Apunte Único: Técnicas de diseño de algoritmos - Práctica 3

By naD GarRaz

última actualización 29/01/26 @ 21:50

Choose your destiny:

(click click en el ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1. **2.** **3.** **4.** **5.** **6.** **7.** **8.** **9.** **10.** **11.**
12. **13.** **14.** **15.** **??.** **??.** **??.** **??.** **??.** **??.**
??.

Esta Guía 3 que tenés se actualizó por última vez:
29/01/26 @ 21:50

Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 3

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

- *Grafos:*

  Un grafo G es una terna (V, E, φ), con V un conjunto vértices, E un conjunto aristas y φ es la función de incidencia.

  La función φ toma un elemento de E y lo manda a un par formado por elementos de V.

$$\varphi : E \to (v_i, v_j) \text{ con } v_i, v_j \in V$$

$$\begin{cases} V &= \{v_1, \dots, v_n\} \\ E &= \{e_1, \dots, e_m\} \end{cases}$$

- *vértices o nodos adyacentes:*

$$v \quad \text{y} \quad w \in V, \ \text{si } e = \overbrace{(v, w)}^{\substack{\text{notación} \\ \text{de aristas}}} \in E$$

  donde el *edge o arista* e es incidente a v y w.

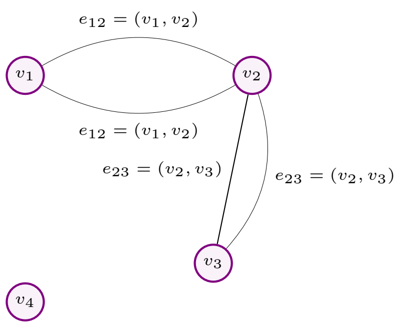
- *Vecindad, Neighborhood:*

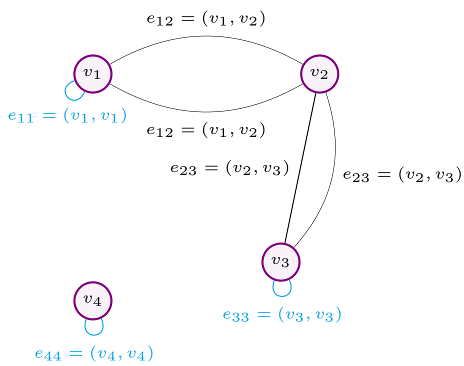
  Conjunto con los vértices adyacentes a v:

$$N(v) = \{w \in V : (v, w) \in E\}.$$

- *Multigrafo y Pseudografo:*

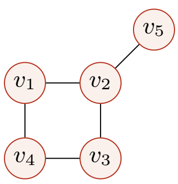
  En un multigrafo puede haber más de una arista conectando el mismo par de vértices. Un pseudografo es un multigrafo que también puede tener *loops*.





- *Grado de un vértice, $d_G(v)$:*

  Es la cantidad de *aristas* que tiene incidentes.



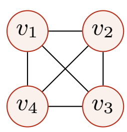
$$d_G(v_1) = d_G(v_4) = d_G(v_4) = 2$$

$$d_G(v_2) = 3$$

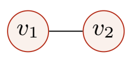
$$d_G(v_5) = 1$$

- *Grafo Completo K_n:* Cuando todos los vértices son adyacentes entre sí.

K_4



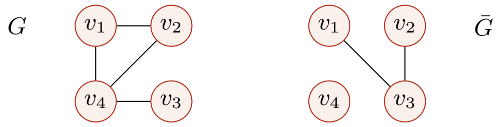
K_2



Un grafo completo de n vértices, K_n tiene un total de $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ *aristas.*

- *Grafo complemento:*

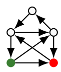
  Dado $G = (V, E)$, el *grafo complementario* $\bar{G} = (V, \bar{E})$, donde el conjunto V es igual en G y $\bar{G}$ mientras que $E \cap \bar{E} = \varnothing$.



  Dado que $G \cup \bar{G}$ hacen un *grafo completo*:

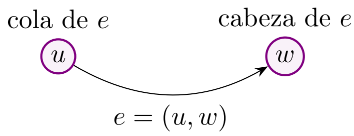
  $$\boxed{\text{Si } G \text{ tiene } n \textit{ vértices} \text{ y } m \textit{ aristas } \bar{G} \text{ tendrá, } \frac{n \cdot (n-1)}{2} - m \textit{ aristas.}}$$

- *Recorridos, caminos, circuitos, ciclos*

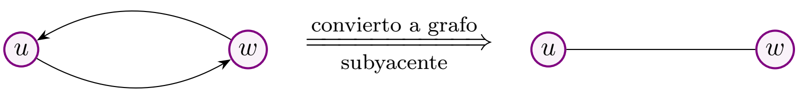
  1) *Recorrido o caminata (Walk)*:
     Secuencia alternada de vértices adyacentes y aristas. Nada raro. Se pueden repetir, vale todo.
  2) *Camino (Path)*:
     Es un *recorrido* que no pasa dos veces por el mismo vértice, en consecuencia tampoco repetís aristas.
  3) *Senda o Rastro (Trail)*:
     Es un *recorrido* que no repite aristas, pero podrías repetir vértices: 
  4) *Circuito (Circuit)*:
     Es una *senda cerrada*, es decir empieza y terminar en el mismo vértice. Puede repetir vértices intermedio pero no repite aristas.
  5) *Ciclo o Circuito simple*:
     Es una mezcla entre *circuito* y *camino* de 3 o más vértices que no repite vértices excepto por el primero y el último.

- Digrafos, grafos Dirigidos. Es un grafo con aristas dirigidas:

  - D o G: *Digrafo:*
    Los *vértices* se llaman *arcos*, que van de



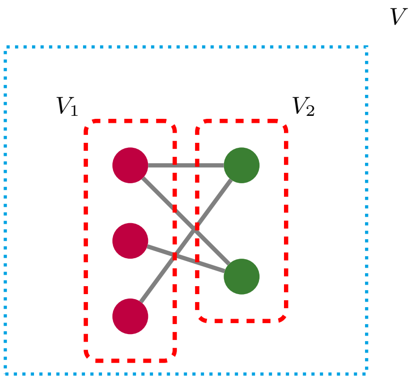
  - $d_{in}(v)$: *Grado de entrada* de v.
    Cantidad de *arcos* que llegan a v. Es la cantidad de *arcos* que tienen a v como cabeza.
  - $d_{out}(v)$: *Grado de entrada* de v.
    Cantidad de *arcos* que salen de v. Es la cantidad de *arcos* que tienen a v como cola.
  - *grafo subyacente de un digrafo D:* Es el grafo G^s que resulta de sacar las direcciones de los arcos.



- *Grafo bipartito:*

$$\text{Sea } G = (V, E) \text{ con } V = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ y } E = \{e_1, \ldots, e_m\}$$
$$G \text{ es } \textit{bipartito} \iff V = V_1 \cup V_2 \text{ con } V_1 \neq \varnothing \wedge V_2 \neq \varnothing \wedge V_1 \cap V_2 = \varnothing$$
$$G \text{ es } \textit{bipartito} \iff \text{no tiene ciclos impares}$$

Ejemplo:



⚠ En un grafo *bipartito* se pueden armar dos bandos, donde no hay *friendly fire*. ⚠

- *Grafo subyacente o Subgrafo:*

Dado un grafo $G = (V, E)$, se denomina *subgrafo* al grafo
$G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V \;\wedge\; E' \subseteq E$ con $E' = \{e = (v, w)$ con $v, w \in V'\}$.

A partir de un grafo G, un subgrafo $\sim G_v$ lo puedo construir sacando el vértice v (y las aristas que inciden en él) o una arista para obtener.

- *Grafos conexos:*

Relación de conexión:

Dado un grafo $G = (V, E)$, en el conjunto V se define la siguiente relación $\mathcal{R}$:

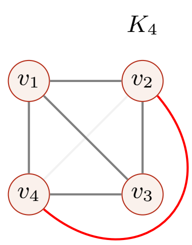
$$v_i \;\mathcal{R}\; v_j \iff \exists \;\; \textit{un recorrido de} \;\; v_i \to v_j \quad \text{o} \quad v_i = v_j$$

$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Los v_i y v_j que estén relacionados entre sí según $\mathcal{R}$ formaran las clases de equivalencias o <u>*componentes conexas*</u> (islas para los amigos).

<u>*Grafo conexo:*</u> *Un grafo es conexo si y solo si tiene una única componente conexa.*

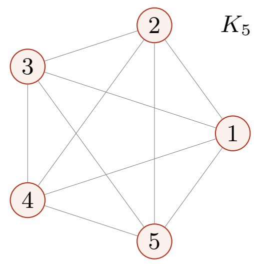
- *Grafos Planos:*

Un grafo es plano si es posible dibujarlo sin que se crucen sus aristas. O es lo mismo decir que un grafo es plano si existe alguno isomorfo a él que esté dibujado sin que se crucen las aristas.

