 9\}$ de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Tracer son graphe.
2. Déterminer les classes de la chaîne et leurs périodes.

Solution de l'exercice 7.3

1. Le graphe associé est :



2. Nous constatons l'existence de 4 classes :

- La classe $\{0\}$, qui est **fermée** et réduite à un point, formant un état absorbant 0.
- La classe $\{1, 5\}$, qui est **fermée** et **apériodique**, en raison des boucles en 1 et 5.
- La classe $\{2, 3, 6, 7, 9\}$, qui est **fermée** et de **période 3**. Les 3 sous-classes étant dans l'ordre $\{2\}$, $\{3, 6\}$ et $\{7, 9\}$.
- Enfin, la classe $\{4, 8\}$, que nous pouvons quitter vers les classes $\{0\}$ et $\{1, 5\}$, et qui n'est donc pas fermée.

Nous pouvons voir que nous quittons la classe non fermée $\{4, 8\}$ vers les classes fermées $\{0\}$ et $\{1, 5\}$. Il serait intéressant de savoir avec quelle probabilité nous nous retrouvons dans chacune des deux classes terminales. Or, nous voyons que nous quittons la classe $\{4, 8\}$ de 4 ou de 8, et que nous avons toujours deux fois plus de

chances de nous retrouver en 0 que dans la classe $\{1, 5\}$. Par suite, la probabilité de se retrouver en 0 est $\frac{2}{3}$ et en $\{1, 5\}$ est $\frac{1}{3}$.

Exercice 4 (7.4). *Déterminer les classes et périodes des exercices suivants du Chapitre 5 :*

- *Exercice 5.4 (marche aléatoire sur \mathbb{Z}),*
- *Exercice 5.6 (fort carré),*
- *Exercice 5.7 (transmission d'un bit informatique),*
- *Exercice 5.9 (ruine du joueur),*
- *Exercice 5.10 (plagiste et ses voiliers).*

Solution de l'exercice 7.4

- **Exercice 5.4 (marche aléatoire sur \mathbb{Z})** : Chaîne irréductible de période 2.
- **Exercice 5.6 (fort carré)** : Chaîne irréductible de période 2, avec comme sous-classes $\{0, 2\}$ et $\{1, 3\}$. De manière générale, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est irréductible :
 - **Apériodique** si n est impair,
 - **Périodique de période 2** si n est pair.
- **Exercice 5.7 (transmission d'un bit informatique)** : Chaîne irréductible **apériodique** (car contient des boucles).
- **Exercice 5.9 (ruine du joueur)** : Trois classes :
 - $\{0\}$,
 - $\{N\}$,
 - $\{1, \dots, N-1\}$.

Les classes $\{0\}$ et $\{N\}$ consistent en un seul sommet et sont **fermées**, il s'agit d'états absorbants. La classe $\{1, \dots, N-1\}$ n'est pas fermée, car les classes $\{0\}$ et $\{N\}$ sont accessibles depuis elle. Les deux états absorbants sont de période 1 chacun. La classe non fermée $\{1, \dots, N-1\}$ est de période 2.

- **Exercice 5.10 (plagiste et ses voiliers)** : Chaîne irréductible **apériodique** (car contient des boucles).

7.4 Récurrence et Transience

Nous allons étudier une seconde classification des états dépendant du type de comportement de la chaîne. Dans toute cette section, nous considérons une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans un espace E , de matrice de transition P .

Étant donné un état $x \in E$, tel que $P[X_0 = x] > 0$, nous notons simplement P_x la probabilité conditionnelle $P\{X_0 = x\}$

MASD

sachant l'événement $\{X_0 = x\}$ réalisé.

