Práctica 6: Flujo en redes

Compilado: 7 de noviembre de 2025

Propiedades de los flujos en redes

1. Para cada una de las siguientes sentencias sobre el problema de flujo máximo en una red N: demostrar que es verdadera o dar un contraejemplo.
   a) Si la capacidad de cada arista de N es par, entonces el valor del flujo máximo es par.
   b) Si la capacidad de cada arista de N es par, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es par.
   c) Si la capacidad de cada arista de N es impar, entonces el valor del flujo máximo es impar.
   d) Si la capacidad de cada arista de N es impar, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es impar.
   e) Si todas las aristas de N tienen capacidades racionales, entonces el flujo máximo es racional.

2. Para todo $F \in \mathbb{N}$, construir una red con 4 vértices y 5 aristas en la que el método de *Ford y Fulkerson* necesite F iteraciones en peor caso para obtener el flujo de valor máximo (partiendo de un flujo inicial con valor 0).

3. Determinar la complejidad del algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar el flujo máximo de una red N cuando:
   a) no hay información acerca de las capacidades de las aristas de N.
   b) todas las aristas de N tienen capacidad a lo sumo $q \ll n$.
   c) el flujo máximo de N tiene un valor $F \ll mn$.

4. Proponer un algoritmo lineal que dada una red N y un flujo de valor máximo, encuentre un corte de capacidad mínima de N.

Problemas de modelado I: caminos disjuntos en un grafo

5. Sea G un digrafo con dos vértices s y t.
   a) Proponer un modelo de flujo para determinar la máxima cantidad de caminos disjuntos en aristas que van de s a t.
   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.
   c) Demostrar que el modelo es correcto.
   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

6. **Popular**:
   a) Todos los sábados, Ariana viaja desde su casa a la casa de su gran amiga Cynthia. El asunto es que Ari cada vez que ve a alguien menos afortunado que ella (y quién no es menos afortunado que ella...?) su tierno corazón empieza a sangrar... por lo que quiere ayudar

a su amiga Cynthia a ser más afortunada. Lo que pasa es que como Ari es muy popular mundialmente, el solo hecho de pasar alguna vez por una calle atraería la atención de sus fans. Para que esos fans también puedan conocer a Cynthia, Ariana contrató a un experto en técnicas algorítmicas que la ayude a calcular la cantidad máxima de sábados que podrá ir a la casa de Cynthia sin repetir ninguna calle. ¿Que podemos utilizar para resolver este problema?

b) Luego de la constante insistencia de Ariana, Cynthia se hizo popular también y los fans la persiguen. Los líderes del club de fans, Toto y Pepi, quieren sacarse una foto con ella. Para eso, reclutarán súbditos por X que estarán escondidos en las intersecciones de las calles, y planean interceptar a Cynthia cuando vaya a la casa de Ari. Como tienen miedo de no reclutar suficientes súbditos, quieren saber cual es la menor cantidad de súbditos que necesitan conseguir. ¿Les damos una mano? *Aclaración: Ariana y Cynthia se enojan mucho si las interceptan en sus casas y además sabemos que no son vecinas.*

Problemas de modelado II: asignación

7. **Matching de cardinalidad máxima en grafos bipartitos**: Nos dan una lista de personas y sus preferencias para hacer ciertas tareas. Cada persona puede hacer una tarea y además cada tarea solo puede ser hecha por una sola persona. Nos piden calcular la cantidad máxima de tareas que se pueden hacer.

    a) Modelar el ejercicio como un problema de flujo máximo.

    b) Mostrar que el modelado es correcto.

    c) Dar una cota superior de la complejidad.