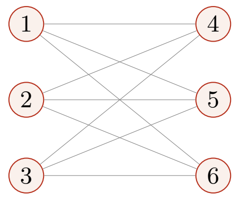


Teorema de Kuratowski:

Un grafo es plano si y solo si no contiene ningún *subgrafo* isomorfo al $K_{3,3}$ o al K_5:



K_5



$K_{3,3}$

Isomorfismos:

Un *isomorfismo* es una función biyectiva que relaciona 2 grafos:

Dados $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, son *isomorfos* si existe una función $f : V_1 \to V_2$ tal que:

$$\forall e(v, w) \in E_1 \iff \{f(v), f(w)\} \in E_2$$

Si bien no aparecieron *multigrafos* en ningún momento, creo que la biyectividad es algo así. Para que los grafos sean isomorfos, tienen que existir 2 funciones biyectivas f y g tales que:

$$\left\{ \begin{array}{c} f : V_1 \to V_2 \\ \text{y} \\ g : E_1 \to E_2 \end{array} \right\} \text{ tales que } \quad \forall e(v, w) \in E_1 : g(e(f(v), f(w))) = e'(v', w') \text{ con } \left\{ \begin{array}{c} e' \in (E_2) \\ \text{y} \\ v', w' \in (V_2) \end{array} \right.$$

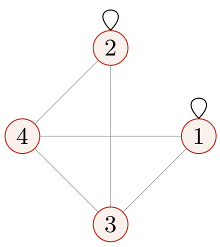
Condiciones necesarias, pero no suficientes para que 2 grafos sean isomorfos:

- Deben tener la misma cantidad de vértices y aristas.
- Deben tener los mismos grados de los vértices.
- Deben tener caminos de las mismas longitudes.
- Si uno tiene ciclos, el otro trambién debe tenerlos.
- etc.

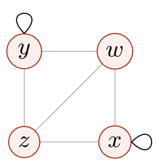
Condición suficiente:

Si dos grafos tienen la misma matriz de adyacencia entonces son isomorfos.

Ejemplo ejemplificante de *isomorfismitattt*:



$$\xrightarrow[\text{adyacencia}]{\text{con matriz de}} \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$



$$\xrightarrow[\text{adyacencia}]{\text{con matriz de}} \begin{array}{c|cccc} & w & x & y & z \\ \hline w & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

La función f biyectiva que los relaciona:

$$\begin{cases} f(1) = y \\ f(2) = w \\ f(3) = x \\ f(4) = z \end{cases}$$

Ejercicios de la guía:

---

1. *Equilibrio Digrafo*
Demostrar, usando inducción en la cantidad de aristas, que todo digrafo D satisface

$$\sum_{v \in V(D)} d_{in}(v) = \sum_{v \in V(D)} d_{out}(v) = |E(D)|.$$

Voy a intercambiar *arcos* y *aristas*, indistintamente, todo el tiempo como disléxico que soy. Se entiende igual.

Inducción en las *aristas* del digrafo (grafo dirigido) $D(V, E)$, con $|V| = n$ y $|E| = m$:
Quiero probar que la siguiente proposición $p(m)$ es verdadera:

$$p(m) : \text{Un digrafo } D\text{, cumple que } \sum_{v \in V} d_{in}(v) = \sum_{v \in V} d_{out}(v) = m.$$

Caso base:
Quiero probar que cuando $E = \varnothing$, lo que implica que $m = 0$, $p(0)$ es verdadera:

$$p(m = 0) : \text{Un digrafo } D\text{, cumple que } \sum_{v} d_{in}(v) = \sum_{v} d_{out}(v) = 0$$

Si no hay ningún nodo de los n, *conectado, unido, adyacente* a ningún otro nodo, los grados d_{in}, d_{out} son todos 0. Por lo tanto la proposición $p(0)$ resultó verdadera.

Paso inductivo:
Supongo que para algún $k \in \mathbb{N}$ con $m = k$ la proposición:

$$p(k) : \underbrace{\text{Un digrafo } D\text{, cumple que } \sum_{v} d_{in}(v) = \sum_{v} d_{out}(v) = k.}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera, entonces quiero ver que la proposición

$$p(k+1) : \text{Un digrafo } D' = (V, E')\text{, cumple que } \sum_{v \in V(D')} d_{in}(v) = \sum_{v \in V(D')} d_{out}(v) = k + 1.$$

también lo sea.
El digrafo D' tiene un arco e más en el digrafo D de la hipótesis inductiva. Por lo tanto puedo decir que al haber un arco más habrá un incremento en una unidad en la suma total de los *grados* (d), dado que el arco e debe tener la *cola* y la *cabeza* en algunos nodos v_t y $v_h \in V$:
Escribiendo la sumatoria de la hipótesis inductiva abierta:

$$\begin{cases} \sum\limits_{v \in V(D)} d_{in}(v) = d_{in}(v_1) + \ldots + d_{in}(v_n) = k \\ \sum\limits_{v \in V(D)} d_{out}(v) = d_{out}(v_1) + \ldots + d_{out}(v_n) = k \end{cases}$$

Voy a escribir la expresión de la sumatoria de los grados del digrafo D', acomodar para que aparezca la hipótesis inductiva.

$$\begin{cases} \sum\limits_{v \in V(D')} d_{in}(v) & = & d_{in}(v_1) + \cdots + d'_{in}(v_h) + \cdots + d_{in}(v_n) \\ & \overset{!!}{=} & d_{in}(v_1) + \cdots + 1 + d_{in}(v_h) + \cdots + d_{in}(v_n) \\ & = & 1 + d_{in}(v_1) + \cdots + d_{in}(v_h) + \cdots + d_{in}(v_n) \\ & \overset{!}{=} & 1 + \sum\limits_{v \in V(D)} d_{in}(v) \\ & \overset{\text{HI}}{=} & 1 + k \\ \\ \sum\limits_{v \in V(D')} d_{out}(v) & = & d_{out}(v_1) + \cdots + d'_{out}(v_t) + \cdots + d_{out}(v_n) \underset{\text{idem}}{\overset{\text{HI}}{=}} 1 + k \end{cases}$$

La proposición $p(k+1)$ resultó ser verdadera.
Por lo tanto queda demostrada la proposición $p(m)\ \forall m \in \mathbb{N}$ por principio de inducción en los arcos del digrafo.

Fin.

---

2. *Doble Grado:*
Demostrar, usando la técnica de reducción al absurdo, que todo grafo no trivial tiene al menos dos vértices del mismo grado.
Ayuda: Prestar atención a la secuencia ordenada de los grados de los vértices.

Este ejercicio es sobre un *grafo no dirigido.* No hay d_{in} y d_{out} solo hay d a secas.
En lenguaje lógico en enunciado queda:

$$\forall G(V,E) \text{ con } |V| = n \geq 2,\ \exists\, v, w \in V \text{ tal que } v \neq w \wedge d(v) = d(w)$$

- Un *vértice* $v \in V(G)$ con $|V| = n \geq 2$ puede tener un grado $d(v) \in [0, n-1]$.

  Lo que quiere decir que los n *vértices* tienen para elegir estar conectados a $0, 1, \ldots, n-2$ o a $n-1$ otros vértices.

- *Supongo que no hay 2 vértices con el mismo grado.* Es decir que en un grafo con n vértices puedo tener algo así:

$$\begin{cases} d(v_1) & = & 0 \\ d(v_2) & = & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d(v_{n-1}) & = & n-2 \\ d(v_n) & = & n-1 \end{cases}$$

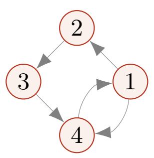
  Algo raro hay en la primera y última fila. Mirando con atención al *último vértice* veo que está conectado a *todos los demás*, es decir que no es posible que exista *el primer vértice con grado 0.*

  ¡Tuki! absurdo, $d(v_1) \neq 0$ por lo tanto será igual al grado de algún otro vértice del grafo.

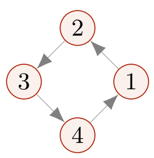
Fin.

---

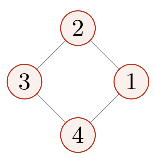
3. *Unicidad digrafo*
Un *grafo orientado* es un digrafo D tal que al menos uno de $v \to w$ y $w \to v$ no es una arista de D, para todo $v, w \in V(D)$. En otras palabras, un grafo orientado se obtiene a partir de un grafo no orientado dando una dirección a cada arista. Demostrar en forma constructiva que para cada n existe un único grafo orientado cuyos vértices tienen todos grados de salida distintos. **Ayuda**: Aprovechar el ejercicio **2.** y observar que el absurdo no se produce para un único grafo orientado.

(a) 

No es un grafo orientado.

(b) 

Un grafo orientado.

(c) 

Un grafo no orientado.

A diferencia del ejercicio **2.** en un *digrafo* cada vértices tiene *grado de entrada* d_{in} y *grado de salida* d_{out}.

Destaco que el hecho de que el grafo sea orientado, permite determinar el grafo solo hablando de los d_{out} o los d_{in}. Es decir que una vez que asigno valores de d_{out} a los vértices automáticamente ya fijé los d_{in}.