7.4.1 Définitions

Définition 5 (7.7). Soit $x \in E$ un état. Le **temps d'atteinte** de x , noté T_x , est le premier instant où x est visité après le départ. Par convention, le temps d'atteinte est infini si nous n'atteignons jamais x :

$$\forall \omega \in \Omega, T_x(\omega) = \begin{cases} \inf\{n > 0 \mid X_n(\omega) = x\}, & \text{si un tel entier existe,} \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la chaîne part de l'état x lui-même, nous employons plutôt le terme de **temps de retour**.

Définition 6 (7.8). Un état $x \in E$ est dit **récurrent** si

$$P_x[T_x < +\infty] = 1.$$

L'état x est dit **transient** ou **transitoire** sinon, c'est-à-dire quand

$$P_x[T_x < +\infty] < 1, \quad \text{autrement dit } P_x[T_x = +\infty] > 0.$$

Un état est récurrent si nous sommes sûrs d'y revenir. Il est transient s'il existe une probabilité non nulle de ne jamais y revenir, et donc de le quitter définitivement.

7.4.2 Critères de récurrence/transience

Une manière de caractériser la récurrence/transience d'un état est d'utiliser le nombre de visites, notion que nous introduisons maintenant.

Définition 7 (7.9). Le **nombre de visites** en un état x est la variable aléatoire N_x définie par :

$$N_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}}.$$

La quantité $G(x, y) := \mathbb{E}_x[N_y]$ est l'espérance du nombre de visites en y partant de x . G s'appelle le **noyau de Green**, le **noyau potentiel** ou simplement la **fonction de Green**.

Lemme 1 (7.10). Nous avons l'égalité suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(x, y).$$

Démonstration 1. Par définition de la fonction de Green :

$$G(x, y) = \mathbb{E}_x[N_y] = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}} \right],$$

(par définition du nombre de visites en y)

$$= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_x [\mathbf{1}_{\{X_n=y\}}],$$

(par inversion de la sommation et de l'espérance, théorème de Fubini)

$$= \sum_{n \geq 0} P_x[X_n = y],$$

(espérance de l'indicatrice)

$$= \sum_{n \geq 0} P^{(n)}(x, y).$$

Théorème 1 (7.11). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. L'état $x \in E$ est récurrent, c'est-à-dire $P_x[T_x < \infty] = 1$.
2. $P_x[N_x = \infty] = 1$.
3. $G(x, x) = \infty$.

De manière analogue, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'état $x \in E$ est transient, c'est-à-dire $P_x[T_x < \infty] < 1$.
2. $P_x[N_x = \infty] = 0$.
3. $G(x, x) < \infty$ et $G(x, x) = \frac{1}{P_x[T_x = \infty]}$.

Dans ce cas, la loi conditionnelle de N_x sachant que l'on part de l'état x est une loi géométrique de paramètre $P_x[T_x = \infty]$.

Avant de démontrer le Théorème 7.11, nous prouvons le résultat préliminaire suivant :

Lemme 2 (7.12). *Pour tout $(x, y) \in E^2$,*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$P_x[N_y \geq n+1] = P_x[T_y < \infty] P_y[N_y \geq n];$$

cette égalité est aussi vraie pour $n = 0$ si $x \neq y$.

2. *Pour la fonction de Green,*

$$G(x, y) = \delta_{\{x=y\}} + P_x[T_y < \infty] G(y, y).$$

Proof. Démontrons la première égalité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P_x[N_y \geq n+1] = P_x[N_y \geq n+1, T_y < \infty] + P_x[N_y \geq n+1, T_y = \infty].$$

Or, $P_x[N_y \geq n+1, T_y = \infty] = 0$, donc :

$$P_x[N_y \geq n+1] = P_x[N_y \geq n+1, T_y < \infty].$$

Par la formule des probabilités totales :

$$P_x[N_y \geq n+1] = \sum_{\ell=1}^{\infty} P_x[N_y \geq n+1, T_y = \ell].$$

En utilisant la définition de N_y :

$$P_x[N_y \geq n+1, T_y = \ell] = P_x \left[\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}} \geq n, T_y = \ell \right].$$