8. En el pueblo de *Asignasonia* las fiestas de casamiento son muy peculiares y extrañamente frecuentes. Las invitaciones a la fiesta nunca son personales sino familiares: cada persona invitada asiste siempre con todes sus familiares solteres, a quienes se les reservan mesas especiales de solteres. Además, hay una regla no escrita que establece un límite c_{ij} a la cantidad de solteres de la familia i que pueden sentarse en la mesa j. Esta forma de festejar es la que, aparentemente, aumenta la cantidad de casamientos futuros. Desafortunadamente, el esfuerzo que implica mantener viva esta tradición está llevando a que varias parejas eviten el compromiso marital. Es por esto que la intendencia de Asignasonia requiere un algoritmo que resuelva el problema de asignación de les solteres a sus mesas.

    a) Proponer un modelo de flujo que dados los conjuntos $F = \{f_1, \dots, f_{|F|}\}$, $M = \{m_1, \dots, m_{|M|}\}$ y $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq |F|, 1 \leq j \leq |M|\}$ determine una asignación que respete las tradiciones sabiendo que:

    - la familia i esta formada por f_i personas solteres,
    - la mesa j tiene m_j lugares disponibles para solteres, y
    - en la mesa j solo pueden sentarse c_{ij} solteres de la familia i.

    b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

    c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

9. Sean $r_1, \dots, r_m$ y $c_1, \dots, c_n$ números naturales. Se quiere asignar los valores de las celdas de una matriz de $m \times n$ con números naturales de forma tal que la i-ésima fila sume r_i y la i-ésima columna sume c_i.

   a) Modelar el problema de asignación como un problema de flujo.

   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

   c) Demostrar que el modelo es correcto.

   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

10. Dado un ordenamiento $v_1, \dots, v_n$ de los vértices de un digrafo D, se define la *secuencia digráfica* de D como $(d^-(v_1), d^+(v_1)), \dots, (d^-(v_n), d^+(v_n))$. Dada una secuencia de pares d, el problema de realización de d consiste en encontrar un digrafo D cuya secuencia digráfica sea d.

    a) Modelar el problema de realización como un problema de flujo.

    b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

    c) Demostrar que el modelo es correcto.

    d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp. La cota debe estar expresada en función de n y debe ser lo suficientemente ajustada.

11. Un *grafo mixto* es una tripla $G = (V, E, A)$ tal que (V, E) es un grafo, (V, A) es un grafo orientado y E y A no tienen aristas en común. (En otras palabras, G se obtiene del grafo $(G, E \cup A)$ orientando las aristas de A.) El grafo mixto G es *euleriano* si se pueden orientar las aristas de E a fin de que el grafo orientado resultante tenga un circuito que pase por todas sus aristas exactamente una vez. Es sabido que un digrafo es euleriano si y sólo si el digrafo es conexo y $d^+(v) = d^-(v)$ para todo $v \in V(G)$.

    a) Modelar el problema de decidir si un grafo mixto es euleriano como un problema de flujo.

    b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

    c) Demostrar que el modelo es correcto.

    d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

12. En un hospital hay K períodos de feriados. Cada período k consiste de $D_j = \{d_{k1} \dots, d_{kr}\}$ días feriado contiguos. Este hospital tiene N médicxs y cada uno tiene un conjunto S_i de días disponibles para trabajar durante los períodos de vacaciones. Por ejemplo, una médica puede tener disponible viernes y sábado de Semana Santa y el lunes del feriado de Güemes. Queremos encontrar, si existe, una asignación de médicxs que cumpla:

    - Nadie tiene asignado más que C días totales para trabajar en vacaciones (y sólo dentro de sus días disponibles).
    - Cada día de vacaciones tiene asignada una única persona que trabaje.
    - Unx médicx sólo puede tener, como máximo, un día asignado dentro de cada período D_k. Es decir, quizá tiene disponibles jueves, viernes, sábado y domingo de Semana Santa pero sólo se le puede asignar uno de esos días.