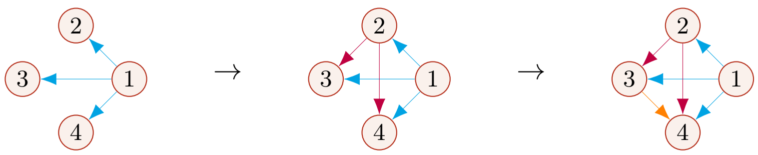
Parecido al ejercicio **2.**, la idea es intentar construir un *grafo orientado* $D(V, E')$ con la siguiente caracterísitica:

$$\text{Dado } G(V, E),\ \ \exists!\ D(V, E'),\ \text{ tal que }\ \ \forall (v \in V)(\ \forall (w \in \{V - \{v\}\})(d_{out}(v) \neq d_{out}(w)))$$

- Un vértice v de entre todos los n vértices de D puede tener un *grado de salida* $d_{out}(v) \in [0, n-1]$
- Si contruyo a partir de los n vértices digrafos $D(V, E)$ donde todos los $d_{out} \in [0, n-1]$ sean distintos, puedo combinar de $n!$ formas (cantidad de funciones biyectivas $d_{out} : V \to [0, n-1]$), en particular puedo hacer:

$$\star^{1}\begin{cases} d_{out}(v_1) & = & 0 \\ d_{out}(v_2) & = & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{out}(v_i) & = & n-(i+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{out}(v_j) & = & n-(j+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{out}(v_n) & = & n-1 \end{cases}$$

Sanity check para $n = 4$:



- Voy a suponer que el digrafo $D(V, E)$ no es único. De las $n!$ formas de combinar n vértices y aristas con $d_{out}(v)$ distintos, armo un digrafo *"nuevo"* $D'(V, E')$.

Si los vértices son indistinguibles puedo decir que dos *digrafos van a ser iguales o isomorfos* si existe una función biyectiva que "*me mapea* $D \to D'$" de tal forma que no pueda distinguirlos.

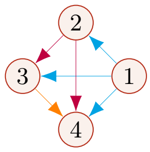
$$\star^{2}\begin{cases} d_{out}(v_1) & = & 0 \\ d_{out}(v_2) & = & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{out}(v_i) & = & n-(j+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{out}(v_j) & = & n-(i+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{out}(v_n) & = & n-1 \end{cases}$$

Tanto $\star^{1}$ y $\star^{2}$ se pueden mapear una a otra por una función f *biyectiva*:

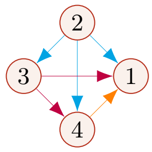
$$\begin{cases} f(v_1) & = & v_1 \\ f(v_2) & = & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_i) & = & v_j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_j) & = & v_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_n) & = & v_n \end{cases}$$

Esta función equivale a permutar columnas en la *matriz de adyacencia* de D. Dado que los d_{out} son distintos para cada v, siempre se podrá encontrar una permutación para que las matrices de D y D' sean iguales. Por lo tanto $D = D'$.

Sanity Check: para $n = 4$:



$$\xleftrightarrow{\text{isomorfos}} \quad \begin{cases} f(1) &= 2 \\ f(2) &= 3 \\ f(3) &= 4 \\ f(4) &= 1 \end{cases}$$



Fin.

---

4. *ArteConexo*
Un vértice v de un grafo G es un *punto de articulación* si $G - v$ tiene más componentes conexas que G. Por otro lado, un grafo es *biconexo* si es conexo y no tiene puntos de articulación.

a) Demostrar, usando inducción en la cantidad de vértices, que todo grafo de n vértices que tiene más de $(n-1)(n-2)/2$ aristas es conexo. Opcionalmente, puede demostrar la misma propiedad usando otras técnicas de demostración.

b) Demostrar por medio de una reducción al absurdo que todo grafo de n vértices que tenga al menos $2 + (n-1)(n-2)/2$ aristas es biconexo.

c) ¿Se pueden dar cotas mejores que funcionen a partir de algún n_0? Es decir, ¿Existe $c(n) < 1+(n-1)(n-2)/2$ (resp. $c(n) < 2 + (n-1)(n-2)/2$) talque todo grafo de $n \geq n_0$ vértices que tenga al menos $c(n)$ aristas sea conexo (resp. biconexo)?

---

a) Para arrojar un poco de intuición sobre este ejercicio:

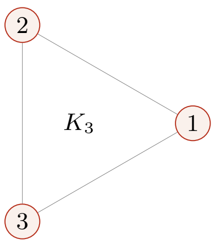
Un *grafo completo* (tiene una arista entre cualquier par de *vértices*) de n vértices tiene un total de aristas $|E| = m$ según:

$$m = \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

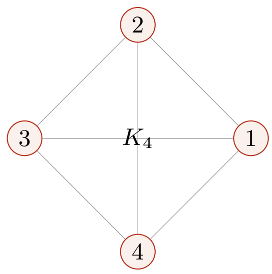
Se parece mucho a la fórmula del enunciado: $g(n) = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$. Un *grafo completo* es obviamente conexo, dado que $\forall v \in V,\ d(v) = n - 1 \neq 0$.

Algunos ejemplos:

$$\begin{cases} n &= 3 \\ m &= 3 \\ g(n) &= 1 \end{cases} \rightarrow$$



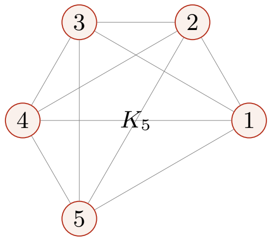
$$\xrightarrow[\text{y completo}]{\text{agrego } 4} \quad \begin{cases} n &= 4 \\ m &= 6 \\ g(n) &= 3 \end{cases} \rightarrow$$



Para un grafo de 5 vértices agrego un vértice más y no lo conecto, obteniendo un grafo no conexo, pero con

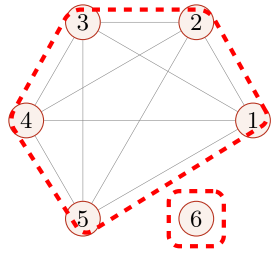
2 componentes conexas, una de 5 vértices y la otra de 1 solo vértice:

$$\begin{cases} n &= 5 \\ m &= 10 \\ g(n) &= 6 \end{cases} \rightarrow$$



agrego 6 $\rightarrow$ no conecto

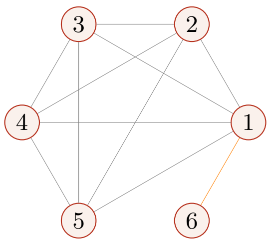
$$\begin{cases} n &= 6 \\ m &= 10 \\ g(n) &= 10 \end{cases} \rightarrow$$



Si conecto ahora el nuevo vértice 6 a un único vértice de la otra componente conexa, por ejemplo el 1 , obtengo 2 cosas:

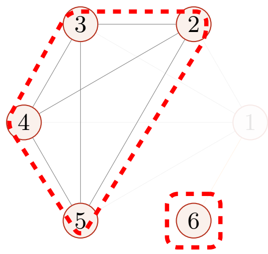
- Un grafo conexo de 6 vértices.
- Un *punto de articulación* en el 1 .

$$\begin{cases} |V| &= 6 \\ |E| &= 11 \\ g(|V|) &= 10 \end{cases} \rightarrow$$



saco el 1 $\rightarrow$

$$\begin{cases} |V| &= 5 \\ |E| &= 6 \\ g(|V|) &= 10 \\ \text{2 componentes conexas} \end{cases} \rightarrow$$



Ahora intento demostrar esas cosas del enunciado por inducción:

Quiero demostrar que la premisa:

$p(n)$: Todo grafo de n vértices que tiene más de $(n-1)(n-2)/2$ aristas es conexo.

es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

Caso base:

$p(1)$: Todo grafo de 1 vértices que tiene más de 0 aristas es conexo.

Un nodo aislado es conexo por definición.

$p(2)$: Todo grafo de 2 vértices que tiene más de 0 aristas es conexo.

Verdadero trivialmente, es el grafo K_2.

$p(3)$: Todo grafo de 3 vértices que tiene más de $(3-1)(3-2)/2 = 1$ aristas es conexo.

$$m = 2 \begin{cases} d(v_1) &= 1 \\ d(v_2) &= 1 \\ d(v_3) &= 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad m = 3 \begin{cases} d(v_1) &= 2 \\ d(v_2) &= 2 \\ d(v_3) &= 2 \end{cases} \rightarrow K_3$$

Es un grafo conexo. Otras posibles combinaciones son *isomorfismos de ese mismo grafo.*

El (Los) caso base verdadero.

Paso inductivo:

Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$ la proposición:

$$p(k): \underbrace{\text{Todo grafo de } k \text{ vértices que tiene más de } (k-1)(k-2)/2 \text{ aristas es conexo}}_{\text{hipótesis inductiva}}.$$

es verdadera, entonces quiero probar que la proposición

$p(k+1)$: Todo grafo de $k+1$ vértices que tiene más de $(k)(k-1)/2$ aristas es conexo.

También lo sea.

Partiendo de la hipótesis inductiva sé que un grafo G con k vértices es conexo si tiene más de $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

Le agrego un vértice más, el $k+1$ a cualquier grafo G formando un grafo G' de $k+1$ vértices.

¿Qué me dice esto de la aristas? Absolutamente nada. Puedo agregar agregar aristas a G'.

Es tentador acá *querer elegir* una arista que conecte al $k+1$ y listo, pero eso estaría mal. Tengo que buscar una forma de que funcione para *cualquier grafo* G'.

Cosas que pueden pasar es que agregue aristas que no hagan al grafo conexo:

- Agrego una arista y ahora G' tiene $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+1$ aristas.
  No tengo garantías de que sea un grafo conexo.
- Sigo agregando de a una arista hasta que llego a agregarle $k-2$ aristas. G' tiene $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+k-2=\frac{k\cdot(k-1)}{2}$ aristas.
  No tengo garantías de que sea un grafo conexo.
- Si la cantidad de aristas es $m=\frac{k\cdot(k-1)}{2}$ eso alcanza para tener un grafo de k vértices completo. Es decir que en el *armado menos aleatorio de la creación* puedo tener a G' formado por una componente de k vértices completa (por lo tanto conexa) y un vértice aislado $k+1$.
- Agregando una arista más al grafo G' tendría una cantidad $m>\frac{k\cdot(k-1)}{2}$ dado que a la componente conexa completa no le entran más aristas, conecto al vértice $k+1$, formando inevitablemente un grafo $G'(V',E')$ de $|V'|=k+1$ con $|E'|>\frac{k\cdot(k-1)}{2}$.
  Ahora sí puedo garantizar que es un grafo conexo.