Par les probabilités conditionnelles :

$$P_x \left[\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}} \geq n, T_y = \ell \right] = P \left[\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}} \geq n \mid T_y = \ell, X_0 = x \right] P_x[T_y = \ell].$$

Or, d'après le Corollaire 6.3 :

$$P \left[\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}} \geq n \mid T_y = \ell, X_0 = x \right] = P_y[N_y \geq n].$$

Ainsi :

$$P_x[N_y \geq n+1] = P_y[N_y \geq n] \sum_{\ell=1}^{\infty} P_x[T_y = \ell].$$

En conclusion :

$$P_x[N_y \geq n+1] = P_y[N_y \geq n] P_x[T_y < \infty].$$

Démontrons maintenant l'égalité pour la fonction de Green. Par définition :

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(x, y).$$

D'après le Lemme 7.10 :

$$G(x, y) = \delta_{\{x=y\}} + \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, y).$$

En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P^{(n)}(x, y) = \sum_{\ell=1}^n P_x[X_n = y, T_y = \ell].$$

Par les probabilités conditionnelles :

$$P_x[X_n = y, T_y = \ell] = P[X_n = y \mid T_y = \ell, X_0 = x] P_x[T_y = \ell].$$

D'après le Corollaire 6.3, pour tout $\ell \in \{1, \dots, n\}$,

$$P[X_n = y \mid T_y = \ell, X_0 = x] = P_y[X_{n-\ell} = y].$$

En remplaçant et en inversant les sommes :

$$G(x, y) = \delta_{\{x=y\}} + \sum_{\ell=1}^{\infty} P_x[T_y = \ell] \sum_{n=\ell}^{\infty} P_y[X_{n-\ell} = y].$$

Or :

$$\sum_{n=\ell}^{\infty} P_y[X_{n-\ell} = y] = G(y, y).$$

Ainsi :

$$G(x, y) = \delta_{\{x=y\}} + P_x[T_y < \infty] G(y, y).$$

□

Démonstration du Théorème 7.11. Puisque $P_x[N_x \geq 1] = 1$, le Lemme 7.12 et une récurrence immédiate nous disent que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_x[N_x \geq n] = P_x[T_x < \infty]^{n-1}.$$

La suite d'événements $\{N_x \geq n\}_{n \geq 1}$ étant décroissante, on a aussi

$$P_x[N_x = \infty] = P_x \left[\bigcap_{n \geq 1} \{N_x \geq n\} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x[N_x \geq n] = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x[T_x < \infty]^{n-1}.$$

Ceci montre l'équivalence entre les points 2 et 1. En effet, on a soit

$$P_x[N_x = \infty] = 1 \Leftrightarrow P_x[T_x < \infty] = 1, \quad \text{ou bien} \quad P_x[N_x = \infty] = 0 \Leftrightarrow P_x[T_x < \infty] < 1.$$

Montrons maintenant l'équivalence entre les points 1 et 3. D'après la deuxième égalité du Lemme 7.12, la fonction de Green $G(x, x)$ satisfait à l'égalité

$$G(x, x)(1 - P_x[T_x < \infty]) = 1.$$

Ainsi,

$$G(x, x) = \frac{1}{1 - P_x[T_x < \infty]} < \infty \Leftrightarrow P_x[T_x < \infty] < 1 \quad \text{ou bien} \quad G(x, x) = \infty \Leftrightarrow P_x[T_x < \infty] = 1.$$

Cela démontre l'équivalence entre le point 1 et le point 3 et termine la preuve des équivalences.

Montrons encore que dans le cas transient, la loi conditionnelle de N_x sachant $\{X_0 = x\}$ est géométrique de paramètre $P_x[T_x = \infty]$. Pour cela, on utilise à nouveau le Lemme 7.12. Pour tout $n \geq 1$,

$$P_x[N_x = n] = P_x[N_x \geq n] - P_x[N_x \geq n+1] = P_x[T_x < \infty]^{n-1}(1 - P_x[T_x < \infty]).$$

7.4.3 Classes récurrentes/transientes

Nous allons établir que la notion de récurrence/transience est une propriété de classes.