Para esto nos piden que hagamos lo siguiente:

a) Modelar el problema como un problema de flujo para decidir si existe una asignación factible
b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.
c) Demostrar la correctitud del modelo.
d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

Problemas de modelado III: transporte de objetos

13. **Enchufes**: En la próxima cumbre internacional de cuestiones importantes se recibirán periodistas de todo el mundo en un hotel que antaño era moderno pero hoy es simplemente lujoso y antiguo. Como antes no se usaban muchos artefactos eléctricos, solo algunos tomacorrientes de cada tipo fueron instalados en la sala de la cumbre. El tiempo pasó y los artefactos eléctricos se empezaron a utilizar mucho más, además de que surgieron nuevos tipos de tomacorrientes. Antes de que comience la cumbre, se recolectó la información de los dispositivos que van a traer les periodistas a fin de adquirir los adaptadores necesarios, los cuales se comprarán en un fabricante particular. Cada adaptador de este fabricante tiene una forma de entrada y una forma de salida. Estos adaptadores se pueden encadenar tanto como se quiera, lo cual es bueno porque la fábrica no vende todos los tipos de adaptadores existentes. Por suerte, sí tienen la posibilidad de fabricar una cantidad ilimitada de los adaptadores que venden.

    a) Proponer un modelo de flujo para minimizar la cantidad de dispositivos que se quedan sin corriente eléctrica sabiendo:
    - que les periodistas traerán d_i dispositivos que usan un tomacorrientes de cada tipo i,
    - que la sala principal tiene t_i tomacorrientes de cada tipo i,
    - cuáles son los pares ij de entradas y salida de los adaptadores vendidos por la fábrica.

    b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.
    c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

14. Una de las aficiones de Carle en su juventud fue la colección de figuritas en el colegio. Junto a sus compañeres compraban paquetes de figuritas de "Italia 90" para conocer a las estrellas del momento. Cada paquete traía cuatro figuritas a priori desconocidas, razón por la cual Carle y sus compañeres tenían figuritas repetidas después de algunas compras. Para completar el álbum más rápidamente, Carle y sus compañeres intercambiaban figuritas a través del protocolo "late-nola". Este protocolo consiste en que cada una de dos personas intercambian una figurita que elles tienen repetida por una que no poseen aún. Siendo tan inteligente, Carle pronto se dio cuenta que le podía convenir intercambiar algunas de sus figuritas por otras que ya tenía, a fin de intercambiar estas últimas. De esta forma, si Carle ya tenía copias de una figurita, igualmente podía conseguir copias adicionales para intercambiar con otres compañeres que no tuvieran la figurita.

    a) Proponer un modelo de flujo máximo para maximizar la cantidad de figuritas no repetidas que Carle puede obtener a través del intercambio con compañeres, teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

- Carle conoce todas las figuritas repetidas (y la cantidad de repeticiones) de cada compañere.
- Todes les compañeres intercambian primero con Carle, antes de intercambiar entre elles.
- Todes les compañeres utilizan el protocolo "late-nola" para intercambiar con Carle, mientras que Carle ya sabe que le podría convenir obtener figuritas que ya tiene.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

15. Una de las aficiones de Carle en su juventud fue la colección de figuritas en el colegio. Junto a sus compañeres compraban paquetes de figuritas de "Italia 90" para conocer a las estrellas del momento. Cada paquete traía cuatro figuritas a priori desconocidas, razón por la cual Carle y sus compañeres tenían figuritas repetidas después de algunas compras. Para completar el álbum más rápidamente, Carle y sus compañeres intercambiaban figuritas a través del protocolo "late-nola". Este protocolo consiste en que cada una de dos personas intercambian una figurita que elles tienen repetida por una que no poseen aún. Siendo tan inteligente, Carle pronto se dio cuenta que le podía convenir intercambiar algunas de sus figuritas por otras que ya tenía, a fin de intercambiar estas últimas. De esta forma, si Carle ya tenía copias de una figurita, igualmente podía conseguir copias adicionales para intercambiar con otres compañeres que no tuvieran la figurita.

a) Proponer un modelo de flujo máximo para maximizar la cantidad de figuritas no repetidas que Carle puede obtener a través del intercambio con compañeres, teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

- Carle conoce todas las figuritas repetidas (y la cantidad de repeticiones) de cada compañere.
- Todes les compañeres intercambian primero con Carle, antes de intercambiar entre elles.
- Todes les compañeres utilizan el protocolo "late-nola" para intercambiar con Carle, mientras que Carle ya sabe que le podría convenir obtener figuritas que ya tiene.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

16. Un satélite necesita mandar datos en megabytes a la Tierra y dispone de N ventanas de tiempo para hacerlo. Capta los datos del espacio a través de R sensores.

