REEKS 1

Los één oefening op van REEKS 1 en één oefening op van REEKS 2
Maak deze oefening volledig in een Jupiter notebook. Plaats ook commentaar van de stappen die je uitvoert.
Maak een grafische voorstelling van het probleem in Jupiter notebook.

1. Bepaal de snijpunten van de rechte *l* met de bol Σ als:
$$l \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge r \in \mathbb{R} \text{ en } \Sigma \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$$

2. Bepaal de snijpunten van de rechte *l* met de bol Σ als:
$$l \leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases} \text{ en } \Sigma \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$$

3. Bepaal de snijpunten van de rechte *l* met de bol Σ als:
$l \leftrightarrow x - 1 = y - 2 = 2 - z$ en $\Sigma \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 17$

4. Bepaal het middelpunt van de bol die door de punten *A, B, C* en *D* gaat. Bereken daarna ook de straal en de cartesiaanse vergelijking van die bol.
$A(-3,3,-4)$, $B(3,1,-2)$, $C(1,1,0)$ en $D(-5,5,-4)$

5. Bepaal de vergelijking van de bol die door de punten $A(-6,0,-1)$, $B(-2,7,4)$ en $C(6,3,-4)$ gaat en waarvan het middelpunt in het vlak $\alpha \leftrightarrow x - y + z - 6 = 0$ gelegen is.

REEKS 2

6. Gegeven is de bol $\Sigma \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
Bepaal de vergelijking van het raakvlak τ_P in het punt $P(2,-2,1)$ van Σ
Bepaal de parameter *k* zodat het punt $Q(0,0,k)$ tot het raakvlak τ_P behoort.
Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de raaklijn *PQ* aan Σ.

7. Bepaal de cartesiaanse vergelijkingen van de raakvlakken τ_A en τ_B aan de bol Σ in de snijpunten *A* en *B* van de rechte *l* met de bol Σ als:
$$l \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge r \in \mathbb{R} \text{ en } \Sigma \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$$

8. Bepaal de cartesiaanse vergelijkingen van de raakvlakken τ_A en τ_B aan de bol Σ in de snijpunten *A* en *B* van de rechte *l* met de bol Σ als:

$l \leftrightarrow \begin{cases} x-y-3=0 \\ x-y-z+3=0 \end{cases}$ en $\Sigma \leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$

9. Bepaal de cartesiaanse vergelijkingen van de raakvlakken τ_A en τ_B aan de bol Σ in de snijpunten A en B van de rechte l met de bol Σ als:
$l \leftrightarrow x-1=y-2=2-z$ en $\Sigma \leftrightarrow x^2+y^2+z^2=17$

10. Bepaal het middelpunt, de straal en vervolgens de vergelijking van het boloppervlak Σ waarvan de punten $A(3,2,2)$ en $B(-1,-2,4)$ tegenpunten zijn.
Bepaal de snijpunten van Σ met de rechte $l \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge r \in \mathbb{R}$.
Bepaal de vergelijkingen van de raakvlakken aan Σ in deze snijpunten.

11. Bepaal in de volgende gevallen de vergelijking van het boloppervlak Σ met gegeven middelpunt M en dat raakt aan het vlak π.
    a. $M(1,-1,2)$ $\quad\quad$ $\pi \leftrightarrow 3x-y+2z+6=0$
    b. $M(1,2,-1)$ $\quad\quad$ $\pi \leftrightarrow x+2y-2z=2$

12. Bepaal de vergelijking van de bol die raakt aan de coördinaatassen OE_1 en OE_2, waarvan het middelpunt behoort tot de rechte $l \leftrightarrow x-5=y-5=0$ en die het punt $P(0,5,24)$ bevat.

13. Gegeven is de bol $\Sigma \leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-35=0$. Bepaal de vergelijkingen van de raakvlakken aan deze bol die evenwijdig zijn met het vlak $\alpha \leftrightarrow 6x+3y-2z-5=0$.

14. Toon aan dat de rechte $a \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \wedge r \in \mathbb{R}$ raakt aan de bol $\Sigma \leftrightarrow x^2+y^2+z^2=81$ en bepaal het raakpunt.
Bereken de afstand van *a* tot $O(0,0,0)$.
Bepaal ook de afstand van de oorsprong tot de rechte $b \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} \wedge r \in \mathbb{R}$
Toon aan dat a en b in een vlak liggen en bepaal de vergelijking van dat vlak.
Hoe ligt dit vlak t.o.v. de bol $\Sigma \leftrightarrow x^2+y^2+z^2=81$?

15. Gegeven is de bol $\Sigma(M,r)$ en een punt P buiten Σ. Als PQ een raaklijn is aan Σ ($Q \in \Sigma$), toon dan aan dat PQ loodrecht staat op MQ. (Merk op dat PQ in het raakvlak aan Σ door Q ligt.)

Toon nu aan dat voor alle raaklijnen *PQ* uit *P* aan Σ ($Q \in \Sigma$) de afstand *d(P,Q)* dezelfde is.
Bewijs nu dat alle raakpunten *Q* van de raaklijnen uit *P* aan Σ op een cirkel liggen, raakcirkel van *P* genoemd (de punten *Q* liggen op twee bollen, dus …).
Als $\Sigma \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 225$, $P(0,0,25)$ en *PQ* een raaklijn is aan Σ ($Q \in \Sigma$), bereken dan de afstand $|PQ|$, het middelpunt van de raakcirkel van *P* en de straal van deze cirkel.

16. Het vlak $\alpha \leftrightarrow z = 6$ snijdt de bol $\Sigma \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 100$ volgens een cirkel met straal 8. Die cirkel is de raakcirkel van een punt *P* buiten Σ (cfr. Opgave 130). Bereken de coördinaten van dat punt *P*.

17. Van een kubus met ribbe 2 vallen drie ribben lans de positieve coördinaatassen.
De bol Σ_1 die door de acht hoekpunten van de kubus gaat wordt de omgeschreven bol van de kubus genoemd. Zoek de vergelijking van Σ_1.
De bol Σ_2 die de zes vlakken van de kubus raakt wordt de ingeschreven bol van de kubus genoemd. Zoek de vergelijking van Σ_2.
Zoek de vergelijking van Σ_3 die raakt aan de twaalf ribben van de kubus.

18. Gegeven is de kubus met bovenvlak *EFGH* en grondvlak *ABCD* met ribbe 6. Bereken de inhoud van de bol die door de punten *A, B, C* en *D* gaat en raakt aan het bovenvlak $vl(EFG)$.

19. Gegeven is de balk met bovenvlak *EFGH* en grondvlak *ABCD met* $A(6,0,0)$, $C(0,12,0)$ en $H(0,0,6)$. De middens van $[AB]$ en $[GH]$ zijn respectievelijk *P* en *Q*.
Bereken de inhoud van de piramide met *F* als Top en *PCQE* als grondvlak.
Bereken de inhoud van de bol die door de punten *P, B, C* en *F* gaat.

20. Gegeven zijn de punten $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$ en $B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.
Bepaal de coördinaten van het punt *C*, dat boven het *xy*-vlak ligt, zodat *OABC* een regelmatig viervlak is (een teraëder).
Bepaal de inhoud van dit viervlak.
Bepaal de stralen *R* en *r* van de omgeschreven en de ingeschreven bol van het viervlak.