Así queda probado que la proposición con $k+1$ es verdadera.

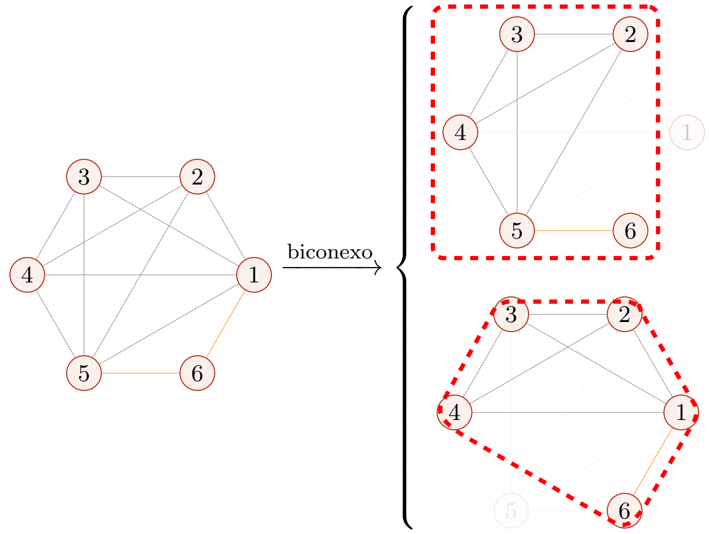
Dado que los casos base y el paso inductivo resultaron verdaderos, la proposición $p(n)$ será verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) ¿Se podría demostrar parecido al anterior por inducción? Sí.

La diferencia principal con el ítem a) es que hay suficientes aristas como para unir al vértice $k+1$ a 2 vértices i, j del grafo completo:

Ejemplito ejemplificante con $n = 6$:

$$\begin{cases} |V| &=& 6 \\ |E| &=& 10 + 2 = 12 \\ g(6) &=& 2 + \frac{(6-1)\cdot(6-2)}{2} = 10 \end{cases} \rightarrow$$



Ahora intento demostrar esas cosas del enunciado por reducción al absurdo:

- Partiendo de algún grafo $G(V, E)$ con $|V| = k$ y con $|E| = m = 2 + \frac{(k-1)\cdot(k-2)}{2}$ supongo que G tiene algún punto de articulación, es decir que si saco algún vértice obtengo más componentes conexas.
- Usando el item a) sé que G es conexo. Le saco algún vértice, el i y obviamente junto con el vértice todas las aristas incidentes en el mismo.
- Tengo un nuevo grafo $G'(V', E')$ con $|V'| = k - 1$ y *¿Cuántas aristas* $|E'| = m'$*?* Ni la más pálida idea. Pero seguro que es algún valor en $m - (k - 1) \leq m' \leq m - 1$. Tengo 2 casos:

⚙1) Si tiene $m' = m - 1$ por ítem a) no puede tener más componentes conexas que antes. Fin.

⚙2) ¿Qué pasa si tiene menos? Le saco la mayor cantidad de aristas posibles. Hago cuentas:

$$\begin{array}{rcl} m' &=& m - (k - 1) \\ &=& 2 + \frac{(k-1)(k-2)}{2} - (k - 1) \\ &=& \frac{k^2-5k+8}{2} \bigstar^1 \end{array}$$

Nuevamente, por el ítem a), un grafo G' con $|V| = k - 1$ es conexo si tiene más de $\frac{((k-1)-1)\cdot((k-1)-2)}{2} = \frac{k^2-5k+6}{2} \bigstar^2$.
Comparo a $\bigstar^1$ y $\bigstar^2$ y resulta que sin importar qué vértice saque de G, G' tiene una cantidad necesaria y suficiente de aristas como para ser conexo por resultado del

⚙3) a). Supuse que eso era falso y llegué a un absurdo.Fin.

c) Intuyo que no, dado que el cálculo lo construí a partir de grafos con cantidad máxima de aristas, *grafos completos* y luego agregué la cantidad mínima de aristas para igualar las cotas pedidas.

Fin.

---

5. *CicloCompartido*
Sean P y Q dos caminos distintos de un grafo G que unen un vértice v con otro w. Demostrar en forma directa que G tiene un ciclo cuyas aristas pertenecen a P o Q.
Ayuda: Denotar $P = v_0, \ldots, v_p$ y $Q = w_0, \ldots, w_q$ con $v_0 = w_0 = v$ y $v_p = w_q = w$. Definir explícitamente cuáles son los subcaminos de P y Q cuya unión forman un ciclo.

Usando la **ayuda**:

Los camino P y Q están formados por los vértices:

$$\begin{cases} P &= \underset{\substack{\downarrow \\ v}}{p_1}, \ldots, \overbrace{p_{\color{red}{fin_p}}}^{w} \\ Q &= \underset{\substack{\downarrow \\ v}}{q_1}, \ldots, \underbrace{q_{\color{red}{fin_q}}}_{w} \end{cases}$$

Entre esos vértices, dado que forman *caminos*, hay *aristas*:

$$\begin{cases} e(p_i, p_{i+1}) & \text{con} \quad 0 \leq i < \color{red}{fin_p} \\ e(q_j, q_{j+1}) & \text{con} \quad 0 \leq j < \color{red}{fin_q} \end{cases}$$

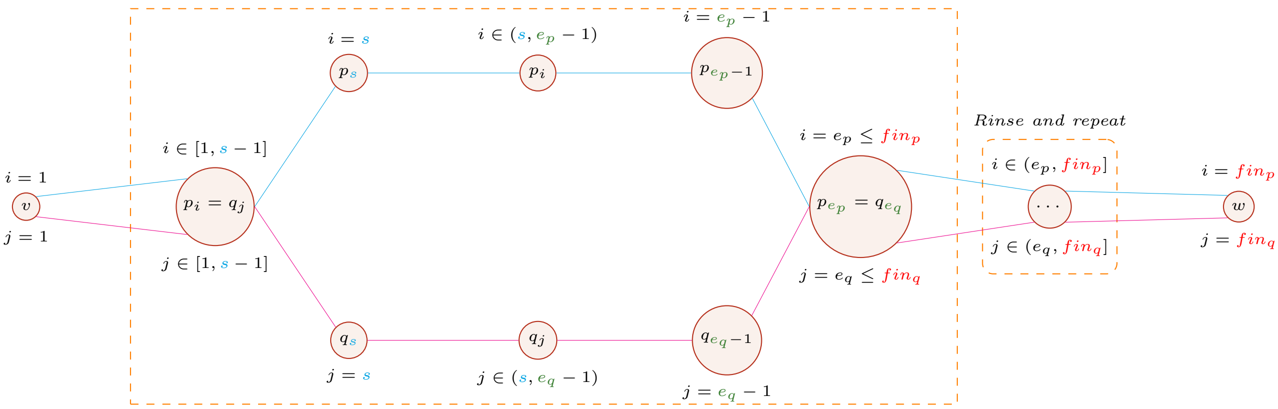
- Tanto P como Q arrancan igual en v , terminan igual en w .
- En algún momento los caminos se separan:

$$p_i \neq q_j \ \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} \color{cyan}{s} - 1 < i < \color{red}{fin_p} \\ \color{cyan}{s} - 1 < j < \color{red}{fin_q} \end{array} \right\}$$

- En algún momento los caminos se vuelven a encontrar, dado que terminan juntos:

$$p_i = q_j \ \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} \color{cyan}{s} < \color{green}{e_p} \leq i \leq \color{red}{fin_p} = w \\ \color{cyan}{s} < \color{green}{e_q} \leq j \leq \color{red}{fin_q} = w \end{array} \right\}$$

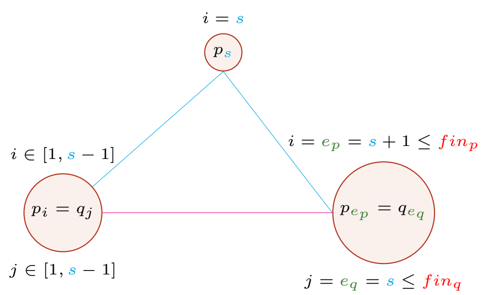
- Algo así:



Ciclo: $\underbrace{p_{s-1} \to p_{s-1} \to p_s \to \cdots \to p_{e_p-1} \to p_{e_p}}_{\text{voy por } P} = \underbrace{q_{e_q} \to q_{e_q-1} \to q_s \to \cdots \to q_{s-1}}_{\text{voy por } Q} \overset{!}{=} p_{s-1}$

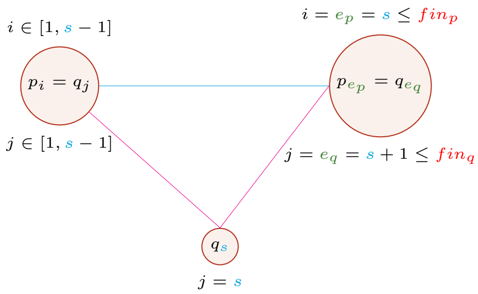
- Casos borde: Un *ciclo* por definición tiene por lo menos 3 vértices, por lo tanto tengo que procurar que:

Caso donde $q_s = q_{e_q}$ $\quad \to$



o el otro caso:

Caso donde $p_s = p_{e_p}$ $\rightarrow$



Donde las aristas magenta son del Q y las azules de P.