Cada sensor tiene una cola asignada a la que cargarle datos, donde la cola q puede almacenar hasta c_q megabytes. El sensor r carga a_{rt} datos a su cola en la ventana de tiempo t, que ocurre antes de empezar la ventana de envío hacia la tierra. En cada ventana de tiempo se pueden mandar hasta d_t megabytes entre todas las colas para que finalmente lleguen a la Tierra.

Si en un instante t las colas no pudieron mandar todos los datos que contenían, guardan estos datos para intentar mandarlos en el siguiente instante.

a) Científicos de la NASA nos piden escribir un programa para maximizar la cantidad de megabytes que pueden ser transferidos desde el satélite a la Tierra en un período determinado.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

17. Después del hundimiento del Titanic mucha gente quedó varada en el agua esperando que los rescaten.

    Como hace mucho frio la gente quiere resguardarse lo más posible del agua helada. Sobre la misma hay restos de madera del barco y del iceberg contra el que chocó. Las personas quieren moverse hacia las maderas asi pueden esperar a ser rescatados.

    Los icebergs bloquean el paso pero una persona puede usarlos momentáneamente como puente para llegar al otro lado. Estos vienen de varios tamaños: pequeños, los cuales pueden usarse por unos segundos para pasar y una vez utilizados se hunden y grandes, por los cuales pueden pasar todos sin que nunca se hunda.

    Resumiendo cada persona tiene las siguientes opciones

    - Quedarse en un pedazo de hielo pequeño con la restricción de que no pueden quedarse para siempre acá y una vez que se muevan el hielo se hunde.
    - Intentar ir al agua, lo cual significa una muerte segura por las bajas temperaturas.
    - Iceberg grande, este no se hunde si la gente pasa por el pero tampoco pueden quedarse mucho tiempo dada las extremas temperaturas.
    - Pedazos de Madera, solo puede subirse una persona y quedarse indefinidamente esperando al rescate.

    Nos describen el mapa del área como una matriz con donde cada posición indica si hay madera, icebergs pequeños, iceberg grande o mar libre. Todas las personas empiezan arriba de un iceberg pequeño.

    a) Modelar el problema como un problema de flujo para determinar la mayor cantidad de gente que puede quedar arriba de una madera para ser rescatada.
    b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.
    c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

    Queremos conseguir la forma de que más gente termine arriba de maderas para ser rescatada.

Problemas de modelado IV: Modelo con corte mínimo

18. Existen M maquinas y P proyectos a realizar utilizando dichas maquinas. Comprar la maquína i cuesta c_i y completar el proyecto j nos da un beneficio b_j. Además, se tienen R relaciones (i, j), que significan que para poder realizar el proyecto j es necesario haber comprado la máquina i. Notar que una misma máquina puede utilizarse en más de un proyecto con una sola compra, y que para realizar un proyecto es obligatorio comprar todas las máquinas que necesita.

    Se busca elegir un subconjunto de máquinas M' y proyectos P' de tal forma que:

    I Sea posible realizar todos los proyectos de P' con las máquinas de M'.

II Se maximice

$$\sum_{j \in P'} b_j - \sum_{i \in M'} c_i$$

. Es decir, el beneficio neto.

a) Proponer un grafo dirigido ponderado $G = (V, E)$ tal que:

- $(|V| + |E|) \in O(M + P + R)$.
- Exista un valor C calculable en $O(M+P+R)$ tal que el beneficio neto máximo es igual a $C - MinCut(G)$.
- Es posible recuperar los subconjuntos M' y P' a partir de un corte minimio de G.

b) Indicar cómo calcular el valor C.

c) Indicar cómo recuperar los subconjuntos M' y P' a partir de un corte mínimo de G.

d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

19. Se tiene un grafo dirigido $G = (V, E)$, y cada nodo v tiene un valor $w(v) \in \mathbb{R}$. Se desea elegir un subconjunto de nodos $V' \subseteq V$ tal que:

I El valor total de los nodos elegidos sea máximo, es decir, $\sum_{v \in V'} w(v)$.

