

# Apunte Único: Técnicas de diseño de algoritmos - Práctica 0

*By naD GarRaz*

última actualización 24/01/26 @ 20:15

*Choose your destiny:*

(click click 🖱 en el ejercicio para saltar)

⦿ [Notas teóricas](#)

⦿ Ejercicios de la guía:

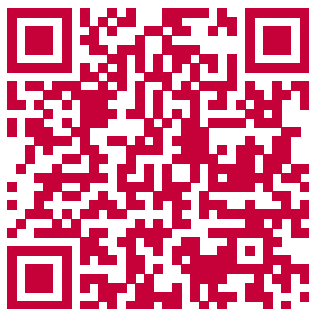
[1.](#)   [2.](#)   [3.](#)   [??.](#)   [5.](#)   [??.](#)   [7.](#)   [8.](#)

Esta Guía 0 que tenés se actualizó por última vez:

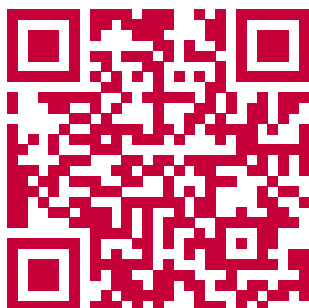
24/01/26 @ 20:15

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

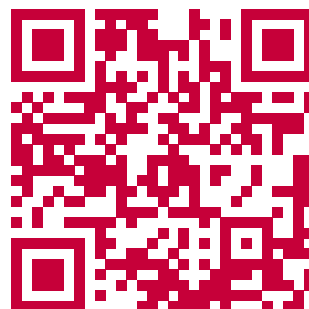
Guía 0



El resto de las guías repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por [Telegram](#).



**Notas teóricas:**

*Espacios Vectoriales: Palabras guías*

✿ Hacer!

## Ejercicios de la guía:

1. Hello, world!

*Fin.*

2. Encontrar una fórmula para la siguiente suma y demostrarla por inducción:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n.$$

Es la geométrica:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = \frac{2^{i+1} - 1}{2 - 1} = 2^{i+1} - 1$$

Por inducción quiero probar que la siguiente proposición sea verdadera:

$$p(n) : \sum_{i=0}^n 2^i = \frac{2^{i+1} - 1}{2 - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Caso base*

$$p(1) : \sum_{i=0}^1 2^i = 1 + 2 = 3 = 2^{1+1} - 1$$

La proposición  $p(1)$  resultó ser verdadera.*Paso inductivo* Para algún valor  $k \in \mathbb{N}$  asumo que la proposición:

$$p(k) : \underbrace{\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Quiero probar entonces que:

$$p(k+1) : \sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+1+1} - 1,$$

también lo sea.

Usando el viejo, querido y confiable truquito:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+1} + \sum_{i=0}^k 2^i \stackrel{\text{HI}}{=} 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Resultó que la proposición  $p(k+1)$  también es verdadera.Entonces como  $p(1)$ ,  $p(k)$  y  $p(k+1)$  son verdaderas por el principio de inducción también lo es  $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .*Fin.*3. La población de una colonia de hormigas se duplica todos los años. Si se establece una colonia inicial de 10 hormigas, ¿Cuántas hormigas habrá después de  $n$  años?

La función que describe el crecimiento de la población:

$$H(t) = 10 \cdot 2^t$$

Después de  $t = n$  años habrá  $10 \cdot 2^n$  hormigas. ¿Habría que probar esto por inducción o algo así? *Pajilla*

*Fin.*

5. La población de gatos en un depósito tiene la propiedad de que el número de gatos en un año es igual a la suma del número de gatos de los dos años anteriores. Si en el primer año (empezando a contar desde 1) había un solo gato, y en el segundo dos (suponiendo ello posible!), probar que el número de gatos en el año  $n$  es:

$$\sqrt{\frac{1}{5}} \times \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

La cantidad de gatos del año  $n$ ,  $G_n$  es la suma de los gatos de los dos años anteriores:

$$\begin{cases} G_1 = 1 \\ G_2 = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad G_n \stackrel{\text{def}}{=} G_{n-1} + G_{n-2}$$

Esto es fibonacci y esos números son el número de oro:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \xrightarrow[\text{propiedades}]{\text{mágicas}} \begin{cases} \varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5} \\ \varphi - \frac{1}{\varphi} = 1 \\ \varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \\ \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n = \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-2} \end{cases}$$

