Apunte Único: Técnicas de diseño de algoritmos - Práctica 0

By naD GarRaz

última actualización 24/01/26 @ 20:15

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

Esta Guía 0 que tenés se actualizó por última vez:
24/01/26 @ 20:15
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 0

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

Notas teóricas:

Espacios Vectoriales: Palabras guías

- Hacer!

Ejercicios de la guía:

---

1. Hello, world!

Fin.

---

2. Encontrar una fórmula para la siguiente suma y demostrarla por inducción:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n.$$

Es la geométrica:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{2^{i+1} - 1}{2 - 1} = 2^{i+1} - 1$$

Por inducción quiero probar que la siguiente proposición sea verdadera:

$$p(n) : \sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{2^{i+1} - 1}{2 - 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base

$$p(1) : \sum_{i=0}^{1} 2^i = 1 + 2 = 3 = 2^{1+1} - 1$$

La proposición $p(1)$ resultó ser verdadera.

Paso inductivo Para algún valor $k \in \mathbb{N}$ asumo que la proposición:

$$p(k) : \underbrace{\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Quiero probar entonces que:

$$p(k+1) : \sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+1+1} - 1,$$

también lo sea.

Usando el viejo, querido y confiable truquito:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \overset{\text{HI}}{=} 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Resultó que la proposición $p(k+1)$ también es verdadera.

Entonces como $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas por el principio de inducción también lo es $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Fin.

---

3. La población de una colonia de hormigas se duplica todos los años. Si se establece una colonia inicial de 10 hormigas, ¿Cuántas hormigas habrá después de n años?

La función que describe el crecimiento de la población:

$$H(t) = 10 \cdot 2^t$$

Después de $t = n$ años habrá $10 \cdot 2^n$ hormigas. ¿Habría que probar esto por inducción o algo así? *Pajilla*

Fin.

---

5. La población de gatos en un depósito tiene la propiedad de que el número de gatos en un año es igual a la suma del número de gatos de los dos años anteriores. Si en el primer año (empezando a contar desde 1) había un solo gato, y en el segundo dos (suponiendo ello posible!), probar que el número de gatos en el año n es:

$$\sqrt{\tfrac{1}{5}} \times \left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right)$$

La cantidad de gatos del año n, G_n es la suma de los gatos de los dos años anteriores:

$$\begin{cases} G_1 = 1 \\ G_2 = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad G_n \overset{\text{def}}{=} G_{n-1} + G_{n-2}$$

Esto es fibonacci y esos números son el número de oro:

$$\begin{cases} \varphi & = & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{\varphi} & = & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \xrightarrow[\text{propiedades}]{\text{mágicas}} \bigstar^1 \begin{cases} \varphi + \frac{1}{\varphi} & = & \sqrt{5} \\ \varphi - \frac{1}{\varphi} & = & 1 \\ \varphi^n & = & \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \\ (\frac{-1}{\varphi})^n & = & (\frac{-1}{\varphi})^{n-1} + (\frac{-1}{\varphi})^{n-2} \end{cases}$$

Quiero probar que la proposición es verdadera:

$$p(n) : G_n = \sqrt{\tfrac{1}{5}} \cdot \left(\varphi^{n+1} - \left(-\tfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} \right)$$

Esto se puede probar por inducción:
Caso base:

$$p(1) : G_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\varphi^2 - \left(-\tfrac{1}{\varphi}\right)^2 \right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi - \tfrac{1}{\varphi}) \cdot (\varphi + \tfrac{1}{\varphi}) \overset{\bigstar^1}{=} 1$$

Por lo que la proposición $p(1)$ resultó verdadera. Ahora pruebo el segundo caso base:

$$p(2) : G_2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^3 - (-\tfrac{1}{\varphi})^3)$$

Cuentas feas del *número de oro* usando mucho la propiedad de recursividad de potencias de φ y $-\frac{1}{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^3 - (\tfrac{-1}{\varphi})^3) & \overset{!!}{\underset{\bigstar^1}{=}} \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2\varphi + 1 - (\tfrac{-2}{\varphi} + 1)) \\ & = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\tfrac{2\varphi^2+2}{\varphi}) \\ & \overset{\bigstar^1}{=} \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\tfrac{2(\varphi+1)+2}{\varphi}) \\ & = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\tfrac{2\varphi+4}{\varphi}) \\ & \overset{!}{=} \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\tfrac{5+\sqrt{5}}{\varphi}) \\ & = \tfrac{\sqrt{5}+1}{\varphi} \\ & = \tfrac{\sqrt{5}+1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto la proposición $p(2)$ es verdadera también.

Paso inductivo:
Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$ las proposiciones:

$$p(k) : \underbrace{G_k = \sqrt{\tfrac{1}{5}} \cdot (\varphi^{k+1} - (-\tfrac{1}{\varphi})^{k+1})}_{\text{hipótesis inductiva}} \quad \text{y} \quad p(k+1) : \underbrace{G_{k+1} = \sqrt{\tfrac{1}{5}} \cdot (\varphi^{k+2} - (-\tfrac{1}{\varphi})^{k+2})}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

son verdaderas, por lo tanto quiero probar que la proposición:

$$p(k+2) : G_{k+2} = \sqrt{\tfrac{1}{5}} \cdot (\varphi^{k+3} - (-\tfrac{1}{\varphi})^{k+3})$$

también sea verdadera.

Usando la defini ción de G_n y las hipótesis inductivas, sale enseguida:

$$\begin{aligned} G_{k+2} &\overset{\text{def}}{=} G_{k+1} + G_k \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{5}} \cdot \left(\varphi^{k+1} - (-\tfrac{1}{\varphi})^{k+1} + \varphi^{k+2} - (-\tfrac{1}{\varphi})^{k+2}\right) \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{5}} \cdot \left((\varphi^{k+2} + \varphi^{k+1}) - \left((-\tfrac{1}{\varphi})^{k+2} + (-\tfrac{1}{\varphi})^{k+1}\right)\right) \\ &\overset{\star 1}{=} \sqrt{\tfrac{1}{5}} \cdot \left(\varphi^{k+3} - (-\tfrac{1}{\varphi})^{k+3}\right) \end{aligned}$$

De manera que la proposición $p(k+1)$ resultó también verdadera.

Dado que $p(1)$, $p(2)$, $p(k)$, $p(k+1)$ y $p(k+2)$ son todas verdaderas, por principio de inducción, $p(n)$ también los será para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fin.

---

7. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración?
Se quiere probar que los elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de un conjunto son iguales entre sí.

a) Paso inicial ($n = 1$): El conjunto tiene un sólo elemento x_1 que es igual a sí mismo.

b) Paso inductivo: Supongamos que $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1}$. Cómo también vale la hipótesis inductiva para un conjunto de dos elementos, tenemos que $x_{n-1} = x_n$ y por tanto resulta $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots x_{n-1} = x_n$.

¿La igualdad de los elementos es independiente del tamaño del conjunto?
consultar

---

8. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración?
Se quiere probar que $\forall a \neq 0$ vale que $a^n = 1$.

a) Paso inicial ($n = 0$): $a^n = 1 \ \forall a^n = 1$.

b) Paso inductivo: Supongamos que $a^{n-1} = 1$. Entonces $a^n = (a^{n-1} \times a^{n-1})/a^{n-2} = (1 \times 1)/1 = 1$

Que no da ninguna cuenta? Que al asumir que $a^{n-1} = 1 \Leftrightarrow (n = 1 \vee a = 1)$
consultar