Proposition 7.13. Soient deux états x et y qui communiquent, alors x et y sont soit tous les deux récurrents soit tous les deux transients.

Démonstration. D'après le Théorème 7.11, il suffit de montrer que $G(x, x)$ et $G(y, y)$ sont de même nature (soit finies, soit infinies). D'après le Lemme 7.10, pour tout $x \in E$, on a $G(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(x, x)$, donc cela revient à montrer que les séries de terme général $P^{(n)}(x, x)$ et $P^{(n)}(y, y)$ sont de même nature.

Comme x et y communiquent, il existe k, ℓ tels que $P^{(k)}(x, y) > 0$ et $P^{(\ell)}(y, x) > 0$. Ainsi, for everything $n \geq k + \ell$,

$$P^{(n)}(x, x) \geq P^{(k)}(x, y)P^{(n-k-\ell)}(y, y)P^{(\ell)}(y, x)$$

and

$$P^{(n)}(y, y) \geq P^{(\ell)}(y, x)P^{(n-k-\ell)}(x, x)P^{(k)}(x, y),$$

it is this that shows that the two séries converge and divergent in the same time.

Définition 7.14. Une classe d'équivalence est dite récurrente, resp. transiente, si un de ses sommets est récurrent, resp. transient.

Proposition 7.15. Une classe récurrente est fermée, autrement dit, la probabilité de sortir d'une classe récurrente est nulle.

Démonstration. Soit x un état quelconque appartenant à la classe de récurrence C . Supposons qu'il existe $y \notin C$ tel que $x \rightarrow y$ et montrons que cela conduit à une contradiction. Remarquons d'abord que y ne conduit à aucun sommet de C , car sinon on aurait $y \rightarrow x$, donc $x \leftrightarrow y$, et $y \in C$. De plus, on a :

$$x \rightarrow y \iff P_x[T_y < \infty] > 0.$$

Or, la probabilité $P_x[T_x = \infty]$ de ne pas revenir en x est bornée inférieurement par la probabilité d'aller en y en temps fini (puisque y ne conduit à aucun état de C). Ainsi,

$$P_x[T_x = \infty] \geq P_x[T_y < \infty] > 0,$$

ce qui donne $P_x[T_x < \infty] < 1$, ce qui est une contradiction avec le fait que x est récurrent. Nous voyons qu'une classe récurrente est fermée, mais la réciproque est fausse en général (voir l'exemple de la marche aléatoire non-symétrique, Exercice 7.7, qui est fermée et transiente), bien que cette réciproque soit vérifiée si cette classe est de cardinal fini.

Proposition 7.16. Toute classe fermée et de cardinal fini est récurrente.

Démonstration. Soit C cette classe fermée, et soit $x \in C$, alors,

$$\sum_{y \in C} G(x, y) = \sum_{y \in C} \sum_{n \geq 0} P^{(n)}(x, y) = \sum_{n \geq 0} \sum_{y \in C} P^{(n)}(x, y) = \infty,$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{y \in C} P^{(n)}(x, y) = P_x[X_n \in C] = 1; \text{ puisque la classe } C \text{ est fermée, nous ne la quittons pas.}$$

Supposons que pour tout $y \in C$, y soit transient. Alors d'après l'Exercice 7.5, $G(x, y) < \infty$. Par hypothèse, la classe C est de cardinal fini, ce qui implique que $\sum_{y \in C} G(x, y) < \infty$, et cela donne une contradiction. En conséquence, il existe un état $y \in C$ récurrent et la classe C est donc récurrente.

Corollaire 7.17. Une chaîne de Markov définie sur un espace d'états fini admet au moins un état récurrent.