II No exista ninguna arista dirigida $u \to v \in E$ tal que $u \in V'$ y $v \notin V'$.

a) Proponer un grafo dirigido ponderado $G' = (V', E')$ tal que:

- $(|V'| + |E'|) \in O(|V| + |E|)$.
- Exista un valor C calculable en $O(|V| + |E|)$ tal que el valor máximo de los nodos elegidos es igual a $C - MinCut(G')$.
- Es posible recuperar el subconjunto V' a partir de un corte minimio de G'.

b) Indicar cómo calcular el valor C.

c) Indicar cómo recuperar el subconjunto V' a partir de un corte mínimo de G'.

d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

20. Se tiene un grafo $G = (V, E)$ con nodos y aristas ponderados. Se quiere elegir un subgrafo $G' = (V', E')$ tal que:

I Maximice $\sum_{v \in V'} w(v) + \sum_{e \in E'} w(e)$, donde $w(v) \in \mathbb{R}$ es el peso del nodo v y $w(e) \in \mathbb{R}$ es el peso de la arista e.

II $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

III $(u, v) \in E' \implies u, v \in V'$.

a) Proponer un grafo dirigido ponderado $G'' = (V'', E'')$ tal que:

- $(|V''| + |E''|) \in O(|V| + |E|)$.
- Exista un valor C calculable en $O(|V| + |E|)$ tal que el valor máximo de los nodos elegidos menos el valor mínimo de las aristas elegidas es igual a $C - MinCut(G'')$.

   - Es posible recuperar el subconjunto V' y E' a partir de un corte minimio de G''.

b) Indicar cómo calcular el valor C.

c) Indicar cómo recuperar los subconjuntos V' y E' a partir de un corte mínimo de G''.

d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

21. Se tienen N lotes de construcción disponibles y un valor H. En el lote i se puede construir un edificio de entre 0 y $H_i \leq H$ pisos de altura. Construir un edificio de altura h genera un beneficio de h^2 pesos. Además, se tienen M normativas (l_j, r_j, H_j, c_j) que significan que si alguno de los edificios construidos en los lotes $l_j, \ldots, r_j$ (inclusive) tiene una altura mayor a H_j, entonces se debe pagar una multa de c_j pesos. Notar que la multa es la misma independientemente de la cantidad de lotes que incumplan la normativa, que una misma normativa puede aplicarse a más de un lote, y que un lote puede violar más de una normativa a la vez. Se busca elegir alturas h_i para cada lote i de forma tal que se maximice el beneficio neto. Es decir, los beneficios de la construcción de los edificios menos las multas a pagar.

   a) Proponer un grafo dirigido ponderado $G = (V, E)$ tal que:
      - $(|V| + |E|) \in O((H + M) * N)$
      - Exista un valor C calculable en $O(N * H + M)$ tal que el beneficio neto máximo es igual a $C - MinCut(G)$.
      - Es posible recuperar la altura de cada edificio a partir de un corte mínimo de G.

   b) Indicar cómo calcular el valor C.

   c) Indicar cómo recuperar la altura de cada edificio a partir de un corte mínimo de G.

   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

Flujo máximo de costo mínimo

22. Una *red con costos* es una red en la que cada arista e tiene una capacidad $c(e)$ y un costo $q(e) \geq 0$. Dada una red con costos N, el *problema de flujo máximo con costo mínimo* consiste en encontrar el flujo máximo f que minimice $\sum_{e \in E(N)} f(e) * q(e)$. Demostrar que el algoritmo de Ford y Fulkerson, en el que el camino de aumento elegido tiene costo mínimo, encuentra un flujo máximo de costo mínimo. Determinar qué algortimo se utilizar para elegir el camino de aumento y calcular la complejidad del algoritmo resultante (tener en cuenta que el algoritmo requiere a lo sumo $O(nU)$ iteraciones, donde $U = \max_{e \in E(N)} c(e)$).