- Los camino podrían separarse y juntarse muchas veces.

Fin.

---

6. *Modelado básico*
Probar que en todo grupo de dos o más personas hay por lo menos dos de ellas que tienen la misma cantidad de amigos en el grupo.

La lógica de este ejercicio es idéntica a la del ejercicio **2.**
El modelado consiste en definir a los vértices como las personas y a las aristas como la amistad entre 2 personas.

- ¿Puede ocurrir que haya alguien con $\underbrace{n-1}_{\text{no cuento la auto-amistad}}$ amigos y otro con 0 amigos? Esto no debería poder ocurrir.

- Para probar por el absurdo supongo que todos tienen distintas amistades. La función $amistad(p_i)$ me devuelve la cantidad de amigos que tiene la persona p_i. Es un *isomorfismo*, para cada p_i, me devuelve una cantidad de amigos distinta.

$$\begin{cases} amistad(p_1) & = & \text{tiene } n-1 \text{ amigos} \\ amistad(p_2) & = & \text{tiene } n-2 \text{ amigos} \\ & \vdots & \\ amistad(p_{n-1}) & = & \text{tiene 1 amigo} \\ amistad(p_n) & = & \text{no tiene amigos} \end{cases}$$

Resaltado aparece el absurdo. En un grupo de n personas, no puede haber una persona (p_1) conectada, amiga de, $\underline{n-1 \text{ personas}}$ y que haya una de esas $n-1$ personas (p_n) que no tenga ningún amigo. A menos que *¿Está ese amigo acá, ahora, entre nosotros?*

Por lo tanto para que las amistades sean compatibles con los números, se necesitaría que los rangos de amistades para las personas vayan según:

$$\underbrace{amistad(p) \in [0, n-2]}_{\text{hay solari}} \quad \text{o bien} \quad \underbrace{amistad(p) \in [1, n-1]}_{\text{no hay solari}}$$

Fin.

---

7. *Intersección Máxima*
Sea G un grafo conexo. Demostrar por el contrarrecíproco que todo par de caminos simples de longitud máxima de G tienen un vértice en común.
Ayuda: Suponer que hay dos caminos disjuntos en vértices de igual longitud y definir explícitamente un camino que sea más largo que ellos.

Camino simple es un camino, un *recorrido* que no pasa 2 veces por el mismo vértice, según definición acá click click.

Quiero mostrar que:

$$\underbrace{G \text{ conexo}}_{p}\text{, entonces } \underbrace{\text{todo par de caminos de longitud máxima de } G \text{ se chocan}}_{q}.$$

Por contrarecíproco ($\neg q \implies \neg p$):

Si existen 2 caminos de longitud máxima disjuntos, entonces G no es conexo.

Tengo el escenario:
Dos caminos de longitud máxima $k-1$ sin vértices en común:

$$P = p_1 \cdots p_k \quad \text{y} \quad Q = q_1 \cdots q_k \quad \text{con} \quad |P| = |Q| = k-1$$

No sé que pasa en el medio con la conectividad del grafo, pero solo pueden pasar 2 cosas:

(1) No existe ninguna arista entre vértices de P y vértices Q. Entonces G no es conexo. Fin.

(2) Existe alguna arista entre algún vértice de P y alguno de Q.

¿Podría definir en el medio un camino más largo que estos?

Viajando por P cuando estoy en el vértice p_i encuentro la arista que va al vértice q_j y de ahí voy hacia el vértice de Q más alejado (de q_j) que pueda. Así voy construyendo a $C_{\text{máx}}$:

$$C_{\text{máx}} = \begin{cases} p_1 p_2 \cdots p_i q_j \cdots q_k \\ \vee \\ p_1 p_2 \cdots p_i q_j \cdots q_1 \end{cases} \quad \text{con} \quad |C_{\text{máx}}| = \underbrace{|p_1 \to p_i|}_{i-1} + \underbrace{e(p_i, q_j)}_{1} + \underbrace{\text{máx}\{|q_j \to q_1|, |q_j \to q_k|\}}_{\overset{!}{\geq} k-i} \geq k$$

De esa manera tendría un *camino más largo que los más largo*, lo cual es un absurdo. Notando $C_{\text{máx}}$ tiene vértices tanto de P como de Q, concluyo que no pueden existir 2 caminos de longitud máxima disjuntos en un grafo G conexo (dado que siempre podría unir los supuestos caminos máximos), por lo tanto G no es conexo. Fin.

Fin.

---

8. *Unión Vs Junta*
La unión disjunta $G \cup H$ de dos grafos G y H con $V(G) \cap V(H) = \varnothing$ es el grafo con $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ y $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. Es decir, $G \cup H$ se obtiene de dos grafos disjuntos uniendo G con H sin agregar aristas. Por otra parte, la *junta* $G + H$ de G y H es el grafo que se obtiene de $G \cup H$ agregando todas las aristas vw posibles entre un vértice $v \in V(G)$ y otro vértice $w \in V(H)$. Decimos que G es un *grafo unión* (resp. *junta*) si existen G_1 y G_2 con $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$ tales que $G = G_1 \cup G_2$ (resp. $G = G_1 + G_2$).

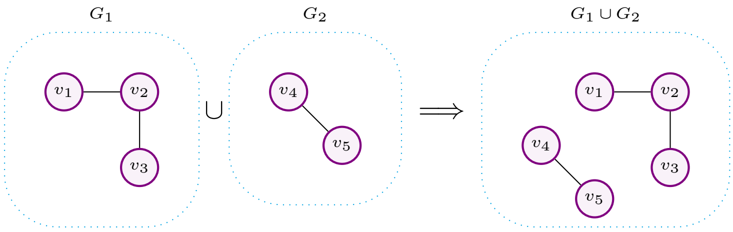
a) Demostrar en forma directa que G es un grafo unión si y solo si G es disconexo.

b) Demostrar en forma directa que G es un grafo junta si y solo si $\overline{G}$ es un grafo únion.

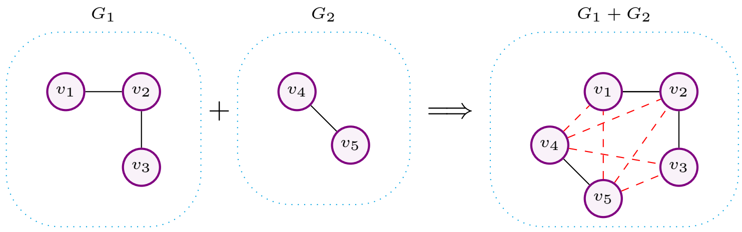
c) Concluir que G es un grafo junta si y solo si $\overline{G}$ es disconexo.

Poné un punto y a parte en el enunciado, loco 😵.
Traduzco para mi cerebro:

1) *Unión disjunta*:



2) *Junta*



3) Un *Grafo unión* $G_\cup$:

Será aquel que pueda *"desarmar"* encontrando 2 grafos disjuntos G_1 y G_2 que al hacer la únión $(\cup)$ me den $G_\cup$.

4) Un *Grafo junta* G_+:

Será aquel que pueda *"desarmar"* encontrando 2 grafos disjuntos G_1 y G_2 que al hacer la junta $(+)$ me den G_+.

a)

$$G_\cup \textit{ es un grafo unión} \iff G_\cup \textit{ es disconexo}$$

$(\Leftarrow)$ Si $G_\cup$ es disconexo, entonces tiene por lo menos 2 componentes conexas, C_1 y C_2, componentes que cumplen por definición que no tienen ni *vértices* ni *aristas* en común.
La unión $(\cup)$ de la componentes $C_1 \cup C_2$ genera un *grafo unión* igual a $G_\cup$. Fin.

$(\Rightarrow)$ Si $G_\cup$ es un *grafo unión*, este fue generado con dos grafos G_1 y G_2 de vértices disjuntos $V(G_1)$ y $V(G_2)$ y otros conjuntos de aristas $E(G_1)$ y $E(G_2)$ también disjuntos.
Dado que no existen aristas en $G_\cup$ que vayan de algún $v \in (V(G_\cup) \cap V(G_1))$ a algún $w \in (V(G_\cup) \cap V(G_2))$, el grafo $G_\cup$ no puede ser conexo, ya que en un grafo conexo puede ir de cualquier vértices a cualquier otro. Fin.

b)

$$G_+ \textit{ es un grafo junta} \iff \bar{G}_+ \textit{ es un grafo unión}$$

$(\Leftarrow)$ Si $\bar{G}_+(V,E)$ es un grafo unión, entonces $\bar{G}_+$ se puede separar en dos grafos disjuntos $\bar{G}_1$ y $\bar{G}_2$.
Al calcular el complemento de $\bar{\bar{G}}_+ = G_+(V,\bar{E})$ obtengo un nuevo grafo con *aristas* $\bar{E} \cap E = \varnothing$, por lo tanto conectando todos los vértices de $V(\bar{G}_1)$ con todos los vértices de $V(\bar{G}_2)$.
Es decir que existen 2 grafos G_1 y G_2 tales que tienen los *mismos vértices que los anteriores*:

$$\begin{cases} V(G_1) = V(\bar{G}_1), \\ V(G_2) = V(\bar{G}_2) \\ V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing \end{cases}$$

Si a los grafos $G_1(V,E')$ y $G_2(V,E'')$ les agrego las aristas uniendo todos los vértices de $V(G_1)$ y $V(G_2)$:

$$G_+(V,\bar{E}) \text{ con } \begin{cases} V = \{V(G_1) \cup V(G_2)\} \\ \text{y} \\ \bar{E} = \Big\{E(G_1) \cup E(G_2) \cup \underbrace{\{(v,w)\ \forall v \in V(G_1) \quad \text{y} \quad \forall w \in V(G_2)\}}_{\text{aristas que agrega la junta } (+)}\Big\} \end{cases}$$

Este último conjunto de aristas junta son las que aparecen al calcular el complemento. Entre los vértices de G_1 y G_2.