Démonstration. Ceci découle du fait que si l'espace d'état est fini, il doit y avoir au moins une classe fermée.

7.5 Exercices : récurrence/transience

Exercice 7.5 [Fonction de Green]

Allons un peu plus loin dans l'étude de la fonction de Green. Soit $x, y \in E$ deux états. Montrer que :

1. Si $x \not\rightarrow y$, alors $G(x, y) = 0$.
2. Si $x \rightarrow y$ et
 - y est transient, alors $G(x, y) < \infty$;
 - y est récurrent, alors $G(x, y) = \infty$.
3. La fonction de Green satisfait à l'équation,

$$G = PG + I \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x, y) \in E^2, G(x, y) = \sum_{z \in E} p(x, z)G(z, y) + \delta_{\{x=y\}}.$$

Solution de l'exercice 7.5.

1. Si $x \not\rightarrow y$, alors pour tout $n \geq 0$, $P^{(n)}(x, y) = 0$. Ainsi, d'après le Lemme 7.10, $G(x, y) = 0$.
2. On a,

$$x \rightarrow y \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_x[T_y < \infty] > 0,$$

(Preuve dans l'Exercice 9.6. de "Exercices de Probabilités", Cottrell & al.)

De plus, si y est transient, $G(y, y) < \infty$ et si y est récurrent $G(y, y) = \infty$. En utilisant la deuxième égalité du Lemme 7.12, ceci démontre le point 2.

3. D'après le Lemme 7.10,

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(x, y) = P^{(0)}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, y) \\ &= \delta_{\{x=y\}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \in E} p(x, z)P^{(n-1)}(z, y), \quad \text{d'après Chapman-Kolmogorov} \\ &= \delta_{\{x=y\}} + \sum_{z \in E} p(x, z) \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n-1)}(z, y) = \delta_{\{x=y\}} + \sum_{z \in E} p(x, z) \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(z, y) \\ &= \delta_{\{x=y\}} + \sum_{z \in E} p(x, z)G(z, y). \end{aligned}$$

Exercice 7.6. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ d'espace d'état $E = \{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Dessiner le graphe associé à cette chaîne de Markov et classer les états (récurrents/transients).
2. Calculer la fonction de Green pour toutes les paires de points $(x, y) \in E^2$. En déduire la probabilité de ne jamais revenir en 3 sachant que l'on est parti de 3.

Solution de l'exercice 7.6.

1. Graphe à faire. Les classes d'équivalence sont 1, 2 et 3. La classe 1, 2 est fermée et finie, donc récurrente. La classe 3 permet d'atteindre la classe 1, 2 ; elle n'est pas fermée, donc transiente.
2. D'après les points 1 et 2 de l'Exercice 7.5, on a que la matrice des coefficients de la fonction de Green est de la forme,

$$G = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & G(3, 3) \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $G(3, 3)$ on utilise le Point 3 de l'Exercice 7.5 :

$$G(3, 3) = 1 + \sum_{z=1}^3 p(z, 3)G(z, 3) = 1 + \frac{1}{3}G(3, 3).$$

Ainsi, $\frac{2}{3}G(3, 3) = 1$, autrement dit $G(3, 3) = \frac{3}{2}$. On en déduit la probabilité de ne jamais revenir en 3 sachant que l'on est parti de 3 :

$$\mathbb{P}_3[T_3 = \infty] = \frac{1}{G(3, 3)} = \frac{2}{3}$$

Exercice 7.7 Classifier les états (récurrents / transients) des exercices du Chapitre 5.3 : Exercice 5.4 (marche aléatoire sur \mathbb{Z}), Exercice 5.6 (fort carré), Exercice 5.7 (transmission d'un bit informatique), Exercice 5.9 (ruine du joueur), Exercice 5.10 (plagiste et ses voiliers).

Solution de l'exercice 7.7.