23. Dado un grafo G, un *matching* de G es un subconjunto de aristas sin vértices en común. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito —donde (A, B) es una bipartición— y $w : E \to \mathbb{N}$ una función que asigna pesos a las aristas de G. El *problema de matching bipartito de peso mínimo* consiste en hallar el matching $M \subseteq E$ de máximo cardinal posible en G que además tenga costo total mínimo.

   a) Modelar el problema de matching bipartito de peso mínimo como un problema de flujo máximo de costo mínimo.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo, cada restricción de capacidad y cada costo por unidad de flujo.

c) Demostrar que el modelo es correcto.

d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo del Ejercicio 22.

24. Dado un digrafo completo y pesado D el *problema de viajante de comercio* (TSP por sus siglas en inglés: *traveling salesman problem*) consiste en encontrar un ciclo que recorra todos los vértices de D y tenga costo mínimo. Queremos resolver el caso particular de TSP en el cual $|V(D)| = 2n$ y sabemos en qué orden deben recorrerse los nodos "pares". Es decir, además de D, el input contiene una secuencia $w_2, w_4, \ldots, w_{2n}$ de vértices; el output debe ser un ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ tal que $v_{2i} = w_{2i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

    a) Modelar el TSP como un problema de matching bipartito de peso mínimo en grafo G.

    b) Dar una interpretación a cada matching de G como representante de un ciclo de D.

    c) Demostrar que el modelo es correcto.

    d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo del Ejercicio 23.

Ejercicios adicionales y opcionales

25. Una *red con demandas* es una red en la que cada arista e tiene una capacidad $c(e)$ y una demanda $0 \leq d(e) \leq c(e)$. Dada una red con demandas, el problema de flujo asociado consiste en encontrar un flujo válido f tal que $d(e) \leq f(e) \leq c(e)$ para todo arco e. Para resolver el problema de flujo en una red N con demandas se puede resolver un problema de flujo en una red N' sin demandas. La red N' se obtiene agregando una nueva fuente s' y un nuevo sumidero t' a N, una arista $t' \to s'$, y las aristas $s \to v$ y $v \to t$ para todo $v \in V(N)$. La función de capacidad c' de N' es tal que:

    I. $c'(s' \to v) = \sum_{u \in V} d(u \to v)$ para todo $v \in V(N)$,

    II. $c'(v \to t') = \sum_{w \in V} d(v \to w)$ para todo $v \in V(N)$,

    III. $c'(u \to v) = c(u \to v) - d(u \to v)$ para todo arco $e \in E(N)$,

    IV. $c'(t \to s) = \infty$.

    Demostrar que N tiene un flujo factible si y sólo si el flujo máximo de N' satura todas las aristas que salen de s' (y todas las que entran a t'). **Sugerencia:** muestre cómo se puede obtener un flujo factible de N a partir de un flujo máximo de N' y viceversa.

26. **Elecciones (2do Parcial C2 2023)**

    a) Se acercan las elecciones en Rumestania y se está planificando la logística para hacer el recuento provisorio de votos en Zrôvaliev, un pequeño pueblo remoto de ese país.

    Zrôvaliev consiste en un conjunto de n edificaciones y hay un total de U urnas distribuidas entre algunas de estas edificaciones. La conexión a Internet disponible en Zrôvaliev no es muy confiable, por lo que luego de terminada la jornada electoral y confeccionados los telegramas con los conteos de votos de cada urna, se los debe llevar físicamente a alguna edificación que tenga buena conexión (se sabe que todo edificio donde se va a votar tiene mala conectividad). Para esto, se cuenta con personas que se encargarán de acercar los telegramas entre edificaciones pero, por cuestiones logísticas, se decidió que para todo par de edificaciones e_i, e_j ($1 \leq i, j \leq n$), se haga a lo sumo un único viaje de e_i hacia e_j, y solo si la distancia entre e_i y e_j es menor a d metros (d es constante para todo i, j). Adicionalmente, la persona que realice este viaje llevará una mochila con a lo sumo k telegramas (k es constante para todas las personas).