Mostrando así que puedo construir a G_+ con 2 conjuntos disjuntos agregando las aristas que conectan las dos componentes entre cada par de vértices.

Por lo tanto si el complemento de G_+ es un *grafo unión*, entonces G_+ es un *grafo junta*. Fin.

($\Rightarrow$) Si G_+ es un grafo junta, quiere decir que existen 2 grafos G_1 y G_2 disjuntos a los que al agregarles el conjunto de aristas, E_+, que une todo par de vértices vw con $v \in G_1$ y $w \in G_2$ forman G_+.

El complemento de G_+, $\bar{G}_+$ no tiene ninguna arista de E_+, por lo tanto $\bar{G}_+$ tiene por lo menos 2 grafos disjuntos C_1 y C_2.

Por lo tanto calculando el complemento de un *grafo junta* se obtienen 2 grafos disjuntos que forman un *grafo unión*. Fin.

c) De la demostración del ítem b) se puede concluir eso, ya que es necesario para hacer la junta tener 2 grupos de nodos disconexos entre sí.

Al tener un grafo disconexo y calcular el complemento, (entre otras cositas) se agregan las aristas necesarias para cumplir con la definición de grafo junta.

¿Son estas demostraciones elegantes? No creo. ¿Me importa? mmm, naah.

Fin.

---

9. *Unicidad de Grados*
Sean $G_2 = K_2$ y $G_{n+1} = \overline{G_n \cup K_1}$ para todo $n \geq 2$. Demostrar por inducción que G_n tiene un único par de vértices de igual grado.

Dado el grafo definido por recurrencia:

$$\begin{cases} G_2 & = & K_2 \\ G_{n+1} & = & \overline{G_n \cup K_1} \end{cases}$$

Quiero demostrar la siguiente proposición:

$$p(n) : G_n \textit{ tiene un único par de vértices de igual grado} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$p(3) : G_3 \textit{ tiene un único par de vértices de igual grado.}$$

En el ejercicio **8.** se definió al *grafo unión*, el cual particularmente, tiene la misma cantidad de aristas que la suma de las aristas de los grafos (disjuntos) que se están uniendo.
Cuando se calcula el complemento de un grafo $G(V, E)$, la cantidad de aristas de $|E(\bar{G})| = \frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2} - |E|$.

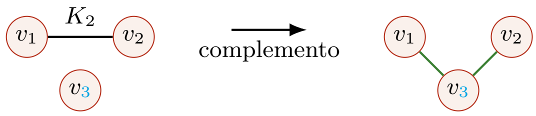
Como sé que por definición:

$$G_3 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{G_2 \cup K_1} \xrightarrow[\text{aristas}]{\text{calculo}} |E(G_3)| = \frac{3 \cdot (3-1)}{2} - 1 = 2$$

G_3 tiene 3 vértices y 2 aristas. Es un grafo conexo obligatoriamente.

¿Cómo puedo armar ese grafo? Así:

$$\begin{cases} d(v_1) &= 1 \\ d(v_2) &= 1 \\ d(v_3) &= 2 \end{cases}$$



(¡Bueh, que larga que la hice! Pero quería pasear por un poco, entrando en calor para el paso inductivo.)

Ahí queda demostrado que la proposición $p(3)$ es verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$ la proposición

$$p(k) : \underbrace{G_k \textit{ tiene un único par de vértices de igual grado.}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero mostrar que

$$p(k+1) : G_{k+1} \textit{ tiene un único par de vértices de igual grado.}$$

también lo sea.

Estos podrían ser unos lemitas que no pienso demostrar:

★[1] *Si en un grafo G, el grado de un vértice $v \in V(G)$ es $d_G(v)$, ese mismo vértice en $\bar{G}$ tendrá un grado cumpliendo que $d_{\bar{G}}(v) + d_G(v) = |V| - 1$. Es prácticamente la definición de grafo complemento.* ★[1]

Se desprende fácil de esa última afirmación:

★[2] *Si G no es un grafo conexo, entonces $\bar{G}$ sí lo es.* ★[2]

Recopilando cosas que se vieron hasta acá y con la info de la hipótesis inductiva, sé que:

- Por la definición recursiva de G_{k+1} es un *grafo junta*, es decir que su conjugado $\bar{G}_{k+1}$ es un *grafo unión*.
- G_k tiene únicamente 2 vértices de igual grado (HI).
- Cuando hago la unión $G_k \cup K_1$ tengo un grafo disconexo con $k+1$ vértices, luego calculo

  $$G_{k+1} = \overline{G_k \cup K_1}$$

  el complemento de esa unión y obtengo un grafo conexo (★[2]).
- G_k por definición será un grafo conexo (i.e. $d_{G_k}(v) \neq 0 \ \ \forall v \in G_k$). $d_{G_k}(v) \in [1, k-1] \ \ \forall v \in G_k$.
- Los grados del grafo G_{k+1} se pueden calcular a partir de los grados del grafo G_k usando ★[1]:

$$d_{G_{k+1}}(v) = \begin{cases} k & \text{si} \quad v = v_{k+1} \text{ (el que agrega } K_1) \\ \underbrace{k+1}_{|V(G_{k+1})|} - 1 - d_{G_k}(v) & \text{si no} \end{cases}$$

¿Qué está pasando?

- Los valores de $d_{G_{k+1}}(v)$ solo van a repetirse para valores iguales de $d_{G_k}(v)$ dado que es una función biyectiva en $d_{G_k}(v)$, más aún por hipótesis inductiva $d_{G_k}(v)$ tiene solo dos valores repetidos, implicando que solo habrá dos valores iguales para el conjunto $d_{G_{k+1}}(v)$.

Así tengo que $p(k+1)$ resultó ser verdadera también. Por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Fin.

---

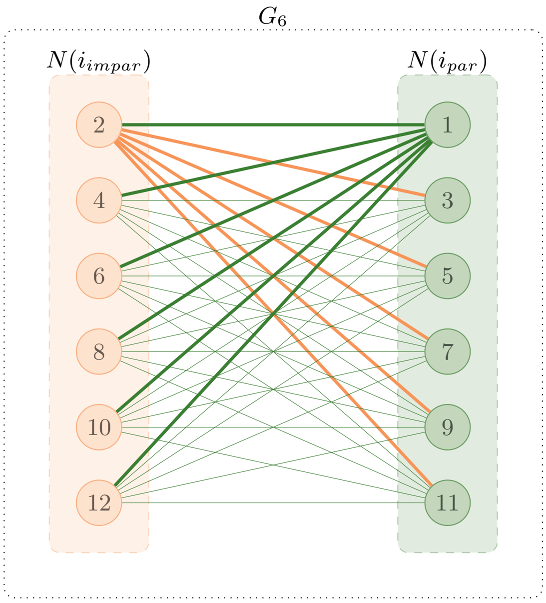
10. *Triángulo Inductivo*
Demostrar por inducción que todo grafo de $2n$ vértices con más de n^2 aristas tiene algún triángulo.
¿Se puede dar una cota mejor que funcione a partir de algún n_0? Es decir, ¿Existe $c(n) < n^2$ tal que todo grafo de $2n \geq n_0$ vértices con más de $c(n)$ aristas tenga triángulos?

Triángulos:

> *Dado un vértice v, este está conectado a n vecinos formando un conjunto $N(v)$. Para que no haya ningún triángulo es necesario que no exista ningúna arista (u, w), $\forall u, w \in N(v)$. En otras palabras, Los vecinos de v no pueden ser vecinos entre sí.*

Un ejemplo ejemplificante con $n = 6$, $|V| = 12$:

1) Fácil de ver que no hay ningún triángulo siguiendo aristas verdes.
2) Evito que vértices de igual paridad sean vecinos.
3) Agregar una arista en cualquier lugar conectaría elementos de $N(i_{impar})$ con otro de $N(i_{impar})$ y lo mismo con $N(i_{par})$. Generando un triángulo.
4) $d(v) = 6\ \forall v \in G_6$. Se unen a $\frac{|V|}{2} = \overset{n}{\overset{\uparrow}{6}}$ vértices.
5) Hay un total de $n^2 = 36 = \frac{12 \cdot 6}{2}$ aristas.
6) El grafo G_6 *bipartito.*
7) El grafo G_6 es un *grafo junta.*



¿Medio bardo? Dibujé el grafo 100 veces antes de darme cuenta que era por acá. Bueh, así se puede pensar un grafo de $2n$ vértices con n^2 aristas sin formar ningún triángulo.
Con esta intuición en mente arranco la demo, en la cual voy a tener que probar por absurdo apoyándome en la hipótesis inductiva.