- Exercice 5.4 (marche aléatoire sur \mathbb{Z}). Chaîne irréductible. Il suffit donc de considérer un état. Dans l'Exercice 6.4 on a montré que

$$\text{Si } p \neq \frac{1}{2}, G(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(x, x) < \infty$$

$$\text{Si } p = \frac{1}{2}, G(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(x, x) = \infty$$

Ainsi, la marche aléatoire est récurrente dans le cas symétrique et transiente sinon. Remarquer que dans le cas non symétrique, on a un exemple de classe fermée (infinie) et non-récurrente.

- Exercice 5.6 (fort carré) ou marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Chaîne irréductible. Elle est récurrente car finie.
- Exercice 5.7 (transmission d'un bit informatique). Chaîne irréductible. Elle est récurrente car finie.
- Exercice 5.9 (ruine du joueur). Trois classes : $\{0\}, \{N\}, \{1, \dots, N-1\}$ Les classes $\{0\}, \{N\}$ consistent en un seul sommet et sont fermées, il s'agit d'états absorbants. La classe $\{1, \dots, N-1\}$ n'est pas fermée car les classes $\{0\}, \{N\}$ sont accessibles depuis elle. Ainsi les états absorbants sont récurrents et la classe $\{1, \dots, N-1\}$ est transiente.
- Exercice 5.10 (plagiste et ses voiliers). Chaîne irréductible. Elle est récurrente car finie.

Exercice 7.8 [Qui perd, perd tout]

Nous considérons un joueur dont la probabilité de donner une bonne réponse est p quelle que soit la question posée et la probabilité de donner une réponse fausse est $1-p$, avec $0 < p < 1$. Nous supposons que les réponses sont indépendantes les unes des autres et que s'il donne une bonne réponse, il gagne 1, et s'il donne une mauvaise réponse, il perd tout. La richesse de départ est $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, on note X_n sa fortune à l'instant n .

1. Montrer qu'il s'agit d'une chaîne de Markov. Donner son graphe et sa matrice de transition.
2. Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible.
3. Soit $T_0 = \inf\{n > 0 \mid X_n = 0\}$ le temps d'atteinte de 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_0[T_0 = n]$.
4. En déduire que la chaîne est récurrente.

Solution de l'exercice 7.8.

1. Le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ est à valeurs dans $E = \mathbb{N}$. Soit Y_n la variable aléatoire valant 1 si le joueur répond juste à la n -ième question, et 0 sinon. Alors $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p , indépendante de X_0 . Pour tout $n \geq 0$, la fortune du joueur à l'instant $n+1$ est :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{si } Y_{n+1} = 1 \\ 0 & \text{si } Y_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$= (X_n + 1)\mathbb{I}_{\{Y_{n+1}=1\}}.$$

Ainsi d'après l'Exercice 5.5, $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov. La matrice de transition $P = (p(x, y))$ a pour coefficients non nuls,

$$\forall x \in \mathbb{N}, p(x, x+1) = p \quad p(x, 0) = 1-p.$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & p & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix}$$

Fig. 2: Matrice de transition du jeu.

Le graphe associé à cette chaîne de Markov est,

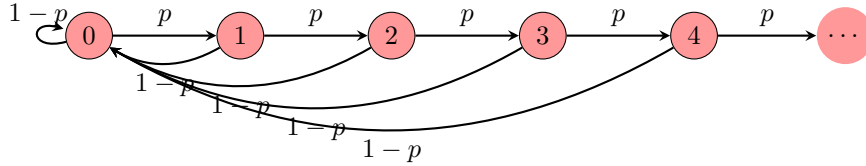


Fig. 3: Graphe de la ruine du joueur.

2. Nous constatons que tous les points communiquent entre eux. En effet, soient deux états x et y :

- Si $y > x$, alors partant de x nous pouvons atteindre y en $y - x$ étapes en gagnant successivement $y - x$ fois : $P^{(x-y)}(x, y) = p^{y-x} > 0$.
- Si $y < x$, alors partant de x nous pouvons perdre immédiatement et gagner y fois pour atteindre la fortune y : $P^{(1+y)}(x, y) = (1-p)p^y > 0$.