Contando con la tupla $(u_i, \text{lat}_i, \text{long}_i, \text{tiene\_conexion}_i)$ para cada edificación i ($1 \leq i \leq n$), donde u_i ($0 \leq u_i, \sum u_i = U$) es la cantidad de urnas en el edificio, lat_i y long_i son su latitud y longitud (con las cuales es posible calcular la distancia en metros), y tiene_conexion_i es un booleano que indica si la conexión a internet del edificio i es stable, se quiere saber la máxima cantidad de telegramas que se pueden digitalizar y transferir al centro de cómputos bajo este conjunto de reglas.

i) Modele y proponga un algoritmo basado en flujo para resolver este problema. ¿Qué representa cada unidad de flujo en su modelado? ¿Cuál es la complejidad del algoritmo?

b) La prensa de Rumestania sabe que el recuento provisorio es exasperantemente lento, por lo que inescrupulosamente piensa poner a disposición sus vastos recursos tecnológicos para adelantar los resultados. Para esto, cuenta con dispositivos espías que pueden ocultarse en la mochila de las personas que están llevando telegramas.

La prensa ya conoce la logística que se decidió para el día electoral, es decir, qué viajes entre edificios se van a realizar y cuántos telegramas se van a llevar en cada uno. Sabiendo esto, desean conocer la mínima cantidad de dispositivos espías que necesitan emplear y en qué mochila deben ponerlos para asegurarse de que todo telegrama que vaya a ser contabilizado pase por una mochila con un dispositivo espía. (Nota: se mantiene la condición de que ningún lugar donde se vota tiene buena conexión a internet, por lo que todos los telegramas van a pasar por alguna mochila. En el contexto de este ejercicio, contamos también con que todos los viajes entre edificios son realizados con mochilas distintas). Diseñe un algoritmo basado en flujo para conocer la cantidad mínima de dispositivos espía necesarios (Considere, para esto, la posibilidad de modificar adecuadamente la red presentada en el inciso anterior para llevar cuenta de las mochilas utilizadas).

27. **Torneos de Futbol**

a) Oriana y sus amigas están jugando un torneo de fulbito, pero vienen al medio de la tabla. Como el equipo ganador de la contienda se lleva un super mega premio misterioso, el equipo de las chicas ("Las Algorítmicas") quieren armar un modelo para saber si todavía pueden remontarlo y salir primeras. Ganar da 2 puntos, perder 0 y empatar 1 a cada equipo. Si se saben los puntos actuales de cada equipo, y cuántas fechas quedan para jugar (supongamos que en la semana no se juegan partidos), las chicas saber si pueden ganar o no. Modelar este ejercicio como un problema de flujo,

b) Luego de que Boquita ganara su séptima copa Libertadores, la totalidad del fútbol mundial, comandada principalmente por lastimosos burócratas de Independiente de Avellaneda, se dispuso a intentar frenar el avance feroz del Más Grande. Para esto, buscaron eliminar el principal recurso del cual se vale el club Xeneixe: el empate. A partir de ahora todos los partidos deberán tener un ganador, el cual obtiene 3 puntos en la tabla, mientras que el derrotado no gana nada. En función de este nuevo reglamento, la gestión de Boca quiere contar con una aplicación que le permita decidir, dada la situación de un torneo (que consiste de los puntajes actuales y los partidos por jugar) si es posible que Boca gane el mismo (es decir, si puede obtener un puntaje mayor estricto al de todo el resto de los equipos). Dafne, que es fanática del Azul y Oro, se contacta con la gestión para ayudarlos a desarrollar el modelo que necesitan.