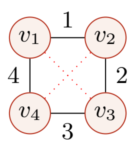
Quiero demostrar la siguiente proposición:

$$p(n) : \textit{Todo grafo de } 2n \textit{ vértices con más de } n^2 \textit{ aristas tiene algún triángulo}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:
Quiero mostrar que la proposición:

$$p(2) : \textit{Todo grafo de } 2 \cdot 2 \textit{ vértices con más de } 2^2 \textit{ aristas tiene algún triángulo.}$$

es verdadera.
Tengo 4 vértices. Solo puedo forman un único grafo con 2^2 aristas sin triángulo:



Agregar cualquiera de las aristas punteadas me formaría los triángulos. Por lo tanto la proposición $p(2)$ resultó verdadera.

Paso inductivo:
Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}$ la proposición:

$$p(k) : \underbrace{\textit{Todo grafo de } 2k \textit{ vértices con más de } k^2 \textit{ aristas tiene algún triángulo,}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera, entonces quiero probar que:

$p(k+1)$: *Todo grafo de* $2(k+1)$ *vértices con más de* $(k+1)^2$ *aristas tiene algún triángulo,*

también lo sea.

Por absurdo:

Supongo que tengo un grafo $G(V, E)$ con $|V| = 2(k+1)$ y $|E| \overset{!!}{>} (k+1)^2$ sin ningún triángulo.

Le voy a sacar 2 vértices adyacentes (v y u) a ese grafo $G(V, E)$ para compararlo con la HI

¿Por qué los elijo adyacentes?
Porque quiero sacar la menor cantidad de aristas posibles. Si saco de más siempre voy a poder conseguir grafo sin triángulo.
(Básicamente $p \implies q$, si $p =$ false, la implicación es true, pero no aporta nada).

Sacarle 2 vértices a $|V| = 2(k+1)$ me deja con $|V'| = 2k$. Quiero calcular

¿Cuántas aristas tengo que sacar junto al vértice v que elimino?
¡La cantidad máxima que sé que un vértice v puede tener sin formar triángulos en el grafo!

Laburo haciendo *operaciones* en un grafo genérico G, *operaciones* que no deberían romper la generalidad que debe tener la demo.

En la intro al ejercicio vi que para un vértice v que tiene un conjunto de vecinos $N(v)$ es necesario que los elementos $w \in N(v)$ no sean vecinos entre sí.

Laburo con esos vértices v, los cuales debe haber en cualquier grafo con $|E| > (k+1)^2$. Recuerdo que asumí que no hay triángulos y esos vértices que quiero sacar u maximizan la cantidad de aristas que puede tener un vértice sin formar triángulos.

Saco el vértice v primero, luego el u. Ayuda mucho el grafo que grafiqué en la intro para ver la aristas afectadas al sacar los vértices 1 y 2:

- El vértice v está unido a otros $\frac{2(k+1)}{2} = \overbrace{k+1}^{|N(v)|}$ vértices (incluyendo al u).
- ¡Listo, ya saqué el v junto a sus $k+1$ aristas! (tantas aristas como la mitad de vértices).
- El vértice u (ahora) está unido a otros $\overbrace{\frac{2(k+1)}{2} - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{el } v \text{ que} \\ \text{se fue}}}{1}}^{|N(u) \setminus \{v\}|} = k$.
- En total le saco $2k+1$ aristas a G.

Recuerdo que: $G(V, E)$ tiene $|E| > (k+1)^2$ y no tiene triángulos.

Mi nuevo grafo podado G':

$$\star^1 G'(V', E') \text{ con } \begin{cases} |V'| &= 2k \\ |E'| &= |E| - (2k+1) \overset{!!!}{>} k^2 \end{cases}$$

¿Ves al absurdo?

Partiendo de un grafo G con $2(k+1)$ vértices y más de $(k+1)^2$ aristas supuestamente sin triángulos, llegué con el cuidado necesario de realizar operaciones que no destruirían ningún triángulo a un grafo ★[1] G' con $2k$ vértices y más (!!!) de k^2 aristas sin triángulos tampoco. Un minuto de silencio, porque acaba de morir la hipótesis inductiva: Ahí está el absurdo.

Por el absurdo sale entonces que la proposición $p(k+1)$ también es verdadera, dado que no puedo tener un grafo G con $2(k+1)$ vértices y $(k+1)^2$ aristas sin triángulos.
Por el principio de inducción $p(n)$ será verdadera $\forall p \in \mathbb{N}$.

Sobre la pregunta de si hay una cota, creo que no, por la forma en que construyo el grafo de la intro, es eso una demo? Sé que no.
No sé, ni quiero demostrarlo. Si podés demostrarlo y coso escribime y lo corrijo o agrego.

Fin.

---

11. *Ciclo impar*
Dado un grafo G si existe una caminata de longitud impar que empieza y termina en el mismo vértice entonces hay un ciclo (simple) impar.

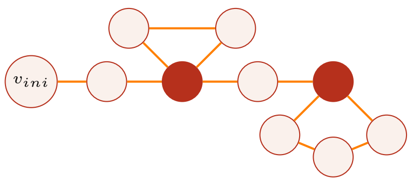
Definiciones de caminata, ciclo, etc, acá click click
Un poco de intuición:

- Si una caminata va y vuelve al vértice v_{ini}, pasando por los mismos vértices ida y vuelta:

$$v_{ini} \to v_2 \to \cdots \to v_{ret} \to \cdots \to v_2 \to v_{ini},$$

  siempre va a tener una longitud *par*. Con esos nodos "*alineados*" podés formar infinitas caminatas, porque podría ir onda $v_i \rightleftarrows v_i$ $(v_i \to v_j \to v_i \to v_j)$ cuantas veces quiera. Pero toda caminata tendría una longitud *par*, dado que se recorren todas las aristas cantidad *par* de veces.

- Por lo tanto en cualquier recorrido que empiece y termine en v_{ini}, tengo que prestar atención a los vértices (●) que se repitan en el recorrido total con *por lo menos 2 vértices distintos* entre cada aparición. Bajo esas condiciones es que voy a encontrar algún ciclo.



- Va apareciendo ahí la necesidad de que el recorrido total sea de longitud *impar* para poder tener un ciclo de longitud *impar* también, porque la ida-y-vuelta desde un ciclo a v_{ini}, es decir:

$$v_{ini} \to \cdots \to \bullet \to \cdots \to v_{ini}$$

  está en la misma línea, es así que habrá una cantidad *par* de *aristas*, y bueh

$$\overbrace{impar}^{\text{el ciclo}} + \underbrace{par}_{\text{ida-y-vuelta al } \bullet} = \overbrace{impar}^{\text{todo el recorrido}}.$$

Haciendo inducción en la longitud del recorrido, quiero mostrar que la proposición:

$p(l)$: *Si existe una caminata de longitud l impar que empieza y termina en el mismo vértice entonces hay un ciclo (simple) impar,* $\forall l \in \mathbb{N}$.

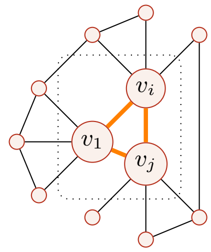
Caso base:
Quiero mostrar que la proposición:

$p(3)$: *Si existe una caminata de longitud $l = 3$ que empieza y termina en el mismo vértice entonces hay un ciclo (simple) impar.*

Sin importar el grafo G, la hipótesis dice que existe alguna caminata o recorrido de la pinta:

$$\{v_1, v_i, v_j, v_1\} \text{ con } i \neq j \neq 1$$

- La caminata tiene longitud $l = 3$, así que no tiene mucha opción para empezar y terminar en el mismo vértice.
- Debe tocar dos vértices distintos entre sí y de v_1 y luego la tercera arista debe conectarse a v_1.



Así se muestra que la proposición $p(3)$ es verdadera.

Paso inductivo:
Asumo que la proposición para algún $k \in \mathbb{N}$ impar

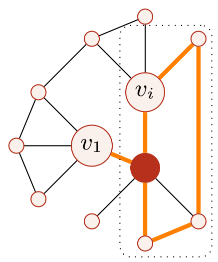
$$p(k) : \overbrace{\textit{Si existe una caminata de longitud } k \textit{ impar que empieza y termina en el mismo vértice entonces hay un ciclo (simple) impar}}^{\text{hipótesis inductiva}}.$$

es verdadera. Entonces quiero probar que la proposición:

$p(k+2)$: *Si existe una caminata de longitud $k+2$ impar que empieza y termina en el mismo vértice entonces hay un ciclo (simple) impar.*

también lo sea.
Partiendo que por hipótesis tengo una caminata impar, hay 2 cosas que pueden pasar en cualquier caminata:

- Que no se repita ningún vértice de la *caminata impar*, y dado que por hipótesis empieza y termina en el mismo lugar se tiene un *ciclo simple de longitud impar*. Fin.
- Que sí se repita algún vértice de la *caminata impar* (además del v_1), ejemplito:



Como en la intro los vértices que me importan son los que se repiten sin haber repetido aristas en el recorrido, esos están formando ciclos.

En el recorrido la longitud ida-y-vuelta desde el nodo repetido (el nodo ●) al nodo inicial $l_{\textit{ida-y-vuelta}}$ es *par*, y dado que el recorrido total tiene longitud *impar* igual a $k+2$, puedo restarlas, así obteniendo:

$$\underbrace{k+2}_{\textit{impar}} - \underbrace{l_{\textit{ida-y-vuelta}}}_{\textit{par}} \overset{!}{>} \underbrace{k}_{\substack{\textit{recorrido}\\ \textit{podado}\\ \textit{impar}}}$$

Por hipótesis inductiva ese *recorrido podado* tiene un ciclo simple *impar*. La proposición $p(k+1)$ es verdadera.