Il n'y a donc qu'une seule classe et la chaîne est irréductible.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0[T_0 = n] &= \mathbb{P}[\{\text{le joueur répond juste aux } (n-1) \text{ premières questions et faux à la } n\text{-ième}\}] \\ &= \mathbb{P}_0[\{Y_1 = 1, \dots, Y_{n-1} = 1, Y_n = 0\}], \text{ d'après Chapman-Kolmogorov} \\ &= p^{n-1}(1-p), \text{ par indépendance} \end{aligned}$$

Ainsi la loi conditionnelle de T_0 sachant $X_0 = 0$ est une loi géométrique de paramètre $(1-p)$ sur \mathbb{N}^*

4. On a,

$$\mathbb{P}_0[T_0 < \infty] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_0[T_0 = n] = (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} p = \frac{1-p}{1-p} = 1$$

et la chaîne est donc récurrente.

Exercice 7.9 [Ruine du joueur, suite]

On reprend l'Exercice 5.9 de la ruine du joueur : deux joueurs A et B disposent d'une fortune initiale de a et b euros respectivement, avec $a, b > 0$. Ils jouent au jeu de hasard suivant : la mise est de 1 euro par partie ; les parties sont indépendantes et à chacune d'entre elles le joueur A a une probabilité p de gagner (et donc $1 - p$ de perdre), avec $0 < p < 1$. Le jeu se déroule jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs. Notons $N = a + b$, alors la durée du jeu est $T = \inf\{n > 0 \mid X_n \in \{0, N\}\}$. Calculer la probabilité que le joueur A gagne.

Solution de l'exercice 7.9. Notons $u(x) = P_x[X_T = N]$, c'est-à-dire la probabilité que le joueur gagne sachant que sa fortune initiale est x , avec $x \in \{0, \dots, N\}$. Finalement, on sera intéressé par la probabilité $u(a)$ mais on verra qu'il est utile d'élargir le problème pour le résoudre.

Montrons que pour tout $x \in \{1, \dots, N - 1\}$, en écrivant $q = 1 - p$, $u(x)$ satisfait à l'équation :

$$u(x) = pu(x + 1) + qu(x - 1).$$

En effet, comme $a, b > 0$, on sait que $T \geq 1$. En décomposant sur toutes les valeurs possibles de la chaîne à l'instant 1, on obtient,

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{P}_x[X_T = N] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x[X_T = N \mid X_1 = y] \mathbb{P}_x[X_1 = y] \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}_y[X_T = N] \mathbb{P}_x[X_1 = y], \quad (\text{en utilisant la propriété de Markov}) \\ &= pu(x + 1) + (1 - p)u(x - 1), \quad (\text{car les autres termes où } \mathbb{P}_x[X_1 = y] = p(x, y) \text{ sont nuls}). \end{aligned}$$

On a les conditions au bord suivantes,

$$u(0) = 0, \quad u(N) = 1.$$

Il s'agit de résoudre une récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est :

$$pz^2 - z + q =$$

Ce polynôme a deux racines $z_{1,2} = 1, \frac{q}{p}$ si $p \neq q$ et une racine double $Z_1 = 1$ si $p = q = \frac{1}{2}$. Ainsi,

- Si $p \neq q$, la solution générale est de la forme

$$u(x) = \lambda z_1^x + \mu z_2^x = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

En tenant compte des conditions initiales, on résout pour λ, μ et on trouve,

$$u(x) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

- Si $p = q = \frac{1}{2}$, la solution générale est de la for

$$u(x) = (\lambda + \mu x)z_1^x = (\lambda + \mu x).$$

En tenant compte des conditions initiales, on résout pour λ , μ et on trouve,

$$u(x) = \frac{x}{N}.$$