Quiero probar que la proposición es verdadera:

$$p(n) : G_n = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \left( \varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} \right)$$

Esto se puede probar por inducción:

*Caso base:*

$$p(1) : G_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \varphi^2 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \varphi - \frac{1}{\varphi} \right) \cdot \left( \varphi + \frac{1}{\varphi} \right) \stackrel{\star^1}{=} 1$$

Por lo que la proposición  $p(1)$  resultó verdadera. Ahora pruebo el segundo caso base:

$$p(2) : G_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^3 - (-\frac{1}{\varphi})^3)$$

Cuentas feas del *número de oro* usando mucho la propiedad de recursividad de potencias de  $\varphi$  y  $-\frac{1}{\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^3 - (-\frac{1}{\varphi})^3) &\stackrel{!!}{\stackrel{\star^1}{=}} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2\varphi + 1 - (\frac{-2}{\varphi} + 1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{2\varphi^2+2}{\varphi} \right) \\ &\stackrel{\star^1}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{2(\varphi+1)+2}{\varphi} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{2\varphi+4}{\varphi} \right) \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{5+\sqrt{5}}{\varphi} \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{\varphi} \\ &\stackrel{\odot}{=} \frac{\sqrt{5}+1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto la proposición  $p(2)$  es verdadera también.

*Paso inductivo:*

Asumo que para algún  $k \in \mathbb{N}$  las proposiciones:

$$\underbrace{p(k) : G_k = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot (\varphi^{k+1} - (-\frac{1}{\varphi})^{k+1})}_{\text{hipótesis inductiva}} \quad \text{y} \quad \underbrace{p(k+1) : G_{k+1} = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot (\varphi^{k+2} - (-\frac{1}{\varphi})^{k+2})}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

son verdaderas, por lo tanto quiero probar que la proposición:

$$p(k+2) : G_{k+2} = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot (\varphi^{k+3} - (-\frac{1}{\varphi})^{k+3})$$

también sea verdadera.

Usando la definición de  $G_n$  y las hipótesis inductivas, sale enseguida:

$$\begin{aligned} G_{k+2} &\stackrel{\text{def}}{=} G_{k+1} + G_k \\ &= \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \left( \varphi^{k+1} - (-\frac{1}{\varphi})^{k+1} + \varphi^{k+2} - (-\frac{1}{\varphi})^{k+2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \left( (\varphi^{k+2} + \varphi^{k+1}) - \left( (-\frac{1}{\varphi})^{k+2} + (-\frac{1}{\varphi})^{k+1} \right) \right) \\ &\stackrel{\star^1}{=} \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \left( \varphi^{k+3} - (-\frac{1}{\varphi})^{k+3} \right) \end{aligned}$$

De manera que la proposición  $p(k+1)$  resultó también verdadera.

Dado que  $p(1)$ ,  $p(2)$ ,  $p(k)$ ,  $p(k+1)$  y  $p(k+2)$  son todas verdaderas, por principio de inducción,  $p(n)$  también lo será para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Fin.*

### 7. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración?

Se quiere probar que los elementos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  de un conjunto son iguales entre sí.

- a) Paso inicial ( $n = 1$ ): El conjunto tiene un sólo elemento  $x_1$  que es igual a sí mismo.
- b) Paso inductivo: Supongamos que  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1}$ . Cómo también vale la hipótesis inductiva para un conjunto de dos elementos, tenemos que  $x_{n-1} = x_n$  y por tanto resulta  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = x_n$ .

¿La igualdad de los elementos es independiente del tamaño del conjunto?

[consultar](#)

### 8. ¿Cuál es el error en la siguiente demostración?

Se quiere probar que  $\forall a \neq 0$  vale que  $a^n = 1$ .

- a) Paso inicial ( $n = 0$ ):  $a^n = 1 \quad \forall a^n = 1$ .
- b) Paso inductivo: Supongamos que  $a^{n-1} = 1$ . Entonces  $a^n = (a^{n-1} \times a^{n-1})/a^{n-2} = (1 \times 1)/1 = 1$

Que no da ninguna cuenta? Que al asumir que  $a^{n-1} = 1 \Leftrightarrow (n = 1 \vee a = 1)$

[consultar](#)