Por principio de inducción también lo será $p(l)\ \ \forall l \in \mathbb{N}$

Fin.

---

12. *Bipartito o Ciclo*
Sea G un grafo de n vértices. Demostrar que $G - v$ es bipartito para todo $v \in V(G)$ si y solo si G es bipartito o un ciclo impar. Demostrar la ida por el contrarrecíproco y la vuelta en forma directa.

Quiero mostrar que dado un grafo $G(V, E)$ y un vértice $v \in V$:

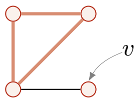
$$G(V \setminus \{v\}, E') \textit{ es bipartito } \ \forall v \in V \textit{ si solo si } G(V, E) \textit{ es bipartito o un ciclo impar.}$$

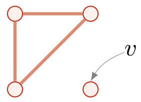
($\Rightarrow$) Por contrarecíproco de la ida:

Si $G(V, E)$ no es bipartito ni un ciclo impar entonces existe por lo menos un $v \in V$ tal que $G(V \setminus \{v\}, E')$ no es bipartito.

- Si $G(V, E)$ no es bipartito y tampoco es un ciclo impar, entonces debe ser un grafo que:

  Tiene algún ciclo impar y además algún otro vértice que no pertenezca al ciclo.

  Ejemplitos ejemplificantes: 

  o así 

  Concluyendo, si el vértice v no forma parte del ciclo impar, es el que elegiría para sacar y así no perturbar el ciclo. Por lo tanto para cualquier $G(V, E)$ que no es bipartito y tampoco es un ciclo impar, va existir algún $v \in V$ para obtener un grafo $G(V \setminus \{v\}, E')$ tampoco bipartito. Fin.

($\Leftarrow$) Prueba directa de la vuelta:

Si $G(V, E)$ es bipartito o un ciclo impar entonces $G(V \setminus \{v\}, E')$ es bipartito $\forall v \in V$.

- Si $G(V, E)$ es bipartito, entonces no tiene un ciclo impar. Sacarle cualquier vértice v a G no debería formar ningún ciclo impar. Es así que $G(V \setminus \{v\}, E')$ es un grafo bipartito. Se cumple entonces la implicación. Fin.
- Si $G(V, E)$ es un ciclo impar puro. Sacarle un vértice v a un ciclo impar, rompería el ciclo formando un camino simple, lo cual siempre será bipartito. Fin.

Fin.

---

13. *Grafo conexo tiene dos vértices que no son de articulación*
Todo $G_n (n \geq 2)$ conexo tiene al menos dos vértices distintos v_1, v_2 tal que $G \setminus \{v_1\}$ y $G \setminus \{v_2\}$ son conexos.

Quiero probar que la proposición

$$p(n)\text{: } \textit{Todo } G(V, E) \textit{ con } |V| = n \textit{ conexo tiene al menos dos vértices distintos } v_1, v_2 \textit{ tal que } G \setminus \{v_1\} \textit{ y } G \setminus \{v_2\} \textit{ son conexos.}$$

es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Caso base:
Quiero probar que la proposición

$$p(2)\text{: } \textit{Todo } G(V, E) \textit{ con } |V| = 2 \textit{ conexo tiene al menos dos vértices distintos } v_1, v_2 \textit{ tal que } G \setminus \{v_1\} \textit{ y } G \setminus \{v_2\} \textit{ son conexos.}$$

es verdadera.
Dado que el un grafo de un solo vértice es trivialmente conexo la proposición $p(2)$ es verdadera.

Paso inductivo:
Asumo que para algún $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ la proposición

$$p(k): \overbrace{\textit{Todo } G(V,E) \textit{ con } |V| = k \textit{ conexo tiene al menos dos vértices distintos}}^{\textit{hipótesis inductiva}} \\ v_1, v_2 \textit{ tal que } G \setminus \{v_1\} \textit{ y } G \setminus \{v_2\} \textit{ son conexos.}$$

es verdadera. Quiero probar entonces que

$$p(k+1): \textit{Todo } G(V,E) \textit{ con } |V| = k+1 \textit{ conexo tiene al menos dos vértices} \\ \textit{distintos } v_1, v_2 \textit{ tal que } G \setminus \{v_1\} \textit{ y } G \setminus \{v_2\} \textit{ son conexos.}$$

también lo sea.
Partiendo de $G(V,E)$ con $|V| = k+1$ tengo estos casos

- Este es el caso fácil con viento a favor:

  Saco un v cualquiera y obtengo un subgrafo conexo, es decir un $G_1 = G(V \setminus \{v\}, E')$, y para otro vértice u obtendría otro subgrafo $G_2 = G(V \setminus \{u\}, E'')$. Probando así que un grafo conexo tiene por lo menos dos vértices que no son de articulación.

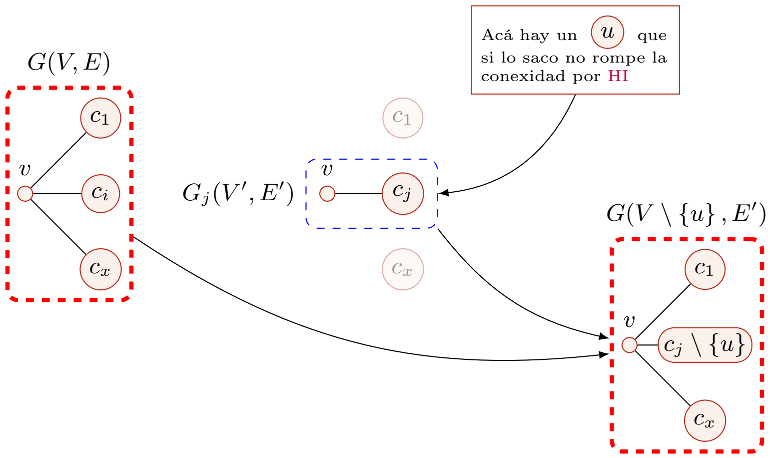
- Este es el caso más genérico sin viento a favor:

  Saco un v cualquiera de $G(V,E)$ y aparecen por lo menos 2 componenetes conexas $\{c_1, \ldots, c_i\}$, es decir que v es un vértice de articulación, *no lo puedo sacar para probar la proposición ¡Tengo que encontrar otros!*

  Armo un grafo para ver si puedo usar la hipótesis inductiva:

  Agarrando alguna de las componenetes conexas, c_j que aparecieron y reconectándola al v, formo un grafo $G_j(V', E')$ con $|V'| \geq 2$ que ¡Cumple la hipótesis inductiva!

  $G_j(V', E')$ tiene por lo menos 2 vértices $\{v, u, \ldots\}$, ese u (que no es v) lo agarro para sacárselo al G original:



  Aplicar el mismo razonamiento en otra de las componentes conexas serviría para encontrar un w (que no sería ni v ni u), así probando que hay por lo menos 2 vértices que puedo sacarle a un grafo conexo de $k+1$ vértices, de forma tal de armar 2 subgrafos conexos.

Dado que $p(2), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, también lo es $p(n) \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ por principio de inducción.

Fin.

14. *RepresentaGrafos*
Discutir (brevemente) las ventajas y desventajas en cuanto a la complejidad temporal y espacial de las siguientes implementaciones de un conjunto de vecindarios para un grafo G, de acuerdo a las siguientes operaciones:
Operaciones

a) Inicializar la estructura a partir de un conjunto de aristas de G.
b) Determinar si dos vértices v y w son adyacentes.
c) Recorrer y/o procesar el vecindario $N(v)$ de un vértice v dado.
d) Insertar un vértice v con su conjunto de vecinos $N(v)$.
e) Insertar una arista vw.
f) Remover un vértice v con todas sus adyacencias.
g) Remover una arista vw.
h) Mantener un orden de $N(v)$ de acuerdo a algún invariante que permita recorrer cada vecindario en un orden dado.

Estructuras de datos

a) N se representa con una secuencia (vector o lista) que en cada posición v tiene el conjunto $N(v)$ implementado sobre una secuencia (lista o vector). Cada vértice es una estructura que tiene un índice para acceder en $O(1)$ a $N(v)$. Esta representación se conoce comúnmente como *lista de adyacencias*.
b) Ídem anterior, pero cada $w \in N(v)$ se almacena junto con un índice a la posición que ocupa v en $N(w)$. Esta representación también se conoce como *lista de adyacencias*, pero tiene información para implementar operaciones dinámicas.
c) $N(v)$ se representa con un vector que en cada posición i tiene un vector booleano A_i con $|V(G)|$ posiciones tal que $A_i[j]$ es verdadero si y solo si i es adyacente a j. Esta representación se conoce comúnmente como *matriz de adyacencias*.
d) $N(v)$ se representa con un vector que en cada posición tiene el conjunto $N(v)$ implementado con una tabla de hash. Esta representación es un mix entre las representaciones clásicas de *matriz de adyacencias* y *lista de adyacencias*.

Hacer!

15. *Adyacencia Eficiente*
Demostrar que las representaciones por listas de adyacencias de un grafo (ejercicio anterior) se pueden construir en $O(n + m)$ tiempo. ¿Qué ocurre si se usa una tabla de hash? ¿Y si se construye una matriz de adyacencias?

